DIFERENCIA CENTRAL

Prof. Ing. Mauro Grioni

MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

Supongamos que tenemos el siguiente sistema EDO de segundo orden con valores iniciales

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0 \qquad con \qquad \theta(t_0) = \theta_0$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \beta_0$$

Ecuación del péndulo simple

* Aproximamos las $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ con derivadas numéricas centrales y se reemplazan en el sistema original

$$\frac{1}{\Delta t^2}\left(\theta_{(t-\Delta t)} - 2\theta_{(t)} + \theta_{(t+\Delta t)}\right) + \frac{g}{L}\,\theta_{(t)} = 0$$

Donde podemos escribir

$$\theta_{(t+\Delta t)} = \left(2 - \frac{g\Delta t^2}{L}\right)\theta_{(t)} - \theta_{(t-\Delta t)}$$

Para el valor inicial de t (t=t0), primero se halla una aproximación $\theta_{(t-\Delta t)}$mediante Serie de Taylor:

$$\theta_{(t0-\Delta t)} = \theta_{(t0)} - \Delta t\,\frac{d\theta_{(t0)}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2\theta_{(t0)}}{dt^2} + O(\Delta t^3)$$

MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

Supongamos que tenemos el siguiente sistema EDO de segundo orden con valores iniciales

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\frac{g}{L}\theta(t)=0 \qquad con \qquad \theta(t_0)=\theta_0$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=\beta_0$$

Ecuación del péndulo simple

* Aproximamos las $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ con derivadas numéricas centrales y se reemplazan en el sistema original

$$\frac{1}{\Delta t^2}\left(\theta_{(t-\Delta t)}-2\theta_{(t)}+\theta_{(t+\Delta t)}\right)+\frac{g}{L}\,\theta_{(t)}=0$$

Donde podemos escribir

$$\theta_{(t+\Delta t)}=\left(2-\frac{g\Delta t^2}{L}\right)\theta_{(t)}-\theta_{(t-\Delta t)}$$

Para el valor inicial de t (t=t0), primero se halla una aproximación $\theta_{(t-\Delta t)}$ mediante Serie de Taylor:

$$\theta_{(t0-\Delta t)}=\theta_{(t0)}-\Delta t\frac{d\theta_{(t0)}}{dt}+\frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2\theta_{(t0)}}{dt^2}+O(\Delta t^3)$$

$$-\frac{g}{L}\theta_{(t0)}$$

MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

SOLUCIÓN: Consideramos L=1, g=9.8 con condiciones iniciales en t_0

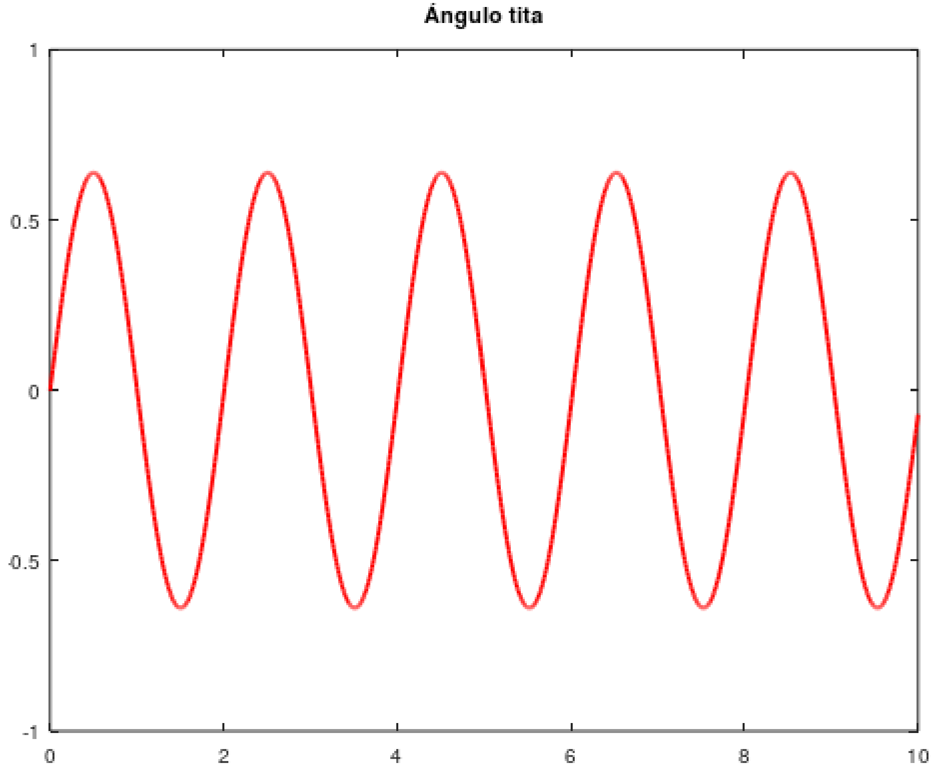
$$\begin{cases} \theta(t_0) = 0 \\ \dfrac{d\theta(t)}{dt} = 2 \end{cases}$$

```
function Diferencia_pendulo
tita0=0;
dtita=2;
g=9.8;
L=1;
t0=0;
dt=0.01;
t=0:dt:10;
Ndt=length(t);
tita=zeros(1,Ndt);
titac=tita0;
tac=0;
titan=titac-dt*dtita+0.5*dt^2*(-g/L*titac);
t(1)=tac
tita(1,1)=titac;
for i=2:Ndt
  titanu=(2-g*dt^2/L)*titac-titan;
  t(i)=tac+dt;
  tita(1,i)=titanu;
% actualizacion de variables
  titan=titac;
  titac=titanu;
  tac=t(i);
endfor

figure(1)
plot(t,tita(1,:),'r','LineWidth',2)
title ('Ángulo tita-y1')
endfunction
```

