DERIVACIÓN NUMÉRICA

Prof. Ing. Mauro Grioni

EXTRA INTEGRACIÓN NUMÉRICA

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y	1	7	4	3	5

```
function integral_simpson1
dx=0.1
 x=[0, 0.1, 0.2, 0.3 ,0.4]
  y=[1, 7, 4, 3 ,5]
  ul=length(x)
intimpar=0;
intpar=0;
for i=2:2:ul-1
  intimpar=intimpar+4*y(i);
endfor
intimpar
for i=3:2:ul-2
  intpar=intpar+2*y(i);
endfor
intpar
I=dx/3*(y(1)+intimpar+intpar+y(ul))

figure (1)
plot(x,y, 'r' )
endfunction
```

$\boxed{I=1.8}$

```
function metodo_directo
x=[0;0.1;0.2;0.3;0.4]
y=[1;7;4;3;5]
N=length(x);

fi=ones(N,N);
  for i=1:N
    for j=2:N
      fi(i,j)=x(i)^(j-1);
    endfor
  endfor
fi
a=fi\y
endfunction
```

```
a =

     1.0000
   166.6667
 -1458.3333
  4333.3333
 -4166.6667
```

$$P_n(x) = 1 + 166.7x - 1458.3x^2 + 4333.3x^3 - 4166.7x^4$$

$$I = \int_0^{0.4} P_n(x) = \int_0^{0.4} 1 + 166.7x - 1458.3x^2 + 4333.3x^3 - 4166.7x^4\,dx$$

$$I = \left[x + \frac{166.7}{2}x^2 - \frac{1458.3}{3}x^3 + \frac{4333.3}{4}x^4 - \frac{4166.7}{5}x^5\right]_0^{0.4}$$

$\boxed{I=1.82}$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADA NUMÉRICA A PARTIR DE INTERPOLACIÓN

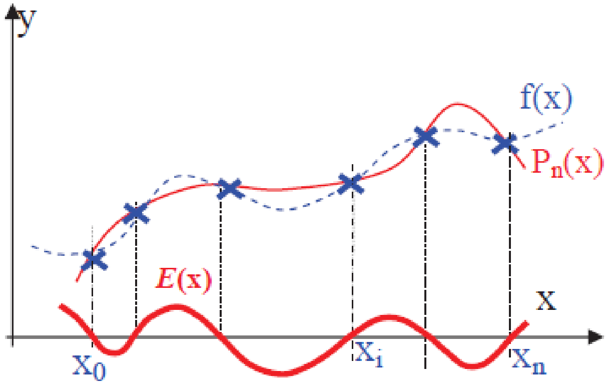
Si f(x) está dada en forma discreta es posible ***interpolar*** f(x) colocando un **polinomio $P_n(x)$,** de grado n, por los (n+1) puntos datos.

Si f(x) está dada en forma ***analítica*** se pueden *"extraer"* esos (n+1) puntos, para la versión discreta de la función f(x).

Es posible expresar:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots.(x-x_n)$$

suma del Polinomio de Interpolación mas la función Error de Interpolación.



Resulta posible

$$D = \left.\frac{d^n(f(x))}{dx^n}\right|_{Xj} = \sum_{k=0,N} c_k \cdot f(x_k) + E_n = \sum_{k=0,N} c_k \cdot y_k + E_n = \vec{c}^{\,T} \cdot \vec{y} + E_n$$

Donde los coeficientes c_k son valores particulares para cada regla de derivación y los $y_k=f(x_k)$ son los valores de la función discreta.

