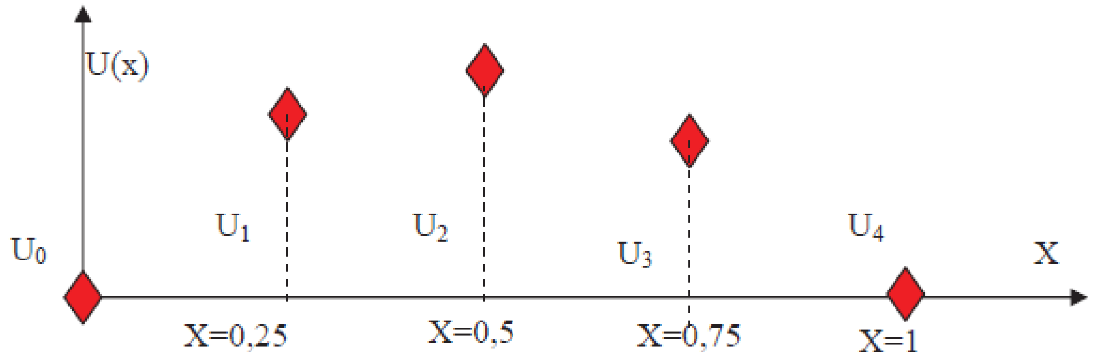
APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

Se busca *u(x)* solución de

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}+u(x)-x=0 \quad en \;\; \Omega=\{x\,\varepsilon\, R:0\leq x\leq 1\}$$
$$u(0)=0$$
$$u(1)=0$$

se plantea encontrar una ***solución aproximada en forma de función discreta***, sólo en algunos puntos elegidos del dominio Ω, equidistantes entre sí, identificados con su abscisa X_k.

Es decir, se busca $U(X_k)=U_k$ con k=0,N; ***función discreta*** que es una aproximación de la función continua *u(x)*.



APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) - x = 0$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)[U_{k-1} - 2U_k + U_{k+1}]$$

Entonces en cada x_k se puede plantear la ecuación diferencial a resolver pero con una aproximación de la derivada segunda en forma de derivada numérica y nos quedaría

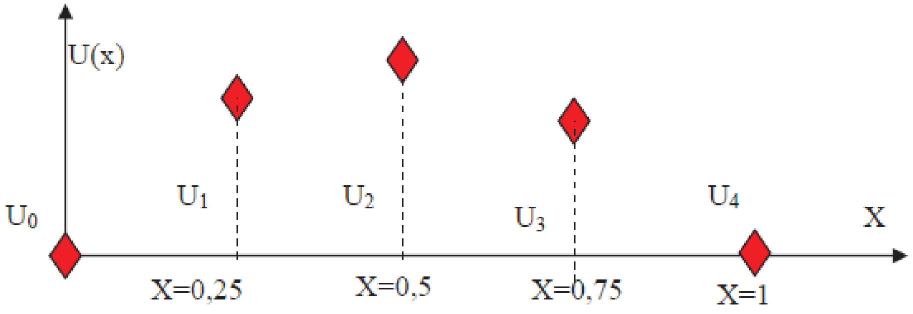
$$-\frac{1}{\Delta x^2}[U_{k-1} - 2U_k + U_{k+1}] + U_k - X_k = 0$$

APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}+u(x)-x=0 \quad en \;\; \Omega=\{x\,\varepsilon\, R:0\le x\le 1\}$$

$$u(0)=0$$

$$u(1)=0$$



Si se consideran 5 puntos en todo el dominio, que son 3 en el interior y uno en cada uno de los bordes, es posible plantear

en X_0 se debe cumplir que: $U_0=0$

en X_1 se debe cumplir que: $-\frac{1}{0{,}25^2}\left[U_0-2\cdot U_1+U_2\right]+U_1-X_1=0$

en X_2 se debe cumplir que: $-\frac{1}{0{,}25^2}\left[U_1-2\cdot U_2+U_3\right]+U_2-X_2=0$

$$-\frac{1}{\Delta x^2}\left[U_{k-1}-2U_k+U_{k+1}\right]+U_k-X_k=0$$

en X_3 se debe cumplir que: $-\frac{1}{0{,}25^2}\left[U_2-2\cdot U_3+U_4\right]+U_3-X_3=0$

en X_4 se debe cumplir que: $U_4=0$

O bien en forma de sistema de ecuaciones lineales

$$\left[\frac{1}{0{,}25^2}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}32+1&-16&0\\-16&32+1&-16\\0&-16&32+1\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0{,}25\\0{,}5\\0{,}75\end{Bmatrix}$$

La solución aproximada resulta $\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0{,}03488525\\0{,}05632582\\0{,}05003676\end{Bmatrix}$

La solución exacta de la ecuación diferencial es $u_{(x)}=x-\frac{senh(x)}{senh(1)}$ ➡ $\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.0350476\\0.0565905\\0.0502758\end{Bmatrix}$