

密立根油滴实验的不确定度分析

曾孝奇, 邵明珍, 陈 佶, 杨 珺

(南方科技大学 物理系, 广东 深圳 518055)

摘要:密立根油滴实验中, 油滴携带电荷量越多, 通常测量误差越大. 从不确定度的计算出发, 利用数值模拟, 定量分析了如何在保证测量精度的情况下尽可能测量多个不同电荷量的油滴. 我们的结果对于准确测量提供了理论依据.

关键词:密立根油滴实验; 不确定度; 误差分析.

中图分类号: O 4-33

文献标识码: A

文章编号: 1000-0712(2017)12-0037-04

【DOI】10.16854/j.cnki.1000-0712.2017.12.010

密立根油滴实验以其巧妙设计, 丰富的实验数据第一次向人们展示了微观世界奇妙特性——电荷分布的量子化特征, 并且准确的测出了元电荷的值即电子电量, 也因此该实验被评为物理学史上十大经典实验之一. 密立根油滴实验是许多大学近代物理实验之一, 学生从实验中能体会到巧妙的设计方案, 还能加深对电量分布量子化特性的理解^[1]. 该实验要求学生测量几个不同油滴的电荷量并计算元电荷的值. 由于测量的油滴数量有限, 通常实验利用倒过来验证的方法, 其中油滴的电荷个数 n 涉及到四舍五入取整的步骤^[1-3], 因此, 实验的关键是准确测量几个不同油滴携带的电荷量. 测量电荷量有平衡法和动态法, 两者待测参数都是电压和时间^[2]. 对于平衡法, 为了准确测量电荷的电荷量, 许多实验教材上都给出了合理的测量建议^[1], 但没有分析过程. 有文献利用不确定度或数值计算的方法分析了平衡法的电压和时间测量范围^[4-7]. 也有文献^[8]分析了动态法的合适的电压和时间测量范围, 但是没有定量地分析测量误差. 在本文中, 将利用不确定度的方法定量地分析密立根油滴实验电荷量的不确定度并分析如何在保证精度的情况下尽可能测得更多不同 q 值的电荷. 作为一个例子, 我们给出误差在 4% (动态法) 和 3% (平衡法) 以内的测量建议.

1 油滴电荷量的计算和不确定度

动态法测量油滴电荷量的基本出发点是: 考虑电荷量为 q 的油滴, 分别在重力场中匀速下落和在电场中匀速上升, 如图 1.

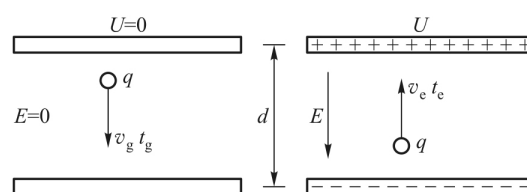


图 1 油滴在重力场和电场中匀速运动

根据运动学公式可得油滴电荷量的计算公式

$$q = \frac{A}{U} \eta_r^{3/2} \left(\frac{1}{t_g} + \frac{1}{t_e} \right) t_g^{-1/2} \quad (1)$$

式(1)中已忽略空气的浮力, 其中

$$A = 9\sqrt{2} \pi d \left[\frac{(\eta l)^3}{\rho g} \right]^{1/2} \quad (2)$$

$$\eta_r = \left(1 + \frac{b}{pr} \right)^{-1} \quad (3)$$

$$r = \left(\frac{9\eta l}{2\rho g t_g} \right)^{1/2} \quad (4)$$

η_r 称为相对黏度, 它与下落时间 t_g 有关. 利用式(1)、(3)、(4), 消去油滴半径 r 可得

$$q = \frac{A}{U} (1 + B\sqrt{t_g})^{-3/2} \left(\frac{1}{t_g} + \frac{1}{t_e} \right) t_g^{-1/2} \quad (5)$$

$$B = \frac{b}{p} \sqrt{\frac{2\rho g}{9\eta l}} \quad (6)$$

公式中各参数说明见表 1.

表 1 公式中各物理量说明

符号	意义	数值	单位
d	电场极板间距离	5	mm
η	空气的黏度	$1.83 \times 10^{-5}[1]$	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
l	油滴匀速下落和上升的距离	1.5	mm
ρ	油滴密度	981 ^[1]	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
g	重力加速度	9.8	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

收稿日期: 2017-03-03; 修回日期: 2017-04-23

作者简介: 曾孝奇(1983—), 男, 广西来宾市人, 南方科技大学物理实验室实验员, 硕士, 主要从事大学物理实验教学工作.

