曲面积分

对面积的曲面积分(第一类曲面积分)

一、对面积的曲面积分的概念与性质

物质曲面的质量问题：设 Σ 为面密度非均匀的物质曲面，其面密度为 $\rho(x, y, z)$，求其质量.

解：（1） 把曲面分成 n 个小块: $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$

(ΔS_i 也代表曲面的面积);

（2） 第 i 个小块的质量近似值 $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

((ξ_i, η_i, ζ_i)是ΔS_i 上任意一点)；

（3） 求质量的近似值: $\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$；

（4） 取极限求精确值: $M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

(λ 为各小块曲面直径的最大值).

定义　设曲面 Σ 是光滑的，函数 $f(x,y,z)$在 Σ 上有界. 把 Σ 任意分成 n 小块: $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$ (ΔS_i 也代表曲面的面积)，在 ΔS_i 上任取一点(ξ_i，η_i，ζ_i)，如果当各小块曲面的直径的最大值$\lambda\to 0$ 时，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$ 总存在，则称此极限为函数$f(x, y, z)$在曲面Σ上对面积的曲面积分或第一类曲面积分，记作$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$，即

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i .$$

其中 $f(x, y, z)$叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

对面积的曲面积分的存在性： 当$f(x,y,z)$在光滑曲面Σ上连续时对面积的曲面积分是存在的．今后总假定$f(x, y, z)$在Σ上连续.

根据定义,面密度为连续函数$\rho(x, y, z)$的光滑曲面Σ的质量M可表示为$\rho(x, y, z)$在Σ上对面积的曲面积分:

$$M=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS$$

如果 Σ 是分片光滑的我们规定函数在 Σ 上对面积的曲面积分等于函数在光滑的各片曲面上对面积的曲面积分之和.

例如:设 Σ 可分成两片光滑曲面 Σ_1 及 Σ_2(记作 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$)就规定

$$\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS+\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$$

对面积的曲面积分的性质:

(1) $\iint\limits_{\Sigma} dS = A$，其中 A 为曲面Σ的面积;

(2)设 c_1、c_2 为常数，则

$$\iint\limits_{\Sigma}[c_1 f(x,y,z)+c_2 g(x,y,z)]dS=c_1\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS+c_2\iint\limits_{\Sigma} g(x,y,z)dS;$$

(3)若曲面Σ可分成两片光滑曲面 Σ_1 及 Σ_2，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS+\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS;$$

(4)设在曲面Σ上 $f(x, y, z)\le g(x, y, z)$，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS\le\iint\limits_{\Sigma} g(x,y,z)dS;$$

(5) 若曲面Σ关于 xOy 面对称，$f(x,y,z)$关于变量 z 为奇函数，

则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=0$.

二、对面积的曲面积分的计算

化曲面积分为二重积分:

设曲面 Σ 由方程 $z=z(x, y)$给出, Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}, 函数 $z=z(x,y)$在 D_{xy} 上具有连续偏导数, 被积函数 $f(x,y,z)$在 Σ 上连续, 则曲面的面积元素为 $dS=\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$,

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy.$$

如果积分曲面 Σ 的方程为 $y=y(z,x)$, D_{zx} 为Σ在 zOx 面上的投影区域, 则函数 $f(x,y,z)$在 Σ 上对面积的曲面积分为

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{zx}} f[x,y(z,x),z]\sqrt{1+y_z^2(z,x)+y_x^2(z,x)}dzdx.$$

如果积分曲面 Σ 的方程为 $x=x(y,z)$, D_{yz} 为Σ在 yOz 面上的投影区域，则函数 $f(x, y, z)$在 Σ 上对面积的曲面积分为

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y^2(y,z)+x_z^2(y,z)}dydz.$$

例 1 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h(0<h<a)$截出的顶部.

解: Σ 的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, D_{xy}: $x^2+y^2\le a^2-h^2$.

因为 $$z_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

所以 $$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}dS=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy$$

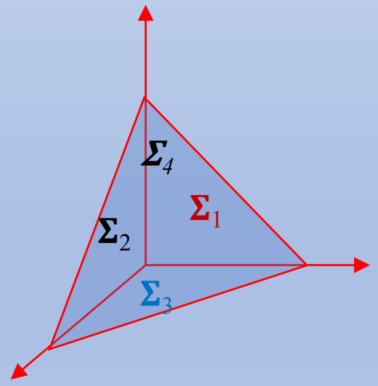
$$=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{rdr}{a^2-r^2}=2\pi a[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)]_0^{\sqrt{a^2-h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}.$$

提示: $$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

例 2 计算$\oiint\limits_{\Sigma} xyzdS$, 其中 Σ 是由平面 x=0, y=0, z=0 及 x+y+z=1 所围成的四面体的整个边界曲面.

解: 整个边界曲面 Σ 在平面 x=0、y=0、z=0 及 x+y+z=1 上的部分依次记为 Σ_1、Σ_2、Σ_3 及 Σ_4, 于是

$$\oiint\limits_{\Sigma} xyzdS=\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdS+\iint\limits_{\Sigma_2} xyzdS+\iint\limits_{\Sigma_3} xyzdS+\iint\limits_{\Sigma_4} xyzdS$$



$$=0+0+0+\iint\limits_{\Sigma_4} xyzdS=\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{3}xy(1-x-y)dxdy$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 xdx\int_0^{1-x} y(1-x-y)dy=\sqrt{3}\int_0^1 x\cdot\frac{(1-x)^3}{6}dx=\frac{\sqrt{3}}{120}.$$

例 3 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中曲面Σ是半球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2, z\ge 0$ 的表面.$\left[\pi a^3\right]$

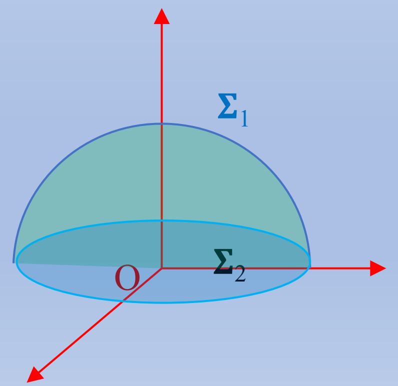
解：曲面Σ是闭曲面，关于 yOz、zOx 坐标面对称，

由 $\Sigma_1: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 及 $\Sigma_2: z=0\left(x^2+y^2\le a^2\right)$ 两部分组成.

由对称性质，

$$\iint\limits_{\Sigma} xdS=0,\ \iint\limits_{\Sigma} ydS=0,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\iint\limits_{\Sigma} zdS=\iint\limits_{\Sigma_1} zdS+\iint\limits_{\Sigma_2} zdS$$



在 Σ_1 上，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

$$\iint_{\Sigma_1} zdS=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=\pi a^3;$$

在 Σ_2 上，因为 $z=0$，所以 $\iint_{\Sigma_2} zdS=0$；于是，

$$\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS=\pi a^3+0=\pi a^3.$$

例 4.设曲面Σ为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分，点$P(x,y,z)$为Σ上任一点，Π为Σ在点$P$处的切平面，$\rho(x,y,z)$为原点(0,0,0)到平面Π的距离，求$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$.

解：平面Π的方程$\frac{x}{2}X+\frac{y}{2}Y+zZ=1$，$\rho(x,y,z)=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$z=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}\,,\quad dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}dxdy$$

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\frac{1}{4}\iint\limits_{D_{xy}}(4-x^2-y^2)dxdy=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-\rho^2)\rho d\rho=\frac{3}{2}\pi.$$