INTERPOLACIÓN

Prof. Ing. Mauro Grioni

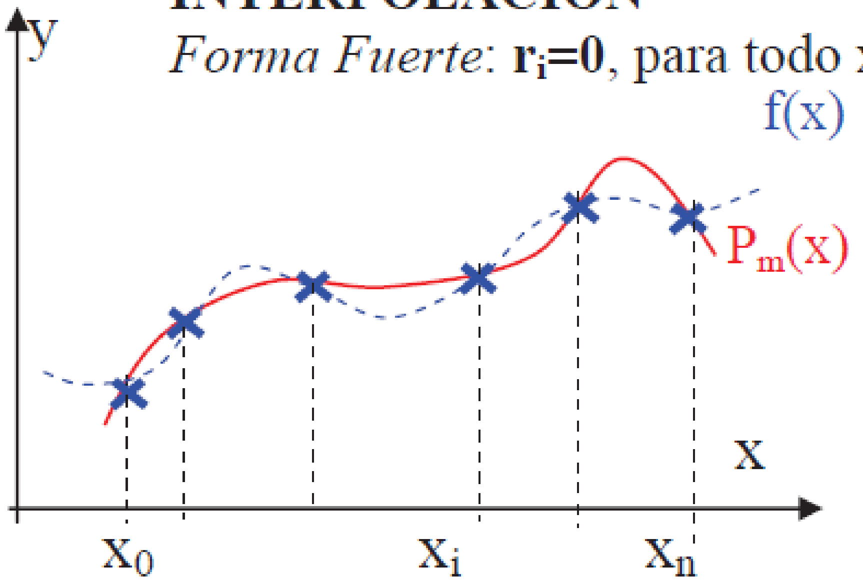
INTRODUCCIÓN

Dada una **función discreta**, **y=f(x)** de R $\rightarrow$ R
definida mediante **(n+1) puntos** $(x_i; y_i=f(x_i))$ con **i=0,n**.
Se propone $P_m(x) = \Sigma\, a_k\, \phi_k(x)$ con k=0,m.
Donde a_k son las incógnitas; y $\{\phi_k(x)\}$ es una **Base elegida**

Se define: **Residuo** $r_i = f(x_i) - P_m(x_i)$ con k=0,m; i=0,n

$$r_i = y_i - \Sigma\, a_k\, \phi_k(x_i)$$

INTERPOLACIÓN
Forma Fuerte: $r_i=0$, para todo x_i



$$\begin{Bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_m(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \dots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_m(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \dots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

MÉTODO DIRECTO

Dada una **función discreta**, y=f(x) de R → R definida mediante **(n+1) puntos** $(x_i; y_i=f(x_i))$ con i=0,n.

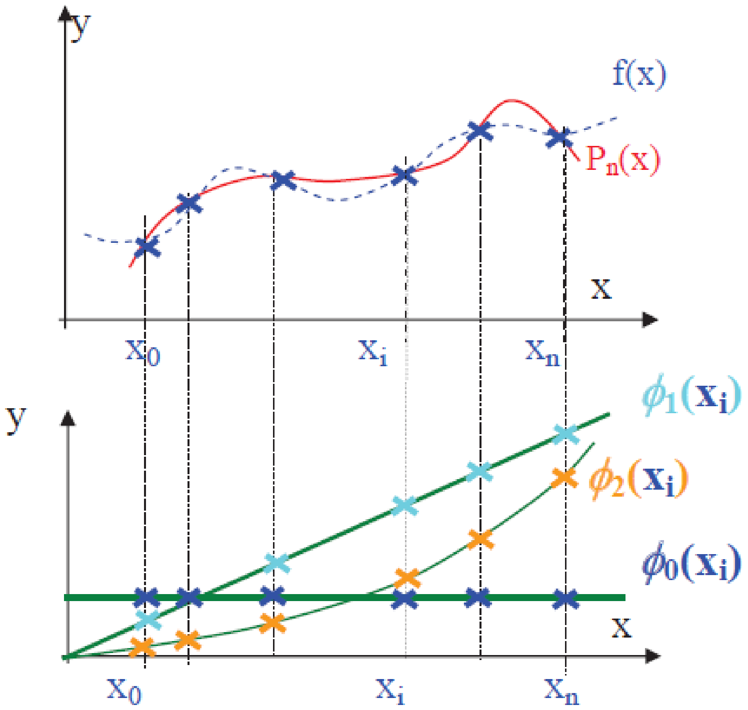
Se adopta como $\boxed{\text{Base} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\ldots, x^n\}}$

