DERIVACIÓN NUMÉRICA

Prof. Ing. Mauro Grioni

EXTRA INTEGRACIÓN NUMÉRICA

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y	1	7	4	3	5

```
function integral_simpson1
dx=0.1
 x=[0, 0.1, 0.2, 0.3 ,0.4]
  y=[1, 7, 4, 3 ,5]
  ul=length(x)
intimpar=0;
intpar=0;
for i=2:2:ul-1
  intimpar=intimpar+4*y(i);
endfor
intimpar
for i=3:2:ul-2
  intpar=intpar+2*y(i);
endfor
intpar
I=dx/3*(y(1)+intimpar+intpar+y(ul))

figure (1)
plot(x,y, 'r' )
endfunction
```

I=1.8

```
function metodo_directo
x=[0;0.1;0.2;0.3;0.4]
y=[1;7;4;3;5]
N=length(x);

fi=ones(N,N);
  for i=1:N
    for j=2:N
      fi(i,j)=x(i)^(j-1);
    endfor
  endfor
fi
a=fi\y
endfunction
```

```
a =

     1.0000
   166.6667
 -1458.3333
  4333.3333
 -4166.6667
```

$$P_n(x) = 1 + 166.7x - 1458.3x^2 + 4333.3x^3 - 4166.7x^4$$

$$I = \int_0^{0.4} P_n(x) = \int_0^{0.4} 1 + 166.7x - 1458.3x^2 + 4333.3x^3 - 4166.7x^4\, dx$$

$$I = \left[x + \frac{166.7}{2}x^2 - \frac{1458.3}{3}x^3 + \frac{4333.3}{4}x^4 - \frac{4166.7}{5}x^5\right]_0^{0.4}$$

I=1.82

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADA NUMÉRICA A PARTIR DE INTERPOLACIÓN

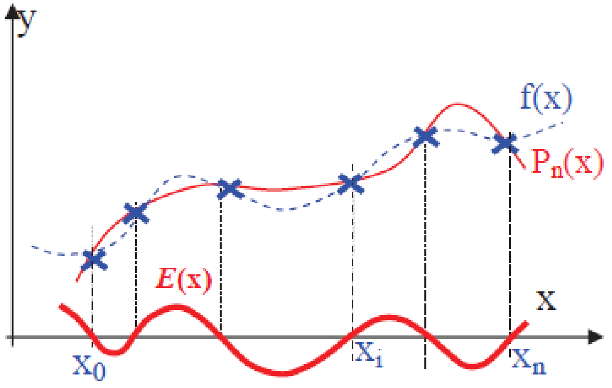
Si f(x) está dada en forma discreta es posible ***interpolar*** f(x) colocando un **polinomio $P_n(x)$,** de grado n, por los (n+1) puntos datos.

Si f(x) está dada en forma ***analítica*** se pueden *"extraer"* esos (n+1) puntos, para la versión discreta de la función f(x).

Es posible expresar:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots.(x-x_n)$$

suma del Polinomio de Interpolación mas la función Error de Interpolación.



Resulta posible

$$D = \left.\frac{d^n(f(x))}{dx^n}\right|_{Xj} = \sum_{k=0,N} c_k \cdot f(x_k) + E_n = \sum_{k=0,N} c_k \cdot y_k + E_n = \vec{c}^{\,T} \cdot \vec{y} + E_n$$

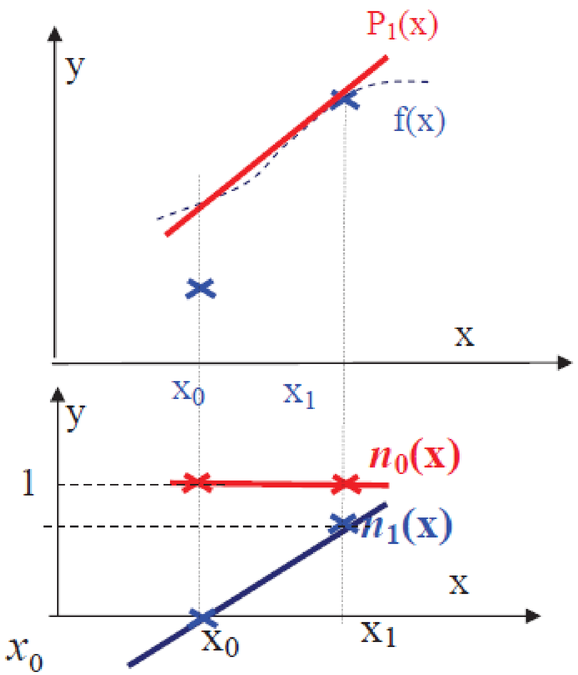
Donde los coeficientes c_k son valores particulares para cada regla de derivación y los $y_k=f(x_k)$ son los valores de la función discreta.

