INTEGRACIÓN NUMÉRICA

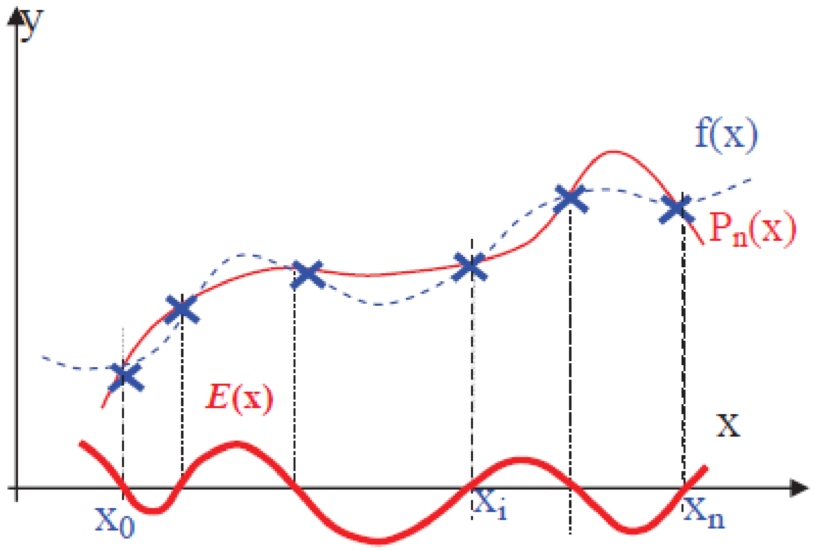
Prof. Ing. Mauro Grioni

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Si f(x) está dada en forma ***discreta*** es posible ***interpolar*** f(x) colocando un **polinomio $P_n(x)$,** de grado n, por los (n+1) puntos datos. Si f(x) está dada en forma ***analítica*** se pueden *"extraer"* esos (n+1) puntos, y tener la versión discreta de f(x).

Es posible expresar a f(x) como suma del Polinomio de Interpolación mas la función Error de Interpolación

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots.(x-x_n)$$



Resulta posible obtener la integral en la forma

$$I = \int_{X_0}^{X_n} f(x)dx = \int_{X_0}^{X_n} (P_n(x) + \varepsilon_n(x))dx = \int_{X_0}^{X_n} P_n(x)dx + \int_{X_0}^{X_n} \varepsilon_n(x)dx$$

$$I = \int_{X_0}^{X_n} f(x)dx = \sum_{k=0,N} w_k \cdot y_k + E_n = I_n + E_n,$$

Resultando, la aproximación de la integral *In* y su Error de Integración *En* en la forma:

$$I_n = \int_{X_0}^{X_n} P_n(x)dx = \sum_{k=0,N} w_k \cdot y_k \qquad E_n = \int_{X_0}^{X_n} \varepsilon_n(x)dx = \int_{X_0}^{X_n} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)dx$$

INTEGRACIÓN NUMÉRICA NEWTON-COTES

Las reglas de integración de Newton Cotes se basan en interpolar con **Polinomios de LAGRANGE**. Para los n+1 puntos datos, el polinomio interpolante es