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADA PRIMERA A PARTIR DE INTERPOLACIÓN

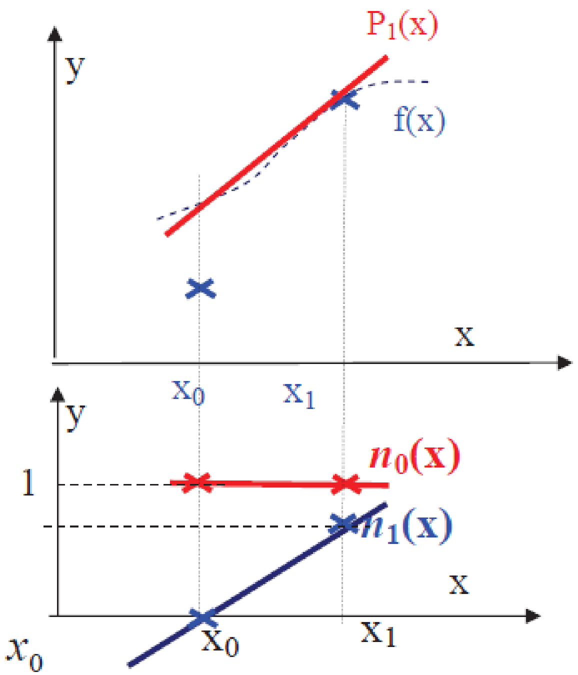
Si f(x) está dada en forma discreta con 2 puntos *(x_0;y_0), (x_1;y_1)* es posible interpolar f(x) colocando un polinomio de grado 1, usando polinomios de Newton, en la forma:

$$f(x) = \overbrace{a_0 + a_1 \cdot (x - x_0)}^{P_{(x)}} + \underbrace{\frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}(x - x_0)\cdot(x - x_1)}_{\text{Error}}$$

La derivada primera de f(x) es

$$\frac{d(f(x))}{dx} = a_1 + \frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}\cdot\frac{d((x - x_0)\cdot(x - x_1))}{dx}$$

$$\frac{d(f(x))}{dx} = a_1 + \frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}\cdot[(x - x_1) + (x - x_0)]$$



Cuando se evalúa la derivada primera de f(x) en x_0 y en x_1 se obtienen:

Derivada Primera Adelante

$$\left.\frac{d(f(x))}{dx}\right|_{X=X0} = a_1 + \frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}\cdot\Delta x \quad con \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} \quad y \quad \Delta x = x_1 - x_0$$

Derivada Primera Atrás

$$\left.\frac{d(f(x))}{dx}\right|_{X=X1} = a_1 + \frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}\cdot\Delta x \quad con \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} \quad y \quad \Delta x = x_1 - x_0$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADA SEGUNDA A PARTIR DE INTERPOLACIÓN

Si f(x) está dada en forma discreta con 3 puntos $(x_0;y_0)$, $(x_1;y_1)$ es posible interpolar f(x) colocando un polinomio de grado 2, usando polinomios de Newton, en la forma:

$$f(x)\cdot = a_0 + a_1\cdot(x-x_0) + a_2\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{(3)!}(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

La derivada segunda de f(x) es

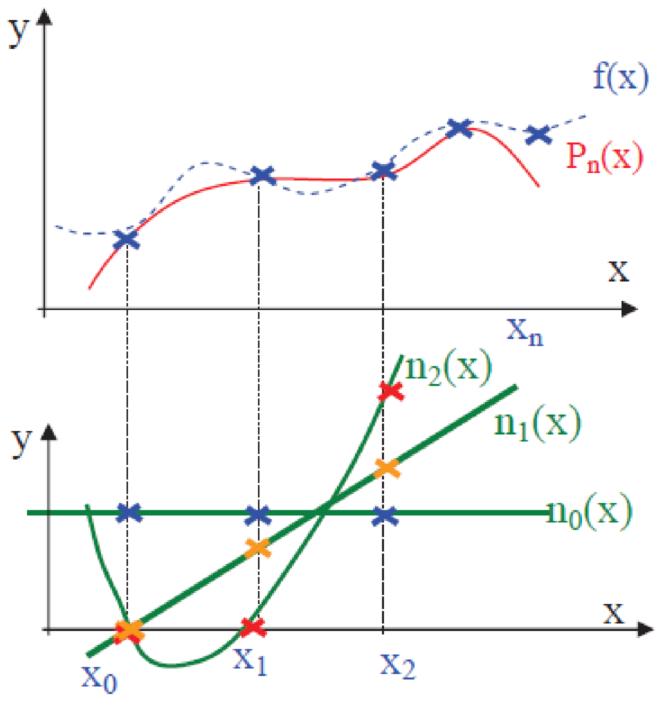
$$\frac{d^2(f(x))}{dx^2} = 2a_2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{(3)!}\cdot\frac{d^2((x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2))}{dx^2}$$

