RESOLUCIÓN ECUACIONES EN DIFERENCIALES PARCIALES

Prof. Ing. Mauro Grioni

ECUACIONES DIFERENCIALES A DERIVADAS PARCIALES

PLANTEO DEL PROBLEMA

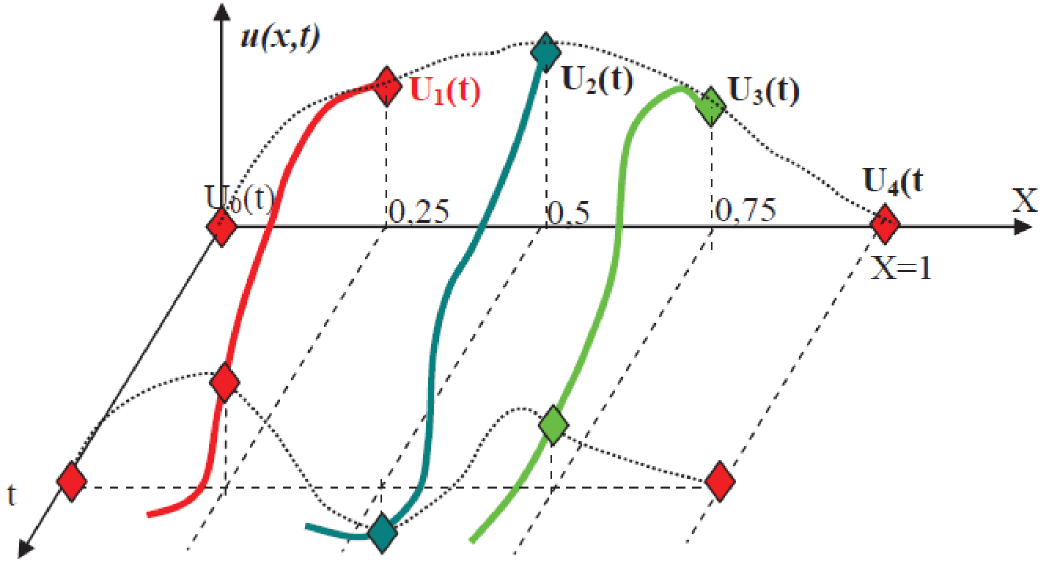
Se busca $u(x,t)$ solución de

$$-12\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + x^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad en \;\; \Omega = \{x\,\varepsilon\, R : 0 \le x \le 1\}$$

$$u(0,t) = 0 \qquad\qquad u(x,0) = \sin(\pi \cdot x)$$

$$u(1,t) = 0 \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 3$$

En vez de encontrar la solución exacta $u(x,t)$ en cada uno y todos los puntos del dominio Ω, se plantea encontrar una ***solución aproximada en forma de función discreta en la variable x, aunque continua en la variable t***. Se pretende encontrar las funciones $U_k(t)=u(X_k,t)$ con k=0,N, en N+1 puntos elegidos del dominio x, identificados con su abscisa X_k.



ECUACIONES DIFERENCIALES A DERIVADAS PARCIALES

DISCRETIZACIÓN EN X

En cada uno de los X_k se puede plantear la ecuación diferencial a resolver pero con una aproximación de la derivada segunda respecto a x en forma de derivada numérica; y con la derivada respecto de la variable t en forma analítica evaluada en esa abscisa X_k.

Así se puede escribir:

en X_0 se debe cumplir que: $$U_0(t) = 0$$

en X_1 se debe cumplir que: $$-\frac{12}{0{,}25^2}\left[U_0(t) - 2\cdot U_1(t) + U_2(t)\right] + (X_1)^2 \cdot \frac{d^2U_1(t)}{dt^2} = 0$$

en X_2 se debe cumplir que: $$-\frac{12}{0{,}25^2}\left[U_1(t) - 2\cdot U_2(t) + U_3(t)\right] + (X_2)^2 \cdot \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} = 0$$

en X_3 se debe cumplir que: $$-\frac{12}{0{,}25^2}\left[U_2(t) - 2\cdot U_3(t) + U_4(t)\right] + (X_3)^2 \cdot \frac{d^2U_3(t)}{dt^2} = 0$$

en X_4 se debe cumplir que: $$U_4(t) = 0$$

SISTEMA EDO DE 2 ORDEN

$$\frac{12}{0{,}25^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}25^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}50^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}75^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{d^2U_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2U_3(t)}{dt^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

con las condiciones iniciales $\begin{Bmatrix} U_1(0) \\ U_2(0) \\ U_3(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} sen(\pi\cdot 0{,}25) \\ sen(\pi\cdot 0{,}50) \\ sen(\pi\cdot 0{,}75) \end{Bmatrix}$ y $\begin{Bmatrix} \frac{dU_1}{dt}(0) \\ \frac{dU_2}{dt}(0) \\ \frac{dU_3}{dt}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$

