SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Prof. Ing. Mauro Grioni

INTRODUCCIÓN

MÉTODOS ITERATIVOS

Dentro de los métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales $A.x - b = 0$ vamos a trabajar con:

- Jacobi
- Gauss-Seidel

MÉTODO JACOBI

Dada una Matriz **A** ε R^{NxN}, un vector **b** ε R^N, el sistema de ecuaciones lineales asociado es

$$\mathbf{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$A \cdot x = b \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{matrix}$$

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)\frac{1}{a_{11}}$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)\frac{1}{a_{22}}$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)\frac{1}{a_{33}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_i = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \left(- \frac{a_{ij} . x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}}}$$

Para i = 1, 2, ... ,n
Para $a_{ii} \neq 0$

Con una tolerancia máxima ε de:

$$\varepsilon > \frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k\|} > 0$$

CRITERIO DE CONVERGENCIA

Matriz **A** estrictamente diagonal dominante

MÉTODO JACOBI

EJEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

```
function jacobi
N=3
tol=1e-2
A=[-3 1 -2;4 -5 0; 1 -3 6];
b=[-2; 5; 6];
x=zeros(N,1);
er=1000;
it=0;
while (er>tol)
it = it+1;
 for i=1:N
   sum=0;
    for j=1:N
      if (j~=i)
        sum = sum + A(i,j)*x(j);
      end
    end
   xn(i)=(b(i)-sum)/A(i,i);
   e(i)=abs(xn(i)-x(i));
  end
  x=xn;
  er=max(e);
end
disp('El vector x es'), x
disp('El error es'), er
disp('La iteraciones son:'), it
end
```

MÉTODO JACOBI

MÉTODO ALTERNATIVO

Dada una Matriz **A** ε R^{NxN}, un vector **b** ε R^{N}, el sistema de ecuaciones lineales asociado es

$$\mathbf{A}\cdot\underline{x}=\underline{b}$$

Si consideramos a A como:

$$\mathbf{A}=\mathbf{D}+\mathbf{B} \qquad \therefore \qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix} & & \mathbf{0} \\ & & \\ \mathbf{0} & & \end{bmatrix} \quad , \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \\ & & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal

Matriz de ceros en la diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces el sistema se puede escribir como:

$$\mathbf{D}\cdot\underline{x}+\mathbf{B}\cdot\underline{x}=\underline{b}$$

$$\underline{x}=-\mathbf{D}^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\underline{x}+\mathbf{D}^{-1}\cdot\underline{b}$$

$$\underline{x}=\mathbf{T}\cdot\underline{x}+\underline{c}$$

$$\mathbf{T}=-\mathbf{D}^{-1}\cdot\mathbf{B} \qquad \underline{c}=\mathbf{D}^{-1}\cdot\underline{b}$$

MÉTODO DE JACOBI

EJERCICIO

Resolver el siguiente sistema $A.x = b$ por el Método de Jacobi utilizando el planteamiento alternativo $A = D + B$. Considere como condición inicial al vector x=0, un error o tolerancia de 0.01 y obtenga la cantidad de iteraciones necesarias para obtener ese orden de error. *Comentario*: El término D^{-1} es la inversa de ***D*** y se expresa en Octave/Matlab como *inv(D)*.

$$A = \begin{bmatrix} 50 & -25 & 0 & 0 \\ -25 & 50 & -25 & 0 \\ 0 & -25 & 50 & -25 \\ 0 & 0 & -25 & 50 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

MÉTODO GAUSS-SEIDEL

Dada una Matriz **A** ε R^{NxN}, un vector **b** ε R^N, el sistema de ecuaciones lineales asociado es

$$\mathbf{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$A \cdot x = b \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}$$

$$x_1^{k+1} = (b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k)\frac{1}{a_{11}} \longrightarrow$$ Calculamos el nuevo x_1^{k+1}

$$x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k)\frac{1}{a_{22}}$$

$$x_3^{k+1} = (b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1})\frac{1}{a_{33}}$$

MÉTODO GAUSS-SEIDEL

Dada una Matriz **A** ε R^{NxN}, un vector **b** ε R^{N}, el sistema de ecuaciones lineales asociado es

$$\mathbf{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$A \cdot x = b \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}$$

$$x_1^{k+1} = (b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k)\frac{1}{a_{11}}$$

$$x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k)\frac{1}{a_{22}} \longrightarrow \text{Calculamos el nuevo } x_2^{k+1}$$

$$x_3^{k+1} = (b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1})\frac{1}{a_{33}}$$

