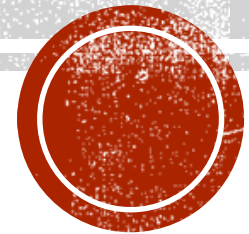


SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Prof. Ing. Mauro Grioni



INTRODUCCIÓN



MÉTODOS ITERATIVOS

Dentro de los métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales $A \cdot x - b = 0$ vamos a trabajar con:

- Jacobi
- Gauss-Seidel

MÉTODO JACOBI



Dada una Matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, un vector $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^N$, el sistema de ecuaciones lineales asociado es

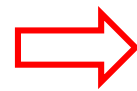
$$\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \frac{1}{a_{11}}$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \frac{1}{a_{22}}$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) \frac{1}{a_{33}}$$



$$x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(- \frac{a_{ij} \cdot x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Para $i = 1, 2, \dots, n$
Para $a_{ii} \neq 0$

Con una tolerancia máxima ε de:

$$\varepsilon > \frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k\|} > 0$$

CRITERIO DE CONVERGENCIA

Matriz \mathbf{A} estrictamente
diagonal dominante

MÉTODO JACOBI



EJEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

```
function jacobi
N=3
tol=1e-2
A=[-3 1 -2;4 -5 0; 1 -3 6];
b=[-2; 5; 6];
x=zeros(N,1);
er=1000;
it=0;
while (er>tol)
it = it+1;
for i=1:N
sum=0;
for j=1:N
if (j~=i)
sum = sum + A(i,j)*x(j);
end
end
xn(i)=(b(i)-sum)/A(i,i);
e(i)=abs(xn(i)-x(i));
end
x=xn;
er=max(e);
end
disp('El vector x es'), x
disp('El error es'), er
disp('La iteraciones son:'), it
end
```

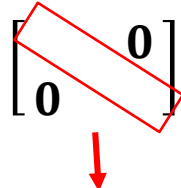
MÉTODO JACOBI

MÉTODO ALTERNATIVO

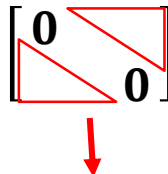
Dada una Matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, un vector $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^N$, el sistema de ecuaciones lineales asociado es

$$\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

Si consideramos a \mathbf{A} como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{B} \quad \therefore \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} & & 0 \\ 0 & & \\ & & \end{bmatrix},$$


Matriz diagonal

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$


Matriz de ceros en la diagonal

Entonces el sistema se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot \underline{\mathbf{x}} &= \underline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{x}} &= -\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \mathbf{D}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

$$\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}$$

$$\mathbf{T} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad \underline{\mathbf{c}} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

MÉTODO DE JACOBI



EJERCICIO

Resolver el siguiente sistema $A \cdot x = b$ por el Método de Jacobi utilizando el planteamiento alternativo $A = D + B$. Considere como condición inicial al vector $x=0$, un error o tolerancia de 0.01 y obtenga la cantidad de iteraciones necesarias para obtener ese orden de error. *Comentario:* El término D^{-1} es la inversa de **D** y se expresa en Octave/Matlab como *inv(D)*.

$$A = \begin{bmatrix} 50 & -25 & 0 & 0 \\ -25 & 50 & -25 & 0 \\ 0 & -25 & 50 & -25 \\ 0 & 0 & -25 & 50 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

MÉTODO GAUSS-SEIDEL



Dada una Matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, un vector $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^N$, el sistema de ecuaciones lineales asociado es

$$\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

$$x_1^{k+1} = (b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k) \frac{1}{a_{11}} \longrightarrow \text{Calculamos el nuevo } x_1^{k+1}$$

$$x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k) \frac{1}{a_{22}}$$

$$x_3^{k+1} = (b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1}) \frac{1}{a_{33}}$$

MÉTODO GAUSS-SEIDEL



Dada una Matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, un vector $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^N$, el sistema de ecuaciones lineales asociado es

$$\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

$$x_1^{k+1} = (b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k) \frac{1}{a_{11}}$$

$$x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k) \frac{1}{a_{22}}$$

—————> Calculamos el nuevo x_2^{k+1}

$$x_3^{k+1} = (b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1}) \frac{1}{a_{33}}$$

MÉTODO GAUSS-SEIDEL



Dada una Matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, un vector $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^N$, el sistema de ecuaciones lineales asociado es

$$\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= (b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k) \frac{1}{a_{11}} \\ x_2^{k+1} &= (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k) \frac{1}{a_{22}} \\ x_3^{k+1} &= (b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1}) \frac{1}{a_{33}} \end{aligned} \longrightarrow \text{Calculamos el nuevo } x_3^{k+1}$$