ECUACIONES DIFERENCIALES A DERIVADAS PARCIALES

REDUCCIÓN DE ORDEN

$$\underbrace{\frac{12}{0{,}25^2}}_{c}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{K}\underbrace{\begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \end{Bmatrix}}_{U_{(t)}}+\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}25^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}50^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}75^2 \end{bmatrix}}_{M}\underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{d^2U_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2U_3(t)}{dt^2} \end{Bmatrix}}_{\ddot{U}_{(t)}}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$y1 = U_{(t)} \qquad entonces \qquad \dot{y1} = \dot{U}_{(t)} = y2$$

$$y2 = \dot{U}_{(t)} \qquad entonces \qquad \dot{y2} = \ddot{U}_{(t)} = -M^{-1}cKU_{(t)}$$

$y1$

$$\dot{y} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_{11(t)} \\ \dot{y}_{12(t)} \\ \dot{y}_{13(t)} \\ \dot{y}_{21(t)} \\ \dot{y}_{22(t)} \\ \dot{y}_{23(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & [-M^{-1}cK] & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{11(t)} \\ y_{12(t)} \\ y_{13(t)} \\ y_{21(t)} \\ y_{22(t)} \\ y_{23(t)} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\dot{y} = \begin{Bmatrix} \dot{y1} \\ \dot{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}cK & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y1 \\ y2 \end{Bmatrix}}$$

$$y1(0) = \begin{Bmatrix} sen\ (0.25\pi) \\ sen\ (0.5\pi) \\ sen\ (0.75\pi) \end{Bmatrix} \qquad y2(0) = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES A DERIVADAS PARCIALES

