

用比较法测量直流电阻

DH6108 型赛电桥综合实验仪

(产品获发明专利)

实

验

讲

义

杭州大华仪器制造有限公司

用比较法测量直流电阻

一、概述

电阻是电磁学实验工作中的常用元件。在电磁学发展史上，电桥法测电阻曾起过重要作用。电桥所用的平衡比较法，是微差比较法的差值为零时的特例；微差法是比较法中的一种。

在测量技术快速发展的今天，如何采用数字技术测量电阻是一个值得研究的课题。本实验借助数字电压表，采用了一种比一般电桥法更直观的比较测量方法（电压比等于电阻比），可以更简捷、更准确地测量电阻。

二、实验目的

- 1、用伏安法测量被测电阻，并研究表头内阻对测量准确度的影响；
- 2、用惠斯通电桥(单电桥)和双电桥测量未知电阻，计算不确定度；
- 3、用直接比较法(电阻比等于电压比)测量不同的未知电阻，计算不确定度；
- 4、测量室温下金属丝的电阻率；
- *5、利用直流恒流源，替代非平衡电桥测量连续变化的非电量；
- *6 附：研究性实验，四位半数字电压表的误差和非线性残差的分布特征

三、实验仪器

- 1、DH6108 赛电桥综合实验仪
- 2、四位半数字万用表
- 3、QJ23a 直流单臂电桥，ZX21a 直流电阻箱（选配）
- 4、QJ44 双臂电桥
- 5、螺旋测微尺和游标卡尺（>200mm）

四、实验原理

（一）伏安法测量电阻的原理

1、实验线路的比较和选择

当电流表内阻为 0，电压表内阻无穷大时，下述两种测试电路的测量不确定度是相同的。

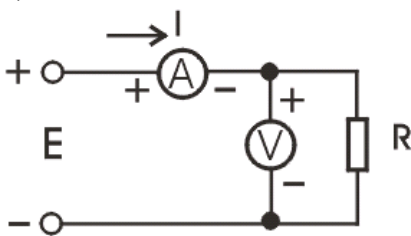


图 1 电流表外接测量电路

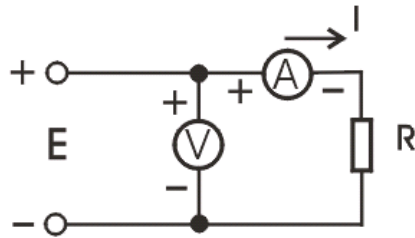


图 2 电流表内接测量电路

被测电阻 $R = \frac{V}{I}$ 。

实际的电流表具有一定的内阻，记为 R_I ；电压表也具有一定的内阻，记为 R_V 。因为 R_I 和 R_V 的存在，如果简单地用 $R = \frac{V}{I}$ 公式计算电阻器电阻值，必然带来附加测量误差。为了减少这种附加误差，测量电路可以粗略地按下述办法选择：

比较 $\lg(R/R_I)$ 和 $\lg(R_V/R)$ 的大小，比较时 R 取粗测值或已知的约值。如果前者大则选电流表内接法，后者大则选择电流表外接法（选择原则 1）。

如果要得到测量准确值，就必须按下 1、2 两式，予以修正。

$$\text{即电流表内接测量时， } R = \frac{V}{I} - R_I \quad (1)$$

$$\text{电流表外接测量时， } \frac{1}{R} = \frac{I}{V} - \frac{1}{R_V} \quad (2)$$

上两式中： R —被测电阻阻值， Ω ； V —电压表读数值， V ；

I —电流表读数值， A ； R_I —电流表内阻值， Ω ；

R_V —电压表内阻值， Ω 。

2、基本误差限与不确定度

实验使用的数字电压表和电流表的量程和准确度等级一定时，可以估算出 U_V 、 U_I ，再用简化公式 $R = \frac{V}{I} - R_I$ 计算时的相对不确定度

$$\frac{U_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{U_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{U_I}{I}\right)^2} \quad (3)$$

式中 U_R 表示测量 R 的不确定度，并非指 R 的电压值。

可见要使测量的准确度高，应选择线路的参数使数字表的读数尽可能接近满量程（选择原则 2），因为这时的 V 、 I 值大， U_R/R 就会小些。

当数字电压表、电流表的内阻值 R_V 、 R_I 及其不确定度大小 U_{R_I} 、 U_{R_V} 已知时，可用公式 (1)、(2) 更准确地求得 R 的值，相对不确定度由下式求出：

电流表内接时：

$$\frac{U_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{U_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{U_I}{I}\right)^2 + \left(\frac{U_{R_I}}{R_I}\right)^2 \left(\frac{R_I}{V/I}\right)^2} / \left[1 - \frac{R_I}{V/I}\right] \quad (4)$$

电流表外接时：

$$\frac{U_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{U_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{U_I}{I}\right)^2 + \left(\frac{U_{R_V}}{R_V}\right)^2 \left(\frac{V/I}{R_V}\right)^2} / \left[1 - \frac{V/I}{R_V}\right] \quad (5)$$

这就知道由公式(1)、(2)来得到电阻值 R 时，线路方案和参数的选择应使 U_R/R 尽可能最小（选择原则3）。

(二) 惠斯通电桥(单电桥)和双电桥测量未知电阻的原理

现代计量中直流电桥正逐步被数字仪表所替代，以往在电阻测量中电桥起了重要作用。

惠斯通电桥(Wheatstone's bridge)沿用了近二百年，1833年由克里斯泰(Cheistie)首先提出，后来以惠斯通名字命名。用惠斯通电桥测电阻也是大、中学物理实验的常见题目。电桥产生的背景是：

1) 在数字仪表发展之前的时期，如果用伏安法测量电阻 $R=V/I$ ，需要同时准确测量电压 V 和电流 I ，当时 0.2 级模拟式电表的制造成本与价格就已经显著高于准确度约 0.05% 6 位旋钥式电阻箱。

