DIFERENCIA CENTRAL

Prof. Ing. Mauro Grioni

MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

Supongamos que tenemos el siguiente sistema EDO de segundo orden con valores iniciales

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0 \qquad con \qquad \theta(t_0) = \theta_0$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \beta_0$$

Ecuación del péndulo simple

* Aproximamos las $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ con derivadas numéricas centrales y se reemplazan en el sistema original

$$\frac{1}{\Delta t^2}\left(\theta_{(t-\Delta t)} - 2\theta_{(t)} + \theta_{(t+\Delta t)}\right) + \frac{g}{L}\,\theta_{(t)} = 0$$

Donde podemos escribir

$$\theta_{(t+\Delta t)} = \left(2 - \frac{g\Delta t^2}{L}\right)\theta_{(t)} - \theta_{(t-\Delta t)}$$

Para el valor inicial de t (t=t0), primero se halla una aproximación $\theta_{(t-\Delta t)}$mediante Serie de Taylor:

$$\theta_{(t0-\Delta t)} = \theta_{(t0)} - \Delta t\frac{d\theta_{(t0)}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2\theta_{(t0)}}{dt^2} + O(\Delta t^3)$$

MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

Supongamos que tenemos el siguiente sistema EDO de segundo orden con valores iniciales

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0 \qquad con \qquad \theta(t_0) = \theta_0$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \beta_0$$

Ecuación del péndulo simple

* Aproximamos las $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ con derivadas numéricas centrales y se reemplazan en el sistema original

$$\frac{1}{\Delta t^2}\left(\theta_{(t-\Delta t)} - 2\theta_{(t)} + \theta_{(t+\Delta t)}\right) + \frac{g}{L}\,\theta_{(t)} = 0$$

Donde podemos escribir

$$\theta_{(t+\Delta t)} = \left(2 - \frac{g\Delta t^2}{L}\right)\theta_{(t)} - \theta_{(t-\Delta t)}$$

Para el valor inicial de t (t=t0), primero se halla una aproximación $\theta_{(t-\Delta t)}$ mediante Serie de Taylor:

$$\theta_{(t0-\Delta t)} = \theta_{(t0)} - \Delta t\frac{d\theta_{(t0)}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2\theta_{(t0)}}{dt^2} + O(\Delta t^3)$$

