SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Prof. Ing. Mauro Grioni

REVISÍON-EDO DE PRIMER ORDEN-MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Teniendo en cuenta que

$$y' = f(x,y) \quad \text{con } y(x0) = y0$$

Se llega a la expresión más general del método de Runge-Kutta de 2° orden

$$Y_{m+1} = Y_m + h\left\{(1-\omega)f(x_m,Y_m) + \omega f\left[\left(x_m + \frac{h}{2\omega}\right),\left(Y_m + \frac{h}{2\omega}f(x_m,Y_m)\right)\right]\right\}$$

Una forma tradicional de expresar el método de Runge-Kutta se presenta a continuación

$$k_1 = h\,f(x_m,y_m)$$

$$x_G = x_m + \frac{h}{2w}$$

$$y_G = y_m + \frac{k_1}{2w}$$

$w = 1/2$ entonces obtenemos el método de Euler Mejorado

$w = 1$ entonces obtenemos el método de Euler Modificado

$$k_2 = h\,f\left(x_m + \frac{h}{2w}, y_m + \frac{h}{2w}f(x_m,y_m)\right) = hf\left(x_m + \frac{h}{2w}, y_m + \frac{k_1}{2w}\right) = hf(x_G,y_G)$$

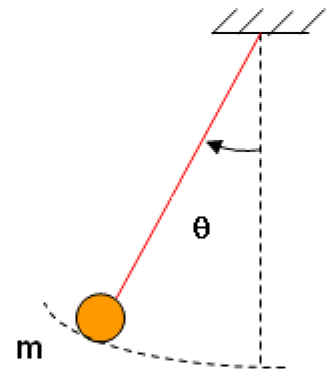
$$Y_{m+1} = Y_m + (1-w)k_1 + wk_2 \qquad x_{m+1} = x_m + h$$

REDUCCIÓN A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

EDO de segundo orden del péndulo simple,

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0 \qquad con \qquad \theta(t_0) = \theta_0$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \beta_0 \quad en \;\; t = t_0$$

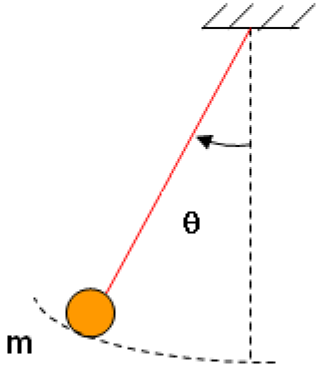


REDUCCIÓN A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

EDO de segundo orden del péndulo simple,

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0 \qquad con \qquad \theta(t_0) = \theta_0$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \beta_0 \quad en \;\; t = t_0$$



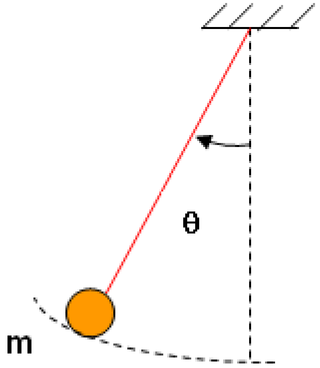
Si se plantea un cambio de variables tal que

$$y1(t) = \theta(t) \qquad entonces \qquad \dot{y}1(t) = \dot{\theta}(t) = y2(t)$$

$$y2(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \qquad entonces \qquad \dot{y}2(t) = \ddot{\theta}(t) = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta(t)$$

REDUCCIÓN A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

EDO de segundo orden del péndulo simple,



$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0 \qquad con \qquad \theta(t_0) = \theta_0$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \beta_0 \quad en \;\; t = t_0$$

Si se plantea un cambio de variables tal que

$$y1(t) = \theta(t) \qquad entonces \qquad \dot{y}1(t) = \dot{\theta}(t) = y2(t)$$

$y1(t)$

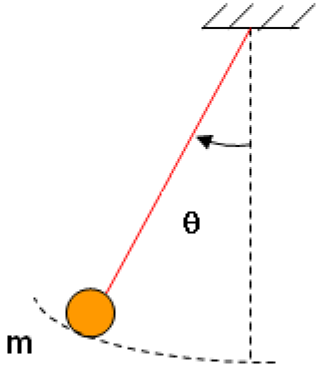
$$y2(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \qquad entonces \qquad \dot{y}2(t) = \ddot{\theta}(t) = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta(t)$$

$$\dot{y}1(t) = 0 \cdot y1(t) + 1 \cdot y2(t)$$

$$\dot{y}2(t) = -\frac{g}{L} \cdot y1(t) + 0 \cdot y2(t)$$

REDUCCIÓN A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

EDO de segundo orden del péndulo simple,



$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0 \qquad con \qquad \theta(t_0) = \theta_0$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \beta_0 \quad en \;\; t = t_0$$

Si se plantea un cambio de variables tal que

$$y1(t) = \theta(t) \qquad entonces \qquad \dot{y}1(t) = \dot{\theta}(t) = y2(t)$$

