AUTOMATISCHES GENERIEREN SCHEMATISCHER VERKEHRSNETZKARTEN ALS PROBLEM DER GANZZAHLIGEN OPTIMIERUNG (MIP)

JULIUS TENS, DIRK SCHUMACHER

Problem

Gegeben seien ein *einfacher*, *ungerichteter* Graph $G(V, E, L)$ bestehend aus Knoten V, Kanten E und Linien L, sowie eine *geradlinig planare* Einbettung P dieses Graphen in die Ebene. Zu jedem Knoten v_n sei also ein kartesisches Koordinatenpaar $(x_n|y_n) \in P$ bekannt (in der Regel über eine geeignete Projektion aus Geokoordinaten ermittelt), wobei es keine Schnittpunkte zwischen nicht benachbarten Kanten geben darf.

Gesucht sind nun weitere *geradlinige* Einbettungen P' desselben Graphen $G(V, E, L)$ in die Ebene, die die folgenden Bedingungen erfüllen *(hard constraints)*:

Planarität: P' ist eine planare Einbettung von G in die euklidische Ebene.

Oktilinearität: Alle Kanten müssen Strecken sein, die parallel oder senkrecht zur x-Achse oder zur Identität verlaufen.

Mindestlängen: Jede Kante muss eine Länge $l_e >= l_{min}$ (in Tschebyschow-Norm) haben.

Es wird insbesondere eine Einbettung P' gesucht, die möglichst kurze Kantenlängen sowie wenige, bestenfalls stumpfwinklige „Knicke“ pro Linie hat *(soft constraints)*.

Ansatz

Wie bereits von Nöllenburg et al. gezeigt, lässt sich das Problem als Problem der ganzzahligen Optimierung *(MIP)* formulieren.

Lemmata

Bei der Formulierung des Modells wird auf die folgenden Hilfskonstrukte zurückgegriffen, mit denen die meisten Leserinnen und Leser jedoch vertraut sein sollten.

Nicht-Gleichung. $x \neq y$ kann mit Hilfe einer zusätzlichen binären Variable b linearisiert werden:

$$\begin{aligned} x - y &\leq -\varepsilon + Mb \\ x - y &\geq \varepsilon - (1-b) \cdot M \end{aligned}$$

wobei $|x-y| \gg \varepsilon > 0$, $M \gg x$ und $M \gg y$.

Countinous-Binary-Produkt. $x = A \cdot b$ mit $M \gg A \in \mathbb{Q}_+, b \in \{0,1\}$ kann folgendermaßen linearisiert werden:

$$\begin{aligned} x &\leq Mb \\ x &\leq A \\ x &\geq A - (1-b) \cdot M \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Formulierung

Es sind x_n, y_n die Koordinaten des Knoten n in der gesuchten Einbettung P', sowie l_e die Länge (in Tschebyschow-Norm) der Kante e:

$$\begin{gathered} x_n, y_n \in \mathbb{Q} \\ l_e \in \mathbb{N} \\ l_{min} \leq l_e \leq l_{max} \end{gathered}$$

Des Weiteren wird für jede Kante e einer ihrer Knoten als Startpunkt S_e (*source*) festgelegt, der zweite Knoten ist dann Zielpunkt T_e (*target*).

Die *hard constriants* lassen sich nun unter Zuhilfenahme jeweils aufgeführter weiterer Variablen wie folgt formulieren:

Oktilinearität und Mindestlängen. Für jede Kante e werden binäre Variablen a_e, b_e, c_e, d_e eingeführt, für die gilt:

$$\begin{gathered} a_e, b_e, c_e, d_e \in \{0,1\} \\ x_{T_e} - x_{S_e} = (a_e + b_e) \cdot l_e \\ a_e + b_e \leq 1 \\ y_{T_e} - y_{S_e} = (c_e + d_e) \cdot l_e \\ c_e + d_e \leq 1 \end{gathered}$$

Die binären Variablen a_e, b_e, c_e, d_e werden zudem durch drei weitere Gleichungen so eingeschränkt, dass die Orientierung einer Kante in P' nur eine der beiden der in der

Originaleinbettung P nächstliegenden oktilinearen Orientierungen sein kann.