2) 伏安法测量的条件要求较高，如 0.2 级电表的使用与检定的条件要求较高，对电源的稳定性要求也高。

3) 电桥采用比较测量方法，只要求平衡指零仪表的灵敏度足够高(对其准确度无要求)，对电源稳定性指标的要求也很低。准确电阻易于制造、模拟电表准确度差、一般电源稳定度差是惠斯通电桥产生的物质背景。巧妙的比较测量思想是使电桥长期用于教学实验的理论原因。

1、惠斯通电桥(单电桥)的原理

电桥原理图见图 3。图中标准电阻 R_1 、 R_2 和可变电阻 R 的阻值已知，它们和被测电阻 R_x 连成四边形，每条边称作电桥的一个臂。对角 A 和 C 之间接电源 E ；对角 B 和 D 之间接电流计 G ，它象桥一样。若调节 R 使电流计中电流为零，B 和 D 点等电位，电桥达到平衡，可得

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R \quad (6)$$

若电流计足够灵敏，等式(6)就能相当好地成立，被测电阻值 R_x 可仅从三个标准电阻的值来求得，与电源电压无关。这一过程相当于把 R_x 和标准电阻相比较

，因而准确度高。仪器中将 $\frac{R_1}{R_2}$ 做成比率为 c 不同档，

则 R_x 为

$$R_x = cR \quad (7)$$

2、基本误差限与不确定度

在一定参考条件下(20℃附近、电源电压偏离额定值不大于 10%、绝缘电阻符合一定要求、相对湿度 40~60%等)，直流电桥的允许基本误差(基本误

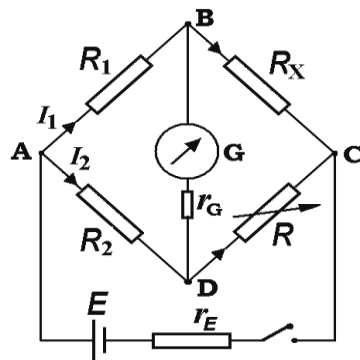


图 3 电桥原理简图

差限) E_{\lim} 为

$$E_{\lim} = \pm a\% \left(cR + \frac{cR_N}{10} \right) \quad (8)$$

式中 c 是比率值, 第一项 $a\%cR = a\%R_x$ 正比于被测电阻. 第二项 $a\%(cR_N/10)$ 是常数项, 对实验室的 QJ23a/24 型电桥我们约定取 $R_N = 5000$, 这是教学中的简化处理 (一般厂家给出的 $R_N = 10000$). 等级指数 a 主要反映了电桥中各个标准电阻的准确度. 一定测量范围的指数 a 与电源电压和检流计指标相联系, 使用中需参考电桥说明书或仪器铭牌的标示参数. 教学中一般直接将 E_{\lim} 的绝对值作为电阻测量结果的不确定度, 即

$$U_{R_x} = |E_{\lim}| \quad (9)$$

式中 U_{R_x} 表示 R_x 的不确定度, 不是表示上 R_x 的电压, 下同.

3、电桥的灵敏阈

当电源、电流计指标不符合测量范围的对应要求时, 电桥平衡后, 微调 R_x 电流计可能看不到偏转, 说明电桥不够灵敏. 将电流计灵敏阈 (0.2 格) 所对应的 R_x 的变化量 Δ_S 定义为电桥灵敏阈. R_x 改变 Δ_S 可等效为: 使 R_x 不变而仅仅使 R 改变 Δ_S/c . 于是测 Δ_S 的步骤为: 平衡后将测量盘 R 调偏到 $(R + \Delta R)$, 使电流计偏转 Δd (2 或 1 格), 近似有

$$\Delta_S = 0.2c \left| \frac{\Delta R}{\Delta d} \right| \quad (10)$$

电桥灵敏阈 Δ_S 反映了平衡判断的误差影响, 它和电源、电流计参量有关, 还和比率 c 及 R_x 的大小有关. Δ_S 愈大, 电桥愈不灵敏. 为减小 Δ_S , 可适当提高电源电压或外接更灵敏的电流计. 当电源、电流计指标符合说明书要求时, $|E_{\lim}|$ 中已包含了 Δ_S 的影响; 如果不是这样, 则应将 Δ_S 与 $|E_{\lim}|$ 合成得出不确定度 U_{R_x} . 例如对用三电阻箱作桥臂自组电桥可得:

$$\frac{U_{R_x}}{R_x} = \sqrt{\left(\frac{U_{R_1}}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{U_{R_2}}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{U_R}{R} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_S}{R_x} \right)^2} \quad (11)$$

式中 $\frac{U_{R_x}}{R_x}$ 表示 R_x 的相对不确定度, 而不是 R_x 上的电压除以 R_x , 类似的 $\frac{U_{R_1}}{R_1}$ 也表示 R_1 的相对不确定度, 下同.

4、双电桥测量低值电阻

测量低值电阻不能用惠斯通电桥 (单电桥), 可以用双电桥. 双电桥测量低值电阻采用四端接法, 如图 4 所示. 电流端为 C_1 、 C_2 ,

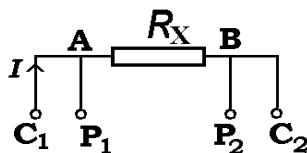


图 4 四端接法示意图

电压端为 P_1 、 P_2 端。电压测量几乎不取电流， AP_1 和 BP_2 引线电阻上的附加电压可忽略不计，电流 I 在引线 C_1A 、 BC_2 上的电压及触点 C_1 、 C_2 上的接触电势差也被排除在测量支路 P_1ABP_2 之外。如被测电阻是均匀导线，被测导线长度就是 AB 两点的间距。关于双电桥的原理和使用方法不再论述，可以参考有关资料，使用前可以阅读仪器说明书。

在一定参考条件下 (20°C 附近、电源电压偏离额定值不大于 10%、绝缘电阻符合一定要求、相对湿度 40~60% 等)，双臂电桥的允许基本误差 (基本误差限) E_{lim} 为

$$E_{\text{lim}} = \pm a\% \left(cR + \frac{cR_N}{10} \right) \quad (12)$$

式中 c 是比率臂示值， R 为测量盘示值。第一项 $a\% cR = a\% R_x$ 正比于被测电阻。第二项 $a\% (cR_N/10)$ 是常数项，例如，对于实验室常见的 QJ44 型电桥，我们在教学中约定取 $R_N = 0.1 \Omega$ 。等级指数 a 主要反映了电桥中各个标准电阻的准确度。一定测量范围的指数 a 与电源电压和检流计指标相联系，使用中需参考电桥说明书或仪器铭牌的标示参数。

