同调代数-模论

Misimo Vicus

6771

这是提纲, 于是我们合理忽略定义及证明. 符号约定是一般的, 有异议的可以进行讨论. 书指Rotman, An introduction to homological algebra, 2ed, springer, 世界图书, 2015. 对于请自己定义或证明的内容, 会附上书的页码, 讨论班会提及.

这是6789完整稿, 基本覆盖补充书的第二章, 并加入较多范畴论语言. 其中**命题** 6.5的提出和证明都是由个人完成的, 希望大家批评指正. 而利用单位和余单位证明的两个命题**命题** 5.1, **命题** 6.10也是由个人证明的, 希望指正. 当然, 时间仓促, 学识浅薄, 一定存在其他谬误, 希望大家指出. 而一些证明较略, 甚至只有一句话的证明, 都是可以上网搜索到的.

讲义额外参考了李文威代数学方法第一卷, 甚至有部分直接照本宣科. 其余参考还有一些范畴论读物和互联网.

作者对本内容的原创性可以说没有贡献, 除了为正确知识增加笔误是原创的. 谢谢大家.

下述R永远是含幺环, 单点集$\{a\}$经常写作a, 如不注明(特指投射模), 交换图中虚线部分指存在唯一.

§1 加法范畴

定义 1.1. 预加法范畴C意即如下资料:

1. C中有0元, 为始终对象.
2. $\mathsf{C}(A,B)$是交换群, 零态射0是群的零元.
3. 满足复合$\circ$: $\mathsf{C}(A,B)\times\mathsf{C}(B,C)\to\mathsf{C}(A,C)$: $f,g\mapsto f\circ g$是双线性的.

定义 1.2. 加法范畴C意即如下资料:

1. C是预加法范畴.
2. 任意两个对象有直和(余积)$A\oplus B$.

定义 1.3. 预可加函子指一个加法范畴C与D中的函子T: $\mathsf{C}\to\mathsf{D}$, 并且T是映射集$\mathsf{C}(A,B)$和$\mathsf{D}(TA,TB)$中的群态射.

命题 1.4. 加法范畴中**有限**直和$B=\bigoplus^n A_k$等价于$\exists!\pi_k$: $B\to A_k$, 满足

$$\pi_k\iota_l=\delta_{kl,A_k}$$

$$\sum^n\iota_k\pi_k=\mathrm{id}_B$$

其中δ_{kl}是Kronecker符号, 取$k=l$为id, $k\neq l$为0.

证明概要. 必要性($\Longrightarrow$). 考虑由泛性质给出的下图即可, 其中$l\neq k$.

$$\begin{tikzcd}
& A_k & \\
A_l \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "\iota_l"'] & B \arrow[u, dashed, "\pi_k"] & A_k \arrow[ul, "\mathrm{id}_k"'] \arrow[l, "\iota_k"]
\end{tikzcd}$$

而第二个等式由$(\sum^n \iota_k\pi_k)\iota_l = \iota_k$, 再由下述交换图给出的唯一性得出.

$$\begin{tikzcd}
A_k \arrow[d, "\iota_k"] \arrow[dr, "\iota_k"] & \\
B \arrow[r, dashed, "\mathrm{id}_B"] & B
\end{tikzcd}$$

充分性($\Longleftarrow$). 考虑到如下交换图.

$$\begin{tikzcd}
A_k \arrow[d, "\iota_k"] \arrow[dr, "\tau_k"] & \\
B \arrow[u, bend left, "\pi_k"] \arrow[r, dashed, "\tau"] & C
\end{tikzcd}$$

其中$\tau := \sum^n \tau_k\pi_k$即可, τ的唯一性由$\tau' \,\mathrm{id}_B = \tau' \sum^n \iota_k\pi_k = \sum \tau_k\pi_k = \tau$保证. □

注记 1. 这告诉我们, 嵌入映射$A_k \xrightarrow{\iota_k} \bigoplus^n A_k$总是可缩的(retractive).

定义 1.5. 可加函子指一个加法范畴C与D中的预可加函子$T\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, 满足$T$与直和可以交换.

§2　模范畴

直到本文结束, 都采用Mod代表左$R-$模范畴

定义 2.1. 左$R-$模范畴${}_R\mathsf{Mod}$为如下资料:

1. 对象: 左$R-$模, 记作$M \in \mathsf{Mod}$.

2. 态射: 左$R-$模之间态射, 记作$f \in \mathsf{Mod}(M, N)$, 也记作$\mathsf{Hom}(M, N)$.

注记 2. 模的定义见书P14. 良定义交给读者, 子模、商模的定义交给读者. 均可以参考书41页. 也可以抛弃这一观点, 详见后面内容.

定义 2.2. 可以定义映射的核与余核. 若$f \in \mathsf{Mod}(M, N)$
$\ker f := \{x \in M \mid f(x) = 0\}$.
$\operatorname{cok} f := N/\operatorname{Im} f$.

命题 2.3. 若$A \xrightarrow{f} B$是环同态, 则f给出了${}_B\mathsf{Mod}$到${}_A\mathsf{Mod}$的一个函子, 任何$B-$模均可以看成$A-$模, 任何$B-$模同态均可以看成$A-$模同态, 称为标量限制. 我们采用“M_A"或“M'"代表相应的限制.

证明概要. 考虑复合$A \to B \to \mathsf{End}(M)$给出$M$上的$A-$模结构. □

注记 3. 可以直接验证, 发现标量限制函子是忠实正合的.

2.1　对应定理

下述M, N代表某一左$R-$模, $\mathsf{Mod}(M, N)$表示左$R-$模同态全体.

命题 2.4 (同态第一定理)**.** 若$f \in \mathsf{Mod}(M, N)$, 则有模同构$M/\ker f \simeq \operatorname{Im} f$.