Con $2a_2 = 2\dfrac{\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} = 2\cdot\dfrac{1}{2\Delta x}\cdot\left(\dfrac{y_2-y_1}{\Delta x}-\dfrac{y_1-y_0}{\Delta x}\right)$

Con lo que la derivadas segunda es

$$\left.\frac{d^2(f(x))}{dx^2}\right| = \frac{1}{\Delta x^2}(y_0-2y_1+y_2) \quad + \quad E_D(x)$$

$$E_D(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{(3)!}\cdot\frac{d^2((x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2))}{dx^2}$$



DERIVACIÓN NUMÉRICA

x	5	7	9
y	5	-1	2

DERIVADA NUMÉRICA

$$D_1'' = \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)[y_0 - 2y_1 + y_2]$$

$$D_{(x=7)}'' = \left(\frac{1}{2^2}\right)[5 - 2(-1) + 2]$$

$$D_{(x=7)}'' = \left(\frac{1}{2^2}\right)[5 - 2(-1) + 2]$$

$$\boxed{D_{(x=7)}'' = 2.25}$$

INTERPOLACIÓN Y DERIVACIÓN ANALÍTICA

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 9 & 81 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$a_0 = 59.375$$
$$a_1 = -16.5$$
$$a_2 = 1.125$$

$$P_n(x) = 59.375 - 16.5x + 1.125x^2$$

$$D' = -16.5 + 2.25x$$

$$D'' = 2.25$$

$$\boxed{D'' = 2.25}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADAS EN BASE A SERIE DE TAYLOR

La utilización de la serie de Taylor para el desarrollo de una función ***f(x)***, alrededor de un punto x_s, permite calcular en forma aproximada el valor de la función en un punto cercano $x = x_s + nh$; *"n"* es un número entero positivo o negativo.

$$f(x_s + nh) = f(x_s) + n\,h\,f'(x_s) + \frac{(nh)^2 f''(x_s)}{2!} + \frac{(nh)^3 f'''(x_s)}{3!} + \frac{(nh)^4 f^{\prime v}(x_s)}{4!} + O(h^5).$$

$n = -2$ $$f_{s-2} = f_s - 2h\,f_s' + \frac{4h^2}{2!} f_s'' - \frac{8h^3}{3!} f_s''' + \frac{16h^4}{4!} f_s^{\prime v} + O(h^5),$$

$n = -1$ $$f_{s-1} = f_s - h\,f_s' + \frac{h^2}{2!} f_s'' - \frac{h^3}{3!} f_s''' + \frac{h^4}{4!} f_s^{\prime v} + O(h^5),$$

$n = 0$ $$f_s = f_s,$$

$n = 1$ $$f_{s+1} = f_s + h\,f_s' + \frac{h^2}{2!} f_s'' + \frac{h^3}{3!} f_s''' + \frac{h^4}{4!} f_s^{\prime v} + O(h^5),$$

$n = 2$ $$f_{s+2} = f_s + 2h\,f_s' + \frac{4h^2}{2!} f_s'' + \frac{8h^3}{3!} f_s''' + \frac{16h^4}{4!} f_s^{\prime v} + O(h^5).$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADAS PRIMERA HACIA ADELANTE

Considerando el desarrollo en Serie de Taylor de la función en n=1 tenemos

$$n = 1 \qquad f_{s+1} = f_s + h\, f_s' + \frac{h^2}{2!} f_s'' + \frac{h^3}{3!} f_s''' + \frac{h^4}{4!} f_s^{\,iv} + O(h^5),$$

