

2022~2023学年第一学期高等数学A（上）期末考试卷

1. 单选题 (3.0分)

设 $f(x)$ 是有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续非负函数，在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值分别为 M, m ，并且 $M > m$ ，那么 ()

- ☐ A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}}$ 不存在
- ☒ B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b (4f(x))^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = 4m$
- ☐ C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b (4f(x))^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = 4M$
- ☐ D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b (4f(x))^n dx \right)^{\frac{1}{n}}$ 存在并且 $m < \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b (4f(x))^n dx \right)^{\frac{1}{n}} < M$

2. 单选题 (3.0分)

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln(1+x))^{\frac{x}{1-\cos x}} = ()$

- ☐ A. 1
- ☐ B. e^2
- ☐ C. 0
- ☐ D. e

3. 单选题 (3.0分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\sqrt{1+t}, \\ y=\sqrt{1-t} \end{cases}$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ () .

☐ A. $-\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$

☐ B. $\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$

☐ C. $-\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$

☐ D. $\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$

4. 单选题 (3.0分)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x^2} \ln(1+t) dt}{x^4} =$ () .

☐ A. 0

☐ B. 2

☐ C. 1

☐ D. $\frac{1}{2}$

5. 单选题 (3.0分)

设函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} =$ () .

- ☐ A. $\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$
- ☐ B. $-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$
- ☐ C. $-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- ☐ D. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

6. 单选题 (3.0分)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{\tan x}} =$ () .

- ☐ A. e
- ☐ B. 1
- ☐ C. $e^{\frac{1}{2}}$
- ☐ D. \sqrt{e}

7. 单选题 (3.0分)

计算: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x}$ () .

- ☐ A. -1
- ☐ B. -2
- ☐ C. 2
- ☐ D. 1

8. 单选题 (3.0分)

微分方程 $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$ 满足 $y(5) = 0$ 的解为 () .

- ☐ A. $x^2 - y^2 = 5x$
- ☐ B. $x^2 + 2y^2 = 5x$
- ☐ C. $x^2 + y^2 = 5x$
- ☐ D. $x^2 - 2y^2 = 5x$

9. 单选题 (3.0分)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x}{\cos \frac{x}{2} - 1} =$ () .

- ☐ A. 8
- ☐ B. -8
- ☐ C. -4
- ☐ D. 4

10. 单选题 (3.0分)

若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = \int_0^{4x} f(\frac{t}{4}) dt + 2$, 则 $f(x) =$ () .

- ☐ A. $e^{4x} + 2$
- ☐ B. $e^x + 2$
- ☐ C. $2e^x$
- ☐ D. $2e^{4x}$

11. 单选题 (3.0分)

设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{x \cos x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 等于 () .

- ☐ A.2
- ☐ B.5
- ☐ C.3
- ☐ D.4

12. 单选题 (3.0分)

不定积分 $\int \frac{1}{(x^2-9)(x^2+1)} dx =$ () .

- ☐ A. $\frac{1}{20} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| - \frac{1}{30} \arctan x + C$
- ☐ B. $\frac{1}{10} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| - \frac{1}{10} \arctan x + C$
- ☐ C. $\frac{1}{20} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| - \frac{1}{5} \arctan x + C$
- ☐ D. $\frac{1}{60} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| - \frac{1}{10} \arctan x + C$


13. 单选题 (3.0分)

关于函数 $f(x) = \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$, 下列说法正确的是 () .

- ☐ A. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 先减后增
- ☐ B. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减
- ☐ C. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 先增后减
- ☐ D. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增

14. 单选题 (3.0分)

函数 $f(x) = x + \sqrt{1-x}$ 在 () 处取得极大值.

- ☒ A. $x = \frac{3}{4}$ 
- ☐ B. $x = 1$
- ☐ C. $x = 2$
- ☐ D. 没有极大值

15. 单选题 (3.0分)

定积分 $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx =$ () .

- ☐ A. 0
- ☐ B. $\frac{1}{2}$
- ☐ C. $\frac{1}{2}e$
- ☐ D. $-\frac{1}{2}e$

16. 单选题 (3.0分)

曲线 $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x$ 的水平渐近线有 () .

- ☐ A. $y = e^{-4}$
- ☐ B. 没有水平渐近线
- ☐ C. $y = 1$
- ☐ D. $y = e$

17. 单选题 (3.0分)

已知 $f(x)$ 连续可导, $f(4)=4$, $\int_0^4 f(x)dx=1$, 则 $\int_0^1 xf'(4x)dx = ()$.

☐ A. $\frac{15}{16}$

☐ B. $\frac{15}{4}$

☐ C. 3

☐ D. $\frac{3}{4}$

18. 单选题 (3.0分)

微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = e^x$ 满足 $y(1)=0$ 的解为 $()$.