$y1(t)$

$$y2(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \qquad entonces \qquad \dot{y}2(t) = \ddot{\theta}(t) = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta(t)$$

$$\dot{y}1(t) = 0 \cdot y1(t) + 1 \cdot y2(t)$$

$$\dot{y}2(t) = -\frac{g}{L} \cdot y1(t) + 0 \cdot y2(t)$$

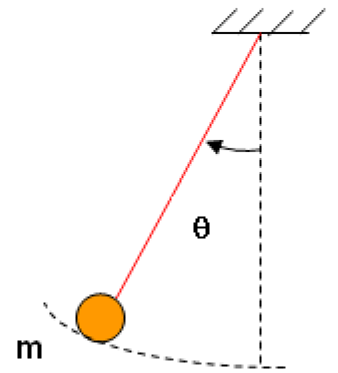
$$\dot{y}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{y}1(t) \\ \dot{y}2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y1 \\ y2 \end{Bmatrix} \qquad con \;\; y(0) = \begin{Bmatrix} y1(0) \\ y2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{(0)} \\ \dot{\theta}_{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ \beta_0 \end{Bmatrix}$$

REDUCCIÓN A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

EDO de segundo orden del péndulo simple,

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0 \qquad con \qquad \theta(t_0) = \theta_0$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \beta_0 \quad en \;\; t = t_0$$



Si se plantea un cambio de variables tal que

$$y1(t) = \theta(t) \qquad entonces \qquad \dot{y}1(t) = \dot{\theta}(t) = y2(t)$$

$$y2(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \qquad entonces \qquad \dot{y}2(t) = \ddot{\theta}(t) = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta(t)$$

$y1(t)$

$$\dot{y}1(t) = 0 \cdot y1(t) + 1 \cdot y2(t)$$

$$\dot{y}2(t) = -\frac{g}{L} \cdot y1(t) + 0 \cdot y2(t)$$

$$\boxed{\dot{y}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{y}1(t) \\ \dot{y}2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y1 \\ y2 \end{Bmatrix} \qquad con \;\; y(0) = \begin{Bmatrix} y1(0) \\ y2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{(0)} \\ \dot{\theta}_{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ \beta_0 \end{Bmatrix}}$$

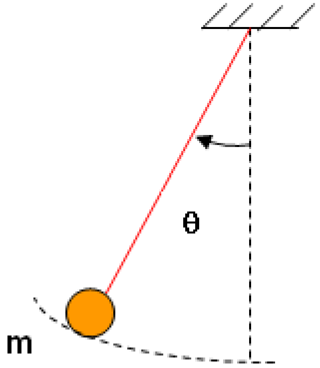
SISTEMA EDO A RESOLVER

REDUCCIÓN A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

SOLUCIÓN: Consideramos L=1, g=9.8 con condiciones iniciales en t_0

$$\begin{cases} \theta(t_0) = 0 \\ \dfrac{d\theta(t)}{dt} = 2 \end{cases}$$

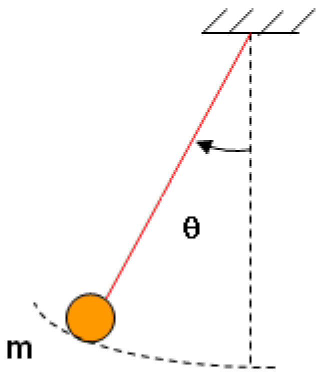
```
function RK_pendulo
y1=0;
y2=2;
t0=0;
dt=0.01;
t=0:dt:10;
Ndt=length(t);
y=zeros(2,Ndt);
y(1,1)=y1;
y(2,1)=y2;
t(1)=0;
A=[0 1;-9.8/1 0];
w=1;
for i=1:Ndt-1
  ya=y(:,i);
  K1=dt*(A*ya);
 %  tg=t(i)+dt/(2*w);
    yg=ya+K1/(2*w);
  K2=dt*(A*yg);
  y(:,i+1)=ya+(1-w)*K1+w*K2;
endfor
figure (1)
plot (t, y(1,:), 'r')

figure (2)
plot (t, y(2,:), 'r')
endfunction
```



REDUCCIÓN A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

SOLUCIÓN: Consideramos L=1, g=9.8 con condiciones iniciales en t_0

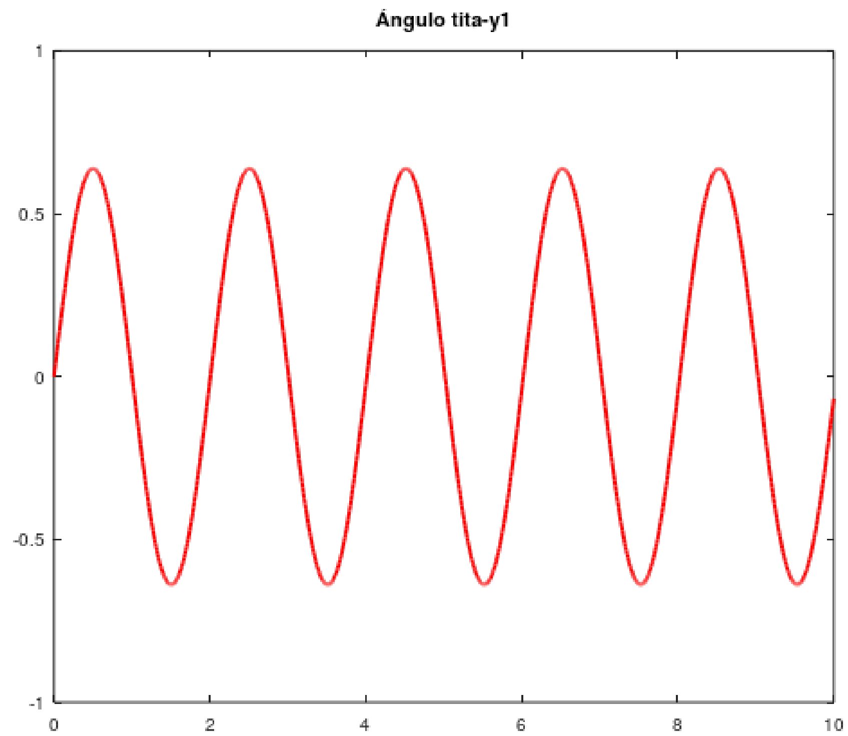
$$\begin{cases} \theta(t_0) = 0 \\ \dfrac{d\theta(t)}{dt} = 2 \end{cases}$$