MÉTODO GAUSS-SEIDEL



Dada una Matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, un vector $\underline{b} \in \mathbb{R}^N$, el sistema de ecuaciones lineales asociado es

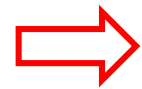
$$\mathbf{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

$$x_1^{k+1} = (b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k) \frac{1}{a_{11}}$$

$$x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k) \frac{1}{a_{22}}$$

$$x_3^{k+1} = (b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1}) \frac{1}{a_{33}}$$



$$x_i^{k+1} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k + b_i}{a_{ii}} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n ; a_{ii} \neq 0 ; j \neq i$$

Con una tolerancia máxima ε de:

$$\varepsilon > \frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k\|} > 0$$

CRITERIO DE CONVERGENCIA

Matriz \mathbf{A} estrictamente diagonal dominante

MÉTODO GAUSS-SEIDEL



INTERPRETACIÓN MATRICIAL

$$x_i^{k+1} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k + b_i}{a_{ii}}$$

$$x^{k+1} = Ti \cdot x^{k+1} + Ts \cdot x^k + C$$

$$Ti = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{31}/a_{11} & -a_{32}/a_{11} & 0 \end{bmatrix},$$

$$Ts = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{22} & -a_{13}/a_{22} \\ 0 & 0 & -a_{23}/a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MÉTODO GAUSS-SEIDEL ALTERNATIVO

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{D} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} = -\underline{D}^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{x} + \underline{D}^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$\underline{x} = \underline{T} \cdot \underline{x} + \underline{c}$$

$$\underline{T} = -\underline{D}^{-1} \cdot \underline{B} \quad \underline{c} = \underline{D}^{-1} \cdot \underline{b}$$



T lo podemos descomponer en **Ti**
y **Ts** como se muestra arriba

MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL



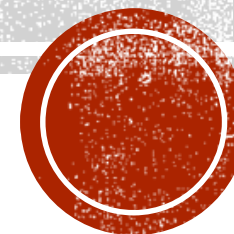
EJERCICIO

Resolver el siguiente sistema $A \cdot x = b$ por el Método de Gauss-Seidel o por el método de Gauss-seidel alternativo. Considere como condición inicial al vector $x=0$, un error o tolerancia de 0.01 y obtenga la cantidad de iteraciones necesarias para obtener ese orden de error.

$$A = \begin{bmatrix} 50 & -25 & 0 & 0 \\ -25 & 50 & -25 & 0 \\ 0 & -25 & 50 & -25 \\ 0 & 0 & -25 & 50 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Prof. Ing. Mauro Grioni



AUTOVALORES Y AUTOVECTORES



¿QUÉ SON?

Dada una matriz A se denominan autovalores λ y autovectores \bar{x} , a los números y vectores no nulos respectivamente

$$A \cdot \bar{x} = \lambda \bar{x}$$

o que son solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$(A - \lambda \cdot I)\bar{x} = 0$$

$\therefore \lambda$ es un escalar que cambia el modulo de \bar{x}
cuya dirección permanece invariante.

MÉTODO DE LA POTENCIA



Dada una matriz A , se buscan las Direcciones Invariantes, soluciones de

$$(A - \lambda \cdot I)x = 0 \quad \text{o bien} \quad A \cdot x = \lambda \cdot x$$

Esto es equivalente a encontrar un vector \underline{y} que se puede obtener como

$$\underline{y} = A \cdot \underline{x}$$

y resulta igual a

$$\underline{y} = \lambda \cdot \underline{x}$$

lo que significa que los vectores \underline{x} e \underline{y} son PARALELOS

El MÉTODO DE LA POTENCIA es un algoritmo iterativo que propone un x_0 arbitrario y

Obtiene un nuevo vector como

$$\longrightarrow x_{k+1} = A \cdot x_k$$

Solo se detiene si se cumple que

$$\longrightarrow x_{k+1} \text{ es paralelo a } x_k \longrightarrow \alpha_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{x_k} = \lambda$$

EJEMPLO: Dada la matriz A

-10	4
-4	0

x0	x1	x2	x3	x4
2	-12	88	-688	5472
2	-8	48	-352	2752
iteración	1	2	3	4
$\alpha(1)$	-6	-7.333	-7.82	-7.953
$\alpha(2)$	-4	-6	-7.333	-7.82

Control de Detención: Si las componentes de α_{k+1} son suficientes parecidas.