☐ A. $y = \frac{e^x(x-1)}{x}$

☐ B. $y = e^x(x-1)$

☐ C. $y = e^x - e$

☐ D. $y = \frac{e^{x-1} - 1}{x}$

19. 单选题 (3.0分)

设有一正椭圆柱体，其底面长、短轴分别为3，2，用过此柱体底面的短轴且与底面成 α 角 ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) 得平面截此柱体，得一楔形体（如下图），求此楔形体的体积为（ ）



39:09

- ☐ A. $\frac{1}{4} \tan \alpha$
- ☐ B. $\tan \alpha$
- ☐ C. $\frac{3}{2} \tan \alpha$
- ☐ D. $\frac{1}{2} \tan \alpha$

20. 单选题 (3.0分)

微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解为（ ）。

- ☐ A. $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$
- ☐ B. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$
- ☐ C. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$
- ☐ D. $y = C_1 + C_2 e^{-2x}$

21. 单选题 (3.0分)

已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta, 1+\delta)$ 内具有二阶导数， $f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1) = f'(1) = 1$ ，则（ ）。

- ☐ A. 在 $(1-\delta, 1)$ 内 $f(x) < x$ ，在 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) > x$
- ☐ B. 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) > x$
- ☐ C. 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) < x$
- ☐ D. 在 $(1-\delta, 1)$ 内 $f(x) > x$ ，在 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) < x$

22. 单选题 (3.0分)

计算反常积分 $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln 4x \, dx = (\quad)$.

- ☐ A. $-\frac{1}{4}$
- ☐ B. 1
- ☐ C. $\frac{1}{4}$
- ☐ D. ∞

23. 单选题 (3.0分)

函数 $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t) e^{-t} \, dt, x \in [0, +\infty)$ 的最大值为().

- ☐ A. $e^2 + 1$
- ☐ B. $e + 1$
- ☐ C. $e^2 + 1$
- ☐ D. $e^1 + 1$

24. 单选题 (3.0分)

不定积分 $\int x^{-6} \sin(\ln x) \, dx$ 等于 ().

- ☐ A. $\frac{5 \cos(\ln x)}{26x^5} + \frac{\sin(\ln x)}{26x^5} + C$
- ☐ B. $-\frac{\cos(\ln x)}{26x^5} - \frac{5 \sin(\ln x)}{26x^5} + C$
- ☐ C. $\frac{\cos(\ln x)}{26x^5} + \frac{5 \sin(\ln x)}{26x^5} + C$
- ☐ D. $-\frac{5 \cos(\ln x)}{26x^5} - \frac{\sin(\ln x)}{26x^5} + C$

25. 单选题 (3.0分)

求曲线 $y = 2x + \ln x$ 与 $x = 2, y = 2$ 围成图形的面积 () .

- ☐ A. $\ln 2$
- ☐ B. $\ln 2 - \frac{1}{2}$
- ☐ C. $\ln 4$
- ☐ D. $\ln 4 + 2$

26. 单选题 (3.0分)

函数 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ 的上凹区间有 () .

- ☐ A. $(1, +\infty)$
- ☐ B. $(-\infty, 1)$
- ☐ C. $(-\infty, +\infty)$
- ☐ D. $(-1, 1)$

27. 单选题 (3.0分)

设 $y = f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上定义的上凸函数, $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$ 是一个有界闭区间, 下面说法正确的是 ()

- ☐ A. $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可能有上界无下界
- ☐ B. $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界
- ☐ C. $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可能既没有有界也没有下界
- ☐ D. $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可能有下界无上界

28. 单选题 (3.0分)

微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 有三个特解 $\ln x, e^x, x^2$, 则该方程的通解为 () .

- ☐ A. $y = C_1 e^x + C_2 \ln x + \frac{e^x - x^2}{2}$
- ☐ B. $y = C_1(e^x - x^2) + C_2(\ln x - x^2) + \frac{x^2 - \ln x}{2}$
- ☐ C. $y = C_1(e^x - x^2) + C_2(\ln x - x^2) + \frac{3 \ln x - e^x}{2}$
- ☐ D. $y = C_1(e^x - \ln x) + C_2(e^x - 2x^2) + x^2$

29. 单选题 (3.0分)

关于函数 $f(x) = x^{x^5} - 5^{x^x}$, 下列说法错误的是 () .

- ☐ A. $f(x)$ 递增
- ☐ B. $f'(x)$ 的定义域为 $x > 0$
- ☐ C. $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$
- ☐ D. $f'(x)$ 在 $(4, 5)$ 至少有一个零点

30. 单选题 (3.0分)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi \sqrt{4n^2 - 2n} =$ () .

- ☐ A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ☐ B. -1
- ☐ C. 1
- ☐ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

求微分方程 $y'' - y = x + xe^x$ 满足条件 $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = -1$ 的特解. <