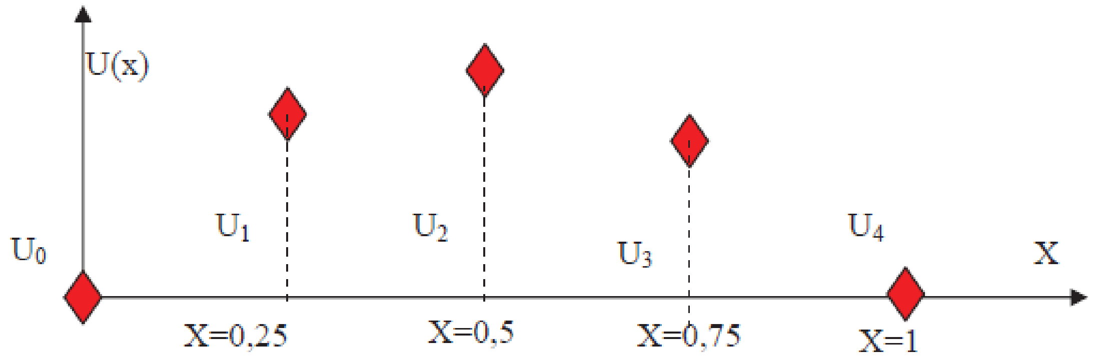
APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

Se busca *u(x)* solución de

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}+u(x)-x=0 \quad en \;\; \Omega=\{x\,\varepsilon\,R:0\le x\le 1\}$$
$$u(0)=0$$
$$u(1)=0$$

se plantea encontrar una ***solución aproximada en forma de función discreta***, sólo en algunos puntos elegidos del dominio Ω, equidistantes entre sí, identificados con su abscisa X_k.

Es decir, se busca ***$U(X_k)=U_k$*** con k=0,N; ***función discreta*** que es una aproximación de la función continua *u(x)*.



APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) - x = 0$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)[U_{k-1} - 2U_k + U_{k+1}]$$

Entonces en cada x_k se puede plantear la ecuación diferencial a resolver pero con una aproximación de la derivada segunda en forma de derivada numérica y nos quedaría

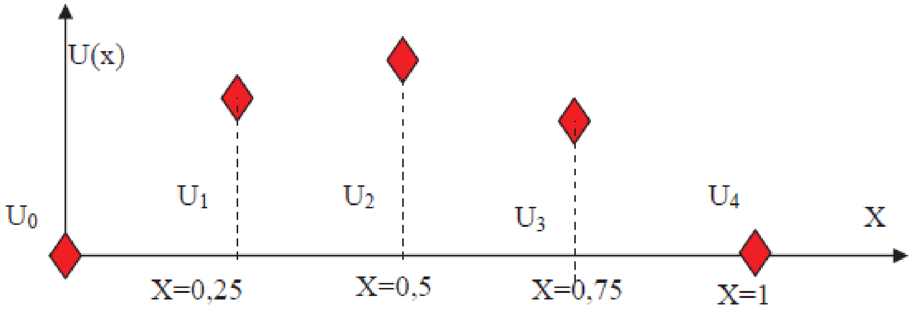
$$-\frac{1}{\Delta x^2}[U_{k-1} - 2U_k + U_{k+1}] + U_k - X_k = 0$$

APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}+u(x)-x=0 \quad en \;\; \Omega=\{x\,\varepsilon\, R:0\le x\le 1\}$$

$$u(0)=0$$

$$u(1)=0$$



Si se consideran 5 puntos en todo el dominio, que son 3 en el interior y uno en cada uno de los bordes, es posible plantear

en X_0 se debe cumplir que: $U_0=0$

en X_1 se debe cumplir que: $-\frac{1}{0{,}25^2}[U_0-2\cdot U_1+U_2]+U_1-X_1=0$

en X_2 se debe cumplir que: $-\frac{1}{0{,}25^2}[U_1-2\cdot U_2+U_3]+U_2-X_2=0$

$$-\frac{1}{\Delta x^2}[U_{k-1}-2U_k+U_{k+1}]+U_k-X_k=0$$

en X_3 se debe cumplir que: $-\frac{1}{0{,}25^2}[U_2-2\cdot U_3+U_4]+U_3-X_3=0$

en X_4 se debe cumplir que: $U_4=0$

O bien en forma de sistema de ecuaciones lineales

$$\left[\frac{1}{0{,}25^2}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}32+1&-16&0\\-16&32+1&-16\\0&-16&32+1\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0{,}25\\0{,}5\\0{,}75\end{Bmatrix}$$

