从点电荷到电荷密度

韩博今[1]

[1]William_Han@mail.ustc.edu.cn，PB22000258

电动力学小论文

目录

动机

1. 是否可以从微观的(电磁)理论导出宏观的(电磁)理论.[i]
2. 是否可以解释电子的无穷大能量问题，或带电粒子是否受自身的电磁力的问题.
3. 是否可以准确表述电子如何构成"薄球壳".
4. 假设电子有限大的不成功.

[i]类似问题，是否可以从单粒子的拉格朗日方程解出刚体的拉格朗日方程.

目录

数学背景：分布

定义 (试验函数空间)

赋予开集$\Omega \subset \mathbb{R}^n$上的紧支光滑函数$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$以如下的收敛性[ii]：
$\phi_m \to 0 \iff$

1. $(\exists K \subset \Omega, N > 0, \forall n > N)\ \operatorname{supp} \phi_n \subset \Omega.$
2. $(\forall \alpha \in I)\ \partial_I f_n \rightrightarrows 0.$

称为试验函数空间$\mathcal{D}(\Omega)$.

定义

$\mathcal{D}(\Omega)$上的连续线性泛函全体记作$\mathcal{D}'(\Omega)$，称为Ω上的广义函数或分布.

[ii]其为向量空间，故只要给出0的邻域基即可.

点电荷的模型

“点电荷是一个δ函数”，这句话的数学描述是:

定义

称分布$\delta_x : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}: f \mapsto f(x)$为点电荷.

一个电荷系统，实际上应当看成至多可数个点电荷的叠加，因此考虑下述函数类$\mathbf{\Delta}(\Omega) := \{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \delta_{x_i} \mid \lambda^i \in \mathbb{R}, x_i \in \Omega, \forall i \in \mathbb{N}\}$. 显然，这是函数空间$\mathcal{D}'$的子空间，称为电荷类.
以后，其中元素也写作$\lambda^i \delta_i$.

基本假设

做以下假定:

1. 要研究的"带电系统"是一个欧氏空间的子集$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 宏观和微观之分不过是其上的结构不同, 为了简便起见, 只讨论函数[iii].
2. 宏观世界关注流形上的光滑函数类$\mathcal{C}(\Omega) =: \mathcal{C}$.
3. 微观世界关注其上的电荷类$\boldsymbol{\Delta}(\Omega) =: \boldsymbol{\Delta}$.

的目标是找到一个模同态$\phi\colon \boldsymbol{\Delta} \to \mathcal{C}$, 并要求其"保存物理规律的形式不变", 称之为平均泛函.

[iii]场不过是分层代数

一些例子

例

1. 电荷量$q \in \mathbf{\Delta} \subset \mathcal{D}'$, 电荷密度$\rho \in \mathcal{C}$.
2. 电流场的第一种看法: $j_\mu \in \mathbf{\Delta}$, 第二种看法: $j_\mu \in \mathcal{C}$.

例

类似讨论完全可以照搬到力学.

习题

热学如何类比呢?

目录

电荷量 vs 电荷密度

第一个问题：电荷量如何诱导电荷密度？习惯将电荷视作一个小球.

下述$f_r \in \mathcal{C}$是一个好核，即满足

1. $\int_\Omega f_r = 1.$
2. $(\forall \delta > 0)\ \lim_{r\to 0} \int_{|x|>\delta} |f_r(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$
3. $\int_\Omega |f_r| = O(1).$

的函数.

定义

将同态$\varphi_r : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{C} : \lambda^i\delta_i \mapsto \sum \lambda^i f_r(x - x_i)$称为微观参数为$r$的平均同态.

定义

若$q = q^i\delta_i$，则电荷密度$\rho_r(x) := [\varphi_r(q)](x)$.