Se propone $P_n(x) = \Sigma\,(a_k\ x^k)$ con k=0,n

Se determinan los a_k tales que **el Residuo sea nulo**, es decir

$$\begin{Bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \ldots \\ r_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \ldots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \ldots & \phi_m(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \ldots & \phi_m(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \ldots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{r} = \underline{y} - \Phi \cdot \underline{a} = \underline{0}$$



Que resulta en el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

para que sea Solución Única; m=n y todos x distintos!!!!!

Resulta el polinomio interpolante $\boxed{P_n(x) = \Sigma\,(a_k\ x^k) \quad \text{con } k=0,n}$

MÉTODO DIRECTO

EJERCICIO

x	3	7	9
y	5	-1	2

MÉTODO DIRECTO

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

x	3	7	9
y	5	-1	2

$$\begin{Bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 9 & 81 \end{Bmatrix}$$

MÉTODO DIRECTO

x	3	7	9
y	5	-1	2

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & .... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & .... & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & .... & x_2^n \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ 1 & x_n & x_n^2 & .... & x_n^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 9 & 81 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

MÉTODO DIRECTO

x	3	7	9
y	5	-1	2

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 9 & 81 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

MÉTODO DIRECTO

x	3	7	9
y	5	-1	2

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 9 & 81 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_0 &= 20 \\ a_1 &= -6.5 \\ a_2 &= 0.5 \end{aligned}$$

$$P_n(x) = 20 + (-6.5)x + 0.5x^2$$

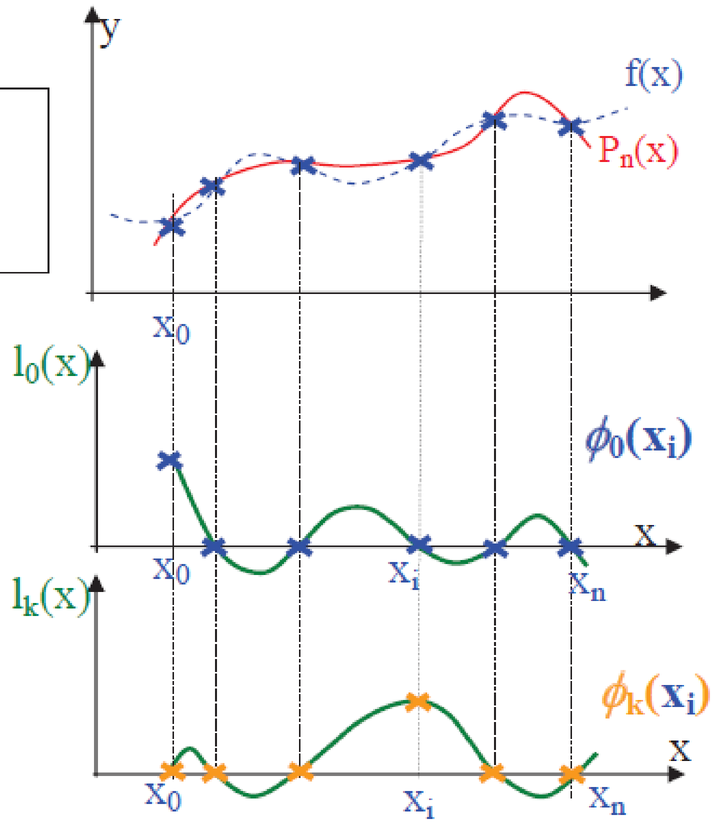
MÉTODO LAGRANGE

Dada una **función discreta**, y=f(x) de R → R definida mediante **(n+1) puntos (x_i; $y_i=f(x_i)$)** con i=0,n.