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)$$

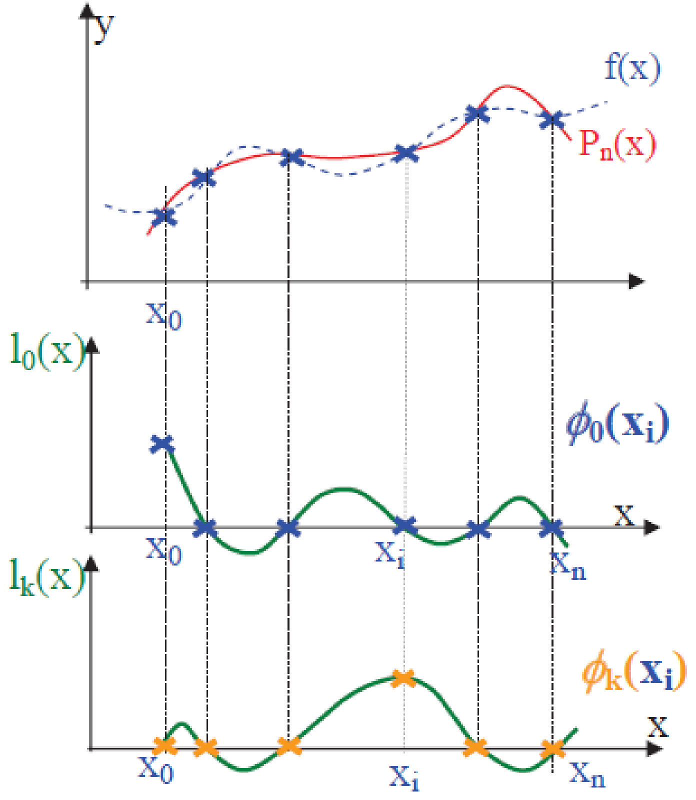
Así el valor aproximado de la integral

$$I_n = \int_{X_0}^{X_n} \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)dx = \sum_{k=0,N} \int_{X_0}^{X_n} y_k \cdot l_k(x) \cdot dx$$

$$I_n = \sum_{k=0,N} y_k \cdot \int_{X_0}^{X_n} l_k(x) \cdot dx \cdot = \sum_{k=0,N} y_k \cdot w_k$$

resulta

$$w_k = \int_{X_0}^{X_n} l_k(x) \cdot dx = \int_{X_0}^{X_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \cdot dx$$



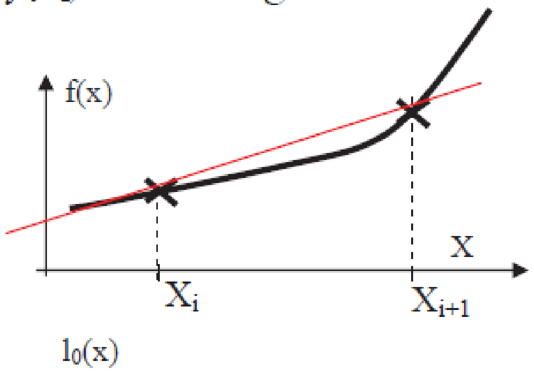
Así el Error de la aproximación de la integral

$$\mathcal{E}_n = \int_{X_0}^{X_n} \varepsilon_n(x)dx = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{X_0}^{X_n} (x - x_0)\cdots(x - x_n)dx = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot h^{n+2} \cdot \alpha_{n+1}$$

INTEGRACIÓN NUMÉRICA TRAPECIOS SIMPLES

Es una regla de integración de Newton – Cotes por 2 puntos $(x_i;y_i)$, $(x_{i+1};y_{i+1})$. La integral

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cdot dx$$



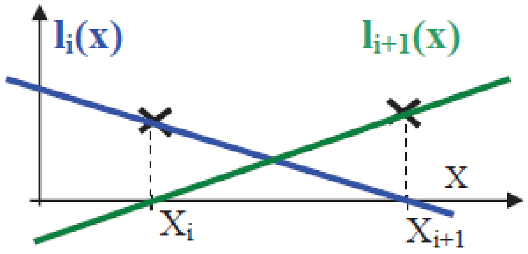
Se resuelve con un polinomio interpolante degrado uno

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [P_1(x) + \varepsilon_1(x)]dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [y_i \cdot l_i(x) + y_{i+1}\cdot l_{i+1}(x)]dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varepsilon_1(x)dx,$$

donde

$$l_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} = -\frac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}$$ es una recta que vale 1 en x_i y 0 en x_{i+1}.

$$l_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$ es una recta que vale 0 en x_i y 1 en x_{i+1}.