续表

符号	意义	数值	单位
b	斯托克斯公式修正常数	$8.22 \times 10^{-3[2]}$	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$
p	大气压强	1.01325×10^5	Pa
r	油滴半径	未知量	—
t_g	重力场中匀速下落时间	待测	s
t_e	电场中匀速上升时间	待测	s
U	提升(平衡)电压	待测	V
A	仪器及环境相关的常数	9.27×10^{-15}	
B	仪器及环境相关常数	0.0226	

表中 A 和 B 均为采用各物理量的国际单位计算得到,为简便,这里没有标出它们的单位.利用式(5),只要测出 U 、 t_g 和 t_e ,即可计算油滴携带的电量 q .当 $1/t_e=0$,式(5)即为平衡法的计算公式.对于平衡法的测量,通常实验教材上会给出平衡电压 U 取 200 V 左右,下落时间 t_g 为 20 s 左右的建议,因此时油滴携带电量较小,有利于减小实验误差.相关文献[4-7]更进一步,从不确定度的角度出发,分析了平衡电压和测量时间的范围.但是,其分析仅限于平衡法,没有涉及动态法.下面,将利用不确定度来分析动态法测量电荷量的误差,作为动态法的特例,我们的分析方法也适用于平衡法.

从实验控制误差的角度,通常需要考虑测量的最大不确定度.根据式(5),动态法的直接测量量是 U 、 t_g 和 t_e ,因此我们仅考虑这 3 项的误差,其余参数视为常数.由此得到电荷量 q 的最大相对不确定度为

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{3}{2} \frac{\Delta t_g}{t_g} + \frac{\Delta t_e}{t_e} + \frac{\Delta t_g + \Delta t_e}{t_g + t_e} + \frac{3}{4} \frac{B \Delta t_g}{(B t_g + \sqrt{t_g})^{1/2}} \approx \frac{\Delta U}{U} + \frac{3}{2} \frac{\Delta t_g}{t_g} + \frac{\Delta t_e}{t_e} + \frac{\Delta t_g + \Delta t_e}{t_g + t_e} \quad (7)$$

式(7)中最后一项为与相对黏度有关,利用相关参数可证明在该实验中最后一项可忽略(见以下证明).一般情况下,下落时间 t_g 和上升时间 t_e 不相等,为便于分析,不妨令 t 表示 t_g 和 t_e 中较小者,即 $t = \min(t_g, t_e)$.另外,下落时间 t_g 和上升时间 t_e 主要来源于操作者的反应时间,可认为 $\Delta t_g = \Delta t_e = \Delta t$,

此时根据式(7)有 $\frac{\Delta q}{q} \leq \frac{\Delta U}{U} + \frac{7}{2} \frac{\Delta t}{t}$ (8)

通常情况下,为得到电量 q 的准确值,可设定 $\Delta q/q$ 小于某个值,例如 1%.但是本实验油滴携带的电荷量 q 并非一个固定值, q 可能取值是一系列离

散的值,即 $q = ne$, n 为电荷个数, e 为电子电荷量.因此,当 $n=100$ 时,即使 $\Delta q/q < 1\%$,电荷量 q 的误差也可能为 $\pm e$,电荷量 q 值并非不准确,在这种条件下去验证 q 的量子化就不准确.因此,在考虑 $\Delta q/q$ 需同时考虑 Δq ,显然,当 $\Delta q \geq 0.5e$ 时,电荷个数 n 采用四舍五入误差就很大.基于此,以下分析中本文设定 $\Delta q < 0.5e$.如果电荷量 $q \leq 10e$,那么 $\Delta q/q < 5\%$.而随着电荷量 q 的增加, $\Delta q/q$ 逐渐减小,此时实验测量精度要求越来越高.因此,经过粗略分析可知,在测量精度一定的情况下,测量电荷个数较少的油滴电荷量 q 会比较准确.

根据最大不确定度式(8),可以采用误差均分方法[2]大概估计 U 和 t 的取值范围,当 ΔU 和 Δt 一定的情况下, U 和 t 越大,误差越小.另一方面,根据式(5),当常数 A 和 B 一定时, U 和 t 越大, q 就越小,就可能测到的油滴个数比较少甚至找不到合适的油滴.而且, U 和 t 越大,越不利于实验操作.而我们在保证精度的情况下,尽可能测量多个不同 q 值的油滴.因此, U 和 t 的测量范围应该结合式(5)和式(8)得到一个平衡的范围,以下我们通过数值分析的方法,得到 U 和 t 合适的测量范围.