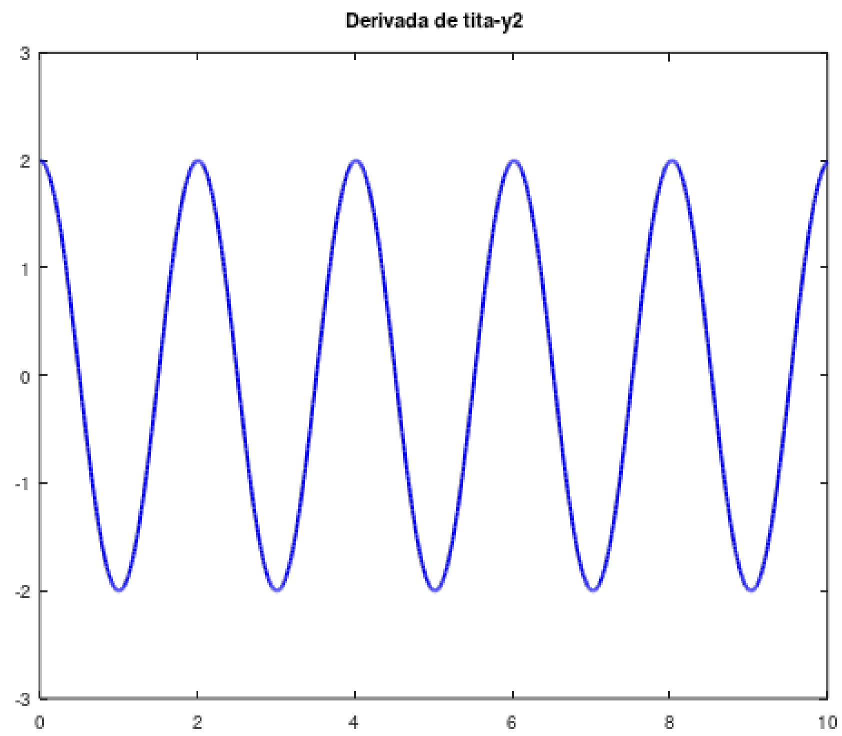



```
function RK_pendulo
y1=0;
y2=2;
t0=0;
dt=0.01;
t=0:dt:10;
Ndt=length(t);
y=zeros(2,Ndt);
y(1,1)=y1;
y(2,1)=y2;
t(1)=0;
A=[0 1;-9.8/1 0];
w=1;
for i=1:Ndt-1
  ya=y(:,i);
  K1=dt*(A*ya);
 %   tg=t(i)+dt/(2*w);
    yg=ya+K1/(2*w);
  K2=dt*(A*yg);
  y(:,i+1)=ya+(1-w)*K1+w*K2;
endfor
figure (1)
plot (t, y(1,:), 'r')

figure (2)
plot (t, y(2,:), 'r')
endfunction
```

Periodo de oscilación para pequeñas oscilaciones :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$





EJERCICIO 1: SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

EJERCICIO

La ecuación diferencial de una masa m unida a un resorte de constante elástica k con una carga sinusoidal con la una frecuencia de excitación ω, viene dada por:

$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2} + k\,u(t) = p\;sen\;(\omega t) \qquad con \qquad u(t_0) = u_0$$

$$\frac{du(t)}{dt} = v_0 \;\; en \;\; t = t_0$$

donde $u(t)$ es la posición de la masa m, u_0 la posición inicial y v_0 la velocidad inicial.

Para resolver esta ecuación diferencial tenemos que transformar la ecuación de segundo orden en un sistema de primer orden.