5、金属丝电阻和电导率的测量

均匀金属丝的电阻 R_x 与直径为 D 、长度为 l 、电阻率为 ρ 的关系为

$$R_x = \frac{\rho l}{\pi(d/2)^2} \quad (13)$$

实验中要测不锈钢丝的电导率是温度的函数，室温下在 $10^x \Omega \cdot \text{m}$ 量级，因而不锈钢丝的电阻 R_x 很小。测低值电阻时要用较大的电流，要设法减小引线 (连接导线) 电阻和接触点电阻对测量的影响，因为引线电阻、接触电阻的大小和被测低值电阻相比往往不可忽略。不锈钢丝的直径可用螺旋测微尺测量五次以上，取平均值；用游标卡尺测量有效长度。

(三) 比较法测量电阻

1、比较法测量电阻的原理

随着现代数字技术的发展基础，可以采用更为简洁直观的直接 (直读) 比较测量方法，电路原理简图如图 5 所示。图中 E 是电动势为 E 的稳压电源，电源等效内阻为 r_E (r_E 中包括外电路的引线电阻)；被测对象为

R_x ；比较测量用标准电阻为 R_N ；等效内阻为 r_V 的数字电压表 V 通过开关可以分别测量 R_N 与 R_x 上的电压 V_N 和 V_x 。 $r_V \rightarrow \infty$ 时可得

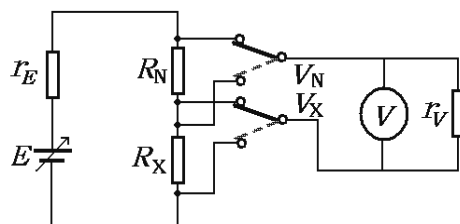


图 5

$$R_X = \frac{V_X}{V_N} R_N \quad (14)$$

当电压表内阻较小时上式似乎不能成立，但实际上忽略 r_E 时上式是恒等式。有兴趣的同学可以预习时自行证明。

在忽略(14)式原理误差的前提下，可得 R_X 的相对不确定度为

$$\frac{U_{RX}}{R_X} = \sqrt{\left(\frac{U_{RN}}{R_N}\right)^2 + \left(\frac{U_{VX}}{V_X}\right)^2 + \left(\frac{U_{VN}}{V_N}\right)^2} \quad (15)$$

式中 U_{RN} 是标准电阻 R_N 的不确定度。由于是短时间间隔内的比较测量， U_{VN} 和 U_{VX} 不需按数字表直接测量时的不确定度计算，而可代之以非线性残差限 $U_{\text{nl},\text{min}}$ ，或直接用 $U_{\text{rel},\text{nl}}$ 当作(15)式中的相对不确定度值。这样做的优点是：**数字表的非线性残差限明显小于不确定度(参见附录实验的结论)**。当标准电阻的准确度较高即 U_{RN}/R_N 较小时， R_X 的测量结果的准确度也较高。

另外，这种测量方法即使电压单位被读错，仍不影响电压比；即使电压表的不确定度较大，只要非线性(相对)残差限较小，测量结果仍较准确。

2、实现方式

本实验所采用的测量设备由以下各部分组成：

1) 1~19V 超低准静态内阻的可调直流稳压电源，用两个多圈电位器作粗调、细调，输出电流>10mA，可用作几十欧姆以上的电阻测量电源；

2) 0~1V 电压源，最大电流 5A，供测量几十欧姆以下的低值电阻时用；

3) 0~10 mA 输出的电流源，开路电压 19V，可用于测量各类电阻响应式传感器，或者替代非平衡电桥进行相应的实验；

4) 比较测量电路，包括标准电阻 R_N 和转换开关。 R_N 由 11 档标称值为 10^K 的高准确度标准电阻组成。对于低值电阻、中值电阻和高值电阻三种不同的被测对象，标准电阻 R_N 采用不同的值，如表 1 所示。切换开关在测量低值电阻时严格运用四端接法，实验装置在面板上有电压端、电流端的不同端钮。

