

音叉受迫振动与共振实验

201711140236 物理系基地班 李励玮

实验仪器

DH4615 型音叉受迫振动与共振实验仪

实验原理

音叉二臂对称、振动相反，中心杆净受力为 0 而不振动，外界对音叉振动影响很小，音叉保持振动的能力很强，品质因数 Q 很容易达到 10^3 数量级。音叉的固有频率由其材质和几何形状决定

1. 音叉的阻尼振动和受迫振动

实验使用钢质音叉，通过驱动线圈、探测线圈和阻尼磁铁影响观察音叉振动。驱动线圈和探测线圈结构相同，以圆柱形永磁铁为中心绕多匝铜线构成。

驱动线圈接近音叉振动臂时，音叉靠近永磁铁的部分被磁化。被磁化部分理解为小磁铁。在线圈中通以交变电流，产生一个交变磁场，则小磁铁受到一个交变的力。忽略音叉振动对磁力的影响，则音叉受力与交变磁场（或者驱动线圈中的电流）成正比；忽略小磁铁随音叉振动在线圈中产生的感应电压，且驱动频率变化范围很小，可以认为驱动力的振幅与驱动线圈的电压振幅成正比（二者波形有一个相位差）。

探测线圈与驱动线圈工作方式相似，只是线圈不外加电压，因而只有音叉磁化部分在振动时产生的感应电压。

感应电压正比于磁通量变化率，因此探测电压与音叉振动速度成正比，本实验测量速度共振。磁铁靠近音叉时，音叉产生涡流动能被消耗。若振幅足够小，可以认为磁阻尼与音叉振动速度成正比。

因此，在驱动线圈通正弦信号，音叉振动动力学方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t \quad (1)$$

x 为音叉上某固定点的位移， ω_0 为音叉固有圆频率， $\delta > 0$ 表征阻尼强度（ $Q \equiv \omega_0/2\delta$ ）， ω 为驱动电压的圆频率， A 正比于驱动电压的振幅。

结论：

1) 阻尼振动（ $A = 0$ ）

阻尼振动方程的解为：

$$x(t) = a_0 e^{-\delta t} \cos(\omega' t + \varphi) \quad (2)$$

其中 $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}$ 。测量阻尼振荡周期可以得到 ω' 。 $Q \gg 1$ ，因此 ω' 与 ω_0 非常接近。若定义振幅衰减到 e^{-1} 经历时间 τ 为衰减时间常数，则有

$$\delta = \frac{1}{\tau}, \quad Q = 2\omega_0 \tau \quad (3)$$

2) 受迫振动（ $A \neq 0$ ）

加入驱动力并保持一点时间后（远大于阻尼振动的衰减时间常数 τ ），受迫振动达到稳态：振动波形与驱动力波形的频率相同并保持固定的相位差，音叉振幅与驱动力幅度成正比，此时探测线圈输出波形正比于

$$\dot{x}(t) = v \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

其中
$$v = \frac{A}{\omega_0 \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}, \quad \varphi = \tan^{-1} \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \quad (5)$$

保持驱动振幅不变，扫描驱动频率，速度振幅在 $\omega = \omega_0$ 达到极大值 v_{max} ，即发生共振。在共振峰的两侧 $\omega = \omega_1, \omega_2$ 处，速度振幅降到 $\frac{v_{max}}{\sqrt{2}}$ ，则由（5）式可得

$$|\omega_2 - \omega_1| = \frac{\omega_0}{Q} \quad (6)$$

所以 Q 值越大，共振峰越尖锐。若测出共振曲线可计算 Q 值。

2. 音叉振动周期与质量的关系

将两个质量为 $m_x/2$ 的质量块对称地固定在音叉两臂上，由于质量增加而弹性基本不变，音叉的固有频率会变小。将音叉简化为一弹簧振子，其震动周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (7)$$

m 和 k 分别称为等效质量和等效劲度系数。

$$\text{假定 } k \text{ 不随 } m_x \text{ 改变, 则 } T^2 = \frac{4\pi^2}{k} (m_0 + m_x) \quad (8)$$

m_0 为音叉等效质量。

改变附加质量，测量对应的振动周期，可以得到音叉的等效质量与等效劲度系数。这两个量与固定质量块的位置是有关的。

实验内容

1. 测量音叉的阻尼振动，根据阻尼振动波形计算音叉的固有频率与品质系数。

测得 $\Delta T = 38.2\text{ms}$ $n=10$ 可计算得固有频率 $f_0 = \frac{n}{\Delta T} \approx 261.8\text{Hz}$