⇒ Converge al autovector normalizado $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

⇒ Converge al autovalor $\lambda = -8$

MÉTODO DE LA POTENCIA

Dada una matriz A , se buscan las Direcciones Invariantes, soluciones de

$$(A - \lambda \cdot I)\underline{x} = \underline{0} \quad \text{o bien} \quad A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

Esto es equivalente a encontrar un vector \underline{y} que se puede obtener como

$$\underline{y} = A \cdot \underline{x}$$

y resulta igual a

$$\underline{y} = \lambda \cdot \underline{x}$$

lo que significa que los vectores \underline{x} e \underline{y} son PARALELOS

El MÉTODO DE LA POTENCIA es un algoritmo iterativo que propone un x_0 arbitrario y

Obtiene un nuevo vector como

$$\longrightarrow x_{k+1} = A \cdot x_k$$

Solo se detiene si se cumple que

$$\longrightarrow x_{k+1} \text{ es paralelo a } x_k$$

EJEMPLO: Dada la matriz A

-10	4
-4	0

x0	x1	x2	x3	x4
2	-12	88	-688	5472
2	-8	48	-352	2752
iteración	1	2	3	4
$\alpha(1)$	-6	-7.333	-7.82	-7.953
$\alpha(2)$	-4	-6	-7.333	-7.82

$$\alpha_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{x_k} = \lambda$$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \cdots \geq |\lambda_N|.$$

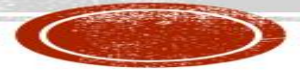


Converge al autovector normalizado $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$



Converge al autovalor $\lambda = -8$

MÉTODO DE LA POTENCIA



MÉTODO DE LA POTENCIA ESCALONADA

El MÉTODO DE LA POTENCIA ESCALONADA es un algoritmo para resolver $A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}$ que propone un x_0 arbitrario y se *escala* para obtener el vector x_{0n} normalizado con el que se inicia el proceso iterativo

Obtener un nuevo vector como

$$x_{k+1} = A \cdot x_{kn}$$

Solo se detiene si se cumple que

$$x_{k+1} \text{ es paralelo a } x_{kn} \longrightarrow \alpha = \frac{x_{k+1}}{x_{kn}} = \lambda$$

EJEMPLO: Dada la matriz A

-10	4
-4	0

	x0	x1	x2	x3	x4
	2	-6	7.44	-7.88	7.96954315
	2	-4	4	-4	4
norma ∞	2	6	7.44	7.88	7.96
	x0n	x1n	x2n	x3n	x4n
	1	-1	1	-1	1.00
	1	-0.67	0.53	-0.51	0.50
$\alpha(1)$	-	-6	-7.44	-7.88	-7.97
$\alpha(2)$	-	-4	-5.97	-7.55	-7.88

⇒ Converge al autovector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

⇒ Converge al autovalor $\lambda = -8$

MÉTODO DE LA POTENCIA



EJERCICIO

Dada la matriz A se busca determinar sus autovectores y autovalores. Encuentre el valor propio dominante y su correspondiente vector propio empleando la Método de la potencia. Utilice un algoritmo con escalamiento y considere un error $\epsilon=0.1$ como factor de tolerancia.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

MÉTODO DE LA POTENCIA INVERSA



Dada la matriz A tal que

$A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x} \longrightarrow$ si multiplicamos por A^{-1} nos queda

$$I \cdot \bar{x} = \lambda A^{-1} \cdot \bar{x}$$

$$A^{-1} \cdot \bar{x} = \frac{1}{\lambda} \bar{x}$$

Es decir que $n = \frac{1}{\lambda}$ es autovalor dominante de A^{-1} asociado al autovector \bar{x} .

El Método de la Potencia aplicado sobre la matriz inversa A^{-1} converge al autovalor dominante de A^{-1} esto es el mayor n tomado en valor absoluto. Pero según la relación entre n y λ , el mayor n está asociado con el menor λ de la matriz A .

El MÉTODO DE LA POTENCIA INVERSA es un algoritmo iterativo que propone un x_0 arbitrario y

Obtiene un nuevo vector como

$$x_{k+1} = A^{-1} \cdot x_k$$

Solo se detiene si se cumple que

$$x_{k+1} \text{ es paralelo a } x_k \longrightarrow \alpha = \frac{x_{k+1}}{x_k} = n$$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \cdots \geq |\lambda_N|$$

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}$$



MÉTODO DE LA POTENCIA INVERSA



EJERCICIO

Dada la matriz A se busca determinar sus autovectores y autovalores. Encuentre el mínimo valor propio y su correspondiente vector propio empleando la Método de la potencia inversa. Utilice un algoritmo con escalamiento y considere un error $\epsilon=0.1$ como factor de tolerancia.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$