RESOLUCIÓN ECUACIONES EN DIFERENCIALES PARCIALES

Prof. Ing. Mauro Grioni

ECUACIONES DIFERENCIALES A DERIVADAS PARCIALES

PLANTEO DEL PROBLEMA

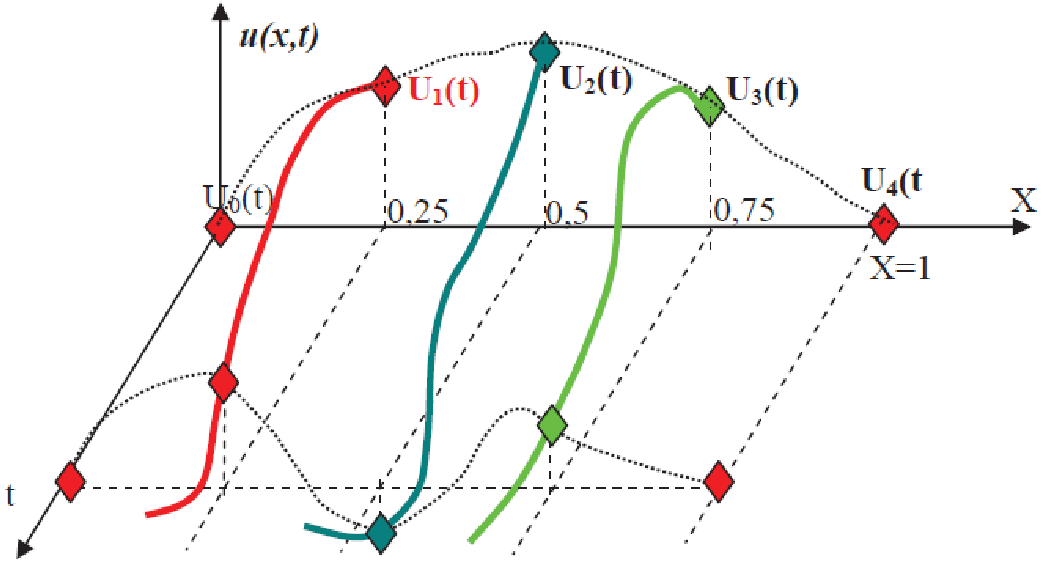
Se busca $u(x,t)$ solución de

$$-12\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0 \quad en\ \ \Omega=\{x\,\varepsilon\,R:0\le x\le 1\}$$

$$u(0,t)=0 \qquad\qquad u(x,0)=\sin(\pi\cdot x)$$

$$u(1,t)=0 \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=3$$

En vez de encontrar la solución exacta $u(x,t)$ en cada uno y todos los puntos del dominio Ω, se plantea encontrar una ***solución aproximada en forma de función discreta en la variable x, aunque continua en la variable t***. Se pretende encontrar las funciones $U_k(t)=u(X_k,t)$ con k=0,N, en N+1 puntos elegidos del dominio x, identificados con su abscisa X_k.



ECUACIONES DIFERENCIALES A DERIVADAS PARCIALES

DISCRETIZACIÓN EN X

En cada uno de los X_k se puede plantear la ecuación diferencial a resolver pero con una aproximación de la derivada segunda respecto a x en forma de derivada numérica; y con la derivada respecto de la variable t en forma analítica evaluada en esa abscisa X_k.

Así se puede escribir:

en X_0 se debe cumplir que: $$U_0(t) = 0$$

en X_1 se debe cumplir que: $$-\frac{12}{0{,}25^2}\left[U_0(t) - 2\cdot U_1(t) + U_2(t)\right] + (X_1)^2 \cdot \frac{d^2U_1(t)}{dt^2} = 0$$

en X_2 se debe cumplir que: $$-\frac{12}{0{,}25^2}\left[U_1(t) - 2\cdot U_2(t) + U_3(t)\right] + (X_2)^2 \cdot \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} = 0$$

en X_3 se debe cumplir que: $$-\frac{12}{0{,}25^2}\left[U_2(t) - 2\cdot U_3(t) + U_4(t)\right] + (X_3)^2 \cdot \frac{d^2U_3(t)}{dt^2} = 0$$

en X_4 se debe cumplir que: $$U_4(t) = 0$$

SISTEMA EDO DE 2 ORDEN

$$\frac{12}{0{,}25^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}25^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}50^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}75^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{d^2U_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2U_3(t)}{dt^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

con las condiciones iniciales $\begin{Bmatrix} U_1(0) \\ U_2(0) \\ U_3(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} sen(\pi \cdot 0{,}25) \\ sen(\pi \cdot 0{,}50) \\ sen(\pi \cdot 0{,}75) \end{Bmatrix}$ y $\begin{Bmatrix} \frac{dU_1}{dt}(0) \\ \frac{dU_2}{dt}(0) \\ \frac{dU_3}{dt}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$