在图像上选取 $U_1 = 1.13\text{V}$ $U_2 = 0.52\text{V}$ 两点，二者时间差 $\Delta t = 300\text{ms}$

$$U_1 = a_0 e^{-\delta t_1} \quad U_2 = a_0 e^{-\delta t_2} \quad \frac{U_1}{U_2} = e^{-\delta(t_1 - t_2)} = e^{-\delta \Delta t}$$

故计算得 $\delta \approx 2.59$

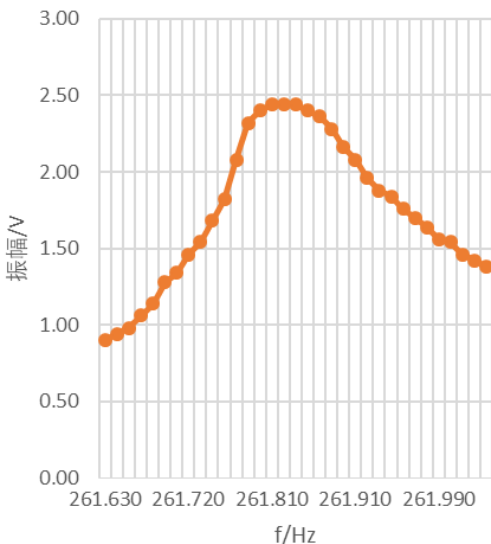
由于 $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, $\omega' = \frac{2\pi n}{\Delta T} \approx 1644.81\text{rad/s}$, 故计算得 $\omega_0 \approx 1644.82\text{rad/s}$

由于 $\delta = \frac{1}{\tau}$, $Q = 2\omega_0 \tau$, 故计算得 $Q \approx 1271.5$

2. 测量音叉共振的幅频特性曲线，根据共振曲线计算音叉的固有频率与品质系数。

f/Hz	261.630	261.640	261.650	261.670	261.680	261.700	261.710	261.720	261.730	261.740	261.750	261.770	261.790	261.800	261.810	261.820	
U/V	0.90	0.94	0.98	1.06	1.14	1.28	1.34	1.46	1.54	1.68	1.82	2.08	2.32	2.40	2.44	2.44	
	261.830	261.850	261.860	261.880	261.900	261.910	261.930	261.940	261.950	261.960	261.970	261.980	261.990	262.000	262.010	262.020	262.030
	2.44	2.40	2.36	2.28	2.16	2.08	1.96	1.88	1.84	1.76	1.70	1.64	1.56	1.54	1.46	1.42	1.38

幅频特性曲线



如上为测量数据，可得如左图幅频特性曲线

由图像可得固有频率 $f_0 = 261.830\text{Hz}$

固有圆频率 $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1645.1\text{rad/s}$

振幅为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的频率 $f_1 = 261.743\text{Hz}$ $f_2 = 261.966\text{Hz}$

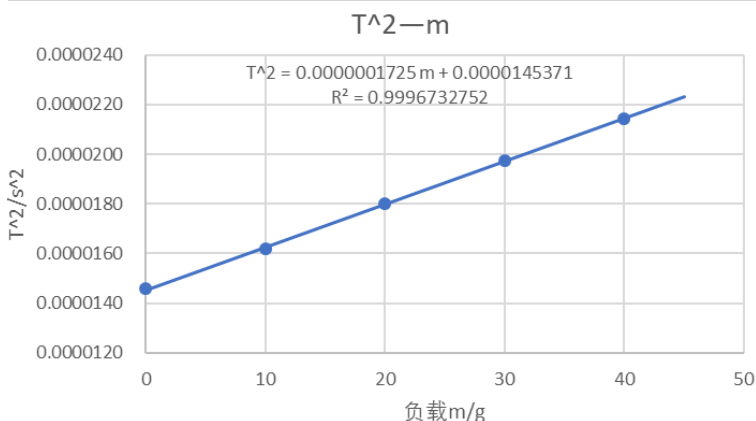
由 $|\omega_2 - \omega_1| = \frac{\omega_0}{Q}$