$$-\frac{g}{L}\theta_{(t0)}$$

MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

SOLUCIÓN: Consideramos L=1, g=9.8 con condiciones iniciales en t_0

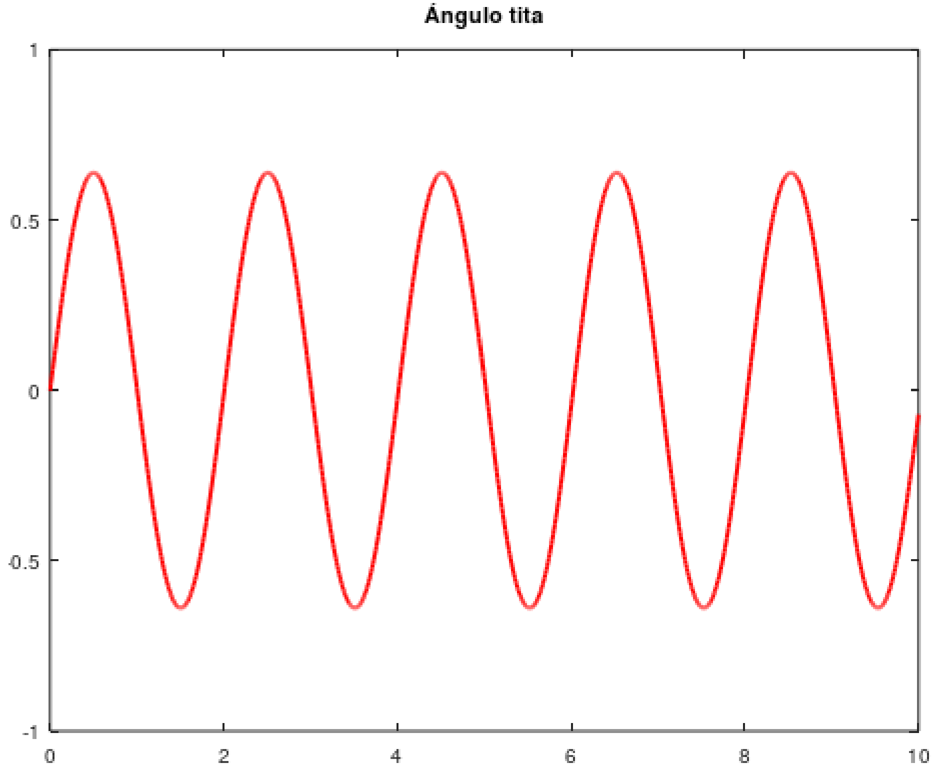
$$\begin{cases} \theta(t_0) = 0 \\ \dfrac{d\theta(t)}{dt} = 2 \end{cases}$$

```
function Diferencia_pendulo
tita0=0;
dtita=2;
g=9.8;
L=1;
t0=0;
dt=0.01;
t=0:dt:10;
Ndt=length(t);
tita=zeros(1,Ndt);
titac=tita0;
tac=0;
titan=titac-dt*dtita+0.5*dt^2*(-g/L*titac);
t(1)=tac
tita(1,1)=titac;
for i=2:Ndt
  titanu=(2-g*dt^2/L)*titac-titan;
  t(i)=tac+dt;
  tita(1,i)=titanu;
% actualizacion de variables
  titan=titac;
  titac=titanu;
  tac=t(i);
endfor

figure(1)
plot(t,tita(1,:),'r','LineWidth',2)
title ('Ángulo tita-y1')
endfunction
```

$$\theta_{(t0-\Delta t)} = \theta_{(t0)} - \Delta t \frac{d\theta_{(t0)}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2\theta_{(t0)}}{dt^2}$$

$$\theta_{(t+\Delta t)} = \left(2 - \frac{g\Delta t^2}{L}\right)\theta_{(t)} - \theta_{(t-\Delta t)}$$



MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

Teniendo en siguiente sistema EDO de segundo orden con valores iniciales

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x_1}(t) \\ \ddot{x_2}(t) \\ \ddot{x_3}(t) \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x_1}\ (t) \\ \dot{x_2}\ (t) \\ \dot{x_3}\ (t) \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 5e^t + 8e^{2t} + \cos t \\ -8e^{2t} + 4e^t \\ -\cos t - 3\, sen\, t + e^t \end{Bmatrix}$$

$$con \ \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \dot{x_1}\ (0) \\ \dot{x_2}\ (0) \\ \dot{x_3}\ (0) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

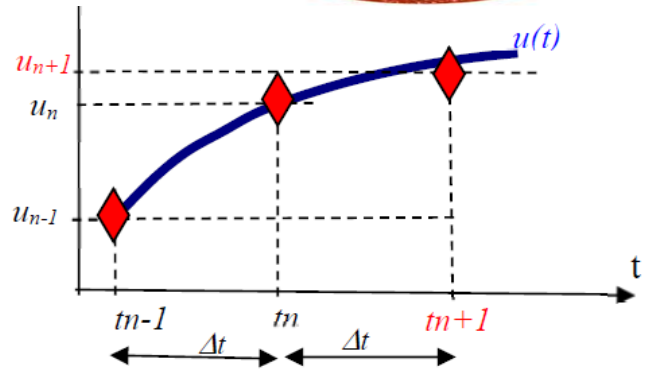
En forma generalizada resulta

$$\mathbf{M}\, \ddot{u}_{(t)} + \mathbf{C}\, \dot{u}_{(t)} + \mathbf{K}\, u_{(t)} = \mathbf{R}(t) \qquad con \qquad u_{(t)} = x_{(t)}$$

Y valores iniciales $\dot{u}_{(t0)}\ y\ u_{(t0)}$ conocidos podemos obtener una solución aproximada mediante el método de Diferencia central de la siguiente manera:

MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

$$\mathbf{M}\,\ddot{u}_{(t)} + \mathbf{C}\,\dot{u}_{(t)} + \mathbf{K}\,u_{(t)} = \mathbf{R}(t) \qquad con \qquad u_{(t)} = x_{(t)}$$



* Aproximamos las $\ddot{u}_{(t)}$ y $\dot{u}_{(t)}$ con derivadas numéricas centrales y se reemplazan en el sistema original

$$\mathbf{M}\frac{1}{\Delta t^2}\left(u_{(t-\Delta t)} - 2u_{(t)} + u_{(t+\Delta t)}\right) + \mathbf{C}\frac{1}{2\Delta t}\left(-u_{(t-\Delta t)} + u_{(t+\Delta t)}\right) + \mathbf{K}\,u_{(t)} = \mathbf{R}(t)$$

* Ordenando los términos nos queda

$$\left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\right)u_{(t+\Delta t)} = \Delta t^2\mathbf{R}(t) + (2\mathbf{M} - \Delta t^2\mathbf{K})u_{(t)} + \left(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C} - \mathbf{M}\right)u_{(t-\Delta t)}$$

O bien

$$u_{(t+\Delta t)} = \mathbf{b}(t) + \mathbf{D}_{(\Delta t)}u_{(t)} + \mathbf{H}_{(\Delta t)}u_{(t-\Delta t)}$$

donde $\mathbf{G} = \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\right)^{-1}$ $\quad \mathbf{D} = \mathbf{G}\,(2\mathbf{M} - \Delta t^2\mathbf{K})$ $\quad \mathbf{H} = \mathbf{G}\left(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C} - \mathbf{M}\right)$ $\quad \mathbf{b} = \Delta t^2\,\mathbf{G}\,\mathbf{R}(t)$

MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

$$u_{(t+\Delta t)} = \mathbf{b}(t) + \mathbf{D}_{(\Delta t)} u_{(t)} + \mathbf{H}_{(\Delta t)} u_{(t-\Delta t)}$$

Entonces se obtiene un algoritmo recursivo de cálculo en el cual conocidos el valor actual $u_{(t)}$ y el valor anterior $u_{(t-\Delta t)}$ de la función discreta, se puede calcular el valor futuro de la misma $u_{(t+\Delta t)}$, con un error de truncamiento local de orden 4.

Al comenzar el proceso, si nos paramos en t0 tenemos los valores iniciales conocidos $u_{(t0)}\ y\ \frac{du_{(t0)}}{dt}$ es decir que conocemos el valor actual de la función. Entonces necesitamos conocer el valor anterior de la función. Para esto se recurre a la Serie de Taylor

$$u_{(t-\Delta t)} = u_{(t)} - \Delta t \frac{du_{(t)}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 u_{(t)}}{dt^2} + O(\Delta t^3)$$

$$u_{(t0-\Delta t)} = u_{(t0)} - \Delta t \frac{du_{(t0)}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 u_{(t0)}}{dt^2}$$

donde $u_{(t0)}\ y\ \frac{du_{(t0)}}{dt}$ son valores conocidos y el término $\frac{d^2 u_{(t0)}}{dt^2}$ se puede despejar de la EDO valuada en *t0*.

MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

RESUMIENDO $\mathbf{M}\,\ddot{u}_{(t)} + \mathbf{C}\,\dot{u}_{(t)} + \mathbf{K}\,u_{(t)} = \mathbf{R}(t)$ con *valores iniciales conocidos* $u_{(t)}$ *y* $\dot{u}_{(t)}$

Por medio del método de diferencia central nos queda

$$u_{(t+\Delta t)} = \mathbf{b}(t) + \mathbf{D}_{(\Delta t)}u_{(t)} + \mathbf{H}_{(\Delta t)}u_{(t-\Delta t)}$$

donde $\mathbf{G} = \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\right)^{-1}$ $\mathbf{D} = \mathbf{G}\,(2\mathbf{M} - \Delta t^2\mathbf{K})$ $\mathbf{H} = \mathbf{G}\left(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C} - \mathbf{M}\right)$ $\mathbf{b} = \Delta t^2\,\mathbf{G}\,\mathbf{R}(t)$

el punto anterior al inicial se obtiene

$$u_{(t-\Delta t)} = u_{(t)} - \Delta t\frac{du_{(t)}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2u_{(t)}}{dt^2}$$