命题 2.5 (标准化)**.** 若 $K < M$, 则对于任意$H < M$, 有下述交换图交换[1]当且仅当 $H < K$.

[1]翻译: 考虑范畴$M \overset{\pi_H}{\to} M/H$为满足$H < K$商映射构成的范畴, 则$M \overset{\pi_K}{\to} M/K$为终对象.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\pi_K"] \arrow[d, two heads, "\pi_H"] & M/K \\ M/H \arrow[ur, dashed, two heads, "\bar{\pi}"'] & \end{tikzcd}$$

并且$\ker\bar{\pi} = K/H$.

证明概要. 必要性($\Longrightarrow$). 考虑到$\pi_K(H) = \bar{\pi}\circ\pi_H(H) = 0$, 从而$\forall h \in H \implies h \in K$, 即$H \in K$.

充分性($\Longleftarrow$). 直接给出$\bar{\pi}\colon M/H \to M/K\colon m + H \mapsto m + K$, 容易验证良定性. 同时给出映射的核$\ker\bar{\pi} = K/H$. □

推论 2.6. $f \in \mathsf{Mod}(M, N)$, 有下述交换图交换当且仅当 $H \subset \ker f$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & N \\ M/H \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

推论 2.7. $f \in \mathsf{Mod}(M, N)$, $\pi \in \mathsf{Mod}(M, K)$, π满, 有下述交换图交换当且仅当 $\ker\pi \subset \ker f$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & N \\ K \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

注记 4. 存在对偶命题.

证明概要.

$$\begin{tikzcd} M/\ker f \arrow[rr, hook, "i"] & & N \\ & M/H \arrow[ul, dashed, "\bar{\pi}"] \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \\ & M \arrow[u, "\pi"] \arrow[uul, bend left, "\pi_{\ker f}"] \arrow[uur, bend right, "f"'] & \end{tikzcd}$$

□

注记 5. $\ker\bar{f} = \ker f/H$.

命题 2.8 (对应定理)**.** $f \in \mathsf{Mod}(M, N)$, 给出M中含$\ker f$的子模到$\operatorname{Im} f$的子模的一一对应.

证明概要. 事实上只要证明$\pi\colon M \to M/K$给出M含K的子模到M/K中子模的一一对应. 我们不妨设π^{-1}作为子集上的映射为π^*. 接下来, 我们证明π^*给出要求的双射.

任意$H < M/K$, 则可以验证$\pi^*H < M$确为含K的子模, 并且$\pi\pi^*H = H$. 从而π^*有左逆, 即为单射.

而任意L为含K的子模, 则可以验证$\pi L = \{\ldots \mid \ldots\} =: L/K$确为$M/K$的子模, 并且$\pi^*\pi L/K = L$. 从而$\pi^*$有左逆, 即为满射. □

2.2 模范畴是加法范畴

下述A_k是一列左R−模, 不注明时, 认为指标集$k \in I$, 不默认I是有限集.

定义 2.9 (模的直和)**.** A_k的直和$\bigoplus A_k$是满足以下交换图的对象(B, ι_k)

$$\begin{tikzcd} A_k \arrow[d, "\iota_k"'] \arrow[dr, "f_k"] & \\ B \arrow[r, dashed, "f"] & C \end{tikzcd}$$

证明概要. 唯一性易证.

存在性: 我们给出构造, 考虑映射空间$(\coprod A_k)^I$的子空间: 满足支集有限$I-$元组B, $\iota_k(a) := a_k : I \to \coprod A_k : l \mapsto a\delta_{kl}$. 具体构造见书 P53. 对泛性质满足的验证如下, 考虑映射$b \in B$, $f(b) := \sum_{k \in I} f_k(b(k))$, 这是有限和. □

注记 6. 有限时, 上述构造依然可行, 然而也可以直接采用分量构造, 交给读者, 书P51页.

这给出了书P55页的命题, 即自然性.

推论 2.10. 模范畴Mod是加法范畴.

证明概要. 预加法范畴交给读者, 书P39页. □

推论 2.11. 若M, N是左$R-$模, 则有满足$\pi_M \iota_M = \mathrm{id}_M$, $\pi_N \iota_N = \mathrm{id}_N$, $\pi_N \iota_M = 0$, $\pi_M \iota_N = 0$的模同态$\pi_M : D \to M$及$\pi_N : D \to N$, 等价于$D \simeq M \oplus N$.

注记 7. 这是书P48页的部分结论, 利用**命题 1.4**直接得证.

定义 2.12. 取ι_i为嵌入映射时, 存在自然的嵌入映射$\bigoplus_i M_i \to M$, 因此我们将$\bigoplus_i$视作M的子模, 称为M_i的内直和.

命题 2.13. 取ι_i为嵌入映射时, $M \simeq \bigoplus M_i$, 当且仅当M中每个元素的表达方法唯一.

证明概要. 必要性($\Longrightarrow$). 这由于由**推论 2.11**映射π_i的存在及良定性, 交换图容易构建, 唯一性由反证已知.

充分性($\Longleftarrow$). 只需要验证该分解方法是模同态, 这是由于唯一性, 并且满足**推论 2.11**的几个性质. □

命题 2.14. $M = \sum M_i$, 则$M = \bigoplus M_i$当且仅当$M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = 0$.

证明概要. 必要性($\Longrightarrow$). 考虑0的表达.

充分性($\Longleftarrow$). 数归. □

§3 子模与商模: 正合列

定义 3.1. 范畴C上的列意即一个函子$D : I \to \mathsf{C}$, 其中I是如下形式的范畴$\{\cdot_1 \to_1 \cdot_2 \to_2 \ldots \to_{n-1} \cdot_n\}$.

称加法范畴上的列是正合列, 若对于每一个对象$D(\cdot_k)(2 \le k \le n-1)$, 等式$\mathrm{Im}\, D(\to_{k-1}) = \ker D(\to_k)$成立.

