SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Prof. Ing. Mauro Grioni

REVISÍON-EDO DE PRIMER ORDEN-MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Teniendo en cuenta que

$$y' = f(x,y) \quad \textbf{con} \;\; y(x0) = y0$$

Se llega a la expresión más general del método de Runge-Kutta de 2° orden

$$Y_{m+1} = Y_m + h\left\{(1-\omega)f(x_m,Y_m) + \omega f\left[\left(x_m + \frac{h}{2\omega}\right),\left(Y_m + \frac{h}{2\omega}f(x_m,Y_m)\right)\right]\right\}$$

Una forma tradicional de expresar el método de Runge-Kutta se presenta a continuación

$$k_1 = h\,f(x_m,y_m)$$

$$x_G = x_m + \frac{h}{2w}$$

$$y_G = y_m + \frac{k_1}{2w}$$

$w = 1/2$ entonces obtenemos el método de Euler Mejorado

$w = 1$ entonces obtenemos el método de Euler Modificado

$$k_2 = h\,f\left(x_m + \frac{h}{2w}, y_m + \frac{h}{2w}f(x_m,y_m)\right) = hf\left(x_m + \frac{h}{2w}, y_m + \frac{k_1}{2w}\right) = hf(x_G,y_G)$$

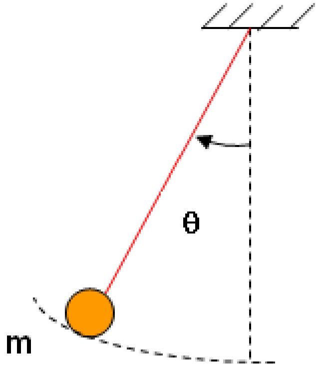
$$Y_{m+1} = Y_m + (1-w)k_1 + wk_2 \qquad x_{m+1} = x_m + h$$

REDUCCIÓN A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

EDO de segundo orden del péndulo simple,

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0 \qquad con \qquad \theta(t_0) = \theta_0$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \beta_0 \quad en \;\; t = t_0$$

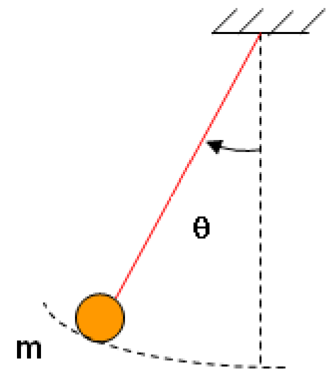


REDUCCIÓN A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

EDO de segundo orden del péndulo simple,

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0 \qquad con \qquad \theta(t_0) = \theta_0$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \beta_0 \quad en \ \ t = t_0$$



Si se plantea un cambio de variables tal que

$$y1(t) = \theta(t) \qquad entonces \qquad \dot{y1}(t) = \dot{\theta}(t) = y2(t)$$

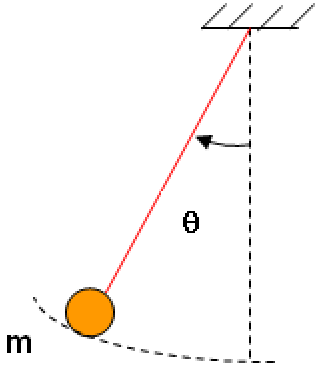
$$y2(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \qquad entonces \qquad \dot{y2}(t) = \ddot{\theta}(t) = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta(t)$$

REDUCCIÓN A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

EDO de segundo orden del péndulo simple,

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0 \qquad con \qquad \theta(t_0) = \theta_0$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \beta_0 \quad en \;\; t = t_0$$



Si se plantea un cambio de variables tal que

$$y1(t) = \theta(t) \qquad entonces \qquad \dot{y}1(t) = \dot{\theta}(t) = y2(t)$$