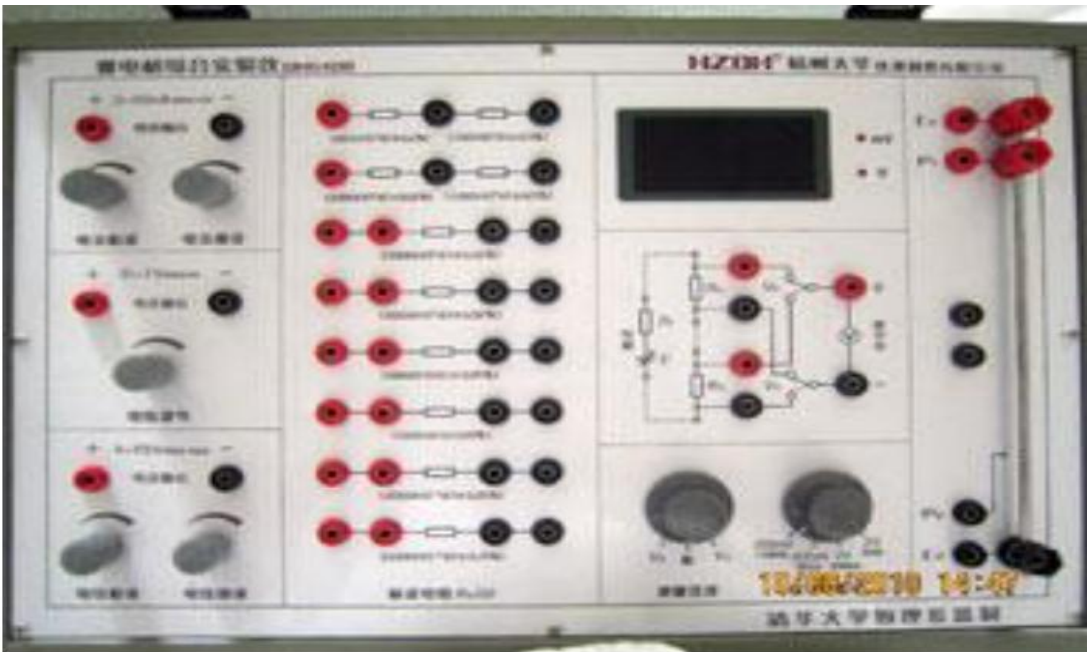
表 1

被测电阻的范围		低值电阻				中值电阻				高值电阻	
类似的电桥仪器		QJ44				QJ23				QJ36	
R_N (Ω)		10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
测量范围	方法 1	$0.199 R_N \sim 1.99 R_N$									
	方法 2	$0.316 R_N \sim 3.16 R_N$ ($\sqrt{10} \approx 3.16$)									
电源选择		低电压, 0.02~1 V				1.0~19 V 连续可调					
		大电流, 0~5 A				不大于 30 mA					
电压表量程 (V)		0.19999				1. 9999					

电压表的属性	量程 (V)	0.19999		1.9999 (并联 r_{par} 再串联 r_{ser} 之后)	
	总等效内阻 $r_V(\text{k}\Omega)$	30	300		3000

5) 多量程数字电压表。由数字电压表、并联防漂电阻 r_{par} 、串联定值电阻 r_{ser} 等构成。共有 4 个量程：0.2V (>10M Ω)、0.2V (30k Ω)、2V (300k Ω)、2V (3M Ω)，可用于测量电压，又可研究内阻对测量的影响。

6) 被测低值电阻，由一根均匀金属丝和接线端钮组成。



DH6108 型赛电桥综合实验仪

3、具体测量方式

可以根据需要采用以下两种形式：

1) 调电压使 V_N 为额定值的“直读”式测量步骤

“直读”式测量时，被测量等于读数乘以 10^K 。方法如下

①调电源电压，使 V_N 为 0.10000V、1.0000 V 等额定值，

② V_X 直接读出后，根据公式 (14) 可知， $R_X = V_X \times 10^K$ ，这里指数 K 为与量程有关的整数。

2) 用 $R_X = R_N V_X / V_N$ 计算的“满量程”式测量步骤

为减小 R_X 的不确定度 U_{RX} ，在知道 R_X 的约值后，根据 $0.316R_N \leq R_X \leq 3.16R_N$ 这个公式来选取测量范围。方法如下：

①调节电源电压，使 R_X 和 R_N 中阻值大的一个电阻上的电压接近满量程；

②再测量另一较小电阻上的电压，最后可得 $R_X = R_N V_X / V_N$ 。

这样的操作步骤测量结果要靠计算求出，不如前述的方法方便，但是由于 V_X 和 V_N 都比较大，可使公式(15)的根式中的分母增大而使不确定度有所减小。

*（四）利用直流恒流源，替代非平衡电桥测量连续变化的电阻量。

非平衡电桥的原理是：利用电桥不平衡时输出的电压与被测电阻的函数关系，通过测量桥路输出电压来测量连续变化的被测电阻量，可以参见文献 4。

用非平衡电桥测量连续变化的电阻量比较复杂，且输入与输出存在非线性。

用比较法的思路，能够将非平衡电桥测量连续变化的电阻量这种比较复杂的方法，回归到简单测量的方法上来，并且输入量与输出量成线性关系。

只要将电压源改成恒流源，被测电阻接到 R_X 端，选择合适的标准电阻和恒流源的电流大小，获得合适的 V_N 、 V_X 值，测量 V_X 即可实时测量得到 R_X ，从而进一步求得被测物理量。

四、实验内容

（一）用伏安法测量未知电阻。

进行本实验时，需要另行配置一个四位半的数字万用表，选择其电压档，并联一个合适的标准电阻，改装成为电流表使用。

实验仪器自有的四位半数字电压表作电压测量用。它的特点是具有 2 个量程，每个量程又有 2 种不同的内阻，这样可以用不同内阻的表头来测量，并比较内阻对测量结果的影响。

1、测量一个数十 Ω 的电阻

根据被测电阻的大小，按选择原则 1 选择电流表的接法，按选择原则 2 和 3 选择线路参数，并合适选择工作电源，电压表、电流表的量程。

换用相同量程但不同内阻的电压表进行测量。

2、测量一个 1 千多 Ω 的电阻

根据被测电阻的大小，按选择原则 1 选择电流表的接法，按选择原则 2 和 3 选择线路参数，并合适选择工作电源，电压表、电流表的量程。

换用相同量程但不同内阻的电压表进行测量。

3、测量一个数百千 Ω 的电阻

根据被测电阻的大小，按选择原则 1 选择电流表的接法，按选择原则 2 和 3 选择线路参数，并合适选择工作电源，电压表、电流表的量程。

注意，测高值电阻时，由于标准电阻不确定度加大及绝缘电阻等的影响，加上被测对象本身的稳定性也往往较差，读数会出现跳字，这时要读取显示值的平均值。

按公式 (1)、(2) 计算各自的测量结果, 按公式 (3) ~ (5) 计算各自的测量不确定度。将以上结果进行比较。

(二) 惠斯通电桥(单臂电桥)和双电桥测量未知电阻

进行本实验时, 需要另行配置一个直流惠斯通电桥, 例如典型的 QJ23a; 一个直流开尔文电桥, 例如典型的 QJ44。如果没有合适的直流惠斯通电桥, 也可以另加一个电阻箱, 再利用仪器的 2 个标准电阻作为桥臂, 构成自组单臂电桥, 具体方案参考图 3, 或由指导老师提供。