EJERCICIO 1: SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

REDUCCIÓN DE ORDEN

$$m\,\ddot{u}_{(t)} + k\,u_{(t)} = p\,sen\,(\omega t) \qquad con \qquad u_{(t0)} = u_0$$

$$\dot{u}_{(t)} = v_0 \quad en \;\; t = t_0$$

EJERCICIO 1: SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

REDUCCIÓN DE ORDEN

$$m\,\ddot{u}_{(t)} + k\,u_{(t)} = p\,sen\,(\omega t) \quad con \quad u_{(t0)} = u_0$$

$$\dot{u}_{(t)} = v_0 \quad en \quad t = t_0$$

$$y1 = u_{(t)} \qquad entonces \qquad \dot{y}1 = \dot{u}_{(t)} = y2$$

$$y2 = \dot{u}_{(t)} \qquad entonces \qquad \dot{y}2 = \ddot{u}_{(t)} = \frac{p}{m} sen\,(\omega t) - \frac{k}{m} u_{(t)}$$

EJERCICIO 1: SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

REDUCCIÓN DE ORDEN $m\, \ddot{u}_{(t)} + k\, u_{(t)} = p\, sen\, (\omega t) \quad con \quad u_{(t0)} = u_0$

$$\dot{u}_{(t)} = v_0 \quad en \quad t = t_0$$

$$y1 = u_{(t)} \qquad entonces \qquad \dot{y}1 = \dot{u}_{(t)} = y2$$

$y1$

$$y2 = \dot{u}_{(t)} \qquad entonces \qquad \dot{y}2 = \ddot{u}_{(t)} = \frac{p}{m} sen\, (\omega t) - \frac{k}{m} u_{(t)}$$

EJERCICIO 1: SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

REDUCCIÓN DE ORDEN

$$m\,\ddot{u}_{(t)} + k\,u_{(t)} = p\,sen\,(\omega t) \qquad con \qquad u_{(t0)} = u_0$$

$$\dot{u}_{(t)} = v_0 \quad en \;\; t = t_0$$

$$y1 = u_{(t)} \qquad entonces \qquad \dot{y}1 = \dot{u}_{(t)} = y2$$

$y1$

$$y2 = \dot{u}_{(t)} \qquad entonces \qquad \dot{y}2 = \ddot{u}_{(t)} = \frac{p}{m} sen\,(\omega t) - \frac{k}{m} u_{(t)}$$

$$\dot{y} = \begin{Bmatrix} \dot{y}1 \\ \dot{y}2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}}_{K} \begin{Bmatrix} y1 \\ y2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{p}{m} sen\,(\omega t) \end{Bmatrix}}_{b} \qquad con \;\; y(0) = \begin{Bmatrix} y1(0) \\ y2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{(0)} \\ \dot{u}_{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix}$$

EJERCICIO 1: SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

REDUCCIÓN DE ORDEN

$$m\,\ddot{u}_{(t)} + k\,u_{(t)} = p\,sen\,(\omega t) \qquad con \qquad u_{(t0)} = u_0$$

$$\dot{u}_{(t)} = v_0 \quad en \quad t = t_0$$

$$y1 = u_{(t)} \qquad entonces \qquad \dot{y}1 = \dot{u}_{(t)} = y2$$

$$y2 = \dot{u}_{(t)} \qquad entonces \qquad \dot{y}2 = \ddot{u}_{(t)} = \frac{p}{m}sen\,(\omega t) - \frac{k}{m}u_{(t)}$$

$y1$

$$\dot{y} = \begin{Bmatrix} \dot{y}1 \\ \dot{y}2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}}_{K} \begin{Bmatrix} y1 \\ y2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{p}{m}sen\,(\omega t) \end{Bmatrix}}_{b} \qquad con \;\; y(0) = \begin{Bmatrix} y1(0) \\ y2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{(0)} \\ \dot{u}_{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix}$$

Entonces ahora tenemos que resolver este sistema de primer orden utilizando el método de Runge-Kutta de la forma

$$\dot{y} = K\,y + b$$

Los datos son: $m = 65;\; k = 400;\; p = 80;\;\; \omega = 5;\, u_0 = v_0 = 0;\; \Delta t = 0.01 \quad [0 \leq t \leq 30]$

EJERCICIO 1: SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

MÉTODO RUNGE-KUTTA EN OCTAVE

```
function RK_masaresorte
 %Datos del problema
 m=65;
 k=400;
 p=80;
 omega=5
 u0=0;
 v0=0;
 K=[0 1; -k/m 0]    %armado de la Matriz K
 y0=[u0;v0]         % condición inicial del vector solución
 dt=0.01             % paso de tiempo
 t=0:0.01:30;        % discretización temporal
 Ndt=length(t)       % cantidad de puntos
 y=zeros(2,Ndt);     % matriz solución y(t)
 y(:,1)=y0;      % asignarle a todas las filas de la primer columna de la matriz solución la condición inicial
 w=1;            % Método de Euler Modificado
  for i=1:Ndt-1
    ya=y(:,i);       % solución actual
    b=[0;p/m*sin(omega*t(i))];
    k1=dt*(K*ya+b);   %obtenemos el vector k1
    tg=t(i)+dt/(2*w); % punto nuevo para t entre t(i) y t(i+1)
    yg=ya+k1/(2*w);   % solución intermedia de y
    b=[0;p/m*sin(omega*tg)];  % término del vector b para el nuevo tg
    k2=dt*(K*yg+b);   %obtenemos el vector k1
    y(:,i+1)=ya+(1-w)*k1+w*k2;  % Nueva solución para y
  end
 % Gráficos
 figure (1)
 plot(t, y(1,:), 'r')
 figure (2)
 plot(y(1,:), y(2,:) , 'r')
endfunction
```