Se adopta como $\boxed{\text{Base} = \{l_0(x),\ l_1(x),\ l_2(x), \ldots\ldots, l_n(x)\},}$

Los **polinomios de Lagrange $l_i(x)$** se definen como,

$$\boxed{l_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)(x_i - x_3)\ldots\ldots\ldots(x_i - x_n)}, \qquad l_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}.}$$



Son tales que para los i, k abscisas datos

$l_i(x_i)=1$ y $l_i(x_k)=0$ con k≠i

Se determinan los a_k imponiendo

que el Residuo sea nulo, $\underline{r} = \underline{y} - \Phi \cdot \underline{a} = \underline{0}$

De donde resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}$$

NO HAY QUE RESOLVER SISTEMA DE ECUACIONES!!!!

y resulta el polinomio interpolante $\boxed{P_n(x) = \Sigma\ (y_k\ l_k(x)) \ \text{con } k=0,n}$

MÉTODO LAGRANGE

$$l_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)..........(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)(x_i-x_3)..........(x_i-x_n)}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}.$$

x	**3**	**7**	**9**
y	**5**	**-1**	**2**

MÉTODO LAGRANGE

$$l_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)..........(x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)(x_i - x_3)..........(x_i - x_n)}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}.$$

x	3	7	9
y	5	-1	2

$$l_0(x) = \frac{(x - x1)(x - x2)}{(x0 - x1)(x0 - x2)} = \frac{(x - 7)(x - 9)}{(3 - 7)(3 - 9)} = \frac{x^2 - 16x + 63}{24}$$

MÉTODO LAGRANGE

$$l_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)(x_i-x_3)\ldots\ldots\ldots(x_i-x_n)}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}.$$

x	3	7	9
y	5	-1	2

$$l_0(x) = \frac{(x-x1)(x-x2)}{(x0-x1)(x0-x2)} = \frac{(x-7)(x-9)}{(3-7)(3-9)} = \frac{x^2-16x+63}{24}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x0)(x-x2)}{(x1-x0)(x1-x2)} = \frac{(x-3)(x-9)}{(7-3)(7-9)} = \frac{x^2-12x+27}{-8}$$

MÉTODO LAGRANGE

$$l_i(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)..........(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)(x_i-x_3)..........(x_i-x_n)}, \quad l_i(x)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}.$$

x	3	7	9
y	5	-1	2

$$l_0(x)=\frac{(x-x1)(x-x2)}{(x0-x1)(x0-x2)}=\frac{(x-7)(x-9)}{(3-7)(3-9)}=\frac{x^2-16x+63}{24}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x0)(x-x2)}{(x1-x0)(x1-x2)}=\frac{(x-3)(x-9)}{(7-3)(7-9)}=\frac{x^2-12x+27}{-8}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x0)(x-x1)}{(x2-x0)(x2-x1)}=\frac{(x-3)(x-7)}{(9-3)(9-7)}=\frac{x^2-10x+21}{12}$$

MÉTODO LAGRANGE

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} a_0 = 5 \\ a_1 = -1 \\ a_2 = 2 \end{array}$$

$P_n(x) = \Sigma\, (y_k \;\; l_k(x))$ con $k=0,n$

$$P_n(x) = 5\,\frac{x^2 - 16x + 63}{24} - 1\,\frac{x^2 - 12x + 27}{-8} + 2\,\frac{x^2 - 10x + 21}{12}$$

MÉTODO LAGRANGE

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} a_0 = 5 \\ a_1 = -1 \\ a_2 = 2 \end{array}$$

$P_n(x) = \Sigma\,(y_k\ l_k(x))$ con $k=0,n$

$$P_n(x) = 5\,\frac{x^2 - 16x + 63}{24} - 1\,\frac{x^2 - 12x + 27}{-8} + 2\,\frac{x^2 - 10x + 21}{12}$$

$$P_n(x) = \frac{5}{24}x^2 + \frac{20}{6}x + \frac{105}{8} + \frac{x^2}{8} - \frac{12}{8}x + \frac{27}{8} + \frac{x^2}{6} + \frac{10}{6}x + \frac{21}{6}$$

