Alumno (imprenta): Diego Combes Legajo: 14107

Fecha: 27/6/2023 Especialidad: Ind.

EVALUACIÓN FINAL

MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático para la "ecuación de la cuerda vibrante" expreso en EDP es

$-T\,\dfrac{\partial^2(u(x,t))}{\partial x^2} + m\,\dfrac{\partial^2(u(x,t))}{\partial t^2} = 0$ si $x \in \Omega = \{x \in R: 0 \le x \le L\}$	(1)

con $u(0,t) = 0$ $u(L,t) = 0$ y $u(x,0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = seno(\frac{\pi x}{L})$

La energía cinética para un instante t_k cualquiera es: $Cin(t_k) = \frac{m}{2}\int_0^L (v(x,t_k))^2 dx$; siendo la velocidad evaluada en t_k, que se calcula como $v(x,t_k) = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t_k}$

MODELO NUMÉRICO

Al plantear una solución aproximada dada por una función discreta de **7 puntos equidistantes** en el intervalo de [0; L], y usando derivada numérica central, se obtiene el siguiente modelo numérico,

$M\,\dfrac{d^2(\overrightarrow{z})}{dt^2} + K\,\vec{z} = \vec{0}$	(2)

Con valores iniciales en t=0 dados por $\overrightarrow{z_0} = \vec{0}$ y por $\overrightarrow{v_0} = \left.\frac{d\vec{z}}{dt}\right|_0 = [\frac{1}{2}\ \ \frac{\sqrt[2]{3}}{2}\ \ 1\ \ \frac{\sqrt[2]{3}}{2}\ \ \frac{1}{2}]^T$; y siendo

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$ y M es igual a 5 veces la matriz Identidad de 5x5; para L=60; T=100.

Al aplicar la **regla de trapecios compuesta** en la integral de la energía cinética, se tiene que

$C(t_k) = \displaystyle\int_0^L \left(v(x,t_k)\right)^2 dx = \frac{Dx}{2}\sum_{j=1}^{5} 2 * (\overrightarrow{v_k}(j))^2$	(3)

siendo $\overrightarrow{v_k}(j)$ las componentes del vector $\vec{v} = \frac{d\vec{z}}{dt}$ evaluadas en t_k.

(40) 4 (cuatro)

Alumno (imprenta): Diego Combes

Legajo: 14107

Fecha: 27/6/2023

Especialidad: Ind.

SOLUCIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

Al usar el **método de diferencia central** para resolver el sistema de EDO dado por (2), y la integral (3) con la **regla de trapecios compuesta**, se tienen las siguientes aproximaciones calculadas todas **en $t_k = 27$**

Dt	1.00	0.50	0.25
$C(Dt)$	29.989	29.974	29.969

Listo 1. **CALCULAR la tendencia de $C(Dt)$ cuando Dt tiende a cero, como medida de CONVERGENCIA GLOBAL de la solución numérica en t** → Listo

Para ello buscar la aproximación por mínimos cuadrados de la función

$$C(Dt) = \frac{1}{A + B \cdot (Dt)^2}$$

que es equivalente a considerar la aproximación de mínimos cuadrados de

$$y = \frac{1}{C(Dt)} = A + B \cdot (Dt)^2$$

Listo 2. **ELEGIR JUSTIFICADAMENTE** un Dt_e de modo que asegure un valor calculado para que $C(Dt_e)$ (en $t_k = 27$) que coincida con el valor de convergencia.

3. **PROGRAMAR en OCTAVE** el **método de Diferencia Central**, con el Dt_e elegido, y
   - Listo a) **GRAFICAR** en el intervalo [0; 50] la función u(L/2,t)=z3(t), componente 3 del vector $\vec{z}$ en función del tiempo t. −5 Error en Taylor
   - b) **CALCULAR** en $t_k = 27$ el valor de $C(Dt_e)$ y compararlo con el valor de convergencia
   - c) **BUSCAR para t>0, el primer intervalo $[t_k;\ t_{k+1}]$** en el cual exista un cero en z3(t) y la componente 3 del vector $\vec{v}$ sea positiva.
   - d) **ENCONTRAR y MOSTRAR, los valores de** t_k y t_{k+1}; y los respectivos vectores $\vec{z}$ y $\vec{v}$ en ambos extremos del intervalo.

EVALUACIÓN FINAL-LIBRE

Para el siguiente problema diferencial

$$-T\,\frac{\partial^2(u(x,t))}{\partial x^2} + m\,\frac{\partial^2(u(x,t))}{\partial t^2} = p \cdot f(x) \cdot g(t) \qquad \text{si} \qquad x \in \Omega = \{x \in R: 0 \le x \le L\}$$

con $\qquad u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0$

Considerar *u(x, t)* discreta en **7 puntos** equidistantes en todo el dominio de la variable *x*, usando reglas de derivada numérica con igual orden de error, y de tipo central toda vez que sea posible, **transformar** el problema diferencial en el siguiente modelo numérico

$$K\,\vec{z} + M\,\frac{d^2\vec{z}}{dt^2} = \vec{b} \tag{4}$$

Expresar los vectores $\vec{z}$, $\vec{b}$ y las matrices (K, M) del sistema (4)

Justificar la igualdad (3) en el problema anterior