渐近分析与电场

不巧的是，上述密度确实依赖于微观参数，$\lim_{r\to 0}\rho_r$将会发散或为0．但是，对于电场，有以下良好的定理．首先，由于电势有叠加原理，只需要讨论一个点电荷的势场．

1. 点电荷的势场：$\phi(w)=k/w$．
2. 希望平均后的场也能够产生相同的效果，即

$$\lim_{r\to 0}\int_\Omega f_r(x)/|w-x|=\phi(w)=k/w$$

这显然成立，并且收敛实际上是近一致收敛的[iv]．

因此，可以通过求解$\nabla E_r=\rho_r$得到平均电场E_r，再求其极限，得到真实的电场E．这就证明了下述命题．

命题

若$q^i\delta_i =: q\in\boldsymbol{\Delta}$是一个电荷分布，则电势$\phi:=\sum kq^i/w_i$是满足Laplace方程$\Delta\phi_r=\rho_r$的连续解$\phi_r$的点态极限．

[iv] 好核性质及Egoroff定理

分布均匀

如果有一个均匀分布的电荷族，比如分布于

$$(0.0001 \cdot [-3000, 3000] \cap \mathbb{Z})^3 \subset 0.0001\mathbb{Z}^3$$

这样的格点上的电荷族，那么，自然想问，什么时候平均出来的电荷密度是均匀的？或者说，直接平均是否可行？为了简化计算，不妨设两点间距离对于的计算是小量，则求和与积分差别不大[v]，即$\int_\Omega \rho_r(x-t)\mathrm{d}t$可以视作是在$x$处的电荷密度．为了简便语言，认为$\Omega$是空间旋转对称的，对称中心是原点．有以下命题．

命题

$\lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_\Omega \rho_r(x-t)\mathrm{d}t = 0$，对于$|x| \le q\,\mathrm{diam}\,\Omega, q \le 1$一致成立．

[v]可以考虑艾里斑类似的结论

介质极化

那么，什么是介质的极化呢？为了简化讨论，考虑均匀极化的模型．一个均匀极化的介质，就是如下的电荷族

$$\sum q\delta(x - x_i) - \sum q\delta\left(x - x_i - \vec{d}\right)$$

其自然满足均匀分布的讨论(如果Ω足够好!)，于是在中间部分，介质的极化电荷相互抵消，边缘逐渐变成薄带电板．
若Ω不足够好，前页的命题失去意义，此时需要大量计算．

电子束 vs 电流强度

一个电子束族是指一个分布矢量场

$$\left(v^\mu q^i \delta_i\right)_{\mu=1}^3 := \left(j^\mu\right)_{\mu=1}^3 \in \mathbf{\Delta}^3$$

同样可以计算其在微观参数为r下的平均同态$\varphi_r(j^\mu) =: j_r^\mu$，称之为电流强度．同样的，应当有如下命题：

命题

若$v^\mu q^i \delta_i := (j^\mu)$是一个电子束族，则其产生的磁场$\vec{B}$是满足Maxwell方程$\nabla \times \vec{B}_r = \mu_0 j_r^\mu$的磁场按分量的极限．

同样的，也可以讨论电流强度被视作均匀时的条件，读者可以自行尝试．

我们知道, 电荷的自能会发散. 我们不得不用一种奇妙的技术称为“重整化”. 在上述视角下, 点电荷自能为:

$$E_r = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\int_\Omega \frac{f_r(x)}{|w - x|^2} \mathrm{d}x \right)^2 \mathrm{d}w$$

的极限, 于是

目录

总结

我们从点电荷的角度出发，导出了

1. 平均点电荷为电荷密度在渐近意义下不改变电场的解.
2. 均匀分布的点电荷诱导了均匀分布的电荷密度.
3. 均匀的介质可以内部抵消.

这些基本的物理直觉，并且提到了可以对磁场做类似的变换.

我们希望

1. 对极化介质通过点电荷和平均同态的假设进行进一步研究.
2. 应用点电荷假设于刚体，热力学等宏观问题中.
3. 以此直觉赋予卷积与恒等元逼近以物理图像.

Thank you！