Polinomio interpolante

$$\boxed{P_n(x) = 20 + (-6.5)x + 0.5x^2}$$

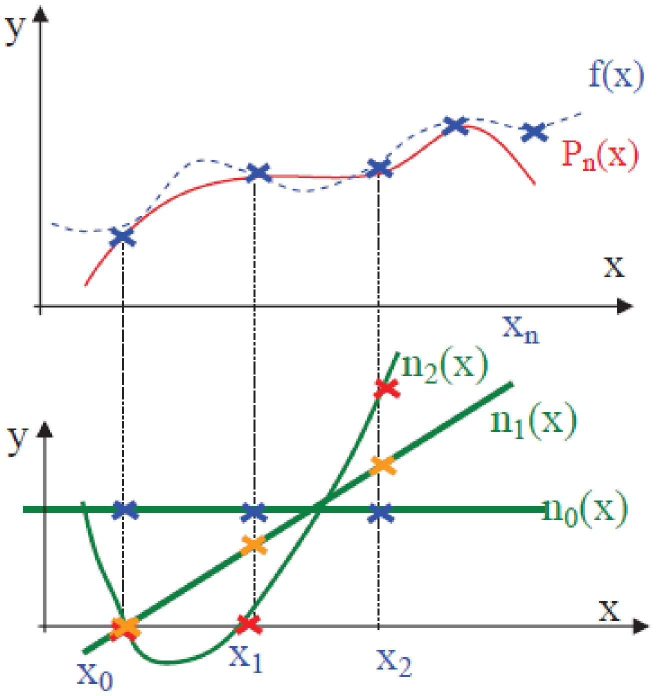
MÉTODO NEWTON

Dada una **función discreta**, $y=f(x)$ de $R \to R$ definida mediante **(n+1) puntos** $(x_i;\ y_i=f(x_i))$ con $i=0,n$.

Se toma como base a los llamados **polinomios de Newton**.
Estos tienen como particularidad que se basan en los polinomios bases anteriores.

$n_0(x) = 1$	$n_0(x) = 1$
$n_1(x) = n_0(x)\ (x-x_0)$	$n_1(x) = 1(x-x_0)$
$n_2(x) = n_1(x)\ (x-x_1)$	$n_2(x) = 1(x-x_0)\ (x-x_1)$
$n_3(x) = n_2(x)\ (x-x_2)$	$n_3(x) = 1(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$n_k(x) = n_{k-1}(x)\cdot(x-x_{k-1})$, para todo $k\geq 1$



Con la Base = $\{n_0(x),\ n_1(x),\ n_2(x),\ldots\ldots,\ n_n(x)\}$,

Se determinan los a_k tales que **el Residuo sea nulo**, $\underline{r} = \underline{y} - \Phi \cdot \underline{a} = \underline{0}$

y resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2-x_0)(x_2-x_1) & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & 0 \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n-x_0)(x_n-x_1) & \ldots\ldots\ldots & (x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots\ldots(x_n-x_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

De donde: $a_0 = y_0$, $a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, $a_2 = \dfrac{\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} - \dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0}$ → Diferencias Divididas de Newton

Resulta el polinomio interpolante $\boxed{P_n(x) = \Sigma\ (a_k\ n_k(x)) \quad \text{con } k=0,1,2,\ldots n}$

MÉTODO NEWTON

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 1 & x_1-x_0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 1 & x_2-x_0 & (x_2-x_0)(x_2-x_1) & \dots\dots\dots & 0 \\ .. & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots & 0 \\ 1 & x_n-x_0 & (x_n-x_0)(x_n-x_1) & \dots\dots\dots & (x_n-x_0)(x_n-x_1).....(x_n-x_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

POR SUSTITUCIÓN HACIA ADELANTE

$$a_0 = y_0$$

$$y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \;\rightarrow a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0}$$

$$y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \rightarrow a_2 = \frac{y_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y_n = a_0 + a_1(x_n - x_0) + \dots + a_n\,(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1}) \rightarrow a_n = \frac{y_n - a_0 - a_1(x_n - x_0) - \dots - a_{n-1}(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-2})}{(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1})}$$

$$\boxed{P_n(x) = \Sigma\,(\mathbf{a_k}\;\; n_k(x)) \qquad \text{con } k=0,1,2,\dots n}$$