$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[y_i \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1}\cdot \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right] dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varepsilon_1(x)dx,$$

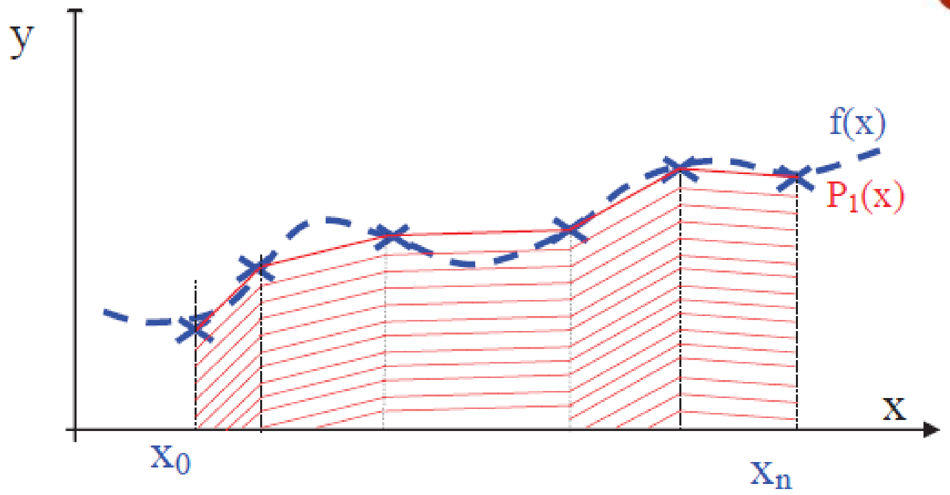
$$I = y_i \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} dx + y_{i+1}\cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varepsilon_1(x)dx = y_i \cdot w_i + y_{i+1}\cdot w_{i+1} + E_1$$

y, llamando **paso h_i** a la diferencia x_{i+1}-x_i y operando, se puede llegar a

$$I = h_i\left[\frac{y_i}{2} + \frac{y_{i+1}}{2}\right] + \mathcal{E}_1 = I_1 + \mathcal{E}_1,$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}\left(-\frac{1}{6}\right)h^3 = -\frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi)$$ para cierto punto $\xi \in (x_a, x_b)$.

INTEGRACIÓN NUMÉRICA TRAPECIOS MULTIPLES



Se busca I ∈ R, $I = \int_{X_0}^{X_n} f(x)dx$.

Se divide el intervalo $[x_0; x_n]$
en subintervalos $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{n-1}; x_n]$. Así

$$I = \int_{X_0}^{X_1} f(x)\,dx + \int_{X_1}^{X_2} f(x)dx + \cdots + \int_{X_{n-1}}^{X_n} f(x)\,dx.$$

En cada uno de los n subintervalos se aplica la regla de los trapecios, se aplica trapecios simple

$$I = h_0\frac{(y_0+y_1)}{2} + E_1(h_0^{\,3}) + h_1\frac{(y_1+y_2)}{2} + E_1(h_1^{\,3}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + h_{n-1}\frac{(y_{n-1}+y_n)}{2} + E_1(h_{n-1}^{\,3}).$$

Si todos los intervalos tienen igual longitud h_i=h, esa fórmula se simplifica y se tiene la **regla de trapecios múltiple**:

$$I = h\left[\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_n}{2}\right] + E_{1M} = \frac{h}{2}\left[y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} 2\cdot y_i + y_n\right] + E_{1M},$$