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADA PRIMERA A PARTIR DE INTERPOLACIÓN

Si f(x) está dada en forma discreta con 2 puntos $(x_0;y_0)$, $(x_1;y_1)$ es posible interpolar f(x) colocando un polinomio de grado 1, usando polinomios de Newton, en la forma:

$$f(x)\cdot = \overbrace{a_0 + a_1\cdot(x-x_0)}^{P_{(x)}} + \underbrace{\frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}(x-x_0)\cdot(x-x_1)}_{\text{Error}}$$



La derivada primera de f(x) es

$$\frac{d(f(x))}{dx} = a_1 + \frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}\cdot\frac{d((x-x_0)\cdot(x-x_1))}{dx}$$

$$\frac{d(f(x))}{dx} = a_1 + \frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}\cdot[(x-x_1)+(x-x_0)]$$

Cuando se evalúa la derivada primera de f(x) en x_0 y en x_1 se obtienen:

Derivada Primera Adelante

$$\left.\frac{d(f(x))}{dx}\right|_{X=X0} = a_1 + \frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}\cdot\Delta x \quad con \quad a_1 = \frac{y_1-y_0}{\Delta x} \quad y \quad \Delta x = x_1 - x_0$$

Derivada Primera Atrás

$$\left.\frac{d(f(x))}{dx}\right|_{X=X1} = a_1 + \frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}\cdot\Delta x \quad con \quad a_1 = \frac{y_1-y_0}{\Delta x} \quad y \quad \Delta x = x_1 - x_0$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADA SEGUNDA A PARTIR DE INTERPOLACIÓN

Si f(x) está dada en forma discreta con 3 puntos $(x_0;y_0)$, $(x_1;y_1)$ es posible interpolar f(x) colocando un polinomio de grado 2, usando polinomios de Newton, en la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{(3)!}(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

La derivada segunda de f(x) es

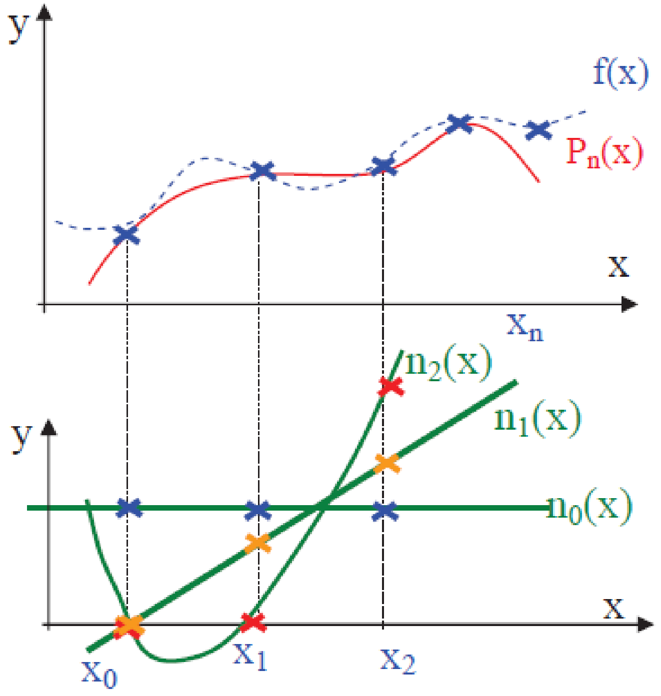
$$\frac{d^2(f(x))}{dx^2} = 2a_2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{(3)!} \cdot \frac{d^2((x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2))}{dx^2}$$

Con $2a_2 = 2\dfrac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = 2 \cdot \dfrac{1}{2\Delta x} \cdot \left(\dfrac{y_2 - y_1}{\Delta x} - \dfrac{y_1 - y_0}{\Delta x}\right)$

Con lo que la derivadas segunda es

$$\left.\frac{d^2(f(x))}{dx^2}\right| = \frac{1}{\Delta x^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) \quad + \quad E_D(x)$$

$$E_D(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{(3)!} \cdot \frac{d^2((x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2))}{dx^2}$$