EJEMPLO APLICANDO MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

EJEMPLO $\mathbf{M}\,\ddot{u}_{(t)} + \mathbf{C}\,\dot{u}_{(t)} + \mathbf{K}\,u_{(t)} = \mathbf{R}(t)$ con *valores iniciales conocidos* $u_{(t)}$ *y* $\dot{u}_{(t)}$

Por medio del método de diferencia central nos queda

$$u_{(t+\Delta t)} = \mathbf{b}(t) + \mathbf{D}_{(\Delta t)}u_{(t)} + \mathbf{H}_{(\Delta t)}u_{(t-\Delta t)}$$

donde $\mathbf{G} = \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\right)^{-\mathbf{1}}$ $\quad \mathbf{D} = \mathbf{G}\,(2\mathbf{M} - \Delta t^2\mathbf{K})$ $\quad \mathbf{H} = \mathbf{G}\left(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C} - \mathbf{M}\right)$ $\quad \mathbf{b} = \Delta t^2\,\mathbf{G}\,\mathbf{R}(t)$

el punto anterior al inicial se obtiene

$u_{(t0)}$ $\quad \dot{u}_{(t0)}$ $\quad$ EDO

$$u_{(t-\Delta t)} = u_{(t)} - \Delta t\frac{du_{(t)}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2u_{(t)}}{dt^2}$$

Entonces lo programos en OCTAVE

APLICANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

EJERCICIO: Encontrar el valor de las incógnitas $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ entre t=0 y t=3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5e^t + 8e^{2t} + \cos t \\ -8e^{2t} + 4e^t \\ -\cos t - 3\, sen\, t + e^t \end{Bmatrix}$$

$$con \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \dot{x}_3(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}\, \ddot{x}_{(t)} + \mathbf{C}\, \dot{x}_{(t)} + \mathbf{K}\, x_{(t)} = \mathbf{R}(t) \quad \text{con } valores\ iniciales\ conocidos\ x_{(t)}\ y\ \dot{x}_{(t)}$$

Por medio del método de diferencia central nos queda

$$x_{(t+\Delta t)} = \mathbf{b}(t) + \mathbf{D}_{(\Delta t)} x_{(t)} + \mathbf{H}_{(\Delta t)} x_{(t-\Delta t)}$$

donde $\mathbf{G} = \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\right)^{-\mathbf{1}}$ $\qquad \mathbf{D} = \mathbf{G}\,(2\mathbf{M} - \Delta t^2 \mathbf{K})$ $\qquad \mathbf{H} = \mathbf{G}\left(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C} - \mathbf{M}\right)$ $\qquad \mathbf{b} = \Delta t^2\, \mathbf{G}\, \mathbf{R}(t)$

el punto anterior al inicial se obtiene

$$x_{(t-\Delta t)} = x_{(t)} - \Delta t \frac{dx_{(t)}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 x_{(t)}}{dt^2}$$

APLICANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

```
function Dif_cen1
% Datos
Dt=0.003; % incremento de tiempo
NDt=1000; % cantidad de Dt a realizar
M= [1 0 0; 0 -1 0; 0 0 2];  %Matriz M
C= [4 0 0; 0 -1 0; 0 0 3];  %Matriz C
K= [0 4 1; 4 2 0; 1 0 1];   %Matriz K

% Valores Iniciales o actuales
tac=0;
yac= [1; 2; 1]    % correspondiente a y1
vac= [1; 4; 0]    % correspondiente a y2
R(1,1)=5*exp(tac)+8*exp(2*tac)+cos(tac);
R(2,1)=-8*exp(2*tac)+4*exp(tac);
R(3,1)=-cos(tac)-3*sin(tac)+exp(tac);
% Inicialización
G=inv(M+(Dt/2)*C)    % cálculo del término G
D=G*(2*M-Dt^2*K)     % cálculo del término D
H=G*((Dt/2)*C-M)     % cálculo del término H
d2= inv(M)*(R-K*yac-C*vac); % cálculo de la derivada segunda
yan=yac-Dt*vac+((Dt^2)/2)*d2; % cálculo de solución anterior
t(1)=tac; % Almacenamiento para luego graficar
y(:,1)=yac;
% Diferencia Central
for j=2:NDt
bac=fun_ind(tac,G,Dt); % cálculo de b que depende del tiempo
ynu=bac + D*yac + H*yan; % Calculo con Dif Central
tnu=tac+Dt; %actualización del tiempo
t(j)=tnu; % Almacenamiento para luego graficar
y(:,j)=ynu;  %Almacenamiento de la solución para luego gráficar
yan=yac; % actualización de estado anterior
yac=ynu; % actualización de estado actual
tac=tnu;
end
% Gráfico
figure(1)
plot(  t, y(1,:),'g', t, y(2,:), t,y(3,:),'r');
grid on
end
```

$$\mathbf{G} = \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\right)^{-1}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{G}\,(2\mathbf{M} - \Delta t^2\mathbf{K})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}\left(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C} - \mathbf{M}\right)$$

$$u_{(t-\Delta t)} = u_{(t)} - \Delta t\frac{du_{(t)}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2u_{(t)}}{dt^2}$$

$$u_{(t+\Delta t)} = \mathbf{b}(t) + \mathbf{D}_{(\Delta t)}u_{(t)} + \mathbf{H}_{(\Delta t)}u_{(t-\Delta t)}$$

```
% Subfunción para determinar el término b
function fy=fun_ind(x,G,Dt)
r(1,1)= 5*exp(x)  +8*exp(2*x)  +cos(x);
r(2,1)=-8*exp(2*x)+4*exp(x);
r(3,1)=-cos(x)  -3*sin(x)  +exp(x);
fy=Dt^2*G*r;
end
```

$$\mathbf{b} = \Delta t^2\,\mathbf{G}\,\mathbf{R}(t)$$

APLICANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIA CENTRAL

```
function Dif_cen1
% Datos
Dt=0.003; % incremento de tiempo
NDt=1000; % cantidad de Dt a realizar
M= [1 0 0; 0 -1 0; 0 0 2];  %Matriz M
C= [4 0 0; 0 -1 0; 0 0 3];  %Matriz C
K= [0 4 1; 4 2 0; 1 0 1];   %Matriz K

% Valores Iniciales o actuales
tac=0;
yac= [1; 2; 1]    % correspondiente a y1
vac= [1; 4; 0]    % correspondiente a y2
R(1,1)=5*exp(tac)+8*exp(2*tac)+cos(tac);
R(2,1)=-8*exp(2*tac)+4*exp(tac);
R(3,1)=-cos(tac)-3*sin(tac)+exp(tac);
% Inicialización
G=inv(M+(Dt/2)*C)    % cálculo del término G
D=G*(2*M-Dt^2*K)     % cálculo del término D
H=G*((Dt/2)*C-M)     % cálculo del término H
d2= inv(M)*(R-K*yac-C*vac); % cálculo de la derivada segunda
yan=yac-Dt*vac+((Dt^2)/2)*d2; % cálculo de solución anterior
t(1)=tac; % Almacenamiento para luego graficar
y(:,1)=yac;
% Diferencia Central
for j=2:NDt
bac=fun_ind(tac,G,Dt); % cálculo de b que depende del tiempo
ynu=bac + D*yac + H*yan; % Calculo con Dif Central
tnu=tac+Dt; %actualización del tiempo
t(j)=tnu; % Almacenamiento para luego graficar
y(:,j)=ynu;  %Almacenamiento de la solución para luego gráficar
yan=yac; % actualización de estado anterior
yac=ynu; % actualización de estado actual
tac=tnu;
end
% Gráfico
figure(1)
plot(  t, y(1,:),'g', t, y(2,:), t,y(3,:),'r');
grid on
end
```

