

AUTOMATISCHES GENERIEREN SCHEMATISCHER VERKEHRSNETZKARTEN ALS PROBLEM DER GANZZAHLIGEN OPTIMIERUNG (MIP)

JULIUS TENS, DIRK SCHUMACHER

PROBLEM

Gegeben seien ein *einfacher, ungerichteter* Graph $G(V, E, L)$ bestehend aus Knoten V , Kanten E und Linien L , sowie eine *geradlinig planare* Einbettung P dieses Graphen in die Ebene. Zu jedem Knoten v_n sei also ein kartesisches Koordinatenpaar $(x_n | y_n) \in P$ bekannt (in der Regel über eine geeignete Projektion aus Geokoordinaten ermittelt), wobei es keine Schnittpunkte zwischen nicht benachbarten Kanten geben darf.

Gesucht sind nun weitere *geradlinige* Einbettungen P' desselben Graphen $G(V, E, L)$ in die Ebene, die die folgenden Bedingungen erfüllen (*hard constraints*):

Planarität: P' ist eine planare Einbettung von G in die euklidische Ebene.

Oktilinearität: Alle Kanten müssen Strecken sein, die parallel oder senkrecht zur x-Achse oder zur Identität verlaufen.

Mindestlängen: Jede Kante muss eine Länge $l_e \geq l_{min}$ (in Tschebyschow-Norm) haben.

Es wird insbesondere eine Einbettung P' gesucht, die möglichst kurze Kantenlängen sowie wenige, bestenfalls stumpfwinklige „Knicke“ pro Linie hat (*soft constraints*).

ANSATZ

Wie bereits von NÖLLENBURG ET AL. gezeigt, lässt sich das Problem als Problem der ganzzahligen Optimierung (MIP) formulieren.

LEMMATA

Bei der Formulierung des Modells wird auf die folgenden Hilfskonstrukte zurückgegriffen, mit denen die meisten Leserinnen und Leser jedoch vertraut sein sollten.

Nicht-Gleichung. $x \neq y$ kann mit Hilfe einer zusätzlichen binären Variable b linearisiert werden:

$$\begin{aligned} x - y &\leq -\varepsilon + Mb \\ x - y &\geq \varepsilon - (1 - b) \cdot M \end{aligned}$$

wobei $|x - y| \gg \varepsilon > 0$, $M \gg x$ und $M \gg y$.

Countinous-Binary-Produkt. $x = A \cdot b$ mit $M \gg A \in \mathbb{Q}_+$, $b \in \{0, 1\}$ kann folgendermaßen linearisiert werden:

$$\begin{aligned} x &\leq Mb \\ x &\leq A \\ x &\geq A - (1 - b) \cdot M \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

FORMULIERUNG

Es sind x_n, y_n die Koordinaten des Knoten n in der gesuchten Einbettung P' , sowie l_e die Länge (in Tschebyschow-Norm) der Kante e :

$$\begin{aligned} x_n, y_n &\in \mathbb{Q} \\ l_e &\in \mathbb{N} \\ l_{min} &\leq l_e \leq l_{max} \end{aligned}$$

Des Weiteren wird für jede Kante e einer ihrer Knoten als Startpunkt S_e (*source*) festgelegt, der zweite Knoten ist dann Zielpunkt T_e (*target*).

Die *hard constraints* lassen sich nun unter Zuhilfenahme jeweils aufgeführter weiterer Variablen wie folgt formulieren:

Oktilinearität und Mindestlängen. Für jede Kante e werden binäre Variablen a_e, b_e, c_e, d_e eingeführt, für die gilt:

$$\begin{aligned} a_e, b_e, c_e, d_e &\in \{0, 1\} \\ x_{T_e} - x_{S_e} &= (a_e + b_e) \cdot l_e \\ a_e + b_e &\leq 1 \\ y_{T_e} - y_{S_e} &= (c_e + d_e) \cdot l_e \\ c_e + d_e &\leq 1 \end{aligned}$$

Die binären Variablen a_e, b_e, c_e, d_e werden zudem durch drei weitere Gleichungen so eingeschränkt, dass die Orientierung einer Kante in P' nur eine der beiden der in der

Originaleinbettung P nächstliegenden oktilinearen Orientierungen sein kann.