DERIVACIÓN NUMÉRICA

x	5	7	9
y	5	-1	2

DERIVADA NUMÉRICA

$$D_1'' = \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)[y_0 - 2y_1 + y_2]$$

$$D''_{(x=7)} = \left(\frac{1}{2^2}\right)[5 - 2(-1) + 2]$$

$$D''_{(x=7)} = \left(\frac{1}{2^2}\right)[5 - 2(-1) + 2]$$

$$\boxed{D''_{(x=7)} = 2.25}$$

INTERPOLACIÓN Y DERIVACIÓN ANALÍTICA

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 9 & 81 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$a_0 = 59.375$$
$$a_1 = -16.5$$
$$a_2 = 1.125$$

$$P_n(x) = 59.375 - 16.5x + 1.125x^2$$

$$D' = -16.5 + 2.25x$$

$$D'' = 2.25$$

$$\boxed{D'' = 2.25}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADAS EN BASE A SERIE DE TAYLOR

La utilización de la serie de Taylor para el desarrollo de una función ***f(x)***, alrededor de un punto x_s, permite calcular en forma aproximada el valor de la función en un punto cercano $x = x_s + nh$; *"n"* es un número entero positivo o negativo.

$$f(x_s + nh) = f(x_s) + n\,h\,f'(x_s) + \frac{(nh)^2 f''(x_s)}{2!} + \frac{(nh)^3 f'''(x_s)}{3!} + \frac{(nh)^4 f^{iv}(x_s)}{4!} + O(h^5).$$

$n = -2$

$$f_{s-2} = f_s - 2h\,f_s' + \frac{4h^2}{2!} f_s'' - \frac{8h^3}{3!} f_s''' + \frac{16h^4}{4!} f_s^{iv} + O(h^5),$$

$n = -1$

$$f_{s-1} = f_s - h\,f_s' + \frac{h^2}{2!} f_s'' - \frac{h^3}{3!} f_s''' + \frac{h^4}{4!} f_s^{iv} + O(h^5),$$

$n = 0$

$$f_s = f_s,$$

$n = 1$

$$f_{s+1} = f_s + h\,f_s' + \frac{h^2}{2!} f_s'' + \frac{h^3}{3!} f_s''' + \frac{h^4}{4!} f_s^{iv} + O(h^5),$$

$n = 2$

$$f_{s+2} = f_s + 2h\,f_s' + \frac{4h^2}{2!} f_s'' + \frac{8h^3}{3!} f_s''' + \frac{16h^4}{4!} f_s^{iv} + O(h^5).$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADAS PRIMERA HACIA ADELANTE

Considerando el desarrollo en Serie de Taylor de la función en n=1 tenemos

$$n=1 \qquad f_{s+1} = f_s + h\,f_s' + \frac{h^2}{2!}f_s'' + \frac{h^3}{3!}f_s''' + \frac{h^4}{4!}f_s^{\,iv} + O(h^5),$$

Al quedarnos con los dos primeros términos nos queda el valor aproximado de la función

$$f_{s+1} = f_s + h\,f'_s + O(h^2),$$

De donde es posible despejar el valor de la derivada primera de la función en $x=x_s$

$$\boxed{f_s' = \frac{1}{h}\left[f_{s+1} - f_s\right] - O(h)}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADAS PRIMERA HACIA ATRÁS

Considerando el desarrollo en Serie de Taylor de la función en n=-1 tenemos

$$n = -1 \qquad f_{s-1} = f_s - h f_s' + \frac{h^2}{2!} f_s'' - \frac{h^3}{3!} f_s''' + \frac{h^4}{4!} f_s^{\,IV} + O\left(h^5\right),$$

Al quedarnos con los dos primeros términos nos queda el valor aproximado de la función

$$f_{s-1} = f_s - h f'_s + O(h^2)$$

De donde es posible despejar el valor de la derivada primera de la función en $x=x_s$

$$\boxed{f_s' = \frac{1}{h}[f_s - f_{s-1}] + O(h)}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADAS PRIMERA CENTRAL

Considerando el desarrollo en Serie de Taylor para n=1 y n=-1 tenemos

$$f_{s+1} = f_s + h\,f_s' + \frac{h^2}{2} f_s'' + \frac{h^3}{6} f_s''' + \cdots$$

$$f_{s-1} = f_s - h\,f_s' + \frac{h^2}{2} f_s'' - \frac{h^3}{6} f_s''' + \cdots$$

y restando miembro a miembro nos queda

$$f_{s+1} - f_{s-1} = 2h\,f_s' + \overbrace{2\frac{h^3}{6} f_s''' + \cdots}^{O(h^3)}$$

