TP1 - Exercices Chap. 3

Question 1)

Commencons par une démonstration qui sera utile à quelques endroits lors de la preuve du théorème miracle. Pour la démonstration il est intéressant de regarder comment chaque valeur de la matrice $(X'X)$ est calculé. Chaque élément sera dénoté $(X'X)_{ij}$

$$(X'X)_{kj} = (X'X)_{jk} = \sum_{n=1}^{N} X_{n,j}X_{n,k}$$

Si une donnée est retirée de la sommation, il restera donc $N-1$ donnée dans la sommation. Par exemple, si la i^e donnée est enlevée de la sommation, on retrouve :

$$(X'X)_{kj} = (X'X)_{jk} = \sum_{n=1}^{N-1} X_{n,j}X_{n,k} + x_{i,j}x_{i,k}$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} X_{n,j}X_{n,k} + x_{i,j}x_{i,k} = (X'_{-i,}X_{-i})_{kj} + x_{ij}x'_{ik}$$

On passe de la forme de chaque élément à la forme matricielle.

$$(X'X) = (X'_{-i}X_{-i}) + x_i x'_i \quad , \quad (X'_{-i}X_{-i}) = (X'X) - x_i x'_i \quad eq(3.1)$$

Le résultat 10 de la proposition 0.1 stipule que :

$$(A - vv')^{-1} = A^{-1} + \frac{A^{-1}vv'A^{-1}}{1 - v'A^{-1}v}$$

Il est possible de faire un paralèle avec les matrices de notre modèle linéaire. $A = X'X$ et $v = x_i$ En remplacent ces matrices dans l'équations précédente, on obtient

$$(X'X - x_i x'_i)^{-1} = (X'X)^{-1} + \frac{(X'X)^{-1}x_i x'_i (X'X)^{-1}}{1 - x'_i (X'X)^{-1} x_i}$$

Il est possible de remplacer le terme à gauche de l'équation par l'équation 3.1. Et $h_{ii} = x'_i (X'X)^{-1} x_i$

$$(X'_{-i}X_{-i})^{-1} = (X'X)^{-1} + \frac{(X'X)^{-1}x_i x'_i (X'X)^{-1}}{1 - hii} \quad eq(3.2)$$

Trouvons maitenant l'équation de $\hat{\beta}_{-i}$ en fonction de matrice contenant la donnée i

$$\hat{\beta}_{-i} = (X'_{-i}X_{-i})^{-1} X'_{-i} Y_{-1}$$

On peut remplacer $(X'_{-i}X_{-i})^{-1}$ par l'équation 3.2. De plus, en partant du même principe que l'équation 3.1, il est possible de prouver que $(X'_{-i}Y_{-i}) = (X'Y) - x_i y_i$. En remplacent ces deux termes dans l'équation précendente on obtient :

$$\hat{\beta}_{-i} = ((X'X)^{-1} + \frac{(X'X)^{-1}x_i x'_i (X'X)^{-1}}{1 - hii})(X'Y - x_i y_i)$$

$$\hat{\beta}_{-i} = (X'X)^{-1}X'Y - (X'X)^{-1}x_i y_i + \frac{(X'X)^{-1}x_i x'_i (X'X)^{-1}X'Y}{1 - hii} - \frac{(X'X)^{-1}x_i x'_i (X'X)^{-1}x_i y_i}{1 - hii}$$

$$\hat{\beta}_{-i} = \hat{\beta} - (X'X)^{-1}x_i y_i + \frac{(X'X)^{-1}x_i x'_i \hat{\beta}}{1 - hii} - \frac{(X'X)^{-1}x_i y_i h_{ii}}{1 - hii}$$

$$\hat{\beta}_{-i} = \hat{\beta} - (\frac{(X'X)^{-1}x_i}{1-h_{ii}})(y_i(1-h_{ii}) - x_i'\hat{\beta} + y_i h_{ii})$$

$$\hat{\beta}_{-i} = \hat{\beta} - (\frac{(X'X)^{-1}x_i}{1-h_{ii}})(y_i - x_i'\hat{\beta})$$

$$\hat{\beta}_{-i} = \hat{\beta} - (\frac{(X'X)^{-1}x_i}{1-h_{ii}})(e_i) \quad eq(3.3)$$

On sait que :

$$e_{i,-i} = Y_i - x_i'\hat{\beta}_{-i}$$

En remplacent le $\hat{\beta}_{-i}$ dans l'équation par l'équation 3.3, on obtient :

$$e_{i,-i} = Y_i - x_i'(\hat{\beta} - (\frac{(X'X)^{-1}x_i}{1-h_{ii}})(e_i))$$

$$e_{i,-i} = Y_i - x_i'\hat{\beta} + (\frac{(x_i'X'X)^{-1}x_i}{1-h_{ii}})(e_i)$$

$$e_{i,-i} = e_i + \frac{h_{ii}e_i}{1-h_{ii}}$$

$$e_{i,-i} = \frac{e_i}{1-h_{ii}}$$