Método de Runge-Kutta de segundo orden:

$$k_1 = h\, f(x_m, y_m)$$

$$x_G = x_m + \frac{h}{2w}$$

$$y_G = y_m + \frac{k_1}{2w}$$

$$k_2 = hf(x_G, y_G)$$

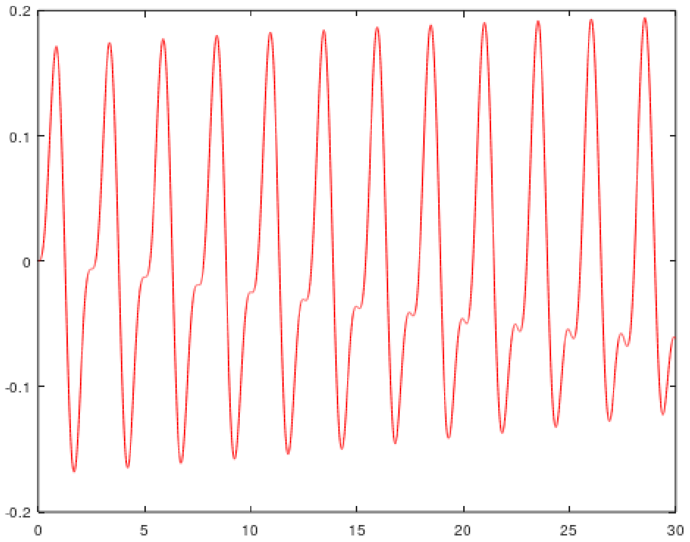
$$Y_{m+1} = Y_m + (1-w)k_1 + wk_2$$

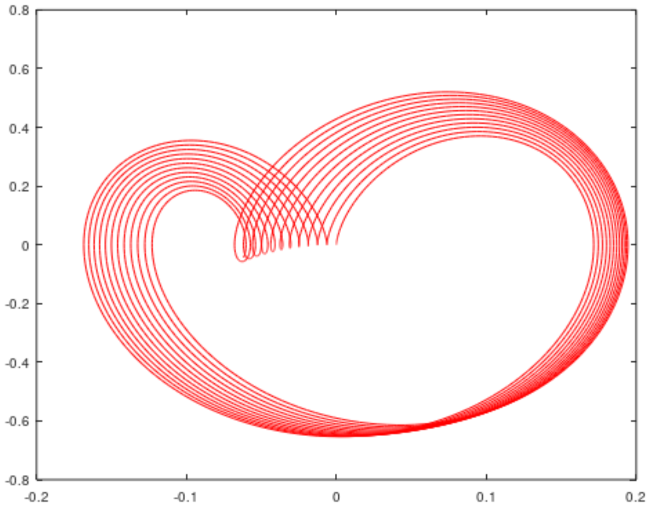
$$x_{m+1} = x_m + h$$

EJERCICIO 1: SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

MÉTODO RUNGE-KUTTA EN OCTAVE

Solución obtenida





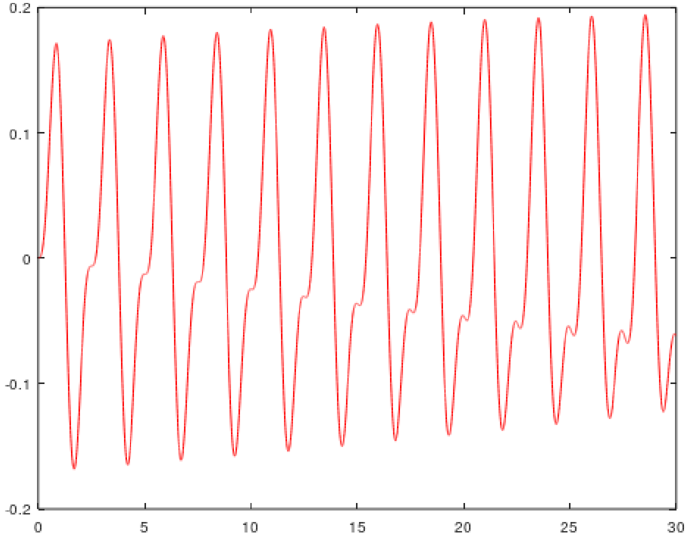

```
function RK_masaresorte
 %Datos del problema
 m=65;
 k=400;
 p=80;
 omega=5
 u0=0;
 v0=0;
 K=[0 1; -k/m 0]    %armado de la Matriz K
 y0=[u0;v0]         % condición inicial del vector s
 dt=0.01             % paso de tiempo
 t=0:0.01:30;        % discretización temporal
 Ndt=length(t)       % cantidad de puntos
 y=zeros(2,Ndt);     % matriz solución y(t)
 y(:,1)=y0;     % asignarle a todas las filas de la primer columna de la matriz solución la condición inicial
 w=1;           % Método de Euler Modificado
  for i=1:Ndt-1
    ya=y(:,i);       % solución actual
    b=[0;p/m*sin(omega*t(i))];
    k1=dt*(K*ya+b);   %obtenemos el vector k1
    tg=t(i)+dt/(2*w); % punto nuevo para t entre t(i) y t(i+1)
    yg=ya+k1/(2*w);   % solución intermedia de y
    b=[0;p/m*sin(omega*tg)];  % término del vector b para el nuevo tg
    k2=dt*(K*yg+b);   %obtenemos el vector k1
    y(:,i+1)=ya+(1-w)*k1+w*k2;  % Nueva solución para y
  end
 % Gráficos
 figure (1)
 plot(t, y(1,:), 'r')
 figure (2)
 plot(y(1,:), y(2,:) , 'r')
endfunction
```