2 数值分析—动态法 U 、 t_g 和 t_e 的测量范围

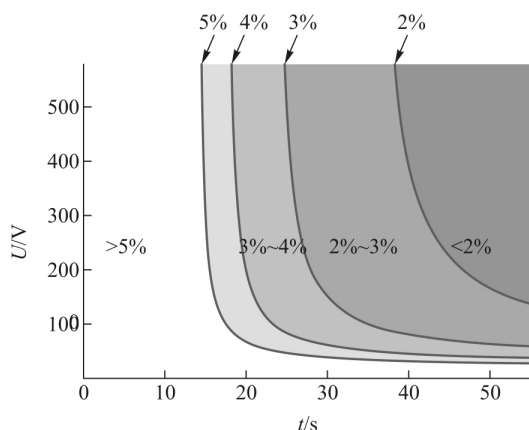
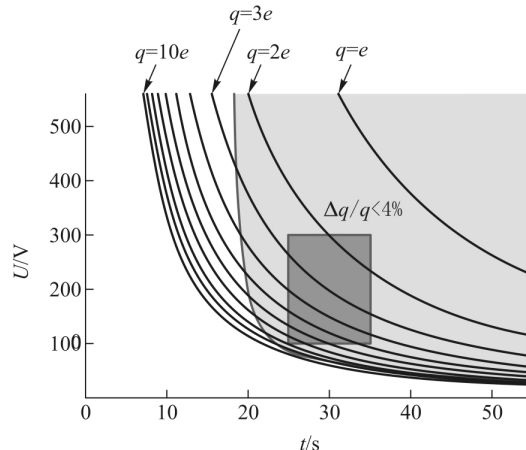
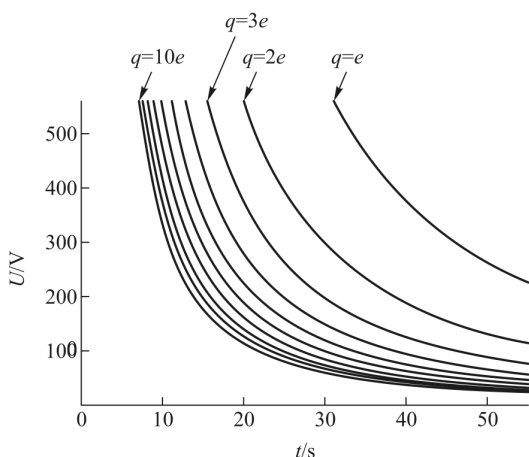
本文以下的数值计算基于南京大学研制的 OM99 密立根油滴实验仪,实验用油滴为上海中华 701 钟油产生,计算用到的相关物理量数值如表 1.针对 OM99,电压的不确定度取 $\Delta U = 1$ V,时间的不确定度 $\Delta t = 0.2$ s.来看看我们刚刚忽略的那一项 $3B\Delta t_g/4(Bt_g + \sqrt{t_g})^{1/2}$ 即使对于一个很短的时间 $t_g = 5$ s,它的结果是 0.002,因此相对其他项要小得多,我们的近似处理是合理的.

首先来看不同的不确定度对于 U 和 t 的要求.根据式(8),分别让 $\Delta q/q$ 取不同的值,以电压 U 为纵坐标, t 为横坐标,可以得到在 $U-t$ 平面 $\Delta q/q$ 的分布情况,如图 2.

图中曲线为将 $U-t$ 平面分割成几块不同的不确定度区域,当不确定度越小,要求 U 和 t 越大.

下面我们来看看电荷量 q 在 $U-t$ 平面中如何分布.在考虑电荷量 q 时,为便于处理,假设 $t_g = t_e = t$,式(5)变为 $\frac{2A}{U} (1 + B\sqrt{t})^{-3/2} t^{-3/2}$ (9)

根据式(9),分别让 q 取 1~10 个单位电荷,即 $q = e, 2e, 3e, \dots, 10e$,可得 q 在 $U-t$ 平面的分布情况,如图 3.