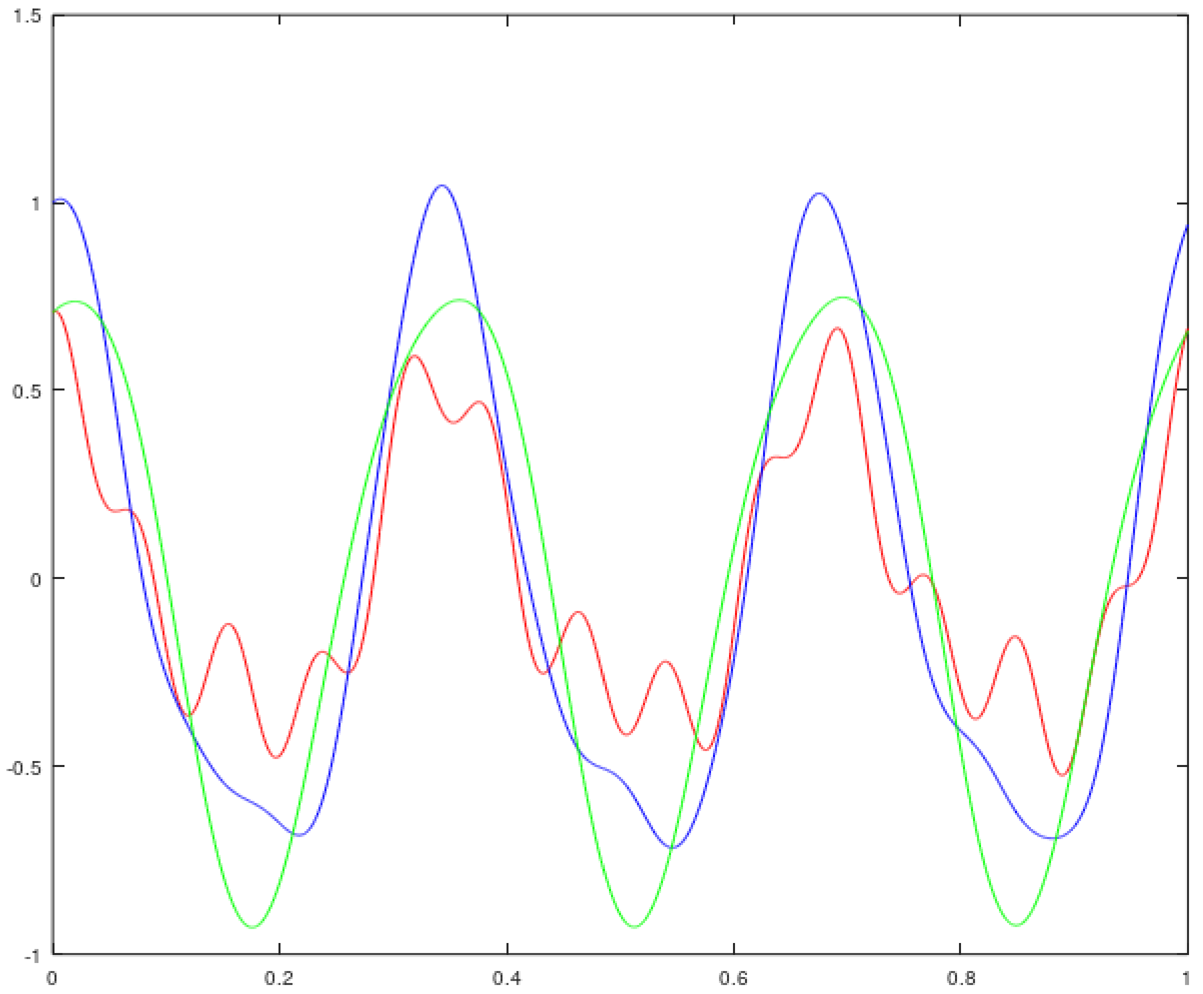
PROGRAMACIÓN EN OCTAVE

```
function RK_sistema
M=[0.25^2 0 0; 0 0.5^2 0; 0 0 0.75^2]
k=(12/(0.25^2))*[2 -1 0; -1 2 -1; 0 -1 2]
  A=zeros(3,3);    % Matriz de 3x3 con todos ceros
  B=eye(3);        % Matriz identidad de 3x3
  P=-inv(M)*k;  % Matriz de 3x3
  K=[A,B;P,A]      % Matriz formada por matriz A, B, P y A
  y0=[sin(pi*0.25); sin(pi*0.5);sin(pi*0.75);3;3;3]   % Vector solución inicial
  dt=0.001  % paso de tiempo
t=0:dt:1;
Ndt=length(t)  % cantidad de puntos
 y(:,1)=y0;       % asigna a todas las filas de la primer columna de la matriz solución la condición inicial
 w=0.5;           % Método de Euler Mejorado
  for i=1:Ndt-1
    ya=y(:,i);     % solución actual
    k1=dt*K*ya;   %obtenemos el vector k1
    tg=t(i)+dt/(2*w);  % punto nuevo para t entre t(i) y t(i+1)
    yg=ya+k1/(2*w);  % solución intermedia de y
    k2=dt*K*yg;    %obtenemos el vector k2
    y(:,i+1)=ya+(1-w)*k1+w*k2;  % Nueva solución para y
   end
   % Graficos
   plot(t, y(1,:), 'r',t, y(2,:),'b', t,y(3,:),'g')%
  endfunction
```

ECUACIONES DIFERENCIALES A DERIVADAS PARCIALES

PROGRAMACIÓN EN OCTAVE

```
function RK_sistema
M=[0.25^2 0 0; 0 0.5^2 0; 0 0 0.75^2]
k=(12/(0.25^2))*[2 -1 0; -1 2 -1; 0 -1 2]
  A=zeros(3,3);    % Matriz de 3x3 con todos ceros
  B=eye(3);        % Matriz identidad de 3x3
  P=-inv(M)*k;  % Matriz de 3x3
  K=[A,B;P,A]      % Matriz formada por matriz A, B, P y A
  y0=[sin(pi*0.25); sin(pi*0.5);sin(pi*0.75);3;3;3]    % Vector soluc
  dt=0.001  % paso de tiempo
t=0:dt:1;
Ndt=length(t)  % cantidad de puntos
 y(:,1)=y0;      % asigna a todas las filas de la primer columna de 
 w=0.5;          % Método de Euler Mejorado
  for i=1:Ndt-1
    ya=y(:,i);    % solución actual
    k1=dt*K*ya;   %obtenemos el vector k1
    tg=t(i)+dt/(2*w);  % punto nuevo para t entre t(i) y t(i+1)
    yg=ya+k1/(2*w);  % solución intermedia de y
    k2=dt*K*yg;    %obtenemos el vector k2
    y(:,i+1)=ya+(1-w)*k1+w*k2;  % Nueva solución para y
   end
   % Graficos
   plot(t, y(1,:), 'r',t, y(2,:),'b', t,y(3,:),'g')%
  endfunction
```