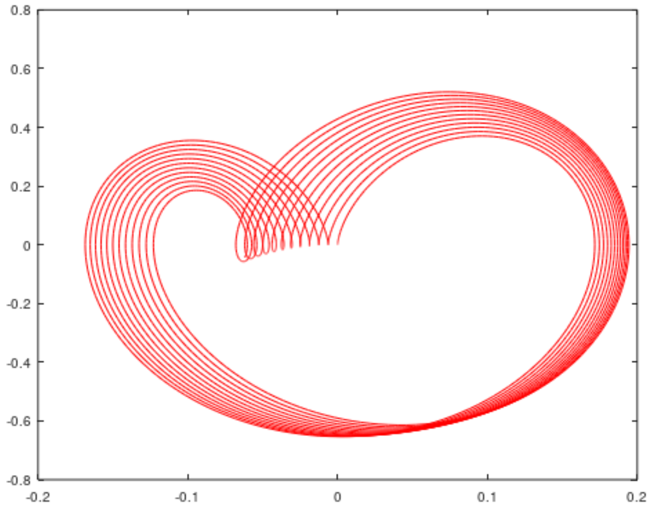
EJERCICIO 1: SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

MÉTODO RUNGE-KUTTA EN OCTAVE

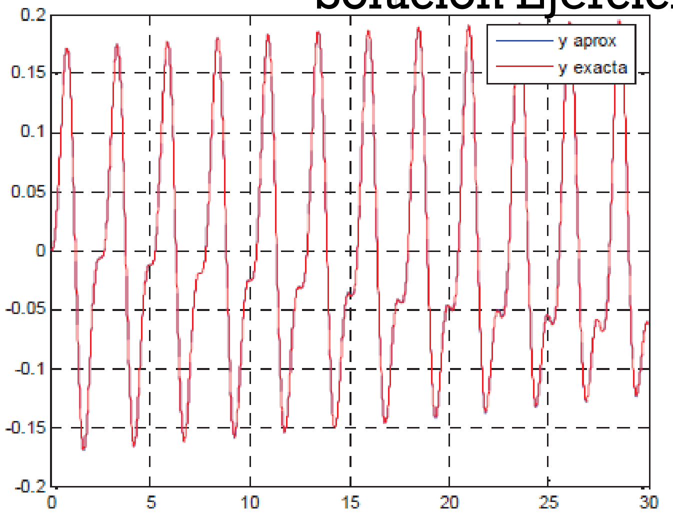
```
function RK_masaresorte
 %Datos del problema
 m=65;
 k=400;
 p=80;
 omega=5
 u0=0;
 v0=0;
 K=[0 1; -k/m 0]    %armado de la Matriz K
 y0=[u0;v0]         % condición inicial del vector s
 dt=0.01             % paso de tiempo
 t=0:0.01:30;        % discretización temporal
 Ndt=length(t)       % cantidad de puntos
 y=zeros(2,Ndt);     % matriz solución y(t)
 y(:,1)=y0;      % asignarle a todas las filas de la primer columna de la matriz solución la condición inicial
 w=1;            % Método de Euler Modificado
  for i=1:Ndt-1
    ya=y(:,i);       % solución actual
    b=[0;p/m*sin(omega*t(i))];
    k1=dt*(K*ya+b);    %obtenemos el vector k1
    tg=t(i)+dt/(2*w); % punto nuevo para t entre t(i) y
    yg=ya+k1/(2*w);    % solución intermedia de y
    b=[0;p/m*sin(omega*tg)];  % término del vector b pa
    k2=dt*(K*yg+b);    %obtenemos el vector k1
    y(:,i+1)=ya+(1-w)*k1+w*k2;  % Nueva solución para y
  end
 % Gráficos
 figure (1)
 plot(t, y(1,:), 'r')
 figure (2)
 plot(y(1,:), y(2,:) , 'r')
endfunction
```