注记 8. 抽象废话可以忽略.

定义 3.2. 这样的列叫做正合列:

$$\ldots \longrightarrow A_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} A_k \xrightarrow{f_k} A_{k+1} \longrightarrow \ldots$$

若$\ker f_k = \mathrm{Im}\, f_{k-1}$对任何的$k$成立.

注记 9. 正合列描述单, 满, 同构请自己定义, 书P46页.

3.1 短正合列

下述短正合列一直指$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$.

定义 3.3. 短正合列是形如$0 \to A \to B \to C \to 0$的正合列, B称为A过C的扩张.

推论 3.4. 在短正合列中, $C \simeq B/i(A)$, 且$i(A) \simeq A$.

例 10. 同态第三定理: $T < S < M$, 则$0 \to S/T \to M/T \to M/S \to 0$, 书P47有误(?).

定义 3.5. 短正合列是可缩的, 指存在$\rho\colon B \to A$, 满足$\rho \circ i = \mathrm{id}_A$.
短正合列是分裂的, 指存在$s\colon C \to B$, 满足$p \circ s = \mathrm{id}_C$.

注记 11. 不是所有的短正合列都可缩或分裂. 反例为$0 \to \mathbb{F}_2 \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_2 \to 0$.

命题 3.6. 下述等价:

1. 短正合列分裂.
2. 短正合列可缩.
3. $B \simeq A \oplus C$且下图交换.

$$\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[dd, "\simeq"] \arrow[dr, "p"] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "\iota"'] & & C \arrow[r] & 0 \\
 & & A \oplus C \arrow[ur, "\pi"'] & &
\end{tikzcd}$$

证明概要. 由3推出1和2是显然的(**推论 2.11**).
1推出3或2推出3是构造性的, 是否有范畴性的做法? □

3.2 函子性

下述A和B是两个环上的左$R-$模.

命题 3.7. $\mathsf{Hom}(A, -)$和$\mathsf{Hom}(-, A)$是协/逆变左正合函子(到左$Z(R)$模).

证明概要. 重点在于验证$\ker \subset \mathrm{Im}$, 通过泛性质易给出结论. □

例 12. 重要反例: 上述两函子不右正合. $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

§4 伴随理论

回顾, 若C和D是两个范畴, $c, c', q \in C$, 则对于态射$f\colon c \to c'$, 我们有$f^*\colon C(c', q) \to C(c, q)$是逆变函子, $f_*\colon C(q, c) \to C(q, c')$是协变函子.

定义 4.1. 若C和D是两个范畴, 则函子$L\colon C \leftrightarrows D\colon R$称为一组伴随对, 若$D(Lc, d) \simeq C(c, Rd)$是自然同构, 即是说有函子的自然变换$A\colon D(L-, d) \to C(-, Rc)$及$B\colon D(Lc, -) \to c, R-$, 或者说有自然同构$\varphi\colon D(L-, -) \to C(-, R-)$

$$\begin{tikzcd}
C^{op} \times D \arrow[r, bend left, "D(L-,-)"{name=U}] \arrow[r, bend right, "C(-,R-)"'{name=D}] & \mathsf{Set} \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow \varphi"]
\end{tikzcd}$$

注记 13. 再用自然变换的语言改写一下, 就是

$$\begin{tikzcd}
D(Lc,d) \arrow[r, "\varphi_{(c,d)}"] \arrow[d, "k_*"] & C(c,Rd) \arrow[d, "(Rk)_*"] \\
D(Lc,d') \arrow[r, "\varphi_{(c,d')}"] & C(c,Rd')
\end{tikzcd}$$

及

$$\begin{tikzcd}
D(Lc',d) \arrow[r, "\varphi_{(c',d)}"] \arrow[d, "(Lp)^*"] & C(c',Rd) \arrow[d, "p^*"] \\
D(Lc,d) \arrow[r, "\varphi_{(c,d)}"] & C(c,Rd)
\end{tikzcd}$$

其中$(c,d),(c,d'),(c',d) \in C^{op} \times D$, 而$k\colon d \to d', p\colon c \to c'$为任意态射.

定义 4.2. 可以定义自然变换$\eta\colon \mathrm{id}_C \to RL$如下, $\eta_c := \varphi_{(c,Lc)}(\mathrm{id}_{Lc}) \in C(c,RLc)$, 称为伴随的单位.

证明概要. 此定义是良定义的, 只要考虑到下述交换图, 再带入id, 使用上述**注记 13**即可.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\varphi_{(c,Lc')}(Lf)"] & RLc \arrow[d, "RLf"] \\
c' \arrow[r, "\eta_{c'}"] & RLc'
\end{tikzcd}$$

从而η确实是自然变换. □

注记 14. 我们可以反转箭头, 定义余单位$\varepsilon\colon LR \to \mathrm{id}_D$, $\varepsilon_d := \varphi_{(Rd,d)}{}^{-1}(\mathrm{id}_d) \in D(LRd,d)$, 此处的$\varphi^{-1}$有意义, 鉴于$\varphi$是同构.

命题 4.3. 单位满足下述交换图, 即

$$\begin{tikzcd}
RLc \arrow[dr, dashed, "R\bar{f}"] & \\
c \arrow[u, "\eta_c"] \arrow[r, "f"] & Rd
\end{tikzcd}$$

对于任何$c \in C, d \in D, f\colon c \to Rd$, 存在唯一$\bar{f}\colon Lc \to d$使图交换.

证明概要. 存在性: $R\varphi_{(c,d)}(f)$确为符合条件的态射.