De donde es posible despejar el valor de la derivada primera de la función en x=x_s

$$\boxed{f_s' = \frac{[f_{s+1} - f_{s-1}]}{2h} + O(h^2)}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADAS PRIMERA ASIMÉTRICA ADELANTE

Considerando el desarrollo en Serie de Taylor para n=1 y n=2 tenemos

$$n=+1 \qquad f_{s+1}=f_s+h\,f_s'+\frac{h^2}{2}f_s''+\frac{h^3}{6}f_s'''+\frac{h^4}{24}f_s^{IV}+\frac{h^5}{120}f_s^{V}+\cdots$$

$$n=+2 \qquad f_{s+2}=f_s+2h\,f_s'+2h^2\,f_s''+\frac{4}{3}h^3\,f_s'''+\frac{2}{3}h^4 f_s^{IV}+\frac{4}{15}h^5 f_s^{V}+\cdots$$

Siguiendo los procedimientos de la Guía_teoría página 123 llegamos a

$$\boxed{f_s'=\left(\frac{1}{2h}\right)[-3f_s+4f_{s+1}-1f_{s+2}]+O(h^2)}$$

DERIVADAS PRIMERA ASIMÉTRICA ATRÁS

Considerando el desarrollo en Serie de Taylor para n=-1 y n=-2 y siguiendo la Guía_Teoría llegamos a

$$\boxed{f_s'=\left(\frac{1}{2h}\right)[3f_s-4f_{s-1}+1f_{s-2}]+O(h^2)}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADAS SEGUNDA CENTRAL

Considerando el desarrollo en Serie de Taylor para n=1 y n=-1 tenemos

$$f_{s+1} = f_s + h\,f_s' + \frac{h^2}{2} f_s'' + \frac{h^3}{6} f_s''' + \cdots$$

$$f_{s-1} = f_s - h\,f_s' + \frac{h^2}{2} f_s'' - \frac{h^3}{6} f_s''' + \cdots$$

y sumando miembro a miembro nos queda

$$f_{s+1} + f_{s-1} = 2f_s + h^2 f_s'' + \overbrace{\frac{h^4}{12} f_s''' + \cdots}^{O(h^4)}$$

De donde es posible despejar el valor de la derivada segunda de la función en $x=x_s$

$$\boxed{f_s'' = \frac{1}{h^2}\left[f_{s+1} - 2f_s + f_{s-1}\right] + O\left(h^2\right)}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADAS SEGUNDA ASIMÉTRICA ADELANTE

$$\boxed{f_s'' = \left(\frac{1}{h^2}\right)[2f_s - 5f_{s+1} + 4f_{s+2} - 1f_{s+3}] + O(h^2)}$$

DERIVADAS SEGUNDA ASIMÉTRICA ATRÁS

$$\boxed{f_s'' = \left(\frac{1}{h^2}\right)[2f_s - 5f_{s-1} + 4f_{s-2} - 1f_{s-3}] + O(h^2)}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

EJERCICIO: Obtener las derivadas segundas con el mismo orden de error de la función f(x)=cos($x\pi$) con paso h=0.1 en el intervalo [0:1].

Ayuda: hay que aplicar

$$f_s'' = \frac{1}{h^2}\left[f_{s+1} - 2f_s + f_{s-1}\right]$$

$$f_s'' = \left(\frac{1}{h^2}\right)\left[2f_s - 5f_{s+1} + 4f_{s+2} - 1f_{s+3}\right]$$

$$f_s'' = \left(\frac{1}{h^2}\right)\left[2f_s - 5f_{s-1} + 4f_{s-2} - 1f_{s-3}\right]$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

EJERCICIO: Obtener las derivadas segundas con el mismo orden de error de la función f(x)=cos($x\pi$) con paso h=0.1 en el intervalo [0:1]

```
function derivada_segunda
clc, clear
h=0.1                  % paso h
x=0:h:1;               % Discretización en x
N=length(x);           % determina la cantidad de puntos
y=cos(x*pi())          % Discretización en y
dy2(1)=(1/h^2)*(2*y(1)-5*y(2)+4*y(3)-1*y(4));  % Calculo de la derivada segunda asimetrica adelante
for i=2:N-1
  dy2(i)=(1/h^2)*(y(i-1)-2*y(i)+y(i+1));       % Calculo de la derivada segunda central
 end
 dy2(N)=(1/h^2)*(2*y(N)-5*y(N-1)+4*y(N-2)-1*y(N-3)); % Calculo de la derivada segunda asimetrica atrás

 dy2'      % Muestra la derivada segunda en forma traspuesta
 %Gráfico de la función coseno
 figure (1)
 plot(x,y,'r')
 %Gráfico de las dericada segunda
 figure (2)
 plot(x,dy2)
end
```