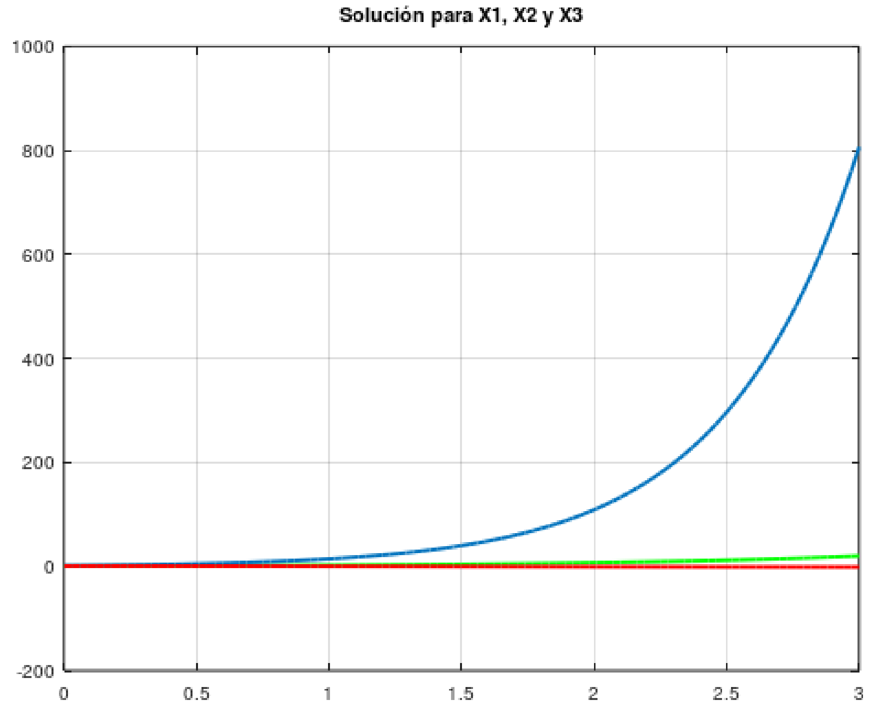
$$\mathbf{G} = \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\right)^{-1}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{G}\,(2\mathbf{M} - \Delta t^2\mathbf{K})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}\left(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C} - \mathbf{M}\right)$$

$$u_{(t-\Delta t)} = u_{(t)} - \Delta t\frac{du_{(t)}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2u_{(t)}}{dt^2}$$

$$u_{(t+\Delta t)} = \mathbf{b}(t) + \mathbf{D}_{(\Delta t)}u_{(t)} + \mathbf{H}_{(\Delta t)}u_{(t-\Delta t)}$$




```
% Subfunción para determinar el término b
function fy=fun_ind(x,G,Dt)
r(1,1)= 5*exp(x) +8*exp(2*x) +cos(x);
r(2,1)=-8*exp(2*x)+4*exp(x);
r(3,1)=-cos(x) -3*sin(x) +exp(x);
fy=Dt^2*G*r;
end
```

$$\mathbf{b} = \Delta t^2\,\mathbf{G}\,\mathbf{R}(t)$$

EJEMPLO APLICANDO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

EJEMPLO $\mathbf{M}\,\ddot{u}_{(t)} + \mathbf{C}\,\dot{u}_{(t)} + \mathbf{K}\,u_{(t)} = \mathbf{R}(t)$ con *valores iniciales conocidos* $u_{(t)}$ *y* $\dot{u}_{(t)}$

EJEMPLO APLICANDO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

EJEMPLO $\mathbf{M}\,\ddot{u}_{(t)} + \mathbf{C}\,\dot{u}_{(t)} + \mathbf{K}\,u_{(t)} = \mathbf{R}(t)$ con *valores iniciales conocidos* $u_{(t)}$ *y* $\dot{u}_{(t)}$