MÉTODO GAUSS-SEIDEL

Dada una Matriz **A** ε R^{NxN}, un vector **b** ε R^{N}, el sistema de ecuaciones lineales asociado es

$$\mathbf{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$A \cdot x = b \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{matrix}$$

$$x_1^{k+1} = (b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k)\frac{1}{a_{11}}$$

$$x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k)\frac{1}{a_{22}}$$

$$x_3^{k+1} = (b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1})\frac{1}{a_{33}} \longrightarrow$$

Calculamos el nuevo x_3^{k+1}

MÉTODO GAUSS-SEIDEL

Dada una Matriz **A** ε R^{NxN}, un vector **b** ε R^N, el sistema de ecuaciones lineales asociado es

$$\mathbf{A}\cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$A\cdot x = b \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{matrix}$$

$$x_1^{k+1} = (b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k)\frac{1}{a_{11}}$$

$$x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k)\frac{1}{a_{22}}$$

$$x_3^{k+1} = (b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1})\frac{1}{a_{33}}$$

$$\Rightarrow \quad x_i^{k+1} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k + b_i}{a_{ii}} \qquad \forall\ i = 1,2,\ldots,n\ ;\ a_{ii} \neq 0; \text{j} \neq$$

Con una tolerancia máxima ε de:

$$\varepsilon > \frac{\left\| x^{k+1} - x^k \right\|}{\left\| x^k \right\|} > 0$$

CRITERIO DE CONVERGENCIA

Matriz **A** estrictamente diagonal dominante

MÉTODO GAUSS-SEIDEL

INTERPRETACIÓN MATRICIAL

$$x_i^{k+1} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_i^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^{k} + b_i}{a_{ii}}$$

$$x^{k+1} = Ti.\, x^{k+1} + Ts.\, x^{k} + C$$

$$\boldsymbol{Ti} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -a_{21}/a_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Ts} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -a_{23}/a_{22} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

MÉTODO GAUSS-SEIDEL ALTERNATIVO

$$\mathbf{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\mathbf{D} \cdot \underline{x} + \mathbf{B} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \underline{x} + \mathbf{D}^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$\underline{x} = \mathbf{T} \cdot \underline{x} + \underline{c}$$

$$\mathbf{T} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B} \qquad \underline{c} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \underline{b}$$

$\Rightarrow$ **T** lo podemos descomponer en **Ti** y **Ts** como se muestra arriba

MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

EJERCICIO

Resolver el siguiente sistema $A.x = b$ por el Método de Gauss-Seidel o por el método de Gauss-seidel alternativo. Considere como condición inicial al vector x=0, un error o tolerancia de 0.01 y obtenga la cantidad de iteraciones necesarias para obtener ese orden de error.

$$A = \begin{bmatrix} 50 & -25 & 0 & 0 \\ -25 & 50 & -25 & 0 \\ 0 & -25 & 50 & -25 \\ 0 & 0 & -25 & 50 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Prof. Ing. Mauro Grioni

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

¿QUÉ SON?

Dada una matriz A se denominan autovalores λ y autovectores $\overline{x}$, a los números y vectores no nulos respectivamente

$$A \cdot \overline{x} = \lambda \overline{x}$$

o que son solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$(A - \lambda \cdot \mathbf{I})\overline{x} = 0 \qquad \therefore$$

λ es un escalar que cambia el modulo de $\overline{x}$ cuya dirección permanece invariante.

MÉTODO DE LA POTENCIA

Dada una matriz **A**, se buscan las *Direcciones Invariantes*, soluciones de

$$(\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{I})\underline{x}=\underline{0} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{A}\cdot\underline{x}=\lambda\cdot\underline{x}$$

Esto es equivalente a encontrar un vector $\underline{y}$ que se puede obtener como $\underline{y}=\mathbf{A}\cdot\underline{x}$

y resulta igual a $\underline{y}=\lambda\cdot\underline{x}$

lo que significa que los vectores $\underline{x}$ e $\underline{y}$ son PARALELOS

El MÉTODO DE LA POTENCIA es un algoritmo iterativo que propone un x_0 arbitrario y

Obtiene un nuevo vector como $\longrightarrow$ $x_{k+1}=A\cdot x_k$

Solo se detiene si se cumple que $\longrightarrow$ x_{k+1} es paralelo a x_k $\longrightarrow$ $\alpha_{k+1}=\dfrac{x_{k+1}}{x_k}=\lambda$

EJEMPLO: Dada la matriz **A**

-10	4
-4	0

x0	x1	x2	x3	x4
2	-12	88	-688	5472
2	-8	48	-352	2752
iteración	1	2	3	4
α(1)	-6	-7.333	-7.82	-7.953
α(2)	-4	-6	-7.333	-7.82

Control de Detención: Si las componentes de α_{k+1} son suficientes parecidas.