电桥的使用方法及注意事项参见电桥说明书。

1、用直流惠斯通电桥分别测量数十 Ω 、1 千多 Ω 、数百千 Ω 的电阻

按公式 (8) 计算各自的测量结果, 按公式 (9) 计算各自的测量不确定度。

2、如果用自组电桥测量则应按公式 (10)、(11) 计算各自的测量不确定度。

3、用开尔文电桥测量金属丝电阻和电导率

测得金属丝电阻值和直径后, 按公式 (12) 计算基本误差限, 按公式 (13) 推导出电导率。

(三) 比较法测量电阻

分别用电压比较法测量数十 Ω 、1 千多 Ω 、数百千 Ω 电阻和金属丝低电阻

1、调电压使 V_N 为额定值的“直读”式测量, 具体步骤为:

① 预备: 通过面板开关和旋钮选择合适的测量档, 根据测量范围 ($0.199 R_N \sim 1.99 R_N$) 选定标准电阻 R_N , 可参见表 1。再按面板的图示, 将电源、表头、标准电阻和被测电阻接好。

② 调整: “测量选择” 开关打向 V_N , 表头的选择可参见表 1。测量 V_N , 分别仔细调节电压粗调和细调的电位器旋钮, 使电压读数值 V_N 与下表 2 所示的“调整时 V_N 的额定值” 相差不超过 1LSB (1 个字)。

表 2 $0.199 R_N \leq R_X \leq 1.99 R_N$ 时的“直读”式测量计算举例

项目	单位	低值电阻	低值电阻	低值电阻	低值电阻	中值电阻	中值电阻
标准电阻 R_N	Ω	1. 0000E-2	1. 0000E-1	1. 0000E+0	1. 0000E+1	1. 0000E+2	1. 0000E+3
U_{RN}/R_N	1	5. 0%	1. 0%	0. 20%	0. 02%	0. 02%	0. 02%
上限值 $R_X = 1.99 R_N$	Ω	1.99E-02	1.99E-01	1.99E+00	1.99E+01	1.99E+02	1.99E+03
下限值 $R_X = 0.199 R_N$	Ω	1. 99E-03	1. 99E-02	1. 99E-01	1. 99E+00	1. 99E+01	1. 99E+02
电压表满量程 (FSR)	V	0. 19999	0. 19999	0. 19999	0. 19999	1. 9999	1. 9999
调整时 V_N 的额定值	A	0. 05000	0. 10000	0. 10000	0. 10000	1. 0000	1. 0000
电流 I 的典型值		5. 0	1. 0	1. 0E-01	1. 0E-02	1. 0E-02	1. 0E-03
R_X 的数值	Ω	$5V_X$	V_X	$10V_X$	$100V_X$	$100V_X$	$10^3 V_X$
U_{RX}/R_X R_X 上限	1	5. 0%	1. 0%	0. 20%	0. 026%	0. 026%	0. 026%

	R_X 下限	1	5.0%	1.0%	0.21%	0.079%	0.079%	0.079%
--	----------	---	------	------	-------	--------	--------	--------

项目	单位	中值电阻	中值电阻	中高值电阻	高值电阻
标准电阻 R_N	Ω	1.0000E+4	1.0000E+5	1.0000E+6	1.0000E+7
U_{RN}/R_N	1	0.02%	0.02%	0.10%	0.20%
上限值 $R_X = 1.99R_N$	Ω	1.99E+04	1.99E+05	1.99E+06	1.99E+07
下限值 $R_X = 0.199R_N$	Ω	1.99E+03	1.99E+04	1.99E+05	1.99E+06
电压表满量程 (FSR)	V	1.9999	1.9999	1.9999	1.9999
调整时 V_N 的额定值	V	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
电流 I 的典型值	A	1.00E-04	1.00E-05	1.00E-06	1.00E-07
R_X 的数值	Ω	$10^4 V_X$	$10^5 V_X$	$10^6 V_X$	$10^7 V_X$
U_{RX}/R_X	R_X 上限	1	0.026%	0.026%	0.10%
	R_X 下限	1	0.079%	0.079%	0.13%

③测量：“测量选择”开关打向 V_X ，读取 V_X 。如果这时数字表超过量程，说明 R_X 过大，应该换大 R_N 值；如果读数小于 2000 个字，则应换小 R_N 值。

注意：测高值电阻时，由于标准电阻不确定度加大及绝缘电阻等的影响，加上被测对象本身的稳定性也往往较差，读数会出现跳字，这时要读取显示值的平均值。

④计算：绝大多数情况下， V_X 直接读出后， $R_X = V_X \times 10^K$ ，这里指数 K 为与量程有关的整数，只有在电阻值的最低档（ $R_N = 1.0000E-2 \Omega$ ），由于最大电流为 5A，所以 $R_X = 5V_X$ 。

2、用 $R_X = R_N V_X/V_N$ 计算的“满量程”式测量步骤

为减小 R_X 的不确定度 U_{RX} ，在知道 R_X 的约值后，根据 $0.316R_N \leq R_X \leq 3.16R_N$ 这个公式来选取测量范围。 R_N 的选择、测量范围及不确定度范围等见表 3 所示，表头的选择可参见表 1。

方法如下：

①调节电源电压，使 R_X 和 R_N 中阻值大的一个电阻上的电压接近满量程；

②再测量另一较小电阻上的电压，最后可得 $R_X = R_N V_X/V_N$ 。

这样的操作步骤测量结果要靠计算求出，不如前述的方法方便，但是由于 V_X 和 V_N 都比较大，可使公式(15)的根式中的分母增大，而使不确定度有所减小，这从表 2 和表 3 的 U_{RX}/R_X 一项就可看出。

表 3 $0.316R_N \leq R_X \leq 3.16R_N$ 时用 $R_X = R_N V_X/V_N$ 式的计算举例

项目	单位	低值电阻	低值电阻	低值电阻	低值电阻	中值电阻	中值电阻
----	----	------	------	------	------	------	------