唯一性: 考虑下述交换图.

$$\begin{tikzcd}
C(c,Rd) \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & D(Lc,d) \arrow[l, "\varphi_{(c,d)}"'] \arrow[d, "R^*"] \\
C(c,Rd) & D(RLc,Rd) \arrow[l, "\eta_c^*"]
\end{tikzcd}$$

□

注记 15. 余单位满足:

$$\begin{tikzcd}
LRd \arrow[d, "\varepsilon_c"'] & \\
d & Lc \arrow[l, "f"'] \arrow[ul, dashed, "L\bar{f}"']
\end{tikzcd}$$

命题 4.4. 单位和余单位各自按下式确定了φ,

$$\begin{aligned}
\hat{f} := \varphi(f) \quad &= Rf \circ \eta_c : c \to Rd, \quad \forall f : Lc \to d; \\
\hat{g} := \varphi^{-1}(g) \quad &= \varepsilon_d \circ Lg : Lc \to d, \quad \forall g : c \to Rd.
\end{aligned} \tag{1}$$

证明概要. 只证第一个, 考虑到下述交换图

$$\begin{tikzcd} D(Lc,Lc) \arrow[r, "\varphi_{(c,Lc)}"] \arrow[d, "f_*"'] & C(c,RLc) \arrow[d, "(Rf)_*"] \\ D(Lc,d) \arrow[r, "\varphi_{(c,d)}"] & C(c,Rd) \end{tikzcd}$$

并带入id_{Lc}即可. □

命题 4.5. 对于伴随的单位和余单位, 我们有自然变换的等式

$$\begin{aligned} \left[R \xrightarrow{\eta R} (RL)R = R(LR) \xrightarrow{R\varepsilon} R\right] &= \mathrm{id}_R, \\ \left[L \xrightarrow{L\eta} L(RL) = (LR)L \xrightarrow{\varepsilon L} L\right] &= \mathrm{id}_L\,. \end{aligned} \tag{2}$$

证明概要. $\mathrm{id}_{Rd} = \phi_{Rd,d}(\varepsilon_d) = R\varepsilon_d \circ \eta_{Rd} = R\varepsilon_d \circ \eta_{Rd}$. 其中$R\varepsilon$等符号是与id的横合成. 或是考虑命题 4.3. □

命题 4.6. 对于给定的函子 $\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "L"] & D \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$, 以下的映射互为逆

$$\begin{aligned} \{\varphi : (L,R,\varphi) \text{ 是伴随对 }\} &\rightleftharpoons \{(\eta,\varepsilon) : \text{ 满足 (2) }\} \\ \varphi &\longmapsto \left(\eta_c := \varphi(\mathrm{id}_{Lc}),\ \varepsilon_d := \varphi^{-1}(\mathrm{id}_{Rd})\right), \\ \varphi(f) := Rf \circ \eta_c &\longleftarrow (\eta,\varepsilon). \end{aligned}$$

因此伴随对亦可用资料 (L,R,η,ε) 描述, 这样的好处是不牵涉 Hom(,) 集.

证明. 给定 (η,ε) 满足 (2). 定义 $\varphi(f) = Rf \circ \eta_c$ 和 $\psi(g) = \varepsilon_d \circ Lg$ 如 (1), 其中 $f : Lc \to d$, $g : c \to Rd$. 依据 η, ε 的自然性, φ 和 ψ 构成函子间的一对态射 $\mathrm{Hom}((,L)(\cdot),\cdot) \leftrightarrows \mathrm{Hom}((,\cdot),R(\cdot))$.

我们断言 $\psi\varphi = \mathrm{id}$: 左式将 f 映至 $\varepsilon_d \circ LRf \circ L\eta_c$. 由于 ε 的自然性, 图表

$$\begin{tikzcd} Lc \arrow[r, "L\eta_c"] & LRLc \arrow[r, "LRf"] \arrow[d, "\varepsilon_{Lc}"'] & LRd \arrow[d, "\varepsilon_d"] \\ & Lc \arrow[r, "f"'] & d \end{tikzcd}$$

交换. 因此 $\psi\varphi(f) = f \circ \varepsilon_{Lc} \circ L\eta_c$, 根据 (2) 这无非是 f. 同理可证 $\varphi\psi = \mathrm{id}$. 故 (L,R,φ) 是伴随对. 由定义立见 $\varphi(\mathrm{id}_{Lc}) = \eta_c$, $\psi(\mathrm{id}_{Rd}) = \varepsilon_d$.

配合先前的讨论可以看出 $\leftharpoondown$ 和 $\rightharpoonup$ 互逆. 证毕. □

注记 16. 资料 (L,R,η,ε) 里的 ε (或 η) 是同构当且仅当 R (或 L) 是全忠实函子, 可以考虑米田引理.

推论 4.7. 伴随存在则必在**命题 4.3**的意义下F唯一.

4.1 伴随的性质

下述I是小范畴[2], 有函子$F: I \to C$, 称这样的函子为C上的一个图.

定义 4.8. 图F上以c为顶点的锥是自然变换$\lambda: c \to F$, 其中c为$c: J \to C$的常值函子. $\lambda_i: c \to Fi$被称为锥的腿.

[2]对象类和态射类都是U–小集(和某个U–集等势), U是宇宙

定义 4.9. 对于任何函子F, 有函子$\mathrm{Cone}\,(-,F)\colon C \to \mathsf{Set}$, 将$c$映到以$c$为顶点的一切锥. 极限是下述范畴内的终对象:

1. 对象: $(c,\lambda) \in \mathrm{Cone}\,(c,F), \forall c \in C$.
2. 态射: $(c,\lambda) \in \mathrm{Cone}\,(c,F)$和$(d,\mu) \in \mathrm{Cone}\,(d,F)$中的态射是$f \in C(c,d)$且$f\lambda_i = \mu_i$.

注记 17. 可以类似地定义余极限, 交给读者.

例 18. 积就是分离范畴诱导的函子的极限, 余积则是余极限.