图 2 动态法 $\Delta q/q$ 分布区域图 4 动态法测量区域($\Delta q/q \leq 4\%$)图 3 动态法电荷量 q 的分布区域

图中每一条黑线对应着油滴电荷量 q 的一种取值,油滴携带的电荷量越多,黑线越往 y 轴靠近.由此可见,当电荷量 q 较大时,要求 U 和 t 的取值越小.针对本实验目的,我们希望能测到的电荷量 q 较多且较准确,因此,应当结合图 2 和图 3 来考虑合适的 U 和 t 的测量范围.为便于分析,我们将 $\Delta q/q$ 和 q 的分布画在同一张图里,如图 4.

图 4 中选取的矩形深色区域为 $\Delta q/q \leq 4\%$,为了寻找合适的油滴,测量的范围应是矩形深色区域与线条相交的地方.考虑到测量时,电压 U 和时间 t 的范围不应太大,同时覆盖的电荷量 q 应较多,我们划出了一个深色矩形区域:

$$\begin{aligned} 100 \text{ V} < U < 300 \text{ V}, \\ 25 \text{ s} < t < 35 \text{ s} \end{aligned} \quad (10)$$

其中心为 $t = 30 \text{ s}$, $U = 200 \text{ V}$.深色区域内涵盖 $q = 2e$ 到 $q = 7e$ 几种可能.特别指出的是,式(10)中 U 和 t 的范围仅作为一个参考, U 和 t 的范围只要在

图 4 的浅灰色区域内,都满足 $\Delta q/q \leq 4\%$,但是 U 和 t 也不能太大,它们的上限受制于仪器的量程.

在以上分析中,我们在式(5)中假定了上升时间 t_e 和下降时间 t_g 相等才得到图 3 和图 4 当中的电荷量 q 的曲线,实际上,两者很多时候并不相等.当上升时间 t_e 和下降时间 t_g 不相等时,不妨假设 $t_g > t_e$,那么此时会存在一个 t_m ,满足

$$(1 + B\sqrt{t_g})^{-3/2} \left(\frac{1}{t_g} + \frac{1}{t_e} \right) t_g^{-1/2} = (1 + B\sqrt{t_m})^{-3/2} t_m^{-3/2}$$

而 $t_e < t_m < t_g$,显然,当 t_g 和 t_e 都符合式(10)时,点 (t_e, U) 和点 (t_g, U) 都在图 4 的矩形区域内,那么点 (t_m, U) 也在矩形区域内,因此 (t_m, U) 对应的电荷量 q 也符合测量的不确定度要求.总之,不管 t_g 和 t_e 是否相等,只要 t_g 和 t_e 的取值符合式(10),油滴的电荷量满足 $\Delta q/q \leq 4\%$.以上分析我们选择 4% 作为不确定度的分界而不是更小,是因为当 $\Delta q/q$ 更小,由式(8)可见,就会要求 U 和 t 更大,这样,图 4 的灰色区域就会缩小,其涵盖的电荷量 q 就会减少,不利于实验测量.当然,当 $q < 10e$ 时,选择 5% 作为分界线也是可以的,这样式(10)区域会有微小调整,同时,误差也更大.

根据以上分析,在动态法测量中,我们可以选择下落较慢的油滴($t_g > 25 \text{ s}$),当油滴上升时,调节适当的提升电压,使其缓慢上升($t_e > 25 \text{ s}$),而提升电压 U 需要大于 100 V ,此时计算得到的电荷量 q 满足 $\Delta q/q \leq 4\%$.这种方法适合电荷量 $q \leq 10e$ 的情况.

3 平衡法 U 和 t_g 的测量范围

在式(5)中取 $1/t_e = 0$,得到平衡法电荷的计算

$$\text{公式为} \quad q = \frac{A}{U} (1 + B\sqrt{t_g})^{-3/2} t_g^{-3/2} \quad (11)$$

同时容易得到, 不确定度

$$\frac{\Delta q}{q} \approx \frac{\Delta U}{U} + \frac{3}{2} \frac{\Delta t_g}{t_g} \quad (12)$$

类似式(7), 我们将含有 B 的一项忽略了. 显然, 从不确定度角度看, 相同的电压和时间情况下, 平衡法的测量误差要更小. 因此, 这里取 $\Delta q/q \leq 3\%$, 以期更高的测量精度, 而从下图可见, 这样期待是合理的. 类似地, 我们可以通过不确定度 $\Delta q/q$ 和电量 q 的重叠区域来确定在 U 和 t_g 的范围.