Ein Beispiel: Die Kante mit dem Richtungsvektor $(1,2)^T$ in P kann in P' nur den Richtungsvektor $(1,1)^T$ ($a=1$, $b=0$, $c=1$, $d=0$) oder $(0,1)^T$ ($a=0$, $b=0$, $c=1$, $d=0$) haben. Daraus folgen in diesem Fall die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ c &= 1 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

Mit a, b, c, d sowie den Variablen für die Produkte aus Binary und Continuous werden pro Kante also insgesamt 4 binäre und 2 kontinuierliche Variablen hinzugefügt, sowie 15 (Un-) Gleichungen.

Planarität. Die gesuchte Einbettung P' ist planar, wenn sich nicht-benachbarte Kanten in keinem- und benachbarte Kanten in genau einem Punkt berühren bzw. schneiden.

Benachbarte Kanten. Für jedes Paar anliegender (benachbarter) Kanten $p, q \in E$ werden die folgenden Gleichungen aufgestellt:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3(a_p + b_p) + (c_p + d_p) \neq 3(a_q + b_q) + (c_q + d_q), & \text{falls } T_p = S_q \vee T_q = S_p \\ 3(a_p + b_p) + (c_p + d_p) \neq 3(b_q - a_q) + (d_q - c_q), & \text{andernfalls} \end{array} \right\}$$

Für jede Kante mit k benachbarten Kanten werden also $2k$ Ungleichungen und k binäre Variablen hinzugefügt.

Nicht-benachbarte Kanten. Um Sicherzustellen, dass zwei nicht-benachbarte Kanten p und q keine Schnitt- oder Berührpunkte haben, müssen einige Vorüberlegungen angestellt werden:

Sei G die Menge aller Geraden in der euklidischen Ebene, die *zwischen* p und q verlaufen, ohne diese zu berühren oder zu schneiden. Zudem sei O die Menge aller oktilinearen Geraden in G. Dann ist die Menge M wie folgt definiert:

$$M = \left\{ \begin{array}{ll} O, & \text{falls } O \neq \emptyset \\ G, & \text{andernfalls} \end{array} \right\}$$

Aus der Planarität der Einbettung P folgt im Übrigen $M \neq \emptyset$.

Wir definieren des Weiteren den Abstand zweier Kanten *bezüglich einer Geraden* g als euklidische Länge der kürzestmöglichen, zu g orthogonalen Strecke, die beide Kanten berührt.

Gesucht wird nun eine Gerade $m \in M$ mit größtmöglichem Abstand zwischen p und q *bezüglich* m.

Hat m die Geradengleichung $ax+by+c=0$ und ist o.B.d.A. $ax_{Sp}+by_{Sp} < ax_{Sq}+by_{Sq}$, stellen die folgenden 4 Gleichungen sicher, dass sich die nicht benachbarten Kanten p und q weder berühren noch schneiden (mit Mindestabstand d_{min}):

$$\begin{aligned}
ax_{Sp} + by_{Sp} + d_{min} &< ax_{Sq} + by_{Sq} \\
ax_{Sp} + by_{Sp} + d_{min} &< ax_{Tq} + by_{Tq} \\
ax_{Tp} + by_{Tp} + d_{min} &< ax_{Sq} + by_{Sq} \\
ax_{Tp} + by_{Tp} + d_{min} &< ax_{Tq} + by_{Tq}
\end{aligned}$$

Für jede Kante mit k nicht-benachbarten Kanten werden also $4k$ Ungleichungen, aber keine weiteren Variablen hinzugefügt.

Email address: `tensjuli@math.hu-berlin.de`