标准电阻 R_N	Ω	1. 0000E-2	1. 0000E-1	1. 0000E+0	1. 0000E+1	1. 0000E+2	1. 0000E+3
U_{RN}/R_N	1	5. 0%	1. 0%	0. 20%	0. 02%	0. 02%	0. 02%
上限值 $R_X = 3.16R_N$	Ω	3.16E-02	3.16E-01	3.16E+00	3.16E+01	3.16E+02	3.16E+03
下限值 $R_X = 0.316R_N$	Ω	3. 16E-03	3. 16E-02	3. 16E-01	3. 16E+00	3. 16E+01	3. 16E+02
R_N R_X 大者上的电压约值	V		0. 19	0. 19	0. 19	1. 9	1. 9
R_X 的数值		$R_X = R_N V_X / V_N$					
U_{RX}/R_X	$R_X = R_N$	1	5. 0%	1. 0%	0. 20%	0. 023%	0. 023%
	R_X 为上或下限	1	5. 0%	1. 0%	0. 20%	0. 033%	0. 033%

项目	单位	中值电阻	中值电阻	中高值电阻	高值电阻
标准电阻 R_N	Ω	1. 0000E+4	1. 0000E+5	1. 0000E+6	1. 0000E+7
U_{RN}/R_N	1	0. 02%	0. 02%	0. 10%	0. 20%
上限值 $R_X = 3.16R_N$	Ω	3.16E+04	3.16E+05	3.16E+06	3.16E+07
下限值 $R_X = 0.316R_N$	Ω	3.16E+03	3.16E+04	3.16E+05	3.16E+06
R_N R_X 大者上的电压约值	V	1. 9	1. 9	1. 9	1. 9
R_X 的数值		$R_X = R_N V_X / V_N$			
U_{RX}/R_X	$R_X = R_N$	1	0. 023%	0. 023%	0. 10%
	R_X 为上或下限时	1	0. 033%	0. 033%	0. 10%

（四）计算出前面各种方法测出的结果和不确定度，进行比较。分析这些方法各自的特点。

*（五）设计性实验：用 PT100 铂电阻设计一个数字温度计。

用前述比较法测量电阻的理论及计算公式，将恒流源接入标准电阻和被测电阻串联组成的回路中，代替非平衡电桥测量变化的温度。

选择合适的标准电阻和恒定电流的大小，获得与温度 t 有关的 V_X 值，并进行处理即可实时测量温度。过程如下：

一般来说，金属的电阻随温度的变化，可用下式描述：

$$R_x = R_{X0} (1 + \alpha t + \beta t^2) \quad (16)$$

在测量准确度要求不高或温度范围不大的情况下，如果忽略温度二次项 βt^2 ，可将铂电阻的阻值随温度变化视为线性变化，即

$$R_x = R_{X0} (1 + \alpha t) = R_{X0} + \alpha t R_{X0} \quad (17)$$

这时 PT100 铂电阻的 R_{X0} 约为 100Ω ， α 约为 $3.85 \times 10^{-3} / ^\circ\text{C}$ ，所以

$$R_x = 100 + 3.85 \times 10^{-3} \times 100t$$

结合公式 $R_X = R_N V_X / V_N$ ，可知：

$$V_x = \frac{V_N}{R_N} R_X = \frac{V_N}{R_N} (100 + 3.85 \times 10^{-3} \times 100t)$$

如果选择 $R_N = 100 \Omega$ ，有

$$V_x = V_N + 3.85 \times 10^{-3} t \quad (18)$$

可见，这时 V_x 与 t 成正比， t 为摄氏温度。

将 V_x 和 V_N 求差（可用减法器实现），并作一定系数 k 的变换可得到：

$$V'_x = k(V_x - V_N) = 3.85 \times 10^{-3} kt = 10^n t \quad (19)$$

式中 k 为放大系数， n 为与数字表量程相关的系数。

将 V'_x 用数字电压表显示出来，就是温度值了。

具体的电路由实验者自行设计搭建，注意，对 V_x 和 V_N 求差时要进行高阻抗放大，以免引入误差。

由于以上方法忽略了 PT100 的二次项 βt^2 ，所以必然会引入一定的误差。实际应用中可以引入校准电路，对所测得温度范围内进行线形校准，提高测量的准确度。

附录 1 四位半数字电压表的误差和非线性残差的分布特征研究实验

1、反映测量准确度的示值误差限或测量不确定度

量程固定的四位半数字面板表和多量程直流电压表（如数字万用表的直流电压挡），不确定度的典型值分别为

$$\text{四位半面板表} \quad U_{V_X}/V_X = 0.02\% + 0.01\% V_m/V_X \quad (20)$$

$$\text{多量程表的基本量程} \quad U_{V_X}/V_X = 0.05\% + 0.015\% V_m/V_X \quad (21)$$

式中 V_m 为量程。附图 1 中，虚线所表示的就是数字表的不确定度。

2、示值误差

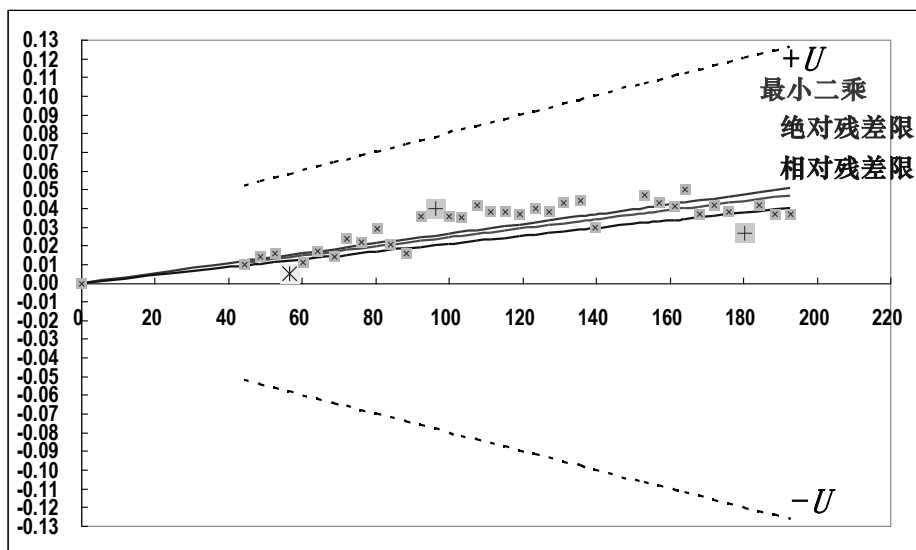
如果用高准确度的 UT805 型五位半数字表测量一系列被测量 V_{Xi} 的准确值 V_{ti} ，同时读取四位半表的显示值 V_{di} ，这样， V_{ti} 可看作**约定真值**，就可以算出对应这一系列被测量 V_{Xi} 的误差 e_i