DERIVACIÓN NUMÉRICA

EJERCICIO: Escriba un algoritmo para obtener las derivadas primeras para la función dada en forma discreta considerando el mismo orden de error. Obtenga las derivadas primeras trabajando en forma matricial.

x	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
u	0	0.22	-2.05	-0.61	-0.80	-1

Ayuda: hay que aplicar

$$\boxed{f'_s = \frac{[f_{s+1} - f_{s-1}]}{2h} + O(h^2)}$$

$$\boxed{f'_s = \left(\frac{1}{2h}\right)[-3f_s + 4f_{s+1} - 1f_{s+2}] + O(h^2)}$$

$$\boxed{f'_s = \left(\frac{1}{2h}\right)[3f_s - 4f_{s-1} + 1f_{s-2}] + O(h^2)}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

EJERCICIO: Escriba un algoritmo para obtener las derivadas primeras para la función dada en forma discreta considerando el mismo orden de error. Obtenga las derivadas primeras trabajando en forma matricial.

x	**0**	**0.4**	**0.8**	**1.2**	**1.6**	**2.0**
u	**0**	**0.22**	**-2.05**	**-0.61**	**-0.80**	**-1**

```
function derivada_primera
clc, clear
N=6;
L=2;
h=L/(N-1);
x=0:h:L
y=[0 -0.22 -2.05 -0.61 -0.80 -1]
Der=derivada(y,h) %5
end
function deri=derivada(vector,paso)
N=length(vector); % para saber cuantos elementos tiene el vector
vector_columna(:,1)=vector %lo paso a columna
W=zeros(N,N);%armo la matriz de coef con ceros
W(1,1)=-3; W(1,2)=4; W(1,3)=-1; %reemplazo los valores de la 1° fila
W(N,N-2)=1; W(N,N-1)=-4; W(N,N)=3;%reemplazo los valores de la última fila
for i=2:N-1 %reemplazo los valores 2° hasta N-1
W(i,i-1)=-1; %izquierda de la diagonal
W(i,i+1)=1; %derecha de la diagonal
endfor
deri=1/(paso*2)*W*vector_columna;
end
```

$$f_s' = \left(\frac{1}{2h}\right)[f_{s+1} - f_{s-1}] + O(h^2)$$

$$f_s' = \left(\frac{1}{2h}\right)[-3f_s + 4f_{s+1} - 1f_{s+2}] + O(h^2)$$

$$f_s' = \left(\frac{1}{2h}\right)[3f_s - 4f_{s-1} + 1f_{s-2}] + O(h^2)$$

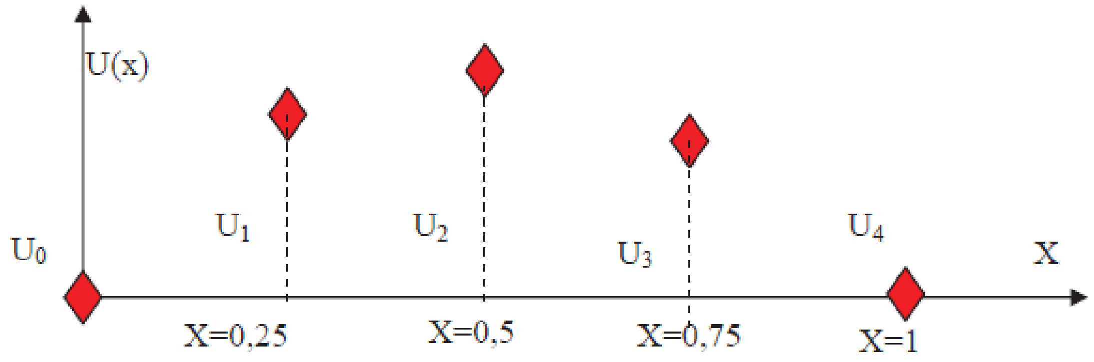
APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

Se busca *u(x)* solución de

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}+u(x)-x=0 \quad en \;\; \Omega=\{x\,\varepsilon\, R: 0\leq x\leq 1\}$$
$$u(0)=0$$
$$u(1)=0$$

se plantea encontrar una ***solución aproximada en forma de función discreta***, sólo en algunos puntos elegidos del dominio Ω, equidistantes entre sí, identificados con su abscisa X_k.

Es decir, se busca $U(X_k)=U_k$ con k=0,N; ***función discreta*** que es una aproximación de la función continua *u(x)*.



APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) - x = 0$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)[U_{k-1} - 2U_k + U_{k+1}]$$

Entonces en cada x_k se puede plantear la ecuación diferencial a resolver pero con una aproximación de la derivada segunda en forma de derivada numérica y nos quedaría

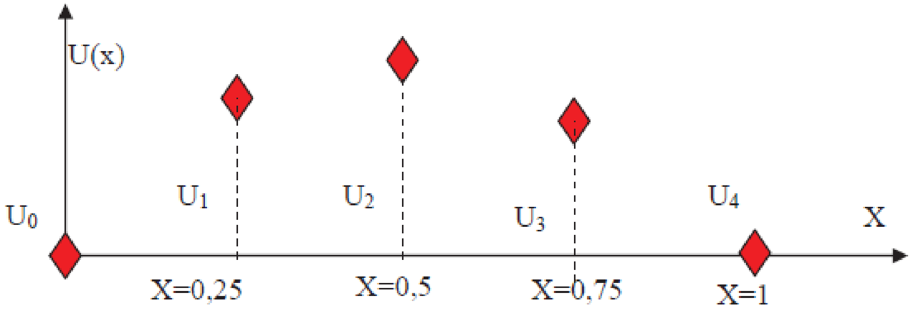
$$-\frac{1}{\Delta x^2}[U_{k-1} - 2U_k + U_{k+1}] + U_k - X_k = 0$$

APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}+u(x)-x=0 \quad en \;\; \Omega=\{x\,\varepsilon\,R:0\le x\le 1\}$$

$$u(0)=0$$

$$u(1)=0$$



Si se consideran 5 puntos en todo el dominio, que son 3 en el interior y uno en cada uno de los bordes, es posible plantear

en X_0 se debe cumplir que: $U_0=0$

en X_1 se debe cumplir que: $-\frac{1}{0{,}25^2}\left[U_0-2\cdot U_1+U_2\right]+U_1-X_1=0$

en X_2 se debe cumplir que: $-\frac{1}{0{,}25^2}\left[U_1-2\cdot U_2+U_3\right]+U_2-X_2=0$

en X_3 se debe cumplir que: $-\frac{1}{0{,}25^2}\left[U_2-2\cdot U_3+U_4\right]+U_3-X_3=0$

en X_4 se debe cumplir que: $U_4=0$

$$-\frac{1}{\Delta x^2}\left[U_{k-1}-2U_k+U_{k+1}\right]+U_k-X_k=0$$

O bien en forma de sistema de ecuaciones lineales

$$\left[\frac{1}{0{,}25^2}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}32+1 & -16 & 0\\ -16 & 32+1 & -16\\ 0 & -16 & 32+1\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0{,}25\\ 0{,}5\\ 0{,}75\end{Bmatrix}$$

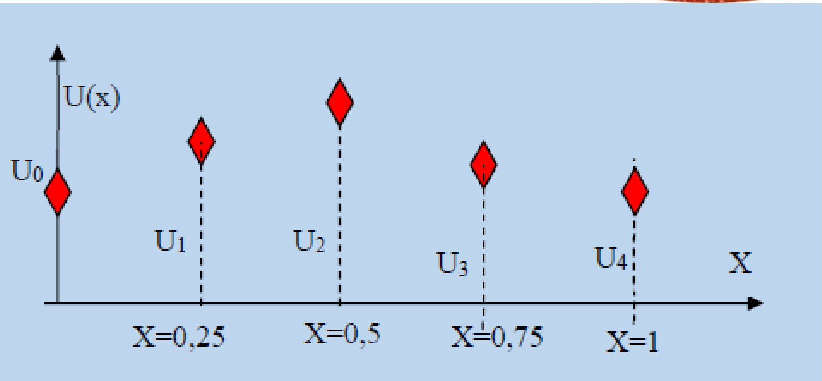
La solución aproximada resulta $\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0{,}03488525\\ 0{,}05632582\\ 0{,}05003676\end{Bmatrix}$

La solución exacta de la ecuación diferencial es $u_{(x)}=x-\frac{senh(x)}{senh(1)} \Rightarrow \begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.0350476\\ 0.0565905\\ 0.0502758\end{Bmatrix}$

APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

Se busca u(x)solución de la EDO

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}+u(x)-x=0 \qquad \text{en } \Omega=\{x\,\epsilon\,R : 0\le x\le 1\}$$



Con las CB
$$\begin{cases}\dfrac{du(x)}{dx}=0 & en\ \ x=0\\ u(1)=4 & en\ \ x=1\end{cases}$$

se plantea encontrar una solución aproximada de u(x) en forma de función discreta $U(x_k)=U_k$ con k=0,N; sólo en los puntos equidistantes del dominio Ω, identificados con su abscisa x_k.