Haciendo un cambio de variables nos queda

$y1 = u_{(t)}$ *entonces* $\dot{y}1 = \dot{u}_{(t)} = y2$

$y2 = \dot{u}_{(t)}$ *entonces* $\dot{y}2 = \ddot{u}_{(t)} = \mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{R} - \mathbf{K}u_{(t)} - \mathbf{C}\dot{u}_{(t)}\right)$

EJEMPLO APLICANDO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

EJEMPLO $\mathbf{M}\,\ddot{u}_{(t)} + \mathbf{C}\,\dot{u}_{(t)} + \mathbf{K}\,u_{(t)} = \mathbf{R}(t)$ con *valores iniciales conocidos* $u_{(t)}$ *y* $\dot{u}_{(t)}$

Haciendo un cambio de variables nos queda

$y1 = u_{(t)}$ *entonces* $\dot{y}1 = \dot{u}_{(t)} = y2$

$y2 = \dot{u}_{(t)}$ *entonces* $\dot{y}2 = \ddot{u}_{(t)} = \mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{R} - \mathbf{K}\overset{y1(t)}{u_{(t)}} - \mathbf{C}\overset{y2(t)}{\dot{u}_{(t)}}\right)$

Entonces nos queda

$$\dot{y} = \begin{Bmatrix} \dot{y}1 \\ \dot{y}2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y1 \\ y2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R} \end{Bmatrix} \qquad con \quad y1(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad y2(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

EJEMPLO APLICANDO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

EJEMPLO $\mathbf{M}\,\ddot{u}_{(t)} + \mathbf{C}\,\dot{u}_{(t)} + \mathbf{K}\,u_{(t)} = \mathbf{R}(t)$ con *valores iniciales conocidos* $u_{(t)}$ *y* $\dot{u}_{(t)}$

Haciendo un cambio de variables nos queda

$y1 = u_{(t)}$ *entonces* $\dot{y}1 = \dot{u}_{(t)} = y2$

$y2 = \dot{u}_{(t)}$ *entonces* $\dot{y}2 = \ddot{u}_{(t)} = \mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{R} - \mathbf{K}\underbrace{u_{(t)}}_{y1(t)} - \mathbf{C}\underbrace{\dot{u}_{(t)}}_{y2(t)}\right)$

Entonces nos queda

$$\dot{y} = \begin{Bmatrix} \dot{y}1 \\ \dot{y}2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y1 \\ y2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R} \end{Bmatrix} \qquad con \quad y1(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad y2(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Entonces lo programos en OCTAVE

EJEMPLO APLICANDO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA-OCTAVE

```
function RK_sistema
% Datos
dt=0.003; % incremento de tiempo
Ndt=1000; % cantidad de Dt a realizar
M= [1 0 0; 0 -1 0; 0 0 2];  %Matriz M
C= [4 0 0; 0 -1 0; 0 0 3];  %Matriz C
K= [0 4 1; 4 2 0; 1 0 1];   %Matriz K

% Valores Iniciales o actuales
tac=0;
yac= [1; 2; 1]   % correspondiente a y1
vac= [1; 4; 0]   % correspondiente a y2
A=zeros(3,3);   % Matriz de 3x3 con todos ceros
B=eye(3);       % Matriz identidad de 3x3
P=-inv(M)*K;    % Matriz de 3x3
Q=-inv(M)*C;    % Matriz de 3x3
T=[A,B;P,Q]     % Matriz formada por las matriz A, B, P y Q

R1(1,1)=5*exp(tac)+8*exp(2*tac)+cos(tac);  % primer componente del Término independiente
R1(2,1)=-8*exp(2*tac)+4*exp(tac);           % segunda componente del Término independiente
R1(3,1)=-cos(tac)-3*sin(tac)+exp(tac);      % tercer componente del Término independiente
R2=inv(M)*R1
R=[0;0;0;R2]      % Armado del Término independiente
t(1)=tac     % tiempo inicial
y(:,1)=[yac;vac];       % asigna a todas las filas de la primer columna de la matriz solución la condición inicial
w=0.5;          % Método de Euler Mejorado
  for i=1:Ndt-1
    ya=y(:,i);    % solución actual
    k1=dt*(T*ya+R);   %obtenemos el vector k1
    tg=t(i)+dt/(2*w);  % punto nuevo para t entre t(i) y t(i+1)
    yg=ya+k1/(2*w);  % solución intermedia de y
    R1(1,i+1)=5*exp(tg)+8*exp(2*tg)+cos(tg); % actualizacion del Término independiente para tg
    R1(2,i+1)=-8*exp(2*tg)+4*exp(tg);        % actualizacion del Término independiente para tg
    R1(3,i+1)=-cos(tg)-3*sin(tg)+exp(tg);    % actualizacion del Término independiente para tg
    R2=inv(M)*R1(:,i+1);
    R=[0;0;0;R2];     % Armado del Término independiente para el tiempo tg
    k2=dt*(T*yg+R);    %obtenemos el vector k2
    y(:,i+1)=ya+(1-w)*k1+w*k2;  % Nueva solución para y
    t(i+1)=t(i)+dt;   %actualizacion del tiempo
   end
   % Graficos
   plot(t, y(1,:), 'r',t, y(2,:),'b', t,y(3,:),'g')%
  endfunction
```