$y1(t)$

$$y2(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \qquad entonces \qquad \dot{y}2(t) = \ddot{\theta}(t) = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta(t)$$

$$\dot{y}1(t) = 0 \cdot y1(t) + 1 \cdot y2(t)$$

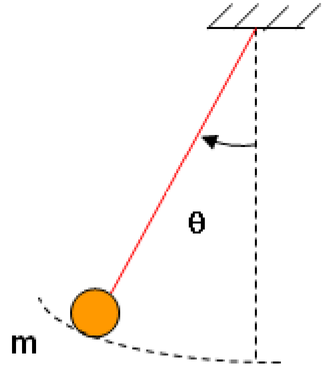
$$\dot{y}2(t) = -\frac{g}{L} \cdot y1(t) + 0 \cdot y2(t)$$

REDUCCIÓN A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

EDO de segundo orden del péndulo simple,

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0 \qquad con \qquad \theta(t_0) = \theta_0$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \beta_0 \quad en \;\; t = t_0$$



Si se plantea un cambio de variables tal que

$$y1(t) = \theta(t) \qquad entonces \qquad \dot{y}1(t) = \dot{\theta}(t) = y2(t)$$

$$y1(t)$$

$$y2(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \qquad entonces \qquad \dot{y}2(t) = \ddot{\theta}(t) = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta(t)$$

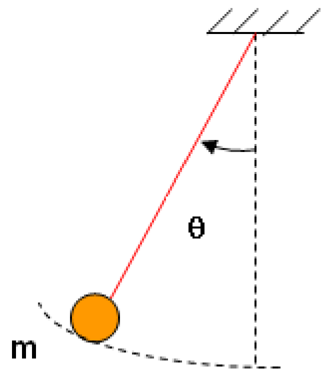
$$\dot{y}1(t) = 0 \cdot y1(t) + 1 \cdot y2(t)$$

$$\dot{y}2(t) = -\frac{g}{L} \cdot y1(t) + 0 \cdot y2(t)$$

$$\dot{y}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{y}1(t) \\ \dot{y}2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y1 \\ y2 \end{Bmatrix} \qquad con \;\; y(0) = \begin{Bmatrix} y1(0) \\ y2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{(0)} \\ \dot{\theta}_{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ \beta_0 \end{Bmatrix}$$

REDUCCIÓN A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

EDO de segundo orden del péndulo simple,



$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\frac{g}{L}\theta(t)=0 \qquad con \qquad \theta(t_0)=\theta_0$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=\beta_0 \quad en \ \ t=t_0$$

Si se plantea un cambio de variables tal que

$$y1(t)=\theta(t) \qquad entonces \qquad \dot{y}1(t)=\dot{\theta}(t)=y2(t)$$

$$y1(t)$$

$$y2(t)=\dot{\theta}(t)=\frac{d\theta(t)}{dt} \qquad entonces \qquad \dot{y}2(t)=\ddot{\theta}(t)=\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}=-\frac{g}{L}\theta(t)$$

$$\dot{y}1(t)=0\cdot y1(t)+1\cdot y2(t)$$

$$\dot{y}2(t)=-\frac{g}{L}\cdot y1(t)+0\cdot y2(t)$$

$$\boxed{\dot{y}(t)=\begin{Bmatrix}\dot{y}1(t)\\ \dot{y}2(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{g}{L} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y1\\ y2\end{Bmatrix} \qquad con \ \ y(0)=\begin{Bmatrix}y1(0)\\ y2(0)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\theta_{(0)}\\ \dot{\theta}_{(0)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\theta_0\\ \beta_0\end{Bmatrix}}$$

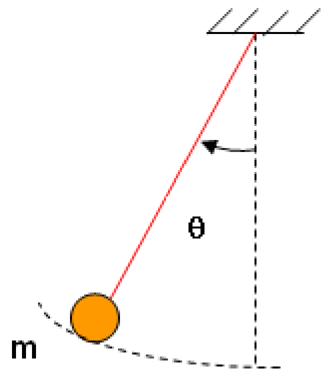
SISTEMA EDO A RESOLVER

SISTEMAS EDO DE PRIMER ORDEN- R-K

PROBLEMA: Consideramos L=1, g=9.8 con condiciones iniciales en t_0

$$\begin{cases} \theta(t_0) = 0 \\ \dfrac{d\theta(t)}{dt} = 2 \end{cases}$$

Con dt=0.01 y durante 10 segundos (tf=10)



$$\dot{y}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{y}1(t) \\ \dot{y}2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y1 \\ y2 \end{Bmatrix} \qquad con \;\; y(0) = \begin{Bmatrix} y1(0) \\ y2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{(0)} \\ \dot{\theta}_{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ \beta_0 \end{Bmatrix}$$