Al quedarnos con los dos primeros términos nos queda el valor aproximado de la función

$$f_{s+1} = f_s + h\, f'_s + O(h^2),$$

De donde es posible despejar el valor de la derivada primera de la función en $x=x_s$

$$\boxed{f_s' = \frac{1}{h}\left[f_{s+1} - f_s\right] - O(h)}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADAS PRIMERA HACIA ATRÁS

Considerando el desarrollo en Serie de Taylor de la función en n=-1 tenemos

$$n = -1 \qquad f_{s-1} = f_s - h f_s' + \frac{h^2}{2!} f_s'' - \frac{h^3}{3!} f_s''' + \frac{h^4}{4!} f_s^{IV} + O(h^5),$$

Al quedarnos con los dos primeros términos nos queda el valor aproximado de la función

$$f_{s-1} = f_s - h f'_s + O(h^2)$$

De donde es posible despejar el valor de la derivada primera de la función en $x=x_s$

$$\boxed{f_s' = \frac{1}{h}[f_s - f_{s-1}] + O(h)}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADAS PRIMERA CENTRAL

Considerando el desarrollo en Serie de Taylor para n=1 y n=-1 tenemos

$$f_{s+1} = f_s + h\,f_s' + \frac{h^2}{2} f_s'' + \frac{h^3}{6} f_s''' + \cdots$$

$$f_{s-1} = f_s - h\,f_s' + \frac{h^2}{2} f_s'' - \frac{h^3}{6} f_s''' + \cdots$$

y restando miembro a miembro nos queda

$$f_{s+1} - f_{s-1} = 2h\,f_s' + \overbrace{2\frac{h^3}{6} f_s''' + \cdots}^{O(h^3)}$$

De donde es posible despejar el valor de la derivada primera de la función en $x=x_s$

$$\boxed{f_s' = \frac{[f_{s+1} - f_{s-1}]}{2h} + O(h^2)}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADAS PRIMERA ASIMÉTRICA ADELANTE

Considerando el desarrollo en Serie de Taylor para n=1 y n=2 tenemos

$$n=+1 \qquad f_{s+1}=f_s+h\,f_s'+\frac{h^2}{2}f_s''+\frac{h^3}{6}f_s'''+\frac{h^4}{24}f_s^{IV}+\frac{h^5}{120}f_s^{V}+\cdots$$

$$n=+2 \qquad f_{s+2}=f_s+2h\,f_s'+2h^2\,f_s''+\frac{4}{3}h^3\,f_s'''+\frac{2}{3}h^4 f_s^{IV}+\frac{4}{15}h^5 f_s^{V}+\cdots$$

Siguiendo los procedimientos de la Guía_teoría página 123 llegamos a

$$\boxed{f_s'=\left(\frac{1}{2h}\right)[-3f_s+4f_{s+1}-1f_{s+2}]+O(h^2)}$$

DERIVADAS PRIMERA ASIMÉTRICA ATRÁS

Considerando el desarrollo en Serie de Taylor para n=-1 y n=-2 y siguiendo la Guía_Teoría llegamos a

$$\boxed{f_s'=\left(\frac{1}{2h}\right)[3f_s-4f_{s-1}+1f_{s-2}]+O(h^2)}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADAS SEGUNDA CENTRAL

Considerando el desarrollo en Serie de Taylor para n=1 y n=-1 tenemos

$$f_{s+1} = f_s + h\, f_s' + \frac{h^2}{2} f_s'' + \frac{h^3}{6} f_s''' + \cdots$$

$$f_{s-1} = f_s - h\, f_s' + \frac{h^2}{2} f_s'' - \frac{h^3}{6} f_s''' + \cdots$$

y sumando miembro a miembro nos queda

$$f_{s+1} + f_{s-1} = 2 f_s + h^2 f_s'' + \overbrace{\frac{h^4}{12} f_s''' + \cdots}^{O(h^4)}$$