可计算得 $Q = 7060.63$

3. 分别测量音叉双臂对称负载不同质量块时的共振频率，计算音叉的等效振子质量；并利用音叉振动频率与负载质量快 m 之间的关系，测定未知质量块的质量。

测量时，将不同的砝码叠加使用可以得到 0、10、20、30、40、50g 的负载，测得如图数据

总负载m/g	0	10	20	30	40	?
f/Hz	261.840	248.600	235.700	225.100	216.000	207.500
T^2/s^2	0.0000146	0.0000162	0.0000180	0.0000197	0.0000214	0.0000232



拟合得如左图直线

$$\text{由 } T^2 = \frac{4\pi^2}{k} (m_0 + m)$$

可得 $m_0 \approx 84.27g$

由于未知质量块的 $T^2 = 0.0000232s^2$

可计算得未知质量块的质量 $m \approx 50.37g$

已知未知质量块的实际质量为 50g

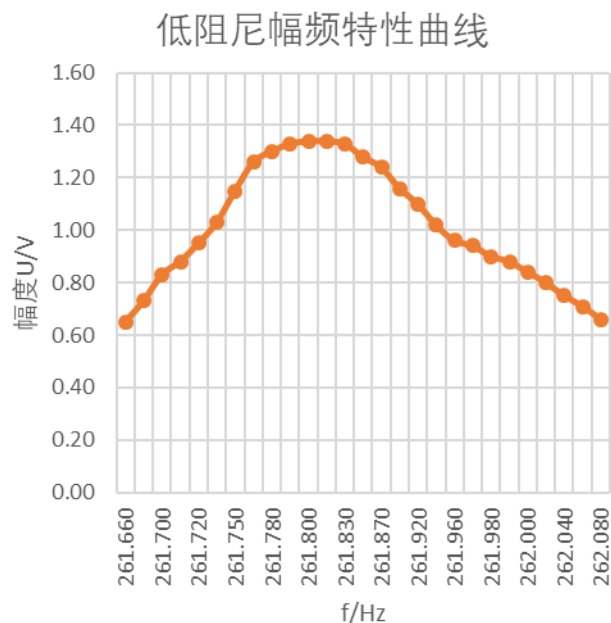
故误差为 0.74%

4. 对音叉臂施加阻尼，测量阻尼变化的情况下音叉的共振频率和品质因数。

低阻尼

f/Hz	261.660	261.680	261.700	261.710	261.720	261.730	261.750	261.770	261.780	261.790	261.800	261.820	261.830
U/V	0.65	0.73	0.83	0.88	0.95	1.03	1.15	1.26	1.30	1.33	1.34	1.34	1.33

261.850	261.870	261.900	261.920	261.940	261.960	261.970	261.980	261.990	262.000	262.020	262.040	262.060	262.080
1.28	1.24	1.16	1.10	1.02	0.96	0.94	0.90	0.88	0.84	0.80	0.75	0.71	0.66



测得数据如上

可拟合得如左图曲线

由图像可得固有频率 $f_0 = 261.810Hz$

固有圆频率 $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1645.0rad/s$

振幅为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的频率 $f_1 = 261.719Hz$ $f_2 = 261.970Hz$

$$\text{由 } |\omega_2 - \omega_1| = \frac{\omega_0}{Q}$$

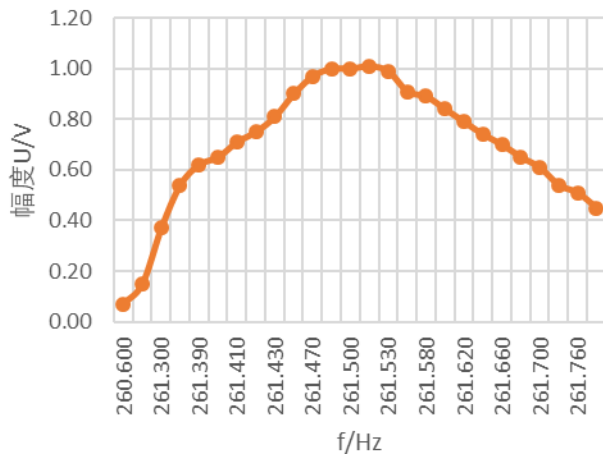
可计算得 $Q = 6553.8$

高阻尼

f/Hz	260.600	261.000	261.300	261.370	261.390	261.400	261.410	261.420	261.430	261.450	261.470	261.490
U/V	0.07	0.15	0.37	0.54	0.62	0.65	0.71	0.75	0.81	0.90	0.97	1.00