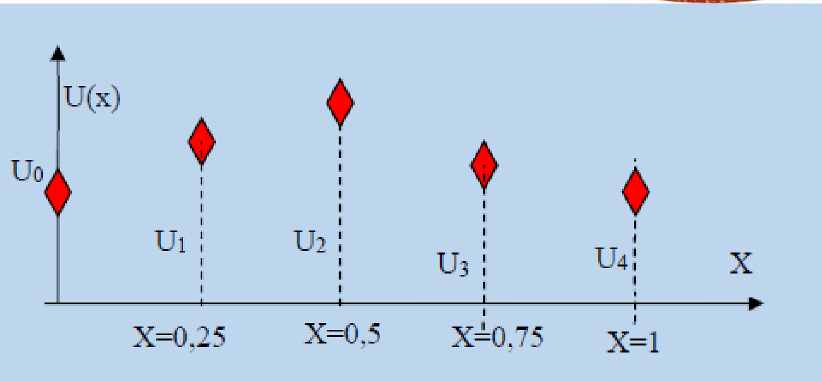
La solución aproximada resulta $\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0{,}03488525\\0{,}05632582\\0{,}05003676\end{Bmatrix}$

La solución exacta de la ecuación diferencial es $u_{(x)}=x-\frac{senh(x)}{senh(1)}$ ➡ $\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.0350476\\0.0565905\\0.0502758\end{Bmatrix}$

APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

Se busca u(x)solución de la EDO

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}+u(x)-x=0 \qquad \text{en } \Omega=\{x \epsilon R : 0\le x\le 1\}$$



Con las CB
$$\begin{cases} \dfrac{du(x)}{dx}=0 \quad en\ \ x=0 \\ u(1)=4 \quad en\ \ x=1 \end{cases}$$

se plantea encontrar una solución aproximada de u(x) en forma de función discreta $U(x_k)=U_k$ con k=0,N; sólo en los puntos equidistantes del dominio Ω, identificados con su abscisa x_k.

Por cada punto del dominio, donde se tiene como incógnita el valor de la función discreta, se plantea una ecuación algebraica considerando derivadas numéricas en la EDO a resolver y sus CB(condiciones de borde). Así por ejemplo:

En x=0 se tiene que $\frac{1}{2\Delta x}[-3U_0+4U_1-U_2]=0$

En cada unos de los punto x_k interiores del dominio se plantea la EDO $-\frac{1}{\Delta x^2}[U_{k-1}-2U_k+U_{k+1}]+U_k-X_k=0 \quad en\ los\ \ x_k\ \ interiores$

En x=1 se tiene que $U_N=4$

Resulta así un sistema algebraico de (N+1) ecuaciones con (N+1) incognita; que en este caso resulta de 4x4

APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

Entonces nos queda

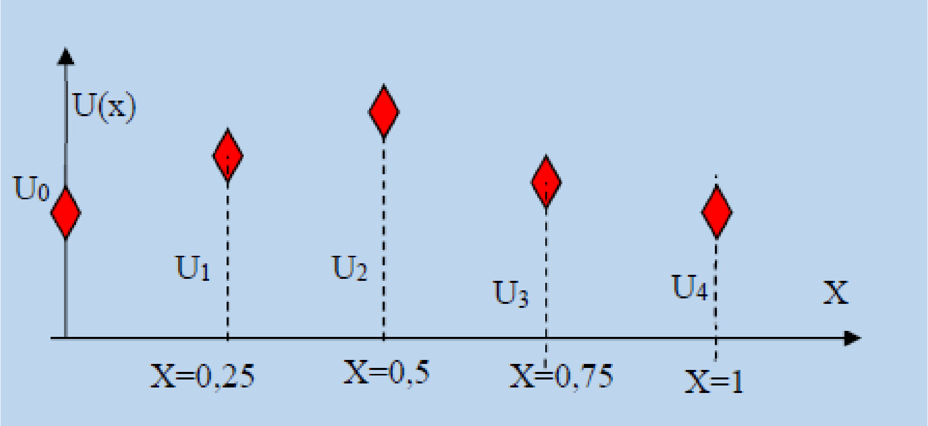
en x_0 $\quad\rightarrow\quad$ $\dfrac{1}{2x0.25}\left[-3U_0+4U_1-U_2\right]=0$

en x_1 $\quad\rightarrow\quad$ $-\dfrac{1}{0.25^2}\left[U_0-2U_1+U_2\right]+U_1-x_1=0$

en x_2 $\quad\rightarrow\quad$ $-\dfrac{1}{0.25^2}\left[U_1-2U_2+U_3\right]+U_2-x_2=0$

en x_3 $\quad\rightarrow\quad$ $-\dfrac{1}{0.25^2}\left[U_2-2U_3+U_4\right]+U_3-x_3=0$

en x_4 $\quad\rightarrow\quad$ $U_4=4$



Resultando en una SEL (sistema de ecuaciones lineales) a resolver

$$\begin{bmatrix} \frac{-3}{2x0.25} & \frac{4}{2x0.25} & \frac{-1}{2x0.25} & 0 \\ \frac{-1}{0.25^2} & \frac{2}{0.25^2}+1 & \frac{-1}{0.25^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{0.25^2} & \frac{2}{0.25^2}+1 & \frac{-1}{0.25^2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{0.25^2} & \frac{2}{0.25^2}+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3+\frac{4}{0.25^2} \end{Bmatrix}$$