De donde es posible despejar el valor de la derivada segunda de la función en $x = x_s$

$$\boxed{f_s'' = \frac{1}{h^2}\left[f_{s+1} - 2 f_s + f_{s-1}\right] + O\left(h^2\right)}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

DERIVADAS SEGUNDA ASIMÉTRICA ADELANTE

$$f_s'' = \left(\frac{1}{h^2}\right)[2f_s - 5f_{s+1} + 4f_{s+2} - 1f_{s+3}] + O(h^2)$$

DERIVADAS SEGUNDA ASIMÉTRICA ATRÁS

$$f_s'' = \left(\frac{1}{h^2}\right)[2f_s - 5f_{s-1} + 4f_{s-2} - 1f_{s-3}] + O(h^2)$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

EJERCICIO: Obtener las derivadas segundas con el mismo orden de error de la función f(x)=cos($x\pi$) con paso h=0.1 en el intervalo [0:1].

Ayuda: hay que aplicar

$$\boxed{f_s'' = \frac{1}{h^2}\left[f_{s+1} - 2f_s + f_{s-1}\right]}$$

$$\boxed{f_s'' = \left(\frac{1}{h^2}\right)\left[2f_s - 5f_{s+1} + 4f_{s+2} - 1f_{s+3}\right]}$$

$$\boxed{f_s'' = \left(\frac{1}{h^2}\right)\left[2f_s - 5f_{s-1} + 4f_{s-2} - 1f_{s-3}\right]}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

EJERCICIO: Obtener las derivadas segundas con el mismo orden de error de la función f(x)=cos($x\pi$) con paso h=0.1 en el intervalo [0:1]

```
function derivada_segunda
clc, clear
h=0.1                 % paso h
x=0:h:1;              % Discretización en x
N=length(x);          % determina la cantidad de puntos
y=cos(x*pi())         % Discretización en y
dy2(1)=(1/h^2)*(2*y(1)-5*y(2)+4*y(3)-1*y(4));  % Calculo de la derivada segunda asimetrica adelante
for i=2:N-1
  dy2(i)=(1/h^2)*(y(i-1)-2*y(i)+y(i+1));       % Calculo de la derivada segunda central
 end
 dy2(N)=(1/h^2)*(2*y(N)-5*y(N-1)+4*y(N-2)-1*y(N-3)); % Calculo de la derivada segunda asimetrica atrás

 dy2'      % Muestra la derivada segunda en forma traspuesta
 %Gráfico de la función coseno
 figure (1)
 plot(x,y,'r')
 %Gráfico de las dericada segunda
 figure (2)
 plot(x,dy2)
end
```

DERIVACIÓN NUMÉRICA

EJERCICIO: Escriba un algoritmo para obtener las derivadas primeras para la función dada en forma discreta considerando el mismo orden de error. Obtenga las derivadas primeras trabajando en forma matricial.

x	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
u	0	0.22	-2.05	-0.61	-0.80	-1

Ayuda: hay que aplicar

$$\boxed{f'_s = \frac{[f_{s+1} - f_{s-1}]}{2h} + O(h^2)}$$

$$\boxed{f'_s = \left(\frac{1}{2h}\right)[-3f_s + 4f_{s+1} - 1f_{s+2}] + O(h^2)}$$

$$\boxed{f'_s = \left(\frac{1}{2h}\right)[3f_s - 4f_{s-1} + 1f_{s-2}] + O(h^2)}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

EJERCICIO: Escriba un algoritmo para obtener las derivadas primeras para la función dada en forma discreta considerando el mismo orden de error. Obtenga las derivadas primeras trabajando en forma matricial.