Ein Beispiel: Die Kante mit dem Richtungsvektor $(1, 2)^T$ in P kann in P' nur den Richtungsvektor $(1, 1)^T$ ($a = 1, b = 0, c = 1, d = 0$) oder $(0, 1)^T$ ($a = 0, b = 0, c = 1, d = 0$) haben. Daraus folgen in diesem Fall die folgenden Gleichungen:

$$b = 0$$

$$c = 1$$

$$d = 0$$

Mit a, b, c, d sowie den Variablen für die Produkte aus Binary und Continuous werden pro Kante also insgesamt 4 binäre und 2 kontinuierliche Variablen hinzugefügt, sowie 15 (Un-) Gleichungen.

Planarität. Die gesuchte Einbettung P' ist planar, wenn sich nicht-benachbarte Kanten in keinem- und benachbarte Kanten in genau einem Punkt berühren bzw. schneiden.

Benachbarte Kanten. Für jedes Paar anliegender (benachbarter) Kanten $p, q \in E$ werden die folgenden Gleichungen aufgestellt:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3(a_p + b_p) + (c_p + d_p) \neq 3(a_q + b_q) + (c_q + d_q), \text{ falls } T_p = S_q \vee T_q = S_p \\ 3(a_p + b_p) + (c_p + d_p) \neq 3(b_q - a_q) + (d_q - c_q), \text{ andernfalls} \end{array} \right\}$$

Für jede Kante mit k benachbarten Kanten werden also $2k$ Ungleichungen und k binäre Variablen hinzugefügt.

Nicht-benachbarte Kanten. Um sicherzustellen, dass zwei nicht-benachbarte Kanten p und q keine Schnitt- oder Berührungspunkte haben, müssen einige Vorüberlegungen angestellt werden:

Sei G die Menge aller Geraden in der euklidischen Ebene, die *zwischen* p und q verlaufen, ohne diese zu berühren oder zu schneiden. Zudem sei O die Menge aller oktilinearen Geraden in G . Dann ist die Menge M wie folgt definiert:

$$M = \left\{ \begin{array}{l} O, \text{ falls } O \neq \emptyset \\ G, \text{ andernfalls} \end{array} \right\}$$

Aus der Planarität der Einbettung P folgt im Übrigen $M \neq \emptyset$.

Wir definieren des Weiteren den Abstand zweier Kanten *bezüglich einer Geraden* g als euklidische Länge der kürzestmöglichen, zu g orthogonalen Strecke, die beide Kanten berührt.

Gesucht wird nun eine Gerade $m \in M$ mit größtmöglichem Abstand zwischen p und q *bezüglich* m .

Hat m die Geradengleichung $ax + by + c = 0$ und ist o.B.d.A. $ax_{S_p} + by_{S_p} < ax_{S_q} + by_{S_q}$, stellen die folgenden 4 Gleichungen sicher, dass sich die nicht benachbarten Kanten p und q weder berühren noch schneiden (mit Mindestabstand d_{min}):

$$\begin{aligned} ax_{S_p} + by_{S_p} + d_{min} &< ax_{S_q} + by_{S_q} \\ ax_{S_p} + by_{S_p} + d_{min} &< ax_{T_q} + by_{T_q} \\ ax_{T_p} + by_{T_p} + d_{min} &< ax_{S_q} + by_{S_q} \\ ax_{T_p} + by_{T_p} + d_{min} &< ax_{T_q} + by_{T_q} \end{aligned}$$

Für jede Kante mit k nicht-benachbarten Kanten werden also $4k$ Ungleichungen, aber keine weiteren Variablen hinzugefügt.

Email address: tensjuli@math.hu-berlin.de