$$\theta_{(t0-\Delta t)} = \theta_{(t0)} - \Delta t\frac{d\theta_{(t0)}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2\theta_{(t0)}}{dt^2}$$

$$\theta_{(t+\Delta t)} = \left(2 - \frac{g\Delta t^2}{L}\right)\theta_{(t)} - \theta_{(t-\Delta t)}$$



MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

Teniendo en siguiente sistema EDO de segundo orden con valores iniciales

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1(t)\\\ddot{x}_2(t)\\\ddot{x}_3(t)\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\\\dot{x}_3(t)\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\4 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}5e^t+8e^{2t}+\cos t\\-8e^{2t}+4e^t\\-\cos t-3\,sen\,t+e^t\end{Bmatrix}$$

$$con\ \begin{Bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\x_3(0)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\2\\1\end{Bmatrix}\qquad\begin{Bmatrix}\dot{x}_1(0)\\\dot{x}_2(0)\\\dot{x}_3(0)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\4\\0\end{Bmatrix}$$

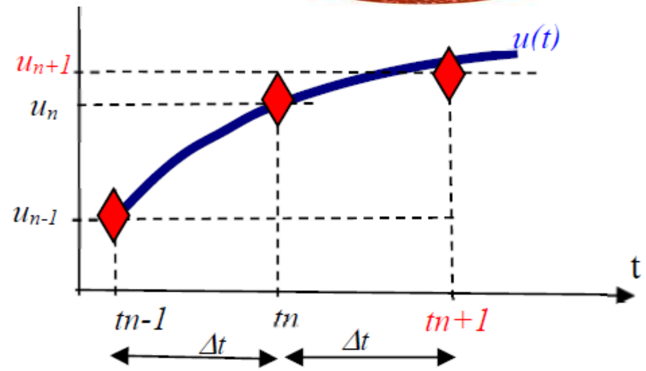
En forma generalizada resulta

$$\mathbf{M}\,\ddot{u}_{(t)}+\mathbf{C}\,\dot{u}_{(t)}+\mathbf{K}\,u_{(t)}=\mathbf{R}(t)\qquad con\qquad u_{(t)}=x_{(t)}$$

Y valores iniciales $\dot{u}_{(t0)}\ y\ u_{(t0)}$ conocidos podemos obtener una solución aproximada mediante el método de Diferencia central de la siguiente manera:

MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

$$\mathbf{M}\,\ddot{u}_{(t)} + \mathbf{C}\,\dot{u}_{(t)} + \mathbf{K}\,u_{(t)} = \mathbf{R}(t) \qquad con \qquad u_{(t)} = x_{(t)}$$



* Aproximamos las $\ddot{u}_{(t)}$ y $\dot{u}_{(t)}$ con derivadas numéricas centrales y se reemplazan en el sistema original

$$\mathbf{M}\frac{1}{\Delta t^2}\left(u_{(t-\Delta t)} - 2u_{(t)} + u_{(t+\Delta t)}\right) + \mathbf{C}\frac{1}{2\Delta t}\left(-u_{(t-\Delta t)} + u_{(t+\Delta t)}\right) + \mathbf{K}\,u_{(t)} = \mathbf{R}(t)$$