261.500	261.510	261.530	261.550	261.580	261.600	261.620	261.640	261.660	261.680	261.700	261.740	261.760	261.800
1.00	1.01	0.99	0.91	0.89	0.84	0.79	0.74	0.70	0.65	0.61	0.54	0.51	0.45

高阻尼幅频特性曲线



测得数据如上

可拟合得如左图曲线

由图像可得固有频率 $f_0 = 261.510\text{Hz}$

固有圆频率 $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1643.12\text{rad/s}$

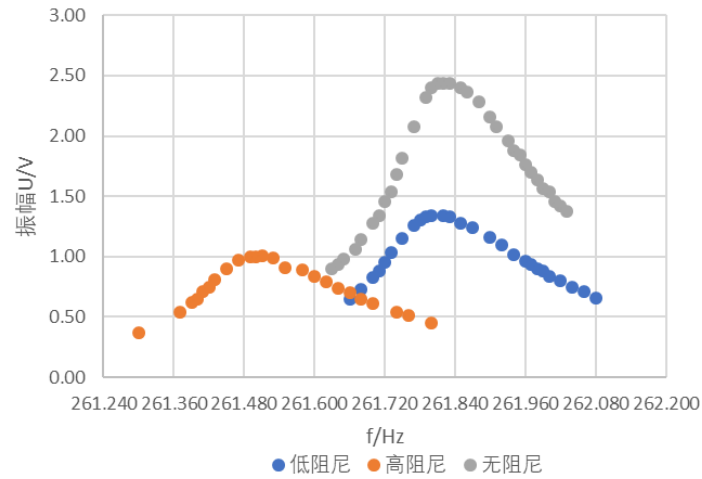
振幅为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的频率 $f_1 = 261.411\text{Hz}$ $f_2 = 261.655\text{Hz}$

由 $|\omega_2 - \omega_1| = \frac{\omega_0}{Q}$

可计算得 $Q = 6734.1$

合并图线得到

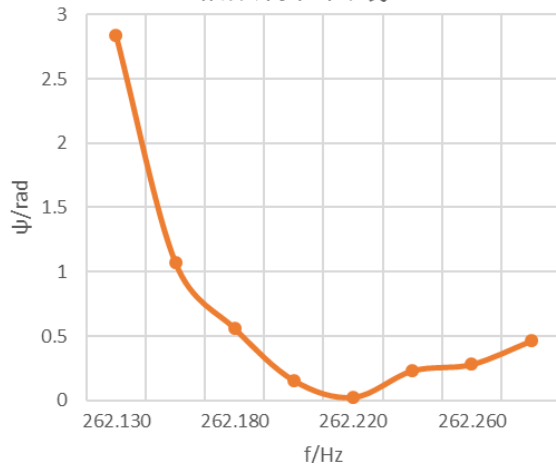
幅频特性曲线



5. 测量音叉共振的相频特性曲线。

f/Hz	262.130	262.160	262.180	262.200	262.220	262.240	262.260	262.300
▲ T/ms	1.72	0.65	0.34	0.094	0.015	0.14	0.17	0.28
ψ/rad	2.8338	1.0709	0.5602	0.1549	0.0247	0.2307	0.2801	0.4613

相频特性曲线



得到如图曲线

误差分析

1. 加入砝码时，砝码并不完全贴合音叉，可能产生一定的区别于共振的运动，导致产生测量误差。
2. 阻尼对音叉两端的吸引力不同，可能导致音叉左右两端的运动存在差异，而测量和计算时将两者作为相同运动测量，存在误差。
3. 磁铁靠近音叉时轻微改变音叉的固有频率，甚至引入一些非线性效应。因此高阻尼时的固有频率测定可能存在较大误差。