$n_0(x) = 1$

$n_1(x) = 1(x-x_0)$

$n_2(x) = 1(x-x_0)\,(x-x_1)$

$n_3(x) = 1(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

MÉTODO NEWTON

EJEMPLO

x	3	7	9
y	5	-1	2

MÉTODO NEWTON

EJEMPLO

x	3	7	9
y	5	-1	2

$$a_0 = y_0$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

x	Y
3	5
7	-1
9	2

MÉTODO NEWTON

EJEMPLO

x	3	7	9
y	5	-1	2

$$a_0 = y_0 \qquad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

x	Y
3	5
7	-1
9	2

a_0

MÉTODO NEWTON

EJEMPLO

x	3	7	9
y	5	-1	2

$$a_0 = y_0 \qquad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

x	Y
3	5
7	-1
9	2

a_0

$$\frac{-1-5}{7-3} = -\frac{6}{4}$$

$$\frac{2+1}{9-7} = \frac{3}{2}$$

MÉTODO NEWTON

EJEMPLO

x	3	7	9
y	5	-1	2

$$a_0 = y_0 \qquad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

x	Y
3	5
7	-1
9	2

a_0

a_1

$$\frac{-1-5}{7-3} = -\frac{6}{4}$$

$$\frac{2+1}{9-7} = \frac{3}{2}$$

MÉTODO NEWTON

EJEMPLO

x	3	7	9
y	5	-1	2

$$a_0 = y_0 \qquad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

x	Y
3	5
7	-1
9	2

a_0

a_1

$$\frac{-1-5}{7-3} = -\frac{6}{4}$$

$$\frac{2+1}{9-7} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{6}{4}}{9-3} = \frac{3}{6} = 0.5$$

MÉTODO NEWTON

EJEMPLO

x	3	7	9
y	5	-1	2

$$a_0 = y_0 \qquad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

x	Y
3	5
7	-1
9	2

a_0

a_1

a_2

$$\frac{-1-5}{7-3} = -\frac{6}{4}$$

$$\frac{2+1}{9-7} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{6}{4}}{9-3} = \frac{3}{6} = 0.5$$

MÉTODO NEWTON

EJEMPLO

x	3	7	9
y	5	-1	2

$a_0 = y_0$ $\qquad a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ $\qquad a_2 = \dfrac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$

x	Y
3	5
7	-1
9	2

a_0

a_1: $\dfrac{-1-5}{7-3} = -\dfrac{6}{4}$

$\dfrac{2+1}{9-7} = \dfrac{3}{2}$

a_2: $\dfrac{\frac{3}{2} + \frac{6}{4}}{9-3} = \dfrac{3}{6} = 0.5$

$$\frac{2+1}{9-7} = \frac{3}{2}$$

$n_0(x) = 1$

$n_1(x) = 1(x-x_0)$

$n_2(x) = 1(x-x_0)\,(x-x_1)$

$n_3(x) = 1(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$$P_n(x) = a_0 1 - \frac{6}{4}(x-3) + 0.5(x-3)(x-7)$$

MÉTODO NEWTON

EJEMPLO

x	3	7	9
y	5	-1	2

$$a_0 = y_0 \qquad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

x	Y
3	5
7	-1
9	2

a_0

a_1

a_2

$$\frac{-1-5}{7-3} = -\frac{6}{4}$$

$$\frac{2+1}{9-7} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\frac{3}{2}+\frac{6}{4}}{9-3} = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{7} = \frac{3}{2}$$

$n_0(x) = 1$

$n_1(x) = 1(x-x_0)$

$n_2(x) = 1(x-x_0)\,(x-x_1)$

$n_3(x) = 1(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$$P_n(x) = a_0 1 - \frac{6}{4}(x-3) + 0.5(x-3)(x-7)$$

$$\boxed{P_n(x) = 20 + (-6.5)x + 0.5x^2}$$

Polinomio interpolante

MÉTODO NEWTON

EJERCICIO

x	**3**	**7**	**9**	**2**
y	**5**	**-1**	**2**	**2**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \cdots\cdots & 0 \\ .. & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \cdots\cdots & (x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$$a_0 = y_0$$

$$y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \ \rightarrow a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0}$$

$$y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \rightarrow a_2 = \frac{y_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y_n = a_0 + a_1(x_n - x_0) + \ldots + a_n (x_n - x_0) \ldots (x_n - x_{n-1}) \rightarrow a_n = \frac{y_n - a_0 - a_1(x_n - x_0) - \cdots - a_{n-1}(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-2})}{(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

Encontrar los coeficientes a del polinomio interpolante de Newton.

$$P_n(x) = \cdots$$

$n_0(x) = 1$
$n_1(x) = 1(x-x_0)$
$n_2(x) = 1(x-x_0)\ (x-x_1)$
$n_3(x) = \ 1(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