Por cada punto del dominio, donde se tiene como incógnita el valor de la función discreta, se plantea una ecuación algebraica considerando derivadas numéricas en la EDO a resolver y sus CB(condiciones de borde). Así por ejemplo:

En x=0 se tiene que $$\frac{1}{2\Delta x}[-3U_0+4U_1-U_2]=0$$

En cada unos de los punto x_k interiores del dominio se plantea la EDO $$-\frac{1}{\Delta x^2}[U_{k-1}-2U_k+U_{k+1}]+U_k-X_k=0 \qquad en\ los\ \ x_k\ \ interiores$$

En x=1 se tiene que U_N =4

Resulta así un sistema algebraico de (N+1) ecuaciones con (N+1) incognita; que en este caso resulta de 4x4

APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

Entonces nos queda

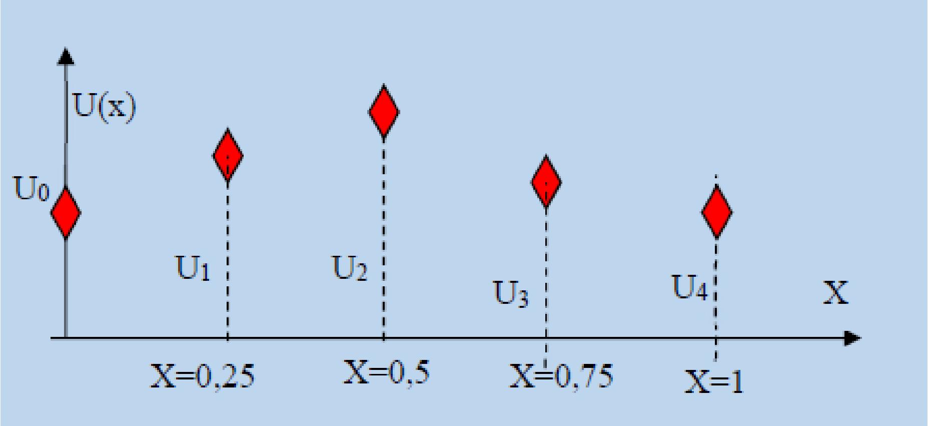
$$\text{en } x_0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2x0.25}[-3U_0 + 4U_1 - U_2] = 0$$

$$\text{en } x_1 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{0.25^2}[U_0 - 2U_1 + U_2] + U_1 - x_1 = 0$$

$$\text{en } x_2 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{0.25^2}[U_1 - 2U_2 + U_3] + U_2 - x_2 = 0$$

$$\text{en } x_3 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{0.25^2}[U_2 - 2U_3 + U_4] + U_3 - x_3 = 0$$

$$\text{en } x_4 \quad \rightarrow \quad U_4 = 4$$



Resultando en una SEL (sistema de ecuaciones lineales) a resolver

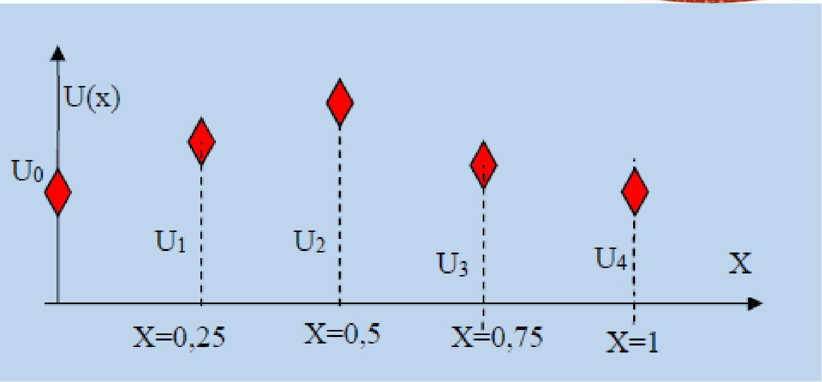
$$\begin{bmatrix} \frac{-3}{2x0.25} & \frac{4}{2x0.25} & \frac{-1}{2x0.25} & 0 \\ \frac{-1}{0.25^2} & \frac{2}{0.25^2}+1 & \frac{-1}{0.25^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{0.25^2} & \frac{2}{0.25^2}+1 & \frac{-1}{0.25^2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{0.25^2} & \frac{2}{0.25^2}+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 + \frac{4}{0.25^2} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.7187 \\ 2.7983 \\ 3.0372 \\ 3.4347 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