例 19. 若I是$(\mathbb{N},\leq)$, 则Set范畴下的余极限是$\coprod Fi/\sim$, 这里$\sim$是下述给出的等价关系: 对于任意$i,j \in I, x_i \in Fi, x_j \in F_j, x_i \sim x_j :\iff (\exists k \in I)\ i \leq k \wedge j \leq k \wedge F(i \leq k)x_i = F(j \leq k)x_j$.

命题 4.10. 考虑伴随对 (L,R,φ), 其中 $C \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} D$. 则 $\begin{cases} L \text{ 保 } \operatorname{colim} \\ R \text{ 保 } \lim \end{cases}$; 这里假设所论的极限存在, 并且是小极限.

证明概要. 由于极限和与余极限对偶, 我们只证左伴随保持余极限, 利用$\hat{\mu}$易证. □

§5 生成模与自由模

下述都在左$R-$模的意义下讨论问题.

5.1 自由模

定义 5.1. 集合X上的自由模是满足如下泛性质的对象:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[dr, dashed, "\bar{f}"] & \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

证明概要. 这样的对象存在, 我们给出构造: 考虑R^X作为集合映射$\phi\colon X \to R$的全体, 这是一个左$R-$模(验证见书P57). 接下来, 我们在这个模中找出一个符合上述泛性质的对象: 我们取$\delta_x := \delta_{x,-}$作为Kronecker符号. 考虑一切$R\delta_x$在R^X中的内直和, 这是可行的(验证!). 接下来我们验证满足泛性质. 考虑$f \in M^X, y \in FX$, 定义$\bar{f}(y) := \sum_{x\in X} y(x)f(x)$, 定义的良定义是显然的(验证!). 而当唯一性容易证明(限制到生成集上). □

命题 5.2. $F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Mod}$是函子.

证明概要. F将对象$X \in \mathsf{Set}$映射为FX自由模, 集合同态$h\colon X \to Y$映射为下述交换图的对象.

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend left, "F(g\circ f)"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & FY \arrow[r, "Fg"] \arrow[dr, "\bar{g}"'] & FZ \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[u, "i"] \arrow[r, "g"] & Z \arrow[u, "i"] \end{tikzcd}$$

上述交换图交换证明了函子性, 其交换的原因是因为$\bar{g} \circ Ff\colon FX \to Z$确实由交换图导出和$FX \to Z$的映射交换, 从而导出的$Fg \circ Ff$就是$F(g \circ f)$. 从而得到$F$确为函子. □

命题 5.3. 自由与遗忘函子对存在余单位.

证明概要. 我们考虑ε为到**原来的基模**G的下述态射$FUG \xrightarrow{\varepsilon_G} G$, $\varepsilon_G((a_i g_i)) := \sum a_i g_i$. 要证其为余单位, 即首先, ε是模同态, 其次下述交换图成立:

$$\begin{tikzcd} FUG \arrow[d, "\varepsilon_G"'] & \\ G & FX \arrow[l, "h"'] \arrow[ul, dashed, "F\bar{h}"'] \end{tikzcd}$$

其中要证集合同态$\bar{h}\colon X \to UG$存在唯一.

首先, ε_G是模同态, 这由于$\varepsilon_G(\lambda(a_i g_i) + \mu(b_i g_i)) = \varepsilon_G(((\lambda a_i + \mu b_i) g_i)) = \sum(\lambda a_i + \mu b_i) g_i = \lambda \sum(a_i) g_i + \mu \sum(b_i) g_i = \lambda\varepsilon((a_i g_i)) + \mu\varepsilon(b_i g_i)$, 我们接下来省略$\varepsilon$的下标.

存在性: 直接考虑$\bar{h}$为h在X上的的限制, 这是显然可行的. 接下来需要验证交换图交换, 由于自由模的定义, 获得$F\bar{h}((a_i x_i)) = (a_i h(x_i))$, 鉴于$\varepsilon$的定义, 显然得证.

唯一性: 从构造中限制步骤显然看出. □

命题 5.4. 自由函子F和遗忘函子U构成一对伴随对.

证明概要. 只要验证先余单位, 再单位等于没变. 同样的, 先单位, 再余单位等于没变. 换言之, 我们有自然变换的等式$U\varepsilon\eta U = \mathrm{id}_U$及$\varepsilon FF\eta = \mathrm{id}_F$. 实际上, 我们只要在特定的对象下验证即可.

我们以第一个等式为例, 取任意G为A模, 有$\eta U(UG) = UFUG$, 再经过$U\varepsilon$的作用有值为UG, 显然得到结论. □

注记 20. 自由是遗忘的左伴随, 于是由伴随理论, 有$\mathsf{Set}(X, UM) \simeq \mathsf{Mod}(FX, M)$.

推论 5.5. 自由函子保持余极限.

推论 5.6. 自由模是投射的, 即是说.

$$\begin{tikzcd} & FX \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, dashed, "\bar{\gamma}"] & \\ 0 & C \arrow[l] & B \arrow[l, two heads, "\pi"] \end{tikzcd}$$

此处的γ不一定唯一.

证明概要. 见书 P99. □

推论 5.7. 正合列$0 \to \ker\eta \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\phi} FX \to 0$分裂.

5.2 生成模

定义 5.8. 称N是集合X的生成模, 若有正合列$FX \to N \to 0$.

定义 5.9 (内生成模). 根据自由模的泛性质**定义 5.1**, 存在映射$FX \to M$使得下图交换.

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\subset"] & M \end{tikzcd}$$

其中$X \xrightarrow{\subset} M$为子集合的自然嵌入映射, 我们称$\operatorname{Im} f$为$X$在$M$中的生成模.

§6 张量积

下述A, B和C是环.

6.1 张量积的定义

目的: 找到Hom$(-, P)$的伴随函子.