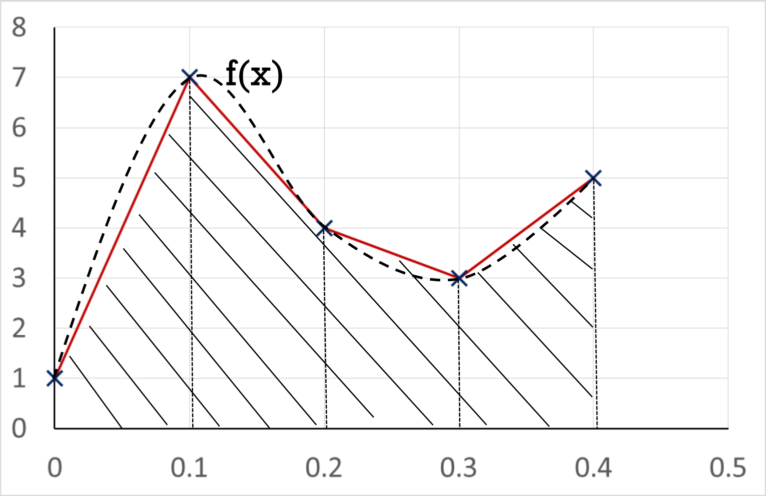
donde E_{1M} es el error total que se acumula al sumar los n errores provenientes de la aplicación de la regla en cada subintervalo, y está dado por

$$E_{1M} = -\frac{(x_n - x_0)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi)$$

INTEGRACIÓN NUMÉRICA TRAPECIOS MÚLTIPLES

EJEMPLO

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y	1	7	4	3	5




```
function integral_trapecios_puntos
%Datos
  x=[0, 0.1, 0.2, 0.3 ,0.4]     % abscisas
  y=[1, 7, 4, 3 ,5]             % ordenadas
  dx=0.1;                       % paso o incremento
  N=length(x)                   % cantidad de puntos
% Integral Trapecio Compuesto
  c(1)=y(1)/2;                % Primer intervalo
  c(N)=y(N)/2;                % último intervalo
  int=0;                      % contador
  for i=2:N-1
    int=int+y(i);           % Suma de los intervalor internos
  endfor
  I=dx*(c(1)+int+c(N))      % cálculo de la integral
endfunction
```

INTEGRACIÓN ANALÍTICA

EJEMPLO: Supongamos que queremos obtener la integral de

$$f(x) = sen(2x) \qquad entre\ 0\ y\ \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow Integral\ de\ f(x) \qquad entre\ 0\ y\ \frac{\pi}{2}\ \ resulta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(2x)\, dx = -\frac{1}{2}[cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{1}{2}(-1-1) \qquad \rightarrow$$

$$\boxed{I = 1}$$

INTEGRACIÓN NUMÉRICA TRAPECIOS MÚLTIPLES

EJERCICIO: Elaborar un algoritmo para integrar numéricamente la siguiente función f(x) por el método de trapecios múltiples entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ utilizando 20 pasos, es decir utilizar un $\mathrm{h} = (\frac{\pi}{2} - 0)/20$.

$$f(x) = sen(2x) \qquad entre\ 0\ y\ \frac{\pi}{2} \qquad en\ 20\ pasos$$

INTEGRACIÓN NUMÉRICA TRAPECIOS MÚLTIPLES

EJERCICIO: Elaborar un algoritmo para integrar numéricamente la siguiente función f(x) por el método de trapecios múltiples entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ utilizando 20 pasos, es decir utilizar un $\mathrm{h} = (\frac{\pi}{2} - 0)/20$.

$$f(x) = sen(2x) \qquad entre\ 0\ y\ \frac{\pi}{2} \qquad en\ 20\ pasos$$

```
function integral_trapecios_seno
%Datos
h=pi()/20;      % paso o incremento
x=0:h:pi()/2;   % obtención de las abscisas
ul=length(x)     % cantidad de puntos
y(:,1)=sin(2*x)     % Discretización de la función continua

% Integración trapecios compuesto
c(1)=h/2;        % Primer intervalo
c(ul)=h/2      % último intervalo
int=0;
for i=2:ul-1
  int=int+y(i)*h
end
I=c(1)*y(1)+int+c(ul)*y(ul)      % cálculo de la integral

% Gráfico
figure (1)
plot(x,y, 'r' )
endfunction
```

INTEGRACIÓN NUMÉRICA SIMPSON SIMPLE

Es una cuadratura de Newton – Cotes con n = 2, es decir con tres puntos. Se interpola mediante un polinomio de Lagrange de grado dos y luego se integra en forma aproximada ese polinomio.