x	**0**	**0.4**	**0.8**	**1.2**	**1.6**	**2.0**
u	**0**	**0.22**	**-2.05**	**-0.61**	**-0.80**	**-1**

```
function derivada_primera
clc, clear
N=6;
L=2;
h=L/(N-1);
x=0:h:L
y=[0 -0.22 -2.05 -0.61 -0.80 -1]
Der=derivada(y,h) %5
end
function deri=derivada(vector,paso)
N=length(vector); % para saber cuantos elementos tiene el vector
vector_columna(:,1)=vector %lo paso a columna
W=zeros(N,N);%armo la matriz de coef con ceros
W(1,1)=-3; W(1,2)=4; W(1,3)=-1; %reemplazo los valores de la 1° fila
W(N,N-2)=1; W(N,N-1)=-4; W(N,N)=3;%reemplazo los valores de la última fila
for i=2:N-1 %reemplazo los valores 2° hasta N-1
W(i,i-1)=-1; %izquierda de la diagonal
W(i,i+1)=1; %derecha de la diagonal
endfor
deri=1/(paso*2)*W*vector_columna;
end
```

$$f_s' = \left(\frac{1}{2h}\right)[f_{s+1} - f_{s-1}] + O(h^2)$$

$$f_s' = \left(\frac{1}{2h}\right)[-3f_s + 4f_{s+1} - 1f_{s+2}] + O(h^2)$$

$$f_s' = \left(\frac{1}{2h}\right)[3f_s - 4f_{s-1} + 1f_{s-2}] + O(h^2)$$

EJERCICIO INTEGRADOR

EJERCICIO: Dada una cuerda de longitud l=3 cuyo desplazamiento "u" se muestra en la tabla siguiente

x	**0**	**0.5**	**1**	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**
u	**167**	**176**	**201**	**241**	**291**	**347**	**400**

SE PIDE:

- **CALCULAR** $\frac{\partial u}{\partial x}$
- **CALCULAR** $I = \int_0^L 2\pi x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$

EJERCICIO INTEGRADOR

SOLUCIÓN

```
function derivada_integral1
clc, clear
N=7;
L=3;
h=L/(N-1);
x=0:h:L
y=[167 176 201 241 291 347 400]
% Derivada
dy(1)=1/(2*h)*(-3*y(1)+4*y(2)-1*y(3));
for i=2:N-1
  dy(i)=(1/(2*h))*(-y(i-1)+y(i+1));
end
 dy(N)=(1/(2*h))*(3*y(N)-4*y(N-1)+1*y(N-2));
 dy1=dy';
 dy1
% Integral
c(1)=2*pi()*x(1)*dy(1)^2/2
c(N)=2*pi()*x(N)*dy(N)^2/2;
sum=0;
for i=2:N-1
  sum=sum+(2*pi()*x(i)*dy(i)^2);
end
Int=h*(c(1)+sum+c(N))
end
```

$$I = h\left[\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_n}{2}\right]$$

Trapecios múltiples

$$\boxed{I=267164.18}$$

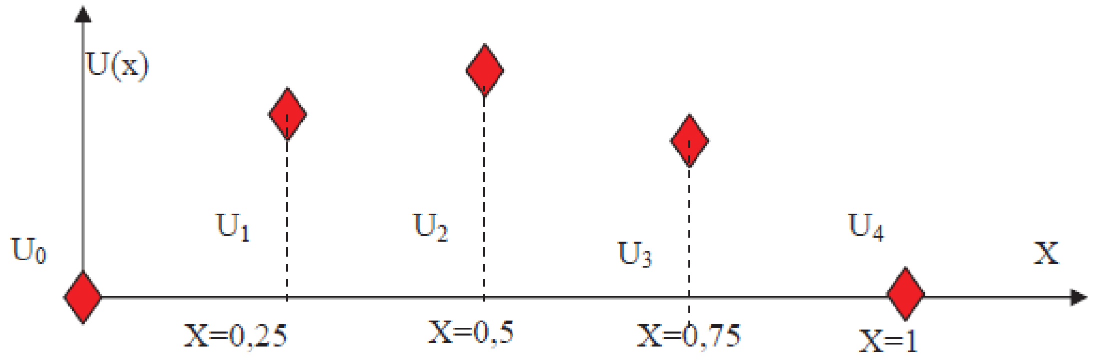
APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