⇨ Converge al autovector normalizado $\begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix}$

⇨ Converge al autovalor $\lambda=-8$

MÉTODO DE LA POTENCIA

Dada una matriz **A**, se buscan las *Direcciones Invariantes*, soluciones de

$$(\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{I})\underline{x}=\underline{0} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{A}\cdot\underline{x}=\lambda\cdot\underline{x}$$

Esto es equivalente a encontrar un vector $\underline{y}$ que se puede obtener como $\underline{y}=\mathbf{A}\cdot\underline{x}$

y resulta igual a $\underline{y}=\lambda\cdot\underline{x}$

lo que significa que los vectores $\underline{x}$ e $\underline{y}$ son PARALELOS

El MÉTODO DE LA POTENCIA es un algoritmo iterativo que propone un x_0 arbitrario y

Obtiene un nuevo vector como → $x_{k+1} = A \cdot x_k$

Solo se detiene si se cumple que → x_{k+1} es paralelo a x_k

$$\alpha_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{x_k} = \lambda \qquad |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \cdots \geq |\lambda_N| .$$

EJEMPLO: Dada la matriz **A**

-10	4
-4	0

x0	x1	x2	x3	x4
2	-12	88	-688	5472
2	-8	48	-352	2752
iteración	1	2	3	4
α(1)	-6	-7.333	-7.82	-7.953
α(2)	-4	-6	-7.333	-7.82

⇒ Converge al autovector normalizado $\begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix}$

⇒ Converge al autovalor $\lambda = -8$

MÉTODO DE LA POTENCIA

MÉTODO DE LA POTENCIA ESCALONADA

El MÉTODO DE LA POTENCIA ESCALONADA es un algoritmo pare resolver $A \cdot \overline{x} = \lambda \cdot \overline{x}$ que propone un x_0 arbitrario y se *escala* para obtener el versor x_{0n} normalizado con el que se inicia el proceso iterativo

Obtener un nuevo vector como $x_{k+1} = A \cdot x_{kn}$

Solo se detiene si se cumple que x_{k+1} es paralelo a x_{kn} $\longrightarrow$ $\alpha = \dfrac{x_{k+1}}{x_{kn}} = \lambda$

EJEMPLO: Dada la matriz **A**

-10	4
-4	0

	x0	x1	x2	x3	x4
	2	-6	7.44	-7.88	7.96954315
	2	-4	4	-4	4
norma ∞	2	6	7.44	7.88	7.96
	x0n	x1n	x2n	x3n	x4n
	1	-1	1	-1	1.00
	1	-0.67	0.53	-0.51	0.50
α(1)	-	-6	-7.44	-7.88	-7.97
α(2)	-	-4	-5.97	-7.55	-7.88

$\Rightarrow$ Converge al autovector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Converge al autovalor $\lambda = -8$

MÉTODO DE LA POTENCIA

EJERCICIO

Dada la matriz A se busca determinar sus autovectores y autovalores. Encuentre el valor propio dominante y su correspondiente vector propio empleando la Método de la potencia. Utilice un algoritmo con escalamiento y considere un error e=0.1 como factor de tolerancia.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

MÉTODO DE LA POTENCIA INVERSA

Dada la matriz A tal que

$$A \cdot \overline{x} = \lambda \cdot \overline{x} \longrightarrow \text{si multiplicamos por } A^{-1} \text{ nos queda}$$

$$\mathbf{I} \cdot \overline{x} = \lambda A^{-1} \cdot \overline{x}$$

$$A^{-1} \cdot \overline{x} = \frac{1}{\lambda}\,\overline{x}$$

Es decir que $n = \frac{1}{\lambda}$ es autovalor dominante de A^{-1} asociado al autovector $\overline{x}$.

El Método de la Potencia aplicado sobre la matriz inversa A^{-1} converge al autovalor dominante de A^{-1} esto es el mayor n tomado en valor absoluto. Pero según la relación entre n y λ, el mayor n está asociado con el menor λ de la matriz A.

El <u>MÉTODO DE LA POTENCIA INVERSA</u> es un algoritmo iterativo que propone un x_0 arbitrario y

Obtiene un nuevo vector como $x_{k+1} = A^{-1} \cdot x_k$

Solo se detiene si se cumple que x_{k+1} es paralelo a $x_k \longrightarrow \alpha = \frac{x_{k+1}}{x_k} = n$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \cdots \geq |\lambda_N|. \qquad \boxed{\lambda = \frac{1}{\alpha}}$$

MÉTODO DE LA POTENCIA INVERSA

EJERCICIO

Dada la matriz A se busca determinar sus autovectores y autovalores. Encuentre el mínimo valor propio y su correspondiente vector propio empleando la Método de la potencia inversa. Utilice un algoritmo con escalamiento y considere un error e=0.1 como factor de tolerancia.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$