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \; ,$$

Si $\qquad f(x) = \sum Y_i l_i(x) + E_2(x), \qquad$ con $i = 0,1,2,$

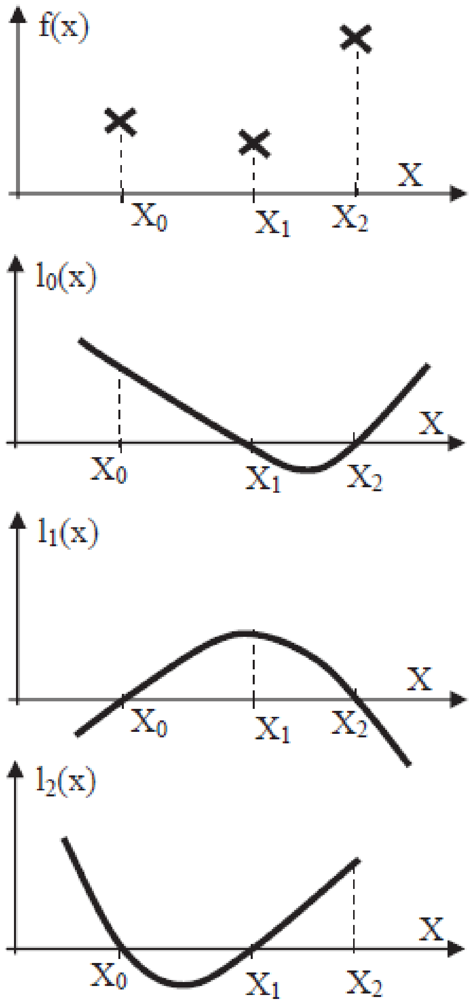
$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \quad l_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\varepsilon_2(x) = \frac{f^{(3)}}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$I_2 = \sum_{i=0}^{2} y_i \omega_i \qquad \omega_i = \int_{x_0}^{x_2} l_i(x)dx, \; i = 0,1,2. \quad \mathcal{E}_2 = \int_{x_0}^{x_2} \varepsilon_2(x)dx$$

Entonces, si los intervalos son iguales ($h_1 = h_2 = h$), se tiene:

$$I = h\left[\frac{1}{3}y_0 + \frac{4}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$



INTEGRACIÓN NUMÉRICA SIMPSON COMPUESTA

$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + \sum_{i\,\text{impares}} 4f(x_i) + \sum_{i\,\text{pares}} 2f(x_i) + f(x_n) \right] - \frac{(x_n - x_0)h^4}{90 \cdot 2} f^{(4)}(\xi).$$

Al pasar de la regla de trapecios a la regla de trapecios compuesta el orden de error pasó de $O(h^3)$ a $O(h^2)$, disminuyendo la precisión; lo mismo sucede en el caso de la regla de Simpson, que pasa de un error de orden $O(h^5)$ a un error del orden $O(h^4)$ en Simpson compuesta

INTEGRACIÓN NUMÉRICA SIMPSON COMPUESTO

EJERCICIO: Elaborar un algoritmo para integrar numéricamente la siguiente función f(x) por el método de Simpson múltiple entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ utilizando 20 pasos, es decir utilizar un $\mathrm{h} = (\frac{\pi}{2} - 0)/20$.