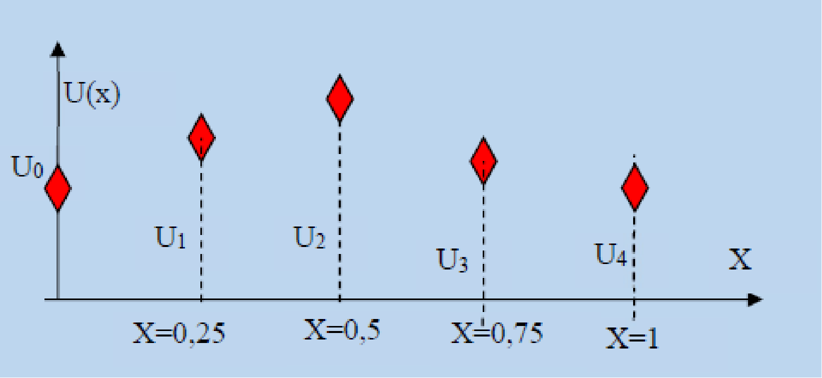
$$\begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.7187 \\ 2.7983 \\ 3.0372 \\ 3.4347 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

EJERCICIO: Se busca u(x)solución de la EDO

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) - x = 0 \qquad \text{en } \Omega = \{x \epsilon R : 0 \leq x \leq 1\}$$

Con las CB
$$\begin{cases} u(0) = 2 \quad en \;\; x = 0 \\ \dfrac{du(x)}{dx} = 1 \quad en \;\; x = 1 \end{cases}$$



Considerar una discretización en x como se muestra en la figura, es decir encontrar la solución en los 5 puntos.

Ayuda: la ecuación diferencial es igual a la que planteamos anteriormente sólo que ahora han cambiado las condiciones de borde del nuestro sistema.

APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

Entonces nos queda

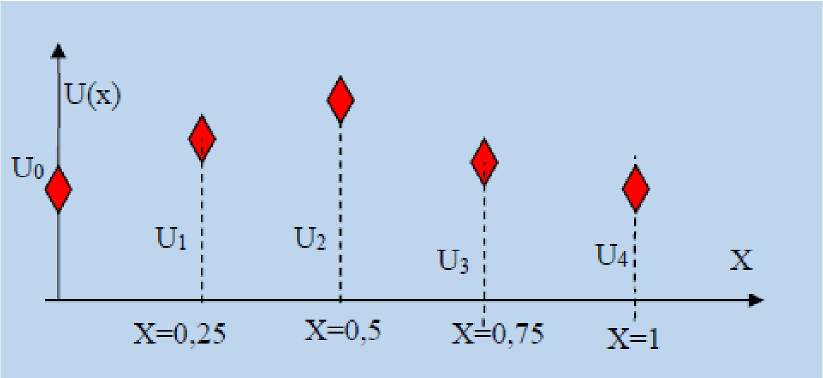
en $x_0 \quad \rightarrow \quad U_0=2$

en $x_1 \quad \rightarrow \quad -\dfrac{1}{0.25^2}[U_0 - 2U_1 + U_2] + U_1 - x_1 = 0$

en $x_2 \quad \rightarrow \quad -\dfrac{1}{0.25^2}[U_1 - 2U_2 + U_3] + U_2 - x_2 = 0$

en $x_3 \quad \rightarrow \quad -\dfrac{1}{0.25^2}[U_2 - 2U_3 + U_4] + U_3 - x_3 = 0$

en $x_4 \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{2x0.25}[3U_4 - 4U_3 + U_2] = 1$



Resultando en una SEL (sistema de ecuaciones lineales) a resolver

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{0.25^2}+1 & \frac{-1}{0.25^2} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{0.25^2} & \frac{2}{0.25^2}+1 & \frac{-1}{0.25^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{0.25^2} & \frac{2}{0.25^2}+1 & \frac{-1}{0.25^2} \\ 0 & \frac{1}{2x0.25} & \frac{-4}{2x0.25} & \frac{3}{2x0.25} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + \frac{2}{0.25^2} \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1.9284 \\ 1.9618 \\ 2.0864 \\ 2.2947 \end{Bmatrix}$$