第五章

大数定律与中心极限定理

概率论

随机现象的 ↓ 统计规律性

极限定理

大数定律　　　中心极限定理

它们分别刻画不同的统计规律性.

§1、大数定律

教学时数：30分钟

教学目的:

1. 了解大数定律的实际背景;
2. 知道三个基本大数定律的数学描述.

一、大数定律

现象：

（1）事件发生的频率具有稳定性，即随着试验次数的增加，事件发生的频率逐渐稳定于某个常数。

（2）在实践中人们还认识到大量测量值的算术平均值也具有稳定性。

1. 大数定律的定义

定义1 设$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$为一随机变量序列，如果对于任意正整数k（k≥2）及任意k个随机变量 $X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots X_{i_k}$ 相互独立，则称随机变量序列$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$相互独立。

定义2 设Y_1，Y_2，…Y_n，…是一随机变量序列，a是常数，若对任意正数ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1$，则称序列$Y_1$，$Y_2$，…$Y_n$，…依概率收敛于$a$，记为

$$Y_n \xrightarrow{\text{Pr.}} a.$$

定义3 设{Xn}为一随机变量序列, E(Xn)存在，记

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[X_i - E(X_i)\right] \quad n = 1,2,\cdots$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n| < \varepsilon\} = \lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[X_i - E(X_i)\right]\right| < \varepsilon\right\} = 1,$

则称{Xn}服从（弱）**大数定律。**

三、大数定律

定理1（切比雪夫大数定律的特殊情况）

设 $X_1, X_2, \ldots$ 是相互独立的随机变量序列, 而且 $EX_i=\mu$, $D(X_i)=\sigma^2$, $i=1,2,\ldots$, 则对任意的 $\varepsilon>0$

恒有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

切比雪夫不等式:

设随机变量 X 有期望 $E(X)$ 和方差 σ^2,

则对于任给 $\varepsilon>0$,

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\} \ge 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

证：　由于 $E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$，

$$D[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n},$$

由切比雪夫不等式对于任意正数ε，有

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2}.$$

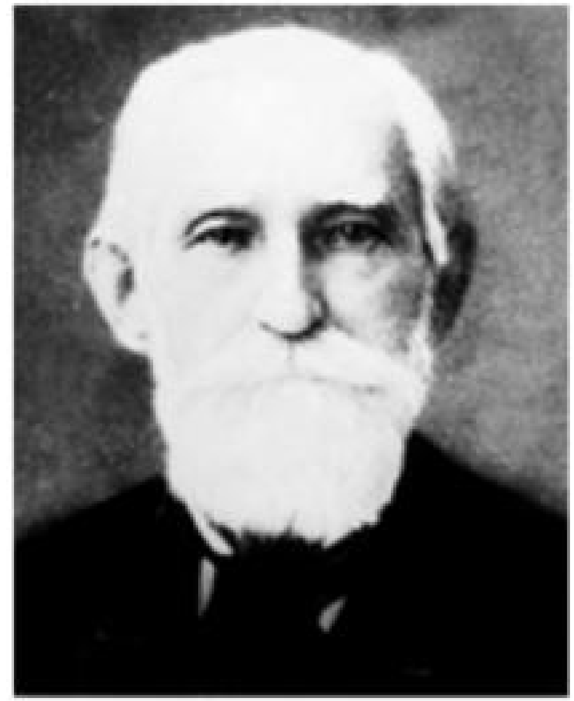
又

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}\leq 1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

这个结果1866年由俄国数学家切比雪夫证得。它是关于大数定律的一个相当普遍的结论，许多大数定律的古典结果是它的特例。此外，其证明方法（先构造一个不等式）也很有创造性，在此基础上发展起来的一系列不等式是研究各种极限定理的有力工具。



Pafnuty Lvovich Chebychef
(1821-1894)

于是有下面的定理：

定理2（贝努里大数定律）

设S_n是n重贝努里试验中事件A发生的次数，p是事件A发生的概率，则对任给的$\varepsilon > 0$，

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{S_n}{n} - p| < \varepsilon\} = 1$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0$$

历史上，**J. Bernoulli**第一个研究了大数定律，在其**1713**年出版的《猜测术》第四卷“论概率原则的政治、伦理和经济学应用”中，他建立了本定理，这是全部大数定律中的第一个。

Jacob Bernoulli
(1654-1705)

定理一要求随机变量的方差存在，但辛钦证明了在独立同分布的场合大数定律成立并不要求方差存在.

定理3（辛钦大数定律）

设随机变量序列$X_1,X_2,\ldots$独立同分布，具有有限的数学期$E(X_i)=\mu$, $i=1,2,\ldots$， 则对任给$\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu|<\varepsilon\}=1$$

Xinchin(1894-1959)