SISTEMA EDO A RESOLVER

Método de Runge-Kutta de segundo orden:

$$k_1 = h\, f(x_m, y_m)$$

$$x_G = x_m + \frac{h}{2w}$$

$$y_G = y_m + \frac{k_1}{2w}$$

$$k_2 = hf(x_G, y_G)$$

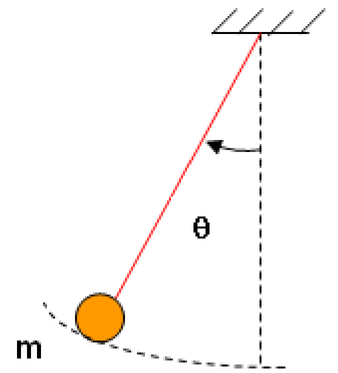
$$Y_{m+1} = Y_m + (1-w)k_1 + wk_2$$

$$x_{m+1} = x_m + h$$

REDUCCIÓN A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

SOLUCIÓN: Consideramos L=1, g=9.8 con condiciones iniciales en t_0

$$\begin{cases} \theta(t_0) = 0 \\ \dfrac{d\theta(t)}{dt} = 2 \end{cases}$$



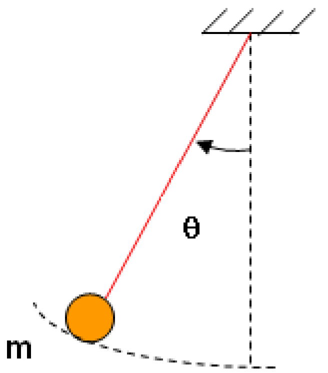

```
function RK_pendulo
y1=0;
y2=2;
t0=0;
dt=0.01;
t=0:dt:10;
Ndt=length(t);
y=zeros(2,Ndt);
y(1,1)=y1;
y(2,1)=y2;
t(1)=0;
A=[0 1;-9.8/1 0];
w=1;
for i=1:Ndt-1
  ya=y(:,i);
  K1=dt*(A*ya);
 %  tg=t(i)+dt/(2*w);
    yg=ya+K1/(2*w);
  K2=dt*(A*yg);
  y(:,i+1)=ya+(1-w)*K1+w*K2;
endfor
figure (1)
plot (t, y(1,:), 'r')

figure (2)
plot (t, y(2,:), 'r')
endfunction
```