ECUACIONES DIFERENCIALES A DERIVADAS PARCIALES

PLANTEO DEL PROBLEMA

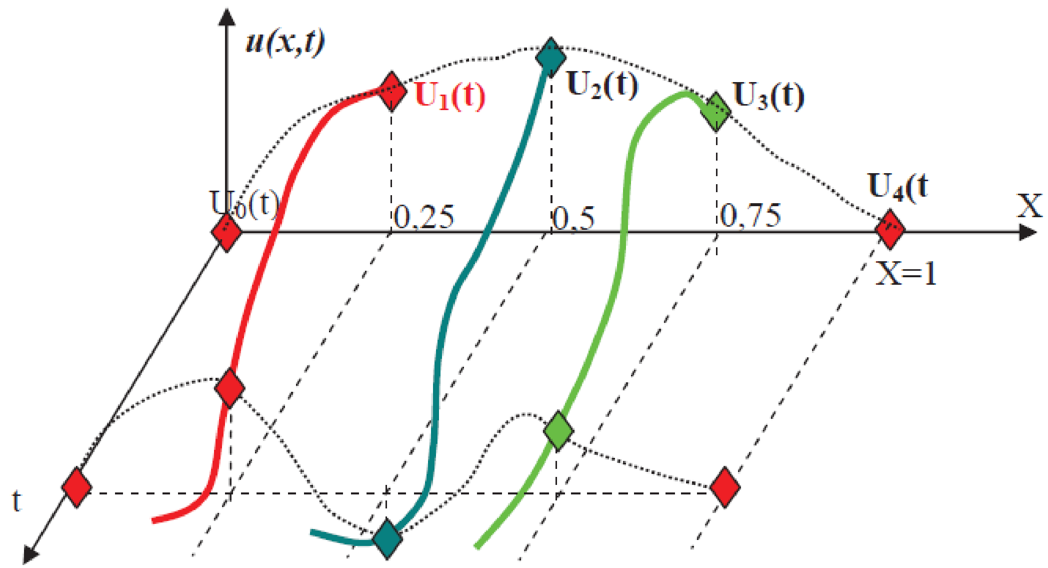
Se busca *u(x,t)* solución de

$$-12\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0 \quad en \;\; \Omega=\{x\,\varepsilon\,R:0\leq x\leq 1\}$$

$$u(0,t)=0 \qquad\qquad u(x,0)=\sin(\pi\cdot x)$$

$$u(1,t)=0 \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=3$$

En vez de encontrar la solución exacta *u(x,t)* en cada uno y todos los puntos del dominio Ω, se plantea encontrar una ***solución aproximada en forma de función discreta en la variable x, aunque continua en la variable t***. Se pretende encontrar las funciones $U_k(t)=u(X_k,t)$ con k=0,N, en N+1 puntos elegidos del dominio x, identificados con su abscisa X_k.



ECUACIONES DIFERENCIALES A DERIVADAS PARCIALES

DISCRETIZACIÓN EN X

$$\frac{12}{0.2^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{d^2u_1(t)}{dt} \\ \frac{d^2u_1(t)}{dt} \\ \frac{d^2u_1(t)}{dt} \\ \frac{d^2u_1(t)}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$con \ \begin{Bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_3(0) \\ u_4(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} sen(\pi x_1) \\ sen(\pi x_2) \\ sen(\pi x_3) \\ sen(\pi x_4) \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \frac{du_1(0)}{dt} \\ \frac{du_1(0)}{dt} \\ \frac{du_1(0)}{dt} \\ \frac{du_1(0)}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

1- Obtener la solución para u hasta t=1 con paso dt=0.01 utilizando el método de diferencia central.
2- Graficar u(1), u(2), u(3), u(4) para todo todo el intervalo t [0; 1]
2- Calcular el Máximo de los valores absolutos de las componentes de cada vector def(t)=d$\vec{u}$ /dx, en cada valor de t calculado anteriormente, y guardar en un vector MaxDef(t).