A 双模

定义 6.1 (双模). Abel群M称为(A, B)双模, 若M同时是左A模和右B模, 且满足$a(mb) = (am)b =: amb$.

注记 21. 可以照搬上述内容, 在所有(A, B)的双模和其中自然的同态构成范畴$(A, B) - \mathsf{Mod}$中讨论问题.

例 22. 任何左A模均可以看成$(A, \mathbb{Z})-$双模.

例 23. 当A交换时, 任意左A-模M都自然地成为(A, A)-双模.

注记 24. 今后我们将不时使用符号 ${}_AM$ (或 M_B, ${}_AM_B$) 表示 M 带有左 A-模 (或右 B-模, (A, B)-双模) 结构.

B 平衡积

定义 6.2. 考虑双模${}_AM_B$, ${}_BN_C$和(A, C)双模L. 映射

$$B : M \times N \to L$$

称为平衡积, 若满足以下条件:

1. $B(x + x', y) = B(x, y) + B(x', y)$,
2. $B(x, y + y') = B(x, y) + B(x, y')$,
3. $B(xb, y) = B(x, by)$,
4. $B(ax, yc) = aB(x, y)c$.

其中$x, x' \in M, y, y' \in N$和$(a, b, c) \in A \times B \times C$为任意元素. 所有$(A, B, C)-$平衡积$B : M \times N \to L$所成集合记为 $\mathrm{Bil}_{A,B,C}(M, N; L)$, 对加法构成交换群.

定义 6.3. 若有双模${}_AM_B$, ${}_BN_C$, 则张量积$M \otimes_B N$是下述问题的解.

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d] & L \\
M \otimes_B N \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

其中L是(A, C)双模, f是$(A, B, C)-$平衡积, $\bar{f}$为$(A, C)-$双模同态, 并且存在唯一.

证明概要. 符合上述条件的对象是存在的, 考虑下述交换图.

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & L \\
F(M \times N) \arrow[ur, "\bar{\bar{f}}"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \\
M \otimes_B N \arrow[uur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

其中F为$(A,C)-$双模上的自由函子,π作为商映射商去由

$$\{(xb,y)-(x,by),(x+z,y)-(x,y)-(z,y),(x,y+z)-(x,y)-(x,z)\mid\ldots\}$$

在$F(M\times N)$中生成的$(A,C)-$双模子模.

映射的唯一性由上述构造的泛性质给定. □

6.2 张量积的性质

A 函子性

引理 6.4. 张量积 $M\otimes_A N$ 对 M,N 满足函子性: 设若 $\varphi: M\to M'$, $\psi: N\to N'$ 为模同态, 则存在唯一的同态 $\varphi\otimes\psi: M\otimes_A N\to M'\otimes_A N'$ 使下图交换.

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r] \arrow[d, "\varphi\times\psi"'] & M\otimes_A N \arrow[d, "\exists!\varphi\otimes\psi"] \\ M'\times N' \arrow[r] & M'\otimes_A N' \end{tikzcd}$$

注记 25. 张量积是$\mathrm{Mod}_A\times{}_A\mathrm{Mod}$的双加法函子(bifunctor).

以上引理的条件相当于要求

$$(\varphi\otimes\psi)(x\otimes y)=\varphi(x)\otimes\psi(y).$$

这唯一确定了同态 $\varphi\otimes\psi$. 由此刻画可知同态的张量积与同态的合成兼容:

$$(\varphi\otimes\psi)\circ(\varphi'\otimes\psi')=(\varphi\circ\varphi')\otimes(\psi\circ\psi'),$$

前提是合成同态 $\varphi\circ\varphi'$ 和 $\psi\circ\psi'$ 有定义.

证明概要. 合成映射 $M\times N\xrightarrow{\phi\times\psi}M'\times N'\to M'\otimes_A N'$ 显然也是平衡积, 用定义便得到唯一之 $\varphi\otimes\psi: M\otimes_A N\to M'\otimes_A N'$ 使上图交换. □

命题 6.5. 若有映射$\varphi\colon R\to A$和$\psi\colon S\to C$, 则通过**命题 2.3**的标量限制, 可以将${}_AM_B$和${}_BN_C$视作${}_RM_B$和${}_BN_S$, 为记号简便, 我们改记作M'和N'. 此时, $M\otimes_B N$的标量限制和$M'\otimes_B N'$相同.

证明概要. 先证明下述引理:

引理 6.6. 双模M,N如上, 张量积$M'\otimes_B N'$带有唯一的 (A,C)-双模结构使得

$$a(x\otimes y)c=ax\otimes yc,\quad a\in A,\ c\in C.$$

记作$(M'\otimes_B N')^*$.

证明概要. 给定$a\in A$和$c\in C$. 根据双模定义,a在M上的左乘与c在N上的右乘, 即$a(-)$和$(-)c$分别给出M和N作为左$B-$模和右$B-$模的自同态, 即$a(-)b=a(-b)$, 这是由于M实质是$(A,B)-$双模. 于是**引理 6.4** 给出由下式刻画的群同态.

$$\begin{aligned} a(-)\otimes(-)c:\quad M\otimes_B N &\longrightarrow M\otimes_B N\\ x\otimes y &\longmapsto ax\otimes yc. \end{aligned}$$

考虑所有a,c便得到所求的双模结构. □

于是通过正常的张量积的泛性质, 取映射$f\colon M\times N\to(M'\otimes N')^*\colon(m,n)\mapsto m\otimes n$, 我们有$(A,C)-$双模同态$\bar f\colon M\otimes N\to(M'\otimes N')^*$. 于是利用限制函子得到$\bar f'\colon(M\otimes N)'\to(M'\otimes N')^{*\prime}$. 然而由于$(M'\otimes N')^{*\prime}$不过是把上述**引理 6.6**的双模结构给抹去了,所以容易验证$(M'\otimes N')^{*\prime}\simeq M'\otimes N'$. 从而考虑下述交换图.

$$\begin{tikzcd} M'\times N' \arrow[r, "g"] \arrow[d] & (M\otimes N)' \arrow[dl, shift left, "\bar{g}"'] \\ M'\otimes N' \arrow[ur, shift left, "\bar{f}'"'] & (M\times N)' \arrow[l, "f'"] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

根据$M'\otimes N'$到自身的态射的唯一性知$\bar{f}'\circ\bar{g}=\mathrm{id}$, 于是$\bar{f}'$有右逆, 即$\bar{f}'$是满同态. 根据限制函子的忠实性, 知$\bar{f}$是满同态.