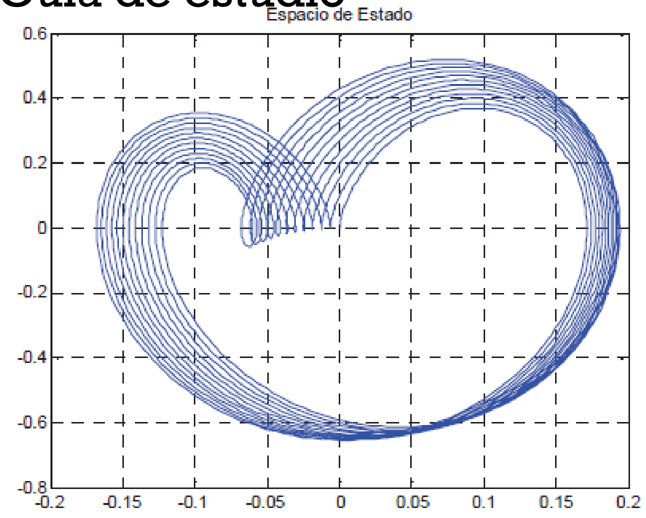
Solución obtenida





Solución Ejercicio 13 Guía de estudio





ECUACIONES DIFERENCIALES A DERIVADAS PARCIALES

PLANTEO DEL PROBLEMA

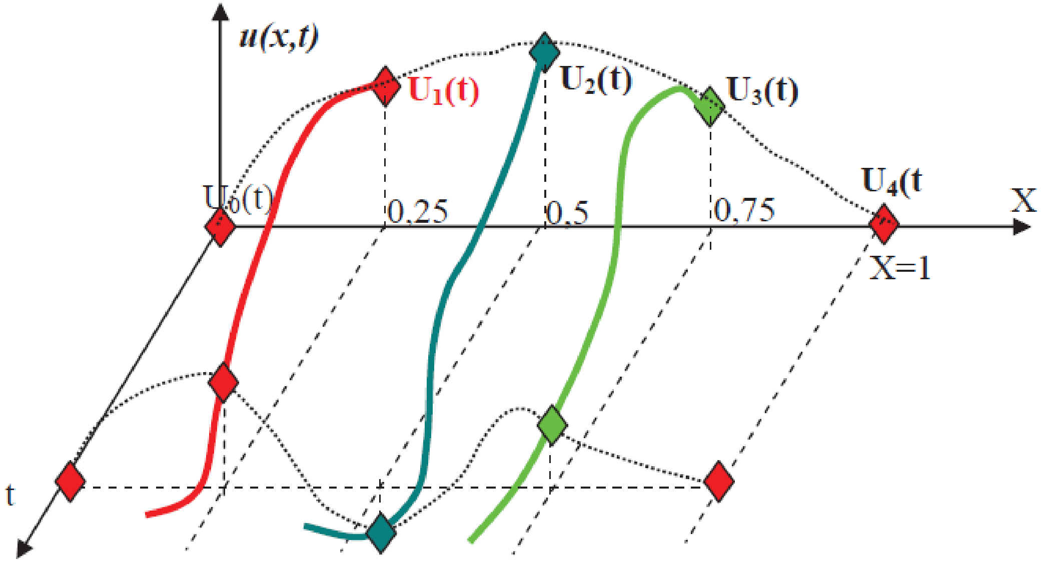
Se busca *u(x,t)* solución de

$$-12\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0 \quad en \;\; \Omega=\{x\,\varepsilon\, R:0\leq x\leq 1\}$$

$$u(0,t)=0 \qquad\qquad u(x,0)=\sin(\pi\cdot x)$$

$$u(1,t)=0 \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=3$$

En vez de encontrar la solución exacta *u(x,t)* en cada uno y todos los puntos del dominio Ω, se plantea encontrar una ***solución aproximada en forma de función discreta en la variable x, aunque continua en la variable t***. Se pretende encontrar las funciones $U_k(t)=u(X_k,t)$ con k=0,N, en N+1 puntos elegidos del dominio x, identificados con su abscisa X_k.



ECUACIONES DIFERENCIALES A DERIVADAS PARCIALES

DISCRETIZACIÓN EN X

En cada uno de los X_k se puede plantear la ecuación diferencial a resolver pero con una aproximación de la derivada segunda respecto a x en forma de derivada numérica; y con la derivada respecto de la variable t en forma analítica evaluada en esa abscisa X_k.

Así se puede escribir:

en X_0 se debe cumplir que: $$U_0(t) = 0$$

en X_1 se debe cumplir que: $$-\frac{12}{0{,}25^2}\left[U_0(t) - 2 \cdot U_1(t) + U_2(t)\right] + (X_1)^2 \cdot \frac{d^2U_1(t)}{dt^2} = 0$$

en X_2 se debe cumplir que: $$-\frac{12}{0{,}25^2}\left[U_1(t) - 2 \cdot U_2(t) + U_3(t)\right] + (X_2)^2 \cdot \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} = 0$$

en X_3 se debe cumplir que: $$-\frac{12}{0{,}25^2}\left[U_2(t) - 2 \cdot U_3(t) + U_4(t)\right] + (X_3)^2 \cdot \frac{d^2U_3(t)}{dt^2} = 0$$

en X_4 se debe cumplir que: $$U_4(t) = 0$$

SISTEMA EDO DE 2 ORDEN

$$\frac{12}{0{,}25^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}25^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}50^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}75^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{d^2U_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2U_3(t)}{dt^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

con las condiciones iniciales $\begin{Bmatrix} U_1(0) \\ U_2(0) \\ U_3(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} sen(\pi \cdot 0{,}25) \\ sen(\pi \cdot 0{,}50) \\ sen(\pi \cdot 0{,}75) \end{Bmatrix}$ y $\begin{Bmatrix} \frac{dU_1}{dt}(0) \\ \frac{dU_2}{dt}(0) \\ \frac{dU_3}{dt}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$