MÉTODO NEWTON

EJERCICIO

x	3	7	9	2
y	5	-1	2	2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & x_1-x_0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & x_2-x_0 & (x_2-x_0)(x_2-x_1) & \cdots\cdots & 0 \\ .. & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & x_n-x_0 & (x_n-x_0)(x_n-x_1) & \cdots\cdots & (x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$$a_0 = y_0$$

$$y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \rightarrow a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0}$$

$$y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \rightarrow a_2 = \frac{y_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y_3 = a_0 + a_1(x_3 - x_0) + a_2\,(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + a_3\,(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \rightarrow a_3 = \frac{y_3 - a_0 - a_1(x_3 - x_0) - a_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Encontrar los coeficientes a del polinomio interpolante de Newton.

$$P_n(x) = a_0 1 - a_1(x-3) + a_2(x-3)(x-7) + a_3(x-3)(x-7)(x-9)$$

$n_0(x) = 1$
$n_1(x) = 1(x-x_0)$
$n_2(x) = 1(x-x_0)\,(x-x_1)$
$n_3(x) = 1(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

APROXIMACIÓN

MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

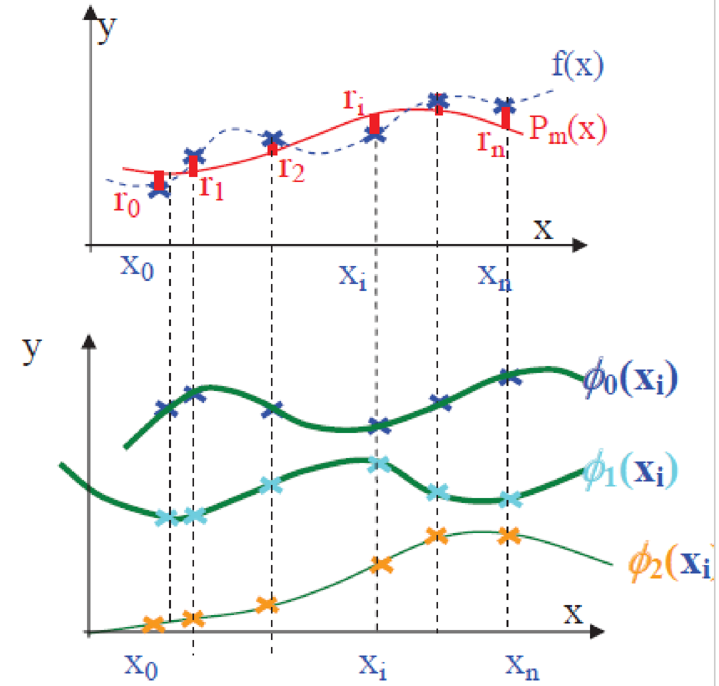
Dada una **función discreta**, $y=f(x)$ de $R \rightarrow R$ definida mediante **(n+1) puntos** $(x_i;\ y_i=f(x_i))$ con i=0,n.

Se propone $P_m(x) = \Sigma\, a_k\, \phi_k(x)$ con k=0,m.

Donde a_k son las incógnitas; y $\{\phi_k(x)\}$ es una **Base elegida**

Se define: **Residuo** $r_i = f(x_i) - P_m(x_i)$ con k=0,m; i=0,n

$$r_i = y_i - \Sigma\, a_k\, \phi_k(x_i)$$



$$\begin{Bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_m(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \dots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{Bmatrix}$$

$$\underline{r} = \underline{y} - \Phi \cdot \underline{a}$$

Los coeficientes a_k son tales que minimizan la Suma de los Cuadrados de los Residuos

$$\min \left\| \underline{\mathbf{r}} \right\|_2^2 = \min \left[\Sigma (\mathrm{r}_i(a_k))^2 \right]$$

La condición para que la Suma de los Cuadrados de los Residuos tome un valor extremo es $\sum_{i=1,n} 2\, r_i(a_j) \cdot \phi_j(x_i) = \underline{r}^T \cdot \underline{\phi_j} = 0 \quad j=1,m$

Como se debe cumplir para todo j=1,m; finalmente resultan las siguientes ECUACIONES NORMALES

$$\boxed{\Phi^T \Phi \underline{a} = \Phi^T \underline{y}}$$

Sistema de ecuaciones lineales cuya solución da los coeficientes a_k. Así la APROXIMACIÓN resulta $P_m(x) = \Sigma\, a_k\, \phi_k(x)$ con k=0,m