EJEMPLO APLICANDO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA-OCTAVE

```
function RK_sistema
% Datos
dt=0.003; % incremento de tiempo
Ndt=1000; % cantidad de Dt a realizar
M= [1 0 0; 0 -1 0; 0 0 2];  %Matriz M
C= [4 0 0; 0 -1 0; 0 0 3];  %Matriz C
K= [0 4 1; 4 2 0; 1 0 1];   %Matriz K

% Valores Iniciales o actuales
tac=0;
yac= [1; 2; 1]   % corresponidente a y1
vac= [1; 4; 0]   % corresponidente a y2
A=zeros(3,3);   % Matriz de 3x3 con todos ceros
B=eye(3);       % Matriz identidad de 3x3
P=-inv(M)*K;    % Matriz de 3x3
Q=-inv(M)*C;    % Matriz de 3x3
T=[A,B;P,Q]     % Matriz formada por las matriz A, B, P y Q

R1(1,1)=5*exp(tac)+8*exp(2*tac)+cos(tac);  % primer componente del Término independiente
R1(2,1)=-8*exp(2*tac)+4*exp(tac);          % segunda componente del Término independiente
R1(3,1)=-cos(tac)-3*sin(tac)+exp(tac);     % tercer componente del Término independiente
R2=inv(M)*R1
R=[0;0;0;R2]     % Armado del Término independiente
t(1)=tac    % tiempo inicial
y(:,1)=[yac;vac];      % asigna a todas las filas de la primer columna de la matriz solución la condición inicial
w=0.5;          % Método de Euler Mejorado
 for i=1:Ndt-1
   ya=y(:,i);    % solución actual
   k1=dt*(T*ya+R);   %obtenemos el vector k1
   tg=t(i)+dt/(2*w);  % punto nuevo para t entre t(i) y t(i+1)
   yg=ya+k1/(2*w);  % solución intermedia de y
   R1(1,i+1)=5*exp(tg)+8*exp(2*tg)+cos(tg); % actualizacion del Término independiente para tg
   R1(2,i+1)=-8*exp(2*tg)+4*exp(tg);        % actualizacion del Término independiente para tg
   R1(3,i+1)=-cos(tg)-3*sin(tg)+exp(tg);    % actualizacion del Término independiente para tg
   R2=inv(M)*R1(:,i+1);
   R=[0;0;0;R2];     % Armado del Término independiente para el tiempo tg
   k2=dt*(T*yg+R);    %obtenemos el vector k2
   y(:,i+1)=ya+(1-w)*k1+w*k2;  % Nueva solución para y
   t(i+1)=t(i)+dt;   %actualizacion del tiempo
  end
  % Graficos
  plot(t, y(1,:), 'r',t, y(2,:),'b', t,y(3,:),'g')%
 endfunction
```