$$e_i = V_{di} - V_{ti} = V_{di} - V_{Xi} \quad (22)$$

附图 1 中带绿色标记点表示 e_i 的值及分布。

V_{ti} 比 V_{di} 多一位有效数字。测出一定个数的误差 e_i ，可以画出近似的表示 $e_i - V_{Xi}$ 关系的误差分布趋势曲线。这里所说的误差，不是参考文献 2 的 P16~17 所定义的“对同一量的多次测量”中的误差，而是反映不同被测量时的误差。它包含随机误差、系统误差两类分量。如果对每一个不同的 V_{Xi} 都分别作多次测量可以发现：同一被测量 V_{Xi} 的误差的平均值比较稳

定, 对确定的 V_{Xi} 来说误差的平均值可看作系差分量; 但是这样的误差平均值随着 V_{Xi} 的不同而不同, 实际仪表一般不可能给出详细的误差特性, 因此这种对确定的 V_{Xi} 来说的属于系差的分量, 对不同的 V_{Xi} 来说具有随机性。



附图 1 数字表的示值误差、不确定度及非线性残差限

3、非线性残差限 U_{inl} 与非线性相对残差限 $U_{rel,inl}$

以 V_{Xi} 为自变量、 V_{di} 为因变量作过原点的直线拟合, 可得方程

$$\hat{V}_{di} = bV_{Xi} \quad (23)$$

斜率的理想值为整数 1。非线性残差为 $v_{inli} \equiv V_{di} - bV_{Xi}$, 定义非线性残差限 U_{inl} 为

$$U_{inl} \approx |v_{inli}|_{\max} = |V_{di} - bV_{Xi}|_{\max} \quad (24)$$

误差是测量值与(约定)真值之差, 残差是测量值与最佳估值之差(参考文献 2 的 P17)。求上式斜率可以用对应不同判据的不同的拟合方法, 包括最小二乘法 and 参考文献 2 的 P85~86 所述的各种方法, 因而就有相对应的不同的非线性残差限。

1) 最小二乘法(计算公式或 EXCEL 函数见参考文献 2 的 P77)

由多组数据 V_{di} 和 V_{ti} 可先用最小二乘法求斜率 b_{LSM} , 再算出非线性残差限 $U_{inl,LSM}$ 来。

附图 1 中, 红色的过零点射线表示了用最小二乘法做出的拟合直线

2) 最大残差(绝对值)极小法(见参考文献 2 的 P85~86)

由 b_{LSM} 求出的残差分布区间一般正负不对称, 只是使残差平方和极小。可用数值方法找出 b_{LSM} 附近的“最佳”斜率 b' , 使残差分布正负基本对称, 从而使非线性残差限 $U_{inl,min}$ 极小

$$U_{\text{inl,min}} = (V_{\text{di}} - b' V_{\text{Xi}})_{\text{max}} \approx |(V_{\text{di}} - b' V_{\text{Xi}})_{\text{min}}| \quad (25)$$

附图 1 中，紫色的过零点射线表示了用**最大残差(绝对值)极小法**做出的拟合直线。

3) 残差限为对称射线（相对残差限最小）法（见参考文献 2 的 P85）

测电压比 (V_X/V_N) 时相对不确定度为

$$U_{(V_X/V_N)/(V_X/V_N)} \approx \sqrt{(U_{V_X}/V_X)^2 + (U_{V_N}/V_N)^2}$$

它与斜率 b 的取值无关。一般测量时 $V_{\text{Xi}} \geq 0.1V_m$ ，在 b_{LSM} 附近用数值方法可找到另一“最佳”斜率 b'' ，使残差限为关于“最佳”直线对称的两条射线，也就是使相对残差的分布区间正负对称。定义该区间的半宽度为非线性相对残差限 $U_{\text{rel,inl}}$ ，用百分比表示

$$U_{\text{rel,inl}} = \left(\frac{V_{\text{di}} - b'' V_{\text{Xi}}}{V_{\text{Xi}}} \right)_{\text{max}} \approx \left| \left(\frac{V_{\text{di}} - b'' V_{\text{Xi}}}{V_{\text{Xi}}} \right)_{\text{min}} \right| \quad (\text{for } V_{\text{Xi}} \geq 0.1V_m) \quad (26)$$

附图 1 中，蓝色的过零点射线表示了用**残差限为对称射线（相对残差限最小）法**做出的拟合直线。

因实测数据有限、仪表使用期间非线性关系也可能有变化，所以由一定数据(如 40 组)定出的 $U_{\text{rel,inl}}$ 可能略小于实际值。在测电压比时，由于电压 V_X 和 V_N 不同，用 $U_{\text{inl,min}}$ 和 $U_{\text{rel,inl}}$ 所得电压比不确定度也不同，两者用一种即可。

4、非线性(相对)残差限显著小于相应的(相对)不确定度

用上述测量方法，我们以两块不同型号的四位半万用表的 $V_m = 2V$ 档为例，测量了并计算出了它们的不确定度、最大的误差绝对值、最小二乘法直线的非线性残差限 $U_{\text{inl,LSM}}$ 、最大残差极小化的非线性残差限 $U_{\text{inl,min}}$ 、 $V_{\text{Xi}} \geq 0.1V_m$ 时的非线性相对残差限 $U_{\text{rel,inl}}$ ，分别如附表 1 所示。

附表 1 典型数字电压表的参量比较(LSBs 表示末位一个字)