而由于在$M\otimes N$的生成元上有$\bar{f}(m\otimes n)=m'\otimes n'$, 且若$m\otimes n\neq s\otimes t$, 则$\bar{f}(m\otimes n)\neq\bar{f}(s\otimes t)$. 这由于若$m'\otimes n'=s'\otimes t'$则推得有$\lambda\in B$使得$m'=\lambda s'$, $n'=\lambda^{-1}t'$, 然而由于$m'=m$等得知这是不可能的. 从而$\bar{f}$是单射.

然而在模范畴, 单射的满同态是同构, 于是$\bar{f}$是同构. □

注记 26. 引理 6.4 断言的函子性也有直截了当的推广, 得到函子

$$\begin{aligned}\otimes_A:((Q,A)-\mathsf{Mod})\times((A,S)-\mathsf{Mod})&\longrightarrow(Q,S)-\mathsf{Mod}\\(M,N)&\longmapsto M\otimes_A N\quad(\text{对象层次})\\(\varphi,\psi)&\longmapsto\varphi\otimes\psi\quad(\text{态射层次}).\end{aligned}$$

当 A 交换时, 按例 23 等同 $A-\mathsf{Mod}$ 与 $(A,A)-\mathsf{Mod}$, 可得函子

$$\otimes_A: A-\mathsf{Mod}\times A-\mathsf{Mod}\longrightarrow A-\mathsf{Mod};$$

进一步假设 $A=S$ 为域, 则一切化约到向量空间的张量积与双线性型.

定义 6.7. 若有环同态$f:A\to B$, 则$(A,C)-$模M的$B-$化($B-$标量扩充)为$B\otimes_A M$. 显然由**命题 ??**, 标量扩充是右正合函子.

例 27. V是$\mathbb{R}-$向量空间, 则V的复化定义为$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V$, 满足如下泛性质:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

B 张量积与正合列

A,B,C三者为环.

定义 6.8. 我们约定对于左模 ${}_AM$, ${}_AN$, 本节将同态集 $\mathsf{Hom}_A({}_AM,{}_AN)$ 在 M 上的作用以右乘表示:

$$\mathsf{Hom}({}_AM,{}_AN)\ni f:m\longmapsto mf\in N.$$

对于 M_A, N_A 的情形, 同态集 $\mathsf{Hom}_A(M_A,N_A)$ 在 M 上的作用以左乘表示:

$$\mathsf{Hom}(M_A,N_A)\ni f:m\longmapsto fm\in N.$$

注记 28. 写法的优势在于模同态的性质可以看作乘法结合律: 对任意 $a\in A$ 和 $m\in M$,

$$\begin{aligned}(am)f&=a(mf)\quad(\text{左模})\\f(ma)&=(fm)a\quad(\text{右模}).\end{aligned}$$

命题 6.9. 若M,N分别是$(A,B),(A,C)-$双模, 则$\mathsf{Hom}_A(M,N)$是$(B,C)-$双模.

证明概要. 书P 78提供了四个命题, 证明为All parts are routine. 我们选择上述统摄两个, 剩余交给读者.

考虑装配的模结构如下: $afc: M \to N: m \mapsto ((ma)f)c$. 于是只要证明

$$a'(afc) : m \mapsto (ma')(afc) = m \mapsto (ma'a)(fc) : a'afc$$

和另一侧等容易验证的东西即可. ◻

注记 29. 显然不可以考虑$af(x) := f(ax)$, 这由于注意到括号顺序有$(aa'f)(-) = a'f(a-) = \ldots$, 反向.

$\mathsf{Hom}(-,-)$实质上给出$(A,B)-\mathsf{Mod}^{op} \times (A,C)-\mathsf{Mod}$到$(B,C)-\mathsf{Mod}$的函子.

于是若P为$(B,C)-$双模, Q为右C模, 则$\mathsf{Hom}(P,Q)$为右B模.

下述P为$(B,C)-$双模.

命题 6.10. 张量积$-\otimes_B P$是$\mathsf{Hom}_C(P,-)$函子的左伴随, 即

$$\begin{tikzcd} \text{右}B-\mathsf{Mod} \arrow[r, bend left, "-\otimes_B P"] & \text{右}C-\mathsf{Mod} \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_C(P,-)"] \end{tikzcd}$$

证明概要.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hom}_C(P, M_B \otimes_B {}_BP_C) \arrow[dr, dashed, "\bar{f}_*"] & \\ M_B \arrow[u, "\eta_M"] \arrow[r, "f"] & \mathsf{Hom}_C(P,S) \end{tikzcd}$$

考虑单位$\eta_M: M \to \mathsf{Hom}_C(P, M\otimes P): m \mapsto (p \mapsto m \otimes p)$, 下证上述交换图被满足: 考虑$\bar{f}: M \otimes P \to S: m \otimes p \mapsto [f(m)](p)$, 这是良定义的, 鉴于$f$实质是一个双线性映射, 并且由于张量积的泛性质, 我们同时获得了唯一性.