REDUCCIÓN A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

SOLUCIÓN: Consideramos L=1, g=9.8 con condiciones iniciales en t_0

$$\begin{cases} \theta(t_0) = 0 \\ \dfrac{d\theta(t)}{dt} = 2 \end{cases}$$

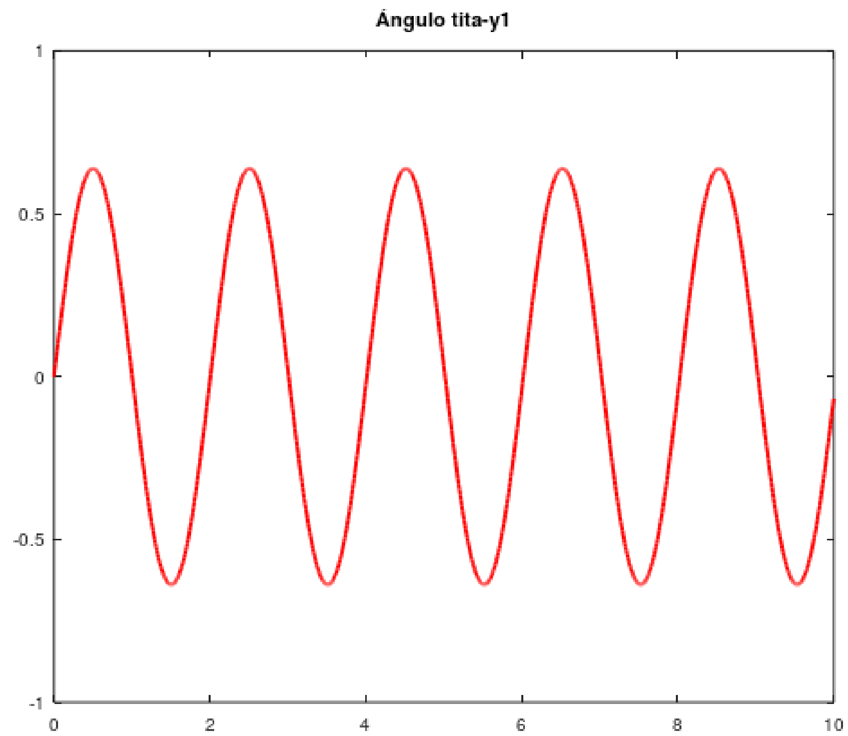


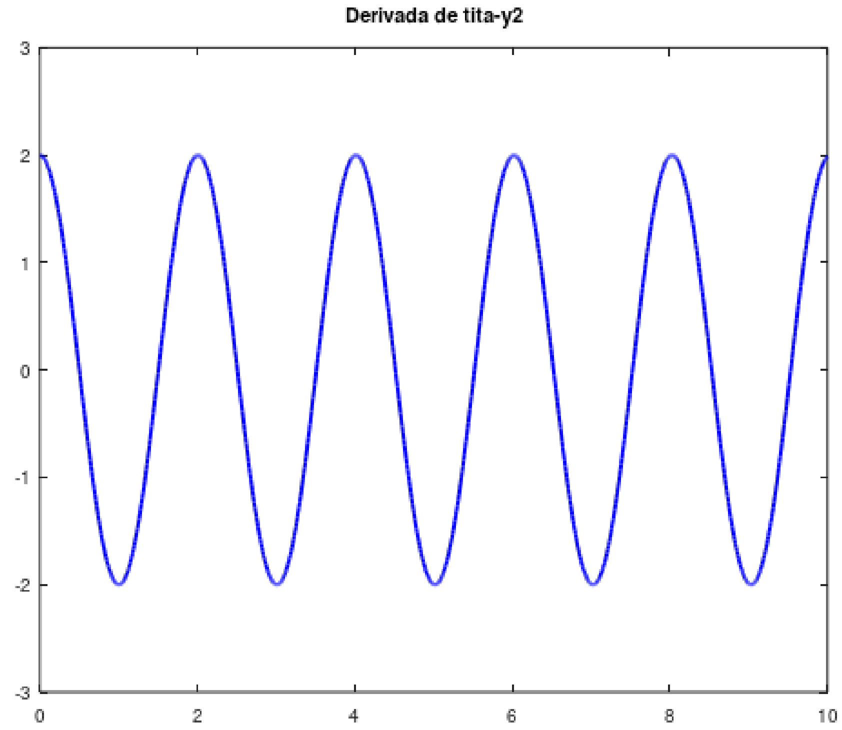

```
function RK_pendulo
y1=0;
y2=2;
t0=0;
dt=0.01;
t=0:dt:10;
Ndt=length(t);
y=zeros(2,Ndt);
y(1,1)=y1;
y(2,1)=y2;
t(1)=0;
A=[0 1;-9.8/1 0];
w=1;
for i=1:Ndt-1
  ya=y(:,i);
  K1=dt*(A*ya);
 %   tg=t(i)+dt/(2*w);
    yg=ya+K1/(2*w);
  K2=dt*(A*yg);
  y(:,i+1)=ya+(1-w)*K1+w*K2;
endfor
figure (1)
plot (t, y(1,:), 'r')

figure (2)
plot (t, y(2,:), 'r')
endfunction
```

Periodo de oscilación para pequeñas oscilaciones :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$