	某 UT58E 型表	某一 VC9806 型表	VC9806 测 0.6 V 时
不确定度 U_{V_X}	$0.10\% V_X + 3\text{LSBs}$	$0.05\% V_X + 3\text{LSBs}$	6LSBs 或 0.10%
最大的误差绝对值 $ V_{\text{di}} - V_{\text{Xi}} _{\text{max}}$	5.7LSBs	2.5LSBs	2.5LSBs 或 0.042%
A.非线性残差限，最小二乘法 (LSM)	$U_{\text{inl,LSM}} = 2.4\text{LSBs}$	$U_{\text{inl,LSM}} = 1.5\text{LSBs}$	1.5LSBs 或 0.025%
B.最大残差绝对值极小法	$U_{\text{inl,min}} = 1.7\text{LSBs}$	$U'_{\text{inl}} = 1.2\text{LSBs}$	1.2LSBs 或 0.020%
C.残差限为对称射线法 ($V \geq 0.2V$)	$U_{\text{rel,inl}} = 0.027\%$	$U_{\text{r,inl}} = 0.014\%$	0.014%

由附图 1 和附表 1 可见：**非线性(相对)残差限显著小于相应的(相对)不确定度**，这是对其它类型数字电压表也成立的普遍事实。这一事实一定程度上反映了一般测量误差中系统性误差分量影响为主、倍率误差分量是重要误差分量的规律。表

中数据还说明：不确定度明显大于实测的误差限值，这是因为不确定度中必然包含“老化裕量”等分量，以保证电表在相邻两次检定(校准)期间的示值误差都不超过不确定度。

有五位半以上的数字万用表（电压表）的学校可以自己进行上述内容的测量和研究，数据的处理和直线的拟合可参见参考文献 2。这个实验可以加深学生对不确定度的理解及提高各种数据处理的能力，是非常有实用价值的。

附录 2 各种测量方法的比较

A、忽略电表内阻影响的直读比较测量法

当稳压电源输出 E 为某一定值时，用等效内阻为 r_V 的电压表交替测量标准电阻 R_N 与被测电阻 R_X 上的电压 V_N 与 V_X 。在电源内阻 $r_E = 0$ 且电表等效输入电阻 $r_V = \infty$ 时（14）式成立。

本测量方法的要点之一是：只要 r_E/r_V 足够小，即使电阻 r_V 与 R_X (或 R_N) 相比不大，公式(2)仍相当准确地成立。这是出乎常规思路之外的结论。证明如下：

$$\frac{V_X}{V_N} = \frac{R_X r_V}{(R_X + r_V)(R_N + r_E) + R_X r_V} \cdot \frac{(R_X + r_E)(R_N + r_V) + R_N r_V}{R_N r_V} = \frac{R_X}{R_N} (1 + \varepsilon) \quad (27)$$

$$\text{式中 } \varepsilon = \frac{(R_N - R_X)r_E}{R_X r_V + R_X R_N + r_E r_V + R_X r_E + R_N r_V}$$

由于 $|\varepsilon| < \left| \frac{(R_N - R_X)r_E}{(R_X + R_N + r_E)r_V} \right| < \frac{r_E}{r_V}$ ，当 $r_E/r_V < 5 \times 10^{-5}$ ，就可使公式(14)成立。

相对不确定度为：

$$\frac{U_{RX}}{R_X} = \sqrt{\left(\frac{U_{RN}}{R_N}\right)^2 + \left(\frac{U_{VX}}{V_X}\right)^2 + \left(\frac{U_{VN}}{V_N}\right)^2} \quad (15)$$

B、伏安法测量电阻的相对不确定度

电流表内接时：

$$\frac{U_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{U_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{U_I}{I}\right)^2 + \left(\frac{U_{R_I}}{R_I}\right)^2 \left(\frac{R_I}{V/I}\right)^2} \left/ \left[1 - \frac{R_I}{V/I}\right] \right. \quad (4)$$

电流表外接时：

$$\frac{U_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{U_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{U_I}{I}\right)^2 + \left(\frac{U_{R_V}}{R_V}\right)^2 \left(\frac{V/I}{R_V}\right)^2} \left/ \left[1 - \frac{V/I}{R_V}\right] \right. \quad (5)$$

以上公式是以数字表的不确定度计算的，所以这个结果和比较测量法的不确定度相比要大。将伏安法和直接比较法测量电阻所得到的不确定度数据对比，

也可以印证这个结论。

C、直接比较法中标准电阻不确定度的影响比电桥法较小
电桥法中 R_X 的相对不确定度公式为

$$\frac{U_{R_X}}{R_X} = \sqrt{\left(\frac{U_{R_1}}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{U_{R_2}}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{U_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_S}{R_X}\right)^2} \quad (28)$$

在三桥臂电阻相对不确定度均为 $c\%$ 的简化条件下，即使忽略 Δ_S/R_X 这一项， U_{R_X}/R_X 也不小于 $c\% \times \sqrt{3}$ ，由于 R_N 是高准确度的单个电阻，在 R_N 不确定度相同的情况下，直读比较测量法的不确定度可以显著小于电桥法相应公式(28)的结果。

D、本实验所述测量方法与普通的数字万用表电阻档测量结果的比较

对于集成化数字万用表，由于其结构和原理的限制，用电阻档测电阻量时相对不确定度 U_{R_X}/R_X 一般比电压测量的相对不确定度 U_V/V 至少大半个数量级。例如 VC9806 型数字万用表， $U_{R_X} = 0.2\%R_X + 5 \text{ LSBs}$ ，而电压绝对测量的不确定度 $U_V = 0.05\%V + 3 \text{ LSBs}$ ，比较测量中用非线性误差限 δ_{lin} 计算不确定度， $\delta_{\text{lin}} \approx 1.5 \text{ LSBs}$ ，显著小于 U_V 。可见数字万用表电阻档测量结果 U_{R_X}/R_X 大于惠斯通电桥的测量结果，而电桥法的 U_{R_X}/R_X 一般大于本实验所述比较法，因此，数字万用表电阻档 U_{R_X}/R_X 显著大于本实验所述比较法的测量结果。

(本讲义的实验数据和部分内容及由清华大学物理实验室提供)

参考文献：

1. 《物理实验研究》 朱鹤年 清华大学出版社
2. 《基础物理实验教程-物理测量的数据处理与实验设计》 朱鹤年 高等教育出版社
3. 《物理实验教程》 清华大学出版社 (1991)
4. 非平衡电桥的原理和应用 杭州大华仪器制造有限公司