ECUACIONES DIFERENCIALES A DERIVADAS PARCIALES

REDUCCIÓN DE ORDEN

$$\underbrace{\frac{12}{0{,}25^2}}_{c}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{K}\underbrace{\begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \end{Bmatrix}}_{U_{(t)}}+\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}25^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}50^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}75^2 \end{bmatrix}}_{M}\underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{d^2U_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2U_3(t)}{dt^2} \end{Bmatrix}}_{\ddot{U}_{(t)}}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$U_{(t)}$$

$y1$

$$y1 = U_{(t)} \qquad entonces \qquad \dot{y}1 = \dot{U}_{(t)} = y2$$

$$y2 = \dot{U}_{(t)} \qquad entonces \qquad \dot{y}2 = \ddot{U}_{(t)} = -M^{-1}cKU_{(t)}$$

$$\dot{y} = \begin{Bmatrix} \dot{U}_{1(t)} \\ \dot{U}_{2(t)} \\ \dot{U}_{3(t)} \\ \ddot{U}_{1(t)} \\ \ddot{U}_{2(t)} \\ \ddot{U}_{3(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & [-M^{-1}cK] & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_{1(t)} \\ U_{2(t)} \\ U_{3(t)} \\ \dot{U}_{1(t)} \\ \dot{U}_{2(t)} \\ \dot{U}_{3(t)} \end{Bmatrix}$$

$$\dot{y} = \begin{Bmatrix} \dot{y}1 \\ \dot{y}2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}cK & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y1 \\ y2 \end{Bmatrix}$$

$$y1(0) = \begin{Bmatrix} sen\ (0.25\pi) \\ sen\ (0.5\pi) \\ sen\ (0.75\pi) \end{Bmatrix} \qquad y2(0) = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES A DERIVADAS PARCIALES

PROGRAMACIÓN EN OCTAVE

```
function RK_sistema
  M=[0.25^2 0 0; 0 0.5^2 0; 0 0 0.75^2]    % Matriz M de 3x3
  k=[2 -1 0; -1 2 -1; 0 -1 2]      % Matriz k de 3x3
  c=12/0.25^2;     % constante c
  A=zeros(3,3);    % Matriz de 3x3 con todos ceros
  B=eye(3);        % Matriz identidad de 3x3
  P=-inv(M)*c*k;   % Matriz de 3x3
  K=[A,B;P,A]      % Matriz formada por matriz A, B, P y A
  y0=[sin(pi*0.25); sin(pi*0.5);sin(pi*0.75);3;3;3]    % Vector solución inicial
  dt=0.01          % paso de tiempo
  t=0:0.01:1;      % disretización temporal
  Ndt=length(t)    % cantidad de puntos
  y(:,1)=y0;       % asigna a todas las filas de la primer columna de la matriz solución la condición inicial
  w=0.5;           % Método de Euler Mejorado
  for i=1:Ndt-1
    ya=y(:,i);     % solución actual
    k1=dt*K*ya;    %obtenemos el vector k1
    tg=t(i)+dt/(2*w);  % punto nuevo para t entre t(i) y t(i+1)
    yg=ya+k1/(2*w);  % solución intermedia de y
    k2=dt*K*yg;     %obtenemos el vector k2
    y(:,i+1)=ya+(1-w)*k1+w*k2;  % Nueva solución para y
   end
   % Graficos
   plot(t, y(1,:), 'r', t, y(2,:),'b', t,y(3,:),'g')
  endfunction
```

ECUACIONES DIFERENCIALES A DERIVADAS PARCIALES

PROGRAMACIÓN EN OCTAVE

```
function RK_sistema
  M=[0.25^2 0 0; 0 0.5^2 0; 0 0 0.75^2]    % Matriz M de 3x3
  k=[2 -1 0; -1 2 -1; 0 -1 2]      % Matriz k de 3x3
  c=12/0.25^2;     % constante c
  A=zeros(3,3);    % Matriz de 3x3 con todos ceros
  B=eye(3);        % Matriz identidad de 3x3
  P=-inv(M)*c*k;   % Matriz de 3x3
  K=[A,B;P,A]      % Matriz formada por matriz A, B, P y A
  y0=[sin(pi*0.25); sin(pi*0.5);sin(pi*0.75);3;3;3]    % Vector solución ini
  dt=0.01          % paso de tiempo
  t=0:0.01:1;      % disretización temporal
  Ndt=length(t)    % cantidad de puntos
  y(:,1)=y0;       % asigna a todas las filas de la primer columna de la mat
  w=0.5;           % Método de Euler Mejorado
  for i=1:Ndt-1
    ya=y(:,i);     % solución actual
    k1=dt*K*ya;    %obtenemos el vector k1
    tg=t(i)+dt/(2*w);  % punto nuevo para t entre t(i) y t(i+1)
    yg=ya+k1/(2*w);  % solución intermedia de y
    k2=dt*K*yg;     %obtenemos el vector k2
    y(:,i+1)=ya+(1-w)*k1+w*k2;  % Nueva solución para y
   end
   % Graficos
   plot(t, y(1,:), 'r', t, y(2,:),'b', t,y(3,:),'g')
  endfunction
```