$$f(x) = sen(2x) \qquad entre\ 0\ y\ \frac{\pi}{2} \qquad en\ 20\ pasos$$

INTEGRACIÓN NUMÉRICA SIMPSON COMPUESTO

EJERCICIO: Elaborar un algoritmo para integrar numéricamente la siguiente función f(x) por el método de Simpson múltiple entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ utilizando 20 pasos, es decir utilizar un $\mathrm{h} = (\frac{\pi}{2} - 0)/20.$

$$f(x) = sen(2x) \qquad entre\ 0\ y\ \frac{\pi}{2} \qquad en\ 20\ pasos$$

```
function integral_simpson_seno
h=(pi/2)/10        % paso o incremento
x=0:h:pi()/2;      % obtención de las abscisas
ul=length(x)        % cantidad de puntos
y=sin(2*x);        % Discretización de la función continua

% Integración Simpson compuesto
intimpar=0;      % acumulador impar
intpar=0;        % acumulador par
for i=2:2:ul-1
  intimpar=intimpar+4*y(i);  % Suma de los intervalor internos impar
endfor

for i=3:2:ul-2
  intpar=intpar+2*y(i);     % Suma de los intervalor internos par
endfor
I=h/3*(y(1)+intimpar+intpar+y(ul))    % cálculo de la integral

% Gráfico
figure (1)
plot(x,y, 'r' )
endfunction
```

Resultado I = 1.0000

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

Cada vez que se tenga dos aproximaciones de una integral I es posible mejorar la aproximación con extrapolación de Richardson. Supongamos que se usa cierta regla de integración, con orden de error de h para hallar dos aproximaciones de I utilizando dos pasos distintos, h1 y h2.

$$I = \frac{\beta I_{(h_2)} - I_{(h_1)}}{\beta - 1} \qquad \therefore \qquad \beta = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^n$$

$$n = orden\ de\ error\ con\ el\ que\ se\ trabaja$$

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

EJEMPLO: Utilizando la regla de integración Simpson Compuesta para el ejemplo anterior de f(x)=sen(2x) resolver para 6 pasos y para 10 pasos (caso anteriormente visto)

$$f(x) = sen(2x) \quad entre\ 0\ y\ \frac{\pi}{2} \quad en\ 6\ pasos \quad \rightarrow \quad h_1 = 0.2618 \quad \rightarrow \quad I_{h_1} = 1.0004$$

$$f(x) = sen(2x) \quad entre\ 0\ y\ \frac{\pi}{2} \quad en\ 10\ pasos \quad \rightarrow \quad h_2 = 0.1571 \quad \rightarrow \quad I_{h_2} = 1.0001$$

$$n = 4\ (orden\ de\ error\ para\ la\ regla\ de\ integración\ Simpson\ Compuesta)$$

$$\beta = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^n = \left(\frac{0.2618}{0.1571}\right)^4 = 7.712$$

$$I = \frac{\beta I_{(h_2)} - I_{(h_1)}}{\beta - 1} = \frac{7.712 * 1.0001 - 1.0004}{7.712 - 1} = 1.000055$$

INTEGRACIÓN DE ROMBERG

Consiste en aplicar sucesivas **extrapolaciones de Richardson** sobre una serie de aproximaciones de **Trapecios múltiples** para pasos h que se reducen a la mitad

Aumenta el orden del error p

Aumenta la *cantidad de paneles*

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} O(h^2) & O(h^4) & O(h^6) \end{array} \\
\begin{array}{c} h \\ h/2 \\ h/4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
R_{1,1} & \cdot & \cdot \\
R_{2,1} & R_{2,2} & \cdot \\
R_{3,1} & R_{2,2} & R_{3,3}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

INTEGRACIÓN DE ROMBERG

EJEMPLO:

h	Integral trapecios	Richardson con n=2 $R_{i,1}=(4*I_i-I_{i-1})/3$	Richardson con n=4 $R_{i,2}=(16*I_i-I_{i-1})/15$
π/2	0		
π/4	0.7854	1.0472	
π/8	0.94806	1.00228	**0.99928**

≈

Solución analítica

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(2x)\,dx=-\frac{1}{2}[cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$