EJERCICIO 1: SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

EJERCICIO

Obtener una solución aproximada del siguiente sistema de EDO con valores iniciales con un Dt=10 guardando todos los valores de z(t) para todo t en el intervalo [0; 7500]:

$$\frac{d(\overrightarrow{z})}{dt} = K\,\vec{z} + \vec{p}$$

Donde la matriz K y el vector p vienen dados por:

$$K = 0.018 * \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \qquad \vec{p} = 0.018 * \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Considerando como valores iniciales:

$$\overrightarrow{z(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

EJERCICIO 1: SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

EJERCICIO

Obtener una solución aproximada del siguiente sistema de EDO con valores iniciales con un Dt=10 guardando todos los valores de z(t) para todo t en el intervalo [0; 7500]:

$$\frac{d(\overrightarrow{z})}{dt} = K\,\vec{z} + \vec{p}$$

Donde la matriz K y el vector p vienen dados por:

$$K = 0.018 * \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \qquad \vec{p} = 0.018 * \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Considerando como valores iniciales:

$$\overrightarrow{z(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Método de Runge-Kutta de segundo orden:

$$k_1 = h\,f(x_m, y_m)$$

$$x_G = x_m + \frac{h}{2w}$$

$$y_G = y_m + \frac{k_1}{2w}$$

$$k_2 = hf(x_G, y_G)$$

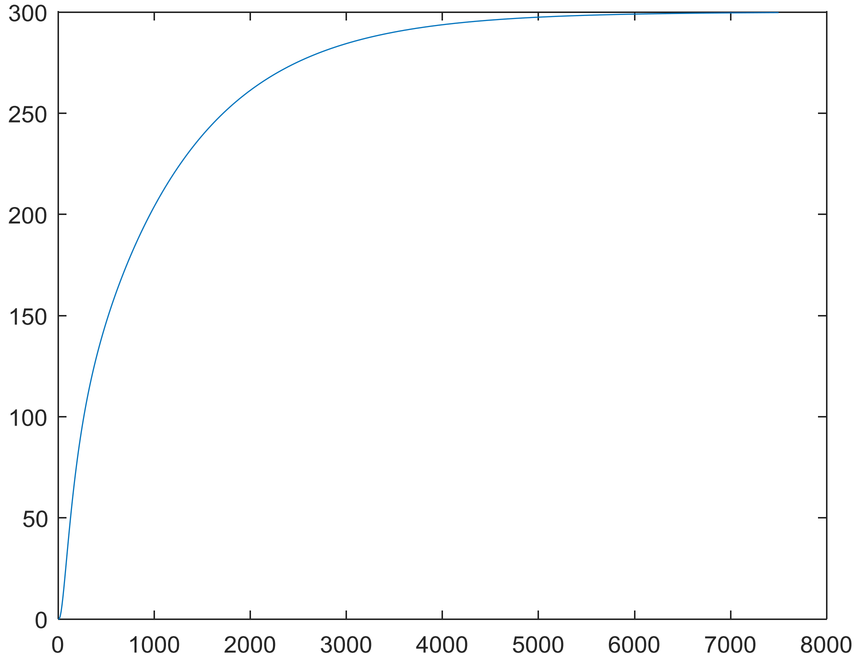
$$Y_{m+1} = Y_m + (1-w)k_1 + wk_2$$

$$x_{m+1} = x_m + h$$

EJERCICIO 1: SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

MÉTODO RUNGE-KUTTA SISTEMAS

```
function R-K
  dt=10;
  tf=7500;
  K=0.018*[-2 1 0 0 0 0
  1 -2 1 0 0 0
  0 1 -2 1 0 0
  0 0 1 -2 1 0
  0 0 0 1 -2 1
  0 0 0 0 2/3 -2/3];
  b=0.018*[1;0;0;0;0;0];
  z=zeros(6,1)
  it=0;
  w=0.5
for i=0:dt:tf
  dz=K*z+b;
  k1=dt*dz;
  tg=i+dt(2*w);
  zg=z+k1/(2*w);
  dzg=K*zg+b;
  k2=dt*dzg;
  zn=z+(1-w)*k1+w*k2;
  it=it+1;
  mz(:,it)=z;
  vt(it)=i;
  z=zn;
end
plot(vt,mz(3,:))%2
end
```



Método de Runge-Kutta de segundo orden:

$$k_1 = h\, f(x_m, y_m)$$

$$x_G = x_m + \frac{h}{2w}$$

$$y_G = y_m + \frac{k_1}{2w}$$

$$k_2 = hf(x_G, y_G)$$

$$Y_{m+1} = Y_m + (1-w)k_1 + wk_2$$

$$x_{m+1} = x_m + h$$