* Ordenando los términos nos queda

$$\left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\right)u_{(t+\Delta t)} = \Delta t^2\mathbf{R}(t) + (2\mathbf{M} - \Delta t^2\mathbf{K})u_{(t)} + \left(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C} - \mathbf{M}\right)u_{(t-\Delta t)}$$

O bien

$$u_{(t+\Delta t)} = \mathbf{b}(t) + \mathbf{D}_{(\Delta t)}u_{(t)} + \mathbf{H}_{(\Delta t)}u_{(t-\Delta t)}$$

donde $\mathbf{G} = \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\right)^{-1}$ $\quad \mathbf{D} = \mathbf{G}\,(2\mathbf{M} - \Delta t^2\mathbf{K})$ $\quad \mathbf{H} = \mathbf{G}\left(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C} - \mathbf{M}\right)$ $\quad \mathbf{b} = \Delta t^2\,\mathbf{G}\,\mathbf{R}(t)$

MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

$$u_{(t+\Delta t)} = \mathbf{b}(t) + \mathbf{D}_{(\Delta t)} u_{(t)} + \mathbf{H}_{(\Delta t)} u_{(t-\Delta t)}$$

Entonces se obtiene un algoritmo recursivo de cálculo en el cual conocidos el valor actual $u_{(t)}$ y el valor anterior $u_{(t-\Delta t)}$ de la función discreta, se puede calcular el valor futuro de la misma $u_{(t+\Delta t)}$, con un error de truncamiento local de orden 4.

Al comenzar el proceso, si nos paramos en t0 tenemos los valores iniciales conocidos $u_{(t0)}$ y $\frac{du_{(t0)}}{dt}$ es decir que conocemos el valor actual de la función. Entonces necesitamos conocer el valor anterior de la función. Para esto se recurre a la Serie de Taylor

$$u_{(t-\Delta t)} = u_{(t)} - \Delta t \frac{du_{(t)}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 u_{(t)}}{dt^2} + O(\Delta t^3)$$

$$u_{(t0-\Delta t)} = u_{(t0)} - \Delta t \frac{du_{(t0)}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 u_{(t0)}}{dt^2}$$

MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

RESUMIENDO $\mathbf{M}\,\ddot{u}_{(t)} + \mathbf{C}\,\dot{u}_{(t)} + \mathbf{K}\,u_{(t)} = \mathbf{R}(t)$ con *valores iniciales conocidos* $u_{(t)}$ *y* $\dot{u}_{(t)}$

Por medio del método de diferencia central nos queda

$$u_{(t+\Delta t)} = \mathbf{b}(t) + \mathbf{D}_{(\Delta t)} u_{(t)} + \mathbf{H}_{(\Delta t)} u_{(t-\Delta t)}$$

donde $\mathbf{G} = \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\right)^{-\mathbf{1}}$ $\mathbf{D} = \mathbf{G}\,(2\mathbf{M} - \Delta t^2\mathbf{K})$ $\mathbf{H} = \mathbf{G}\left(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C} - \mathbf{M}\right)$ $\mathbf{b} = \Delta t^2\,\mathbf{G}\,\mathbf{R}(t)$

el punto anterior al inicial se obtiene

$$u_{(t-\Delta t)} = u_{(t)} - \Delta t \frac{du_{(t)}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2 u_{(t)}}{dt^2}$$

EJEMPLO APLICANDO MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

EJEMPLO $\mathbf{M}\,\ddot{u}_{(t)} + \mathbf{C}\,\dot{u}_{(t)} + \mathbf{K}\,u_{(t)} = \mathbf{R}(t)$ con *valores iniciales conocidos* $u_{(t)}$ *y* $\dot{u}_{(t)}$

Por medio del método de diferencia central nos queda

$$u_{(t+\Delta t)} = \mathbf{b}(t) + \mathbf{D}_{(\Delta t)}u_{(t)} + \mathbf{H}_{(\Delta t)}u_{(t-\Delta t)}$$

donde $\mathbf{G} = \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\right)^{-1}$ $\mathbf{D} = \mathbf{G}\,(2\mathbf{M} - \Delta t^2\mathbf{K})$ $\mathbf{H} = \mathbf{G}\left(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C} - \mathbf{M}\right)$ $\mathbf{b} = \Delta t^2\,\mathbf{G}\,\mathbf{R}(t)$

el punto anterior al inicial se obtiene

$$u_{(t-\Delta t)} = \underbrace{u_{(t)}}_{u_{(t0)}} - \Delta t \underbrace{\frac{du_{(t)}}{dt}}_{\dot{u}_{(t0)}} + \frac{\Delta t^2}{2} \underbrace{\frac{d^2u_{(t)}}{dt^2}}_{\text{EDO}}$$

