定理8（Cauchy收敛原理）

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in N_+$ 使得对 $\forall p \in N_+$ 当 $n > N$ 时,恒有

$$\left| s_{n+p} - s_n \right| = \left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| < \varepsilon$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散的充分必要条件是 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 使得对 $\forall N \in N_+$, $\exists p_0 \in N_+$ 及 $n_0 > N$, 有 $\left| s_{n_0+p_0} - s_{n_0} \right| = \left| u_{n_0+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n_0+p_0} \right| \geq \varepsilon_0$

例 8 利用 Cauchy 收敛准则证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$对一切实数$\alpha$是收敛的

证明： $\forall\varepsilon>0$， 要使对$\forall p\in N_+$，

$$\left|s_{n+p}-s_n\right|=\left|\frac{\sin(n+1)\alpha}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)\alpha}{(n+p)^2}\right|$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

只要$n>\frac{1}{\varepsilon}$， 取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$， 当$n>N$时,对一切正整数$p$,

$\left|s_{n+p}-s_n\right|<\varepsilon$.

根据 Cauchy 收敛准则， 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$对一切实数$\alpha$是收敛的

例9利用Cauchy收敛准则证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的.

证明： 因为对$\forall n\in N_+$，$\left|s_{2n}-s_n\right|=\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right|>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$

取$0<\varepsilon_0\leq\frac{1}{2}$，对$\forall N\in N_+$，取$n_0>N$及$p_0=n_0$，

$$\left|s_{n_0+p_0}-s_{n_0}\right|=\left|u_{n_0+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n_0}\right|=\left|\frac{1}{n_0+1}+\frac{1}{n_0+2}+\cdots+\frac{1}{2n_0}\right|>\frac{1}{2}\geq\varepsilon_0,$$

利用 Cauchy 收敛准则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

绝对收敛与条件收敛的定义

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛;

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, 则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛。

例如 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 绝对收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 条件收敛

定理9 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛.

证明：设 $v_n=\dfrac{|u_n|+u_n}{2}$， 则$0\le v_n=\dfrac{|u_n|+u_n}{2}\le|u_n|$ ；因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，根据比较收敛法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛；

又因为$u_n=2v_n-|u_n|$，根据收敛级数的性质可得$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

注意:如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，我们不能断定级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散!

但是, 如果我们用比值法或根值法判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则我们可以断定级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必定发散.

例10 判别级数的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^2}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}\quad(p>0)$

解：

（1） 令 $u_n=\dfrac{\sin na}{n^2}$， $0\le|u_n|=\dfrac{|\sin na|}{n^2}\le\dfrac{1}{n^2}$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，根据比较审敛法，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin na}{n^2}$ 绝对收敛；

（2） 令 $u_n=(-1)^n\dfrac{1}{2^n}(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{n})^n=\dfrac{e}{2}>1$，可推得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\ne 0$，

于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^n}(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}$ 发散；

（3）这是一个交错级数，$\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$单调减少趋于 0，根据莱布尼兹定理，可知级数收敛；但其绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$发散

（这是因为当$n\to\infty$时，$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$）；

（4）令 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}$， $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}-\dfrac{1}{n^p\left[n^p+(-1)^{n-1}\right]}$；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 为交错级数，当 $0<p\le 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 条件收敛，

当 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 绝对收敛；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p\left[n^p+(-1)^{n-1}\right]}$ 为正项级数，且当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n^p\left[n^p+(-1)^{n-1}\right]}\sim\dfrac{1}{n^{2p}}$，根据极限形式的比较法知，当 $p\le\dfrac{1}{2}$ 时，级数发散，当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p\left[n^p+(-1)^{n-1}\right]}$ 收敛（绝对收敛）；根据收敛级数的性质可得

当 $0<p\le\dfrac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}$ 发散；当 $\dfrac{1}{2}<p\le 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}$ 条件收敛；

当 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}$ 绝对收敛.

绝对收敛与条件收敛的差异

引入级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ ，其中通项

$$u_n^+ = \frac{|u_n| + u_n}{2} = \begin{cases} u_n, u_n \geq 0 \\ 0, u_n < 0 \end{cases} \qquad u_n^- = \frac{|u_n| - u_n}{2} = \begin{cases} -u_n, u_n \leq 0 \\ 0, u_n > 0 \end{cases}$$

则 $u_n = u_n^+ - u_n^- \quad |u_n| = u_n^+ + u_n^-$

定理10 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 均收敛；若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 均发散.

证明： 因为 $u_n^+ = \dfrac{|u_n| + u_n}{2}$， $u_n^- = \dfrac{|u_n| - u_n}{2}$，

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛， 即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 都收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 均收敛；

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛， 而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散， 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 均发散.

定理11 绝对收敛级数经改变项的次序后所得的新级数(称为级数的一个**重排**)仍绝对收敛, 并且级数的和不变(即绝对收敛级数满足加法交换律).

例如，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$绝对收敛，级数

$1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$是由改变级数项的次序得到的新级数，

则此级数仍绝对收敛，其和与原级数的和相同.

注意: 如果级数条件收敛, 则改变项次序后所得的级数可能收敛也可能发散, 且级数的和可能改变, 即条件收敛的级数不满足加法交换律.

***定理 12** （**Riemann**）如果级数条件收敛，则对于无论怎样的数 A（或 ∞），总可以改变级数项的次序使它的和等于 A（也可以改变条件收敛级数项的次序使它发散）

例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 条件收敛，和为 $s=\ln 2$，则

$$s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,\quad \frac{s}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots,$$

相加得 $\frac{3s}{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots.$

定理13 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均绝对收敛，它们的和分别为A和B，那么它们项相乘得到的所有可能的乘积项$u_i v_j$按任何次序排列所得的级数$\sum_{n=1}^{\infty}w_n$也绝对收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}w_n$的和为$A\cdot B$.

比如,取 $w_n=\sum_{i=1}^{n}u_i v_{n-i+1}=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}w_n=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_n\right)$$

例如，当$|x|<1$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 时绝对收敛，其和为$\dfrac{1}{1-x}$ ；

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

由定理可知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 当$|x|<1$时绝对收敛，和为$\dfrac{1}{(1-x)^2}$.