Se busca *u(x)* solución de

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}+u(x)-x=0 \quad en \;\; \Omega=\{x\,\varepsilon\,R:0\le x\le 1\}$$
$$u(0)=0$$
$$u(1)=0$$

se plantea encontrar una ***solución aproximada en forma de función discreta***, sólo en algunos puntos elegidos del dominio Ω, equidistantes entre sí, identificados con su abscisa X_k.

Es decir, se busca ***$U(X_k)=U_k$*** con k=0,N; ***función discreta*** que es una aproximación de la función continua *u(x)*.



APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) - x = 0$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)[U_{k-1} - 2U_k + U_{k+1}]$$

Entonces en cada x_k se puede plantear la ecuación diferencial a resolver pero con una aproximación de la derivada segunda en forma de derivada numérica y nos quedaría

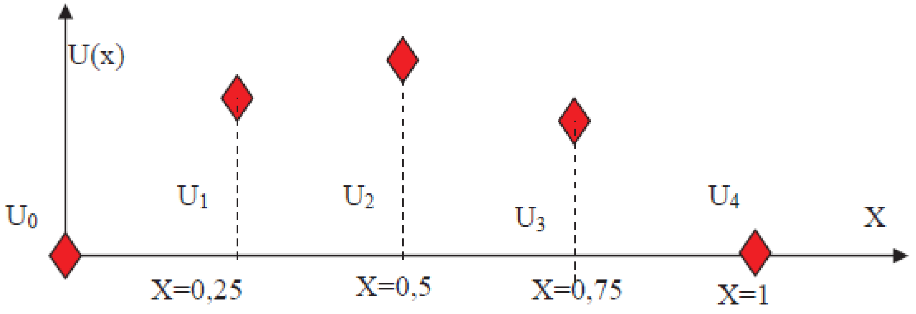
$$-\frac{1}{\Delta x^2}[U_{k-1} - 2U_k + U_{k+1}] + U_k - X_k = 0$$

APLICACIÓN DE DERIVADA NUMÉRICA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALORES EN LOS CONTORNOS

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}+u(x)-x=0 \quad en \;\; \Omega=\{x\,\varepsilon\, R: 0\le x\le 1\}$$

$$u(0)=0$$

$$u(1)=0$$



Si se consideran 5 puntos en todo el dominio, que son 3 en el interior y uno en cada uno de los bordes, es posible plantear

en X_0 se debe cumplir que: $U_0=0$

en X_1 se debe cumplir que: $-\frac{1}{0{,}25^2}\left[U_0-2\cdot U_1+U_2\right]+U_1-X_1=0$

en X_2 se debe cumplir que: $-\frac{1}{0{,}25^2}\left[U_1-2\cdot U_2+U_3\right]+U_2-X_2=0$

en X_3 se debe cumplir que: $-\frac{1}{0{,}25^2}\left[U_2-2\cdot U_3+U_4\right]+U_3-X_3=0$

en X_4 se debe cumplir que: $U_4=0$

$$-\frac{1}{\Delta x^2}\left[U_{k-1}-2U_k+U_{k+1}\right]+U_k-X_k=0$$

O bien en forma de sistema de ecuaciones lineales

$$\left[\frac{1}{0{,}25^2}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}32+1&-16&0\\-16&32+1&-16\\0&-16&32+1\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0{,}25\\0{,}5\\0{,}75\end{Bmatrix}$$

La solución aproximada resulta $\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0{,}03488525\\0{,}05632582\\0{,}05003676\end{Bmatrix}$

La solución exacta de la ecuación diferencial es $u_{(x)}=x-\frac{senh(x)}{senh(1)}$ ➡ $\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.0350476\\0.0565905\\0.0502758\end{Bmatrix}$