Esto podemos programarlo en OCTAVE para obtener la solución u

APLICANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

EJERCICIO: Encontrar el valor de las incógnitas $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ entre t=0 y t=3

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1(t)\\ \ddot{x}_2(t)\\ \ddot{x}_3(t)\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}5e^t+8e^{2t}+\cos t\\ -8e^{2t}+4e^t\\ -\cos t-3\,sen\,t+e^t\end{Bmatrix}$$

$$con\ \begin{Bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\\ x_3(0)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix}\dot{x}_1(0)\\ \dot{x}_2(0)\\ \dot{x}_3(0)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 4\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}\,\ddot{x}_{(t)}+\mathbf{C}\,\dot{x}_{(t)}+\mathbf{K}\,x_{(t)}=\mathbf{R}(t) \quad \text{con } valores\ iniciales\ conocidos\ x_{(t)}\ y\ \dot{x}_{(t)}$$

Por medio del método de diferencia central nos queda

$$x_{(t+\Delta t)}=\mathbf{b}(t)+\mathbf{D}_{(\Delta t)}x_{(t)}+\mathbf{H}_{(\Delta t)}x_{(t-\Delta t)}$$

donde $\mathbf{G}=\left(\mathbf{M}+\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\right)^{-\mathbf{1}}$ $\quad\mathbf{D}=\mathbf{G}\,(2\mathbf{M}-\Delta t^2\mathbf{K})$ $\quad\mathbf{H}=\mathbf{G}\left(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}-\mathbf{M}\right)$ $\quad\mathbf{b}=\Delta t^2\,\mathbf{G}\,\mathbf{R}(t)$

el punto anterior al inicial se obtiene

$$x_{(t-\Delta t)}=x_{(t)}-\Delta t\frac{dx_{(t)}}{dt}+\frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2x_{(t)}}{dt^2}$$

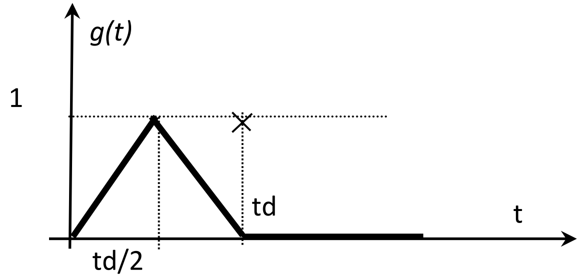
EJEMPLO PRÁCTICO APLICANDO MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

PRÁCTICA

$$M\,\frac{d^2(\overrightarrow{z})}{dt^2} + K\,\vec{z} = \vec{b}\cdot g(t)$$

Siendo

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \frac{50}{19}\begin{Bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ 8 \\ 5 \end{Bmatrix}$$



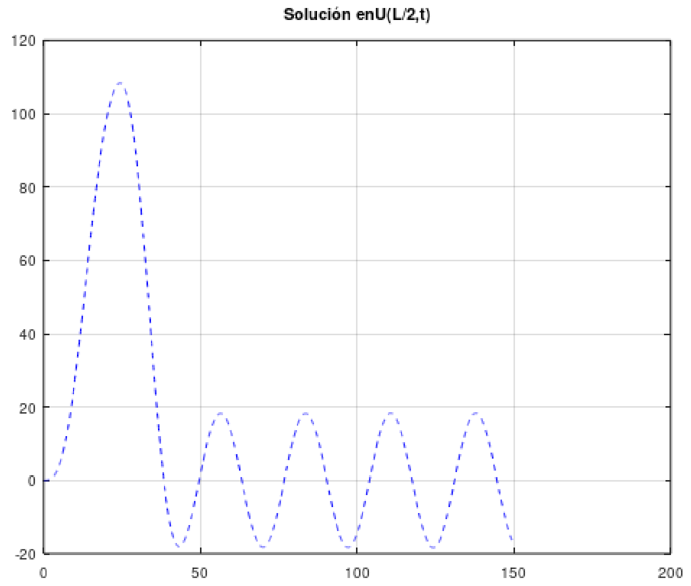
Donde

td=45; tf=150; dt=0.1 y con el vector z y el vector dz/dt en t=0 vale cero.

EJEMPLO APLICANDO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

SOLUCIÓN

Gráfica de z3(t)



- Calcular en todo t la función v3=dz3/dt
- Calcular para el tiempo tf/2 la función x3=dz3/dx siendo el paso en x igual a 1.

•Calcular la función C(t) $= \int_0^t v3(t) \; dt$