EJERCICIO: Se busca u(x)solución de la EDO

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) - x = 0 \qquad \text{en } \Omega = \{x \in R : 0 \le x \le 1\}$$

Con las CB
$$\begin{cases} u(0) = 2 \quad en \;\; x = 0 \\ \dfrac{du(x)}{dx} = 1 \quad en \;\; x = 1 \end{cases}$$

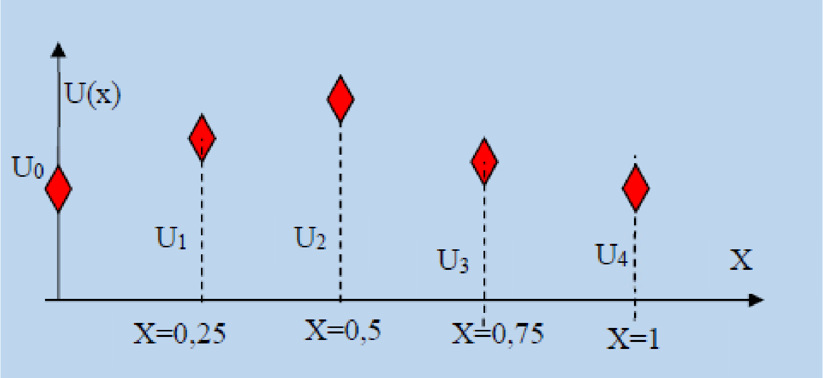


Considerar una discretización en x como se muestra en la figura, es decir encontrar la solución en los 5 puntos.

Ayuda: la ecuación diferencial es igual a la que planteamos anteriormente sólo que ahora han cambiado las condiciones de borde del nuestro sistema.

APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

Entonces nos queda



en x_0 $\rightarrow$ U_0=2

en x_1 $\rightarrow$ $-\frac{1}{0.25^2}[U_0 - 2U_1 + U_2] + U_1 - x_1 = 0$

en x_2 $\rightarrow$ $-\frac{1}{0.25^2}[U_1 - 2U_2 + U_3] + U_2 - x_2 = 0$

en x_3 $\rightarrow$ $-\frac{1}{0.25^2}[U_2 - 2U_3 + U_4] + U_3 - x_3 = 0$

en x_4 $\rightarrow$ $\frac{1}{2x0.25}[3U_4 - 4U_3 + U_2]$ =1

Resultando en una SEL (sistema de ecuaciones lineales) a resolver

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{0.25^2}+1 & \frac{-1}{0.25^2} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{0.25^2} & \frac{2}{0.25^2}+1 & \frac{-1}{0.25^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{0.25^2} & \frac{2}{0.25^2}+1 & \frac{-1}{0.25^2} \\ 0 & \frac{1}{2x0.25} & \frac{-4}{2x0.25} & \frac{3}{2x0.25} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + \frac{2}{0.25^2} \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1.9284 \\ 1.9618 \\ 2.0864 \\ 2.2947 \end{Bmatrix}$$

EJERCICIO INTEGRADOR

EJERCICIO: Dada una cuerda de longitud l=3 cuyo desplazamiento "u" se muestra en la tabla siguiente

x	**0**	**0.5**	**1**	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**
u	**167**	**176**	**201**	**241**	**291**	**347**	**400**

SE PIDE:

- **CALCULAR** $\frac{\partial u}{\partial x}$
- **CALCULAR** $I = \int_0^L 2\pi x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$

EJERCICIO INTEGRADOR

SOLUCIÓN

```
function derivada_integral1
clc, clear
N=7;
L=3;
h=L/(N-1);
x=0:h:L
y=[167 176 201 241 291 347 400]
% Derivada
dy(1)=1/(2*h)*(-3*y(1)+4*y(2)-1*y(3));
for i=2:N-1
  dy(i)=(1/(2*h))*(-y(i-1)+y(i+1));
end
 dy(N)=(1/(2*h))*(3*y(N)-4*y(N-1)+1*y(N-2));
 dy1=dy';
 dy1
% Integral
c(1)=2*pi()*x(1)*dy(1)^2/2
c(N)=2*pi()*x(N)*dy(N)^2/2;
sum=0;
for i=2:N-1
  sum=sum+(2*pi()*x(i)*dy(i)^2);
end
Int=h*(c(1)+sum+c(N))
end
```

$$I = h\left[\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_n}{2}\right]$$

Trapecios múltiples

$$\boxed{I=267164.18}$$