同样, $\varepsilon_M: \mathsf{Hom}_C(P,M) \otimes P \to M: f \otimes p \mapsto f(p)$, 容易验证泛性质.

并且, η和ε显然满足**等式 2**, 从而张量积$-\otimes_B P$是$\mathsf{Hom}_C(P,-)$函子的左伴随. ◻

推论 6.11. 张量积$\otimes_B P$保持余极限, $\mathsf{Hom}_C(P,-)$保持极限.

推论 6.12. 张量积$-\otimes P$是右正合函子.

证明概要.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] & L \arrow[r] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hom}(M,\mathsf{Hom}(P,N)) & \mathsf{Hom}(L,\mathsf{Hom}(P,N)) \arrow[l] & \mathsf{Hom}(K,\mathsf{Hom}(P,N)) \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hom}(M\otimes P,N) & \mathsf{Hom}(L\otimes P,N) \arrow[l] & \mathsf{Hom}(K\otimes P,N) \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M\otimes P \arrow[r] & L\otimes P \arrow[r] & K\otimes P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

◻

推论 6.13. 若$M \xrightarrow{f} N$为模同态, 则$M \otimes P \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}_P} N \otimes P$为模同态. 若$f$满, 则$f \otimes \mathrm{id}_P$也满.

命题 6.14. 有如下模同构:

1. $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M$.

2. $M \otimes_A (A/I) \simeq M/IM$, 其中$I$为$A$的理想.

3. $M \otimes_A A \simeq M$.

4. 若M_i是一族右A模, 则$\left(\bigoplus M_i\right) \otimes N \simeq \bigoplus (M_i \otimes N)$.

同样的定理可以对左$A-$模陈述.

证明概要. 只证明$M \otimes_A (A/I) \simeq M/IM$, 这由于有如下的正合列

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

$$\begin{tikzcd}
 & M \otimes I \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Im}"] & M \otimes A \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & M \otimes A/I \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & IM \arrow[r] & M \arrow[r] & M \otimes A/I \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

推论 6.15. $R/I \otimes R/J \simeq R/(I+J)$.

例 30. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\gcd(m,n)\mathbb{Z}$.

C 代数的张量积

下述谈到$A-$代数时, 默认A为交换环, 注意到B是$A-$代数等价于声明存在环同态$f\colon A \to Z(B)$, $Z(B)$为环的中心.

定义 6.16. 若B和C是$A-$代数, 则$B \coprod C$是下述问题的解

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "\iota_B"] \arrow[ddr, bend right, "f_B"'] & & C \arrow[dl, "\iota_C"'] \arrow[ddl, bend left, "f_C"] \\
 & B \coprod C \arrow[d, dashed, "f"] & \\
 & D &
\end{tikzcd}$$

其中D是$A-$代数, 并且态射均是$A-$代数同态.

证明概要. 上述定义确实合理, 考虑$B \otimes_A C$, 装配自然的$(B \otimes_A C) \times (B \otimes_A C) \to B \otimes_A C$(书P82页)成为$A$代数, 并且满足条件. □

注记 31. 有范畴等价$A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{op} - \mathsf{Mod} \simeq (A,B) - \mathsf{Mod}$.

§7 图追踪

命题 7.1 (蛇形引理)**.** 有下列交换图, 且正合.

$$\begin{tikzcd}
 & \ker(f') \arrow[r, "\overline{u}'"] \arrow[d] & \ker(f) \arrow[r, "\overline{v}'"] \arrow[d] & \ker(f'') \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, "\partial"] & \\
 & M' \arrow[r, "\overline{u}"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "\overline{v}"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\underline{u}"] \arrow[d] & N \arrow[r, "\underline{v}"] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{cok}(f') \arrow[r, "\underline{u}'"] & \operatorname{cok}(f) \arrow[r, "\underline{v}'"] & \operatorname{cok}(f'') &
\end{tikzcd}$$

证明概要. 参考百科. □

命题 7.2 (短五引理)**.** 有下列交换图.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[d, "f_3"'] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3
\end{tikzcd}$$

1. 如果$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 和$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$均为短正合列, 并且$f_1$ 和f_3 均为同构, 则 f_2 也为同构.

2. 如果$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ 和$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3$均为左正合列, 并且$f_2$ 和f_3 均为同构, 则 f_1 也为同构.

3. 如果$M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 和$N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$均为右正合列, 并且$f_1$ 和f_2 均为同构, 则 f_3 也为同构.

证明概要. 参考百科. □

§8 维数理论

命题 8.1. 若X是$R-$模, X的生成集若均为无穷集, 则具有相同的势.

定义 8.2. 称环R有不变基数性质, 若$R^m \simeq R^n \iff m = n$.

命题 8.3. 若R是交换环, 则R有不变基数性质.

证明概要. 设$e_1 \dots e_n$为M的一组生成元, 则存在满同态$A^n \xrightarrow{\phi} M$. 任取A的一个极大理想m, 令$k = A/m$. 则$k^n = A^n \otimes_A k \xrightarrow{\phi\otimes \mathrm{id}} M \otimes_A k = M/mM$为$k-$线性空间的满同态, 并且$M$的任意一组基也为$M/mM$的$k-$线性空间基. 由此知$M$的任意基包含的元素个数等于$\dim_k M/mM \leq n$. □

目录

§1 加法范畴 **1**

§2 模范畴 **2**
2.1 对应定理 2
2.2 模范畴是加法范畴 3

§3 子模与商模: 正合列 **4**
3.1 短正合列 5
3.2 函子性 5

§4 伴随理论 **5**
4.1 伴随的性质 7

§5 生成模与自由模 **8**
5.1 自由模 8
5.2 生成模 9

§6 张量积 **9**
6.1 张量积的定义 10
6.2 张量积的性质 11

§7 图追踪 **14**

§8 维数理论 **15**