APROXIMACIÓN

EJEMPLO

x	0	1	2	3
y	1	1	2	4

Usando $\Phi^T\Phi\bar{a} = \Phi^T\bar{y}$ resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{4} x_i \\ \sum_{i=1}^{4} x_i & \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} y_i \\ \sum_{i=1}^{4} y_i x_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$a = 0.5$
$b = 1$

$Aproximación\ f(x) = 0.5 + x$

APROXIMACIÓN

EJERCICIO: Implemente un algoritmo para encontrar los coeficientes de un polinomio de aproximación de segundo grado (parábola) para los puntos siguientes, según el criterio de mínimos cuadrados. Grafique los puntos y la función aproximada.

x	0	1		3	4	5	6
y	4	7	9	10	9	12	15

$$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2$$

REPASO

RAÍCES

1. Si conocemos dos puntos cercanos de abscisas a y b cuyas ordenas f(a) y f(b) tienen igual signo. ¿Qué método sería correcto utilizar para encontrar la raíz de la función f? (la respuesta puede ser una opción o varias):

a) Método secante
b) Método de la bisección
c) Método de Regula-Falsi
d) Ninguno de estos tres métodos

REPASO

RAÍCES

1. Si conocemos dos puntos cercanos de abscisas a y b cuyas ordenas f(a) y f(b) tienen igual signo. ¿Qué método sería correcto utilizar para encontrar la raíz de la función f(x)? (la respuesta puede ser una opción o varias):

a) Método secante
b) Método de la bisección
c) Método de Regula-Falsi
d) Ninguno de estos tres métodos

2. Si se conoce la función $f(x)=x^2-4$ y se tiene el punto de partida $x=1.3$. Cuál sería el valor de la primer aproximación de la raíz si se aplica el método de Newton-Raphson?

a) 2
b) 2.057
c) 2.188
d) 2.245

REPASO

RAÍCES

3. Dada la función f(x)=4*cos(x)-e^x , se busca la segunda aproximación para encontrar la raíz utilizando:

- El método de newton-raphson para un punto de partida x=2.
- El método de la secante para un punto de partida xa=2 y xb=2.1.

Utilizar cuatro decimales después de la coma.

Respuesta: * Para el método de newton-raphson es r=….
* Para el método de la secante es r=….

REPASO

MÉTODOS ITERATIVOS

1. Si tenemos un sistema de ecuaciones (dado en forma matricial) A·x = b. Para la matriz A indicar si cumple la condición de convergencia para el método Jacobi o de Gauss-Seidel.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 23 & 8 \\ 5 & -9 & 16 \\ 17 & -11 & -4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

a) Si.
b) No.
c) No pero podemos realizar cambios para que si cumpla la condición.

REPASO

MÉTODOS ITERATIVOS

1. Si tenemos un sistema de ecuaciones (dado en forma matricial) A·x = b. Para la matriz A indicar si cumple la condición de convergencia para el método Jacobi o de Gauss-Seidel.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 23 & 8 \\ 5 & -9 & 16 \\ 17 & -11 & -4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

a) Si.
b) No.
c) No pero podemos realizar cambios para que si cumpla la condición.

1. Para el sistema de ecuaciones (dado en forma matricial) A·x = b modificado para que cumpla la condición de convergencia obtenga la solución x para una sola iteración por el método de Jacobi y el de Gauss-Seidel partiendo de x=(1 ; 1 ; 1).

$$A = \begin{bmatrix} 17 & -11 & -4 \\ 0 & 23 & 8 \\ 5 & -9 & 16 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

a) x=(; ;) Jacobi

b) x=(; ;) Gauss-Seidel

REPASO

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

1. Dado el problema generalizado de valores propios, $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\underline{x} = 0$ hallar el mayor y el menor autovalor ω^2 y los autovectores $\underline{x}$ asociados.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

REPASO

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

1. Dado el problema generalizado de valores propios, $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\underline{x} = 0$ hallar el mayor y el menor autovalor ω^2 y los autovectores $\underline{x}$ asociados.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\underline{x} = 0$$

$$\mathbf{K}\,\underline{x} - \omega^2\mathbf{M}\,\underline{x} = 0$$

$$\mathbf{K}\,\underline{x} = \omega^2\mathbf{M}\,\underline{x}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\,\underline{x} = \omega^2\,\underline{x} \qquad \mathbf{A}\,\underline{x} = \lambda\,\underline{x} \qquad \therefore \qquad \mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \quad y \quad \lambda = \omega^2$$