预习思考题

1. 增强感应磁场的强度。
2. 被磁化部分理解成小磁铁；忽略音叉振动对磁力的影响；忽略小磁铁随音叉振动在线圈中产生的感应电压，则认为可以认为驱动力的振幅与驱动线圈的电压振幅成正比（二者波形有一个相位差）；若振幅足够小，可以认为磁阻尼与音叉振动速度成正比。
3. 品质因数代表阻尼振动时音叉振动频率与固有圆频率的差距。品质因数大时，与固有圆频率差距小；品质因数小时，与固有圆频率差距大。

$$\text{由 } Q = 2\omega_0\tau \text{ 可得 } \tau = \frac{Q}{2\omega_0} = 7.5s$$

4. 改变附加质量，测量对应的振动周期，可以得到音叉的等效质量。无关。
5. 观察两条曲线是否有相位差。

实验数据

1. $\Delta t = 38.2$ $n = 10$ $\therefore \omega_0 = 261.5 \text{ Hz}$

电压表读数: $\Delta t = 7.00 \text{ ms}$ $U_1 = 1.13 \text{ V}$ $U_2 = 5.20 \text{ mV}$

$8 = 4.77$ $8 = 2.26$ $8 = 1.24$ $8 = 0.58$

$\therefore Q = 210, \tau = 2.27 / 12.514$

2. $\omega_0 = 261.65 \text{ Hz}$ $V_{\text{max}} = 1.44 \text{ V}$

$\omega_0 = 261.74 \text{ Hz}$ $V_{\text{max}} = 2.16 \text{ V}$

$\omega_0 = 261.84 \text{ Hz}$

$\omega_0 = 261.94 \text{ Hz}$

$Q = 1063.98$

3. $\omega_0 = 261.65 \text{ Hz}$ $V_{\text{max}} = 2.16 \text{ V}$

$\omega_0 = 261.84 \text{ Hz}$ $V_{\text{max}} = 2.16 \text{ V}$

f/Hz	261.630	261.640	261.650	261.670	261.680	261.700	261.710
V/V	0.9	0.94	0.98	1.06	1.14	1.28	1.34

ω/Hz	261.720	261.730	261.740	261.750	261.770	261.790	261.800	261.810
V/V	1.46	1.54	1.68	1.82	2.08	2.32	2.40	2.44

f/Hz	261.820	261.830	261.840	261.860	261.880	261.900	261.910	261.930	261.940
V/V	2.44	2.40	2.36	2.28	2.16	2.08	1.96	1.88	

f/Hz	261.940	261.960	261.970	261.980	261.990	262.000	262.010	262.020	262.030
V/V	1.84	1.76	1.70	1.64	1.56	1.48	1.42	1.38	

4. f/Hz 261.660 261.680 261.700 261.710 261.720 261.730 261.740 261.770 261.780

V/V 1.33 1.34 1.34 1.34 1.33 1.28 1.24 1.16 1.10

5. f/Hz 261.790 261.800 261.810 261.820 261.830 261.840 261.850 261.860 261.870 261.880

V/V 1.33 1.34 1.34 1.34 1.33 1.28 1.24 1.16 1.10 1.02

6. f/Hz 261.950 261.970 262.000 262.020 262.040 262.060 262.080

V/V 0.90 0.88 0.84 0.8 0.75 0.71 0.66

7. f/Hz 261.840 261.860 261.880 261.900 261.920 261.940 261.960 261.970

V/V 1.33 1.34 1.34 1.34 1.33 1.28 1.24 1.16

8. f/Hz 261.840 261.860 261.880 261.900 261.920 261.940 261.960 261.970

V/V 1.33 1.34 1.34 1.34 1.33 1.28 1.24 1.16

4. f/Hz (高阻尼)

f/Hz	261.600	261.620	261.640	261.660	261.680	261.700	261.720	261.740	261.760	261.780	261.800
V/V	0.87	0.85	0.83	0.81	0.79	0.77	0.75	0.73	0.71	0.69	0.67

f/Hz	261.820	261.840	261.860	261.880	261.900	261.920	261.940	261.960	261.980	262.000
V/V	0.65	0.63	0.61	0.59	0.57	0.55	0.53	0.51	0.49	0.47

f/Hz	262.020	262.040	262.060	262.080	262.100	262.120	262.140	262.160	262.180	262.200
V/V	0.45	0.43	0.41	0.39	0.37	0.35	0.33	0.31	0.29	0.27

f/Hz	262.220	262.240	262.260	262.280	262.300	262.320	262.340	262.360	262.380	262.400
V/V	0.25	0.23	0.21	0.19	0.17	0.15	0.13	0.11	0.09	0.07

$\Delta t/\text{ms}$ 1.72 1.70 1.68 1.66 1.64 1.62 1.60 1.58 1.56 1.54 1.52