如图5, 我们可以选择如下深色矩形区域, 作为 U 和 t_g 的测量范围, 即

$$\begin{aligned} 100 \text{ V} < U < 300 \text{ V} \\ 15 \text{ s} < t_g < 30 \text{ s}. \end{aligned} \quad (13)$$

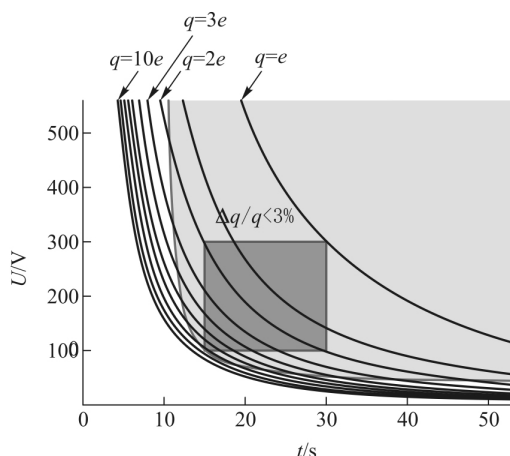


图5 平衡法测量范围($\Delta q/q \leq 3\%$)

此范围内涵盖电荷量 q 为 $2e \sim 8e$. 类似的, 式(13)中 U 和 t_g 的范围仅作为一个参考, U 和 t 的范围只要在图5的浅灰色区域内, 都能满足 $\Delta q/q \leq 3\%$, 同样 U 和 t 不能太大, 它们的上限受制于仪器的量程. 总之, 平衡法中, 可以选择下落时间是 20 s 左右, 平衡电压为 200 V 附近的油滴, 这个建议与许多实验教材上给出的参考值^[1]接近.

4 总结

本文对密立根油滴实验的电荷量测量做了完整的误差分析. 针对 OM99 密立根油滴实验仪, 通过数值计算, 分别将电荷量 q 的相对不确定度控制在 4% 和 3% 以内, 得到了动态法和平衡法的电压 U 和时间 t 的测量范围 (见图4和图5). 该范围给油滴电荷量 q 的准确测量提供了理论依据, 也有助于快速找到合适的油滴. 另外, 对于大量油滴的测量数据, 分析的结果也可以作为筛选数据的依据. 需要指出的是, 虽然本文给出的结果是针对 OM99 机型, 实际仪器型号或参数 (例如下落距离 l) 有差异, 但是以上分析过程仍然适用. 总之, 我们的分析结果给密立根油滴实验提供了一种快速找到合适油滴和准确测量的方法.

参考文献:

- [1] 李书光, 张亚萍, 朱海丰. 大学物理实验[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 251-256.
- [2] 吴咏华, 霍剑青, 浦其荣. 大学物理实验 (第一册) [M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2012: 238-244.
- [3] 吴先球, 熊予莹, 黄佐华, 等. 近代物理实验教程[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2010: 48-53.
- [4] 朱世坤. 密立根油滴实验中应注意的两个问题[J]. 大学物理实验, 2004, 17(2): 30-31.
- [5] 谭鹏, 李斌. 密立根油滴实验中油滴选取原则的理论分析[J]. 佛山科学技术学院学报 (自然科学版), 2005, 23(3): 5-7.
- [6] Li Yingzi, Zhang Liwen, Shan Guanqiao, et al. Measurement reduction method for the Millikan oil-drop experiment [J]. Eur J Phys, 2015, 36(5): 055022.
- [7] 师文庆, 吕楠, 陈劲民. 验证法处理密立根油滴实验探讨[J]. 广东海洋大学学报, 2009, 29(4): 67-69.
- [8] 刘芬, 王爱芳, 杨田林. 密立根油滴实验中油滴的参数选择分析[J]. 实验科学与技术, 2014, 12(4): 23-24.

Uncertainty of Millikan's oil drop experiment

ZENG Xiao-qi, SHAO Ming-zhen, CHEN Ji, YANG Jun

(Department of Physics, Southern University of Science and Technology, Shenzhen, Guangdong 518055, China)

Abstract: In the Millikan's oil drop experiment, the more electric charge the oil drop carries, the larger measurement uncertainty is. According to the calculation of uncertainty, we analyze quantitatively how to balance the measurement uncertainty and the droplet charge. Our results will be helpful for choosing oil droplets and controlling the experimental uncertainty.

Key words: Millikan's oil drop experiment; uncertainty; error analysis

大学物理

<http://dxwl.bnu.edu.cn>