

北京邮电大学 2020-2021 第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题(计算机学院, 4 学分, A)

考试注意事项:

学生必须将答题内容做在试题答题纸上, 做在试题纸上一律无效.

一、填空题与选择题(每小题 4 分, 共 40 分)

1. 设 A, B 为两事件, 且 $P(A) = 0.7, P(B) = 0.4, P(\overline{A}B) = 0.5$, 则

$$P(B|A \cup \overline{B}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, $X \sim b(1, p), Y \sim b(2, p) (p \in (0, 1))$, 则 X 与 $X+Y$ 的相关系数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设随机变量 X 服从均值为 $\frac{1}{3}$ 的指数分布, 则 $D(e^X) = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, X_1 的分布律为 $P\{X_1 = k\} = \frac{k+1}{10}, k = 0, 1, 2, 3$, 则

$$n \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \text{ 依概率收敛于 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. 有两箱同类型的零件, 每箱都装有 8 个零件, 第一箱中有 4 个一等品, 第二箱有 6 个一等品, 现从两箱中任选一箱, 然后从该箱中不放回地取零件两次, 每次取一个, 则在第一次取到一等品条件下, 第二次取到一等品的条件概率为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

6. 设随机变量 X_1, X_2 独立同分布, 且 X_1 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

则 $Z = \min(X_1, X_2)$ 的概率密度为 $f_Z(z) = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 设 $(X, Y) \sim N(0, 1, 4, 1, -\frac{1}{2})$, 则 $X-2Y+1$ 服从正态分布

- A. $N(-1, 4)$ B. $N(-1, 8)$
C. $N(1, 10)$ D. $N(-1, 12)$

8. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本,



$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \text{ 则 } E(\bar{X}^2) =$$

- A. λ B. λ^2 C. $\lambda^2 + \frac{\lambda}{n}$ D. $\lambda^2 - \frac{\lambda}{n}$

9. 从正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取容量为 n 的样本 x_1, x_2, \dots, x_n , s^2 为样本方差, 则 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

- A. $(\frac{ns^2}{\chi_{\alpha}^2(n)}, \frac{ns^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n)})$ B. $(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)})$
C. $(\frac{ns^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{ns^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)})$ D. $(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)})$

10. 设 $X \sim \chi^2(n)$, 则由中心极限定理知, 当 n 充分大时, 下列随机变量中近似服从标准正态分布的是

- A. $\frac{X-n}{2n}$ B. $\frac{X-n}{\sqrt{2n}}$ C. $\frac{X-2n}{n}$ D. $\frac{X-2n}{\sqrt{n}}$

二(12分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{200}{x^3}, & x \geq 10, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$

(1) 求 X 的期望 $E(X)$; (2) 求 X 的分布函数; (3) 求 $Y = \ln X$ 的概率密度.

三(12分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 的分布律为 $P\{X=-1\} = \frac{1}{2}$, $P\{X=1\} = \frac{1}{2}$, $Y \sim N(0, 1)$, 令 $Z = XY$,

(1) 求 $\text{Cov}(Y, Z)$; (2) 求 Z 的概率密度;

(3) 证明: 事件 $\{Y \leq 0\}$ 与事件 $\{Z \leq 0\}$ 相互独立, 而事件 $\{|Y| \leq 1\}$ 与事件 $\{|Z| \leq 1\}$ 不独立.

四(8分) 设随机向量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6y, & 0 < x < 1, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

(1) 求 $P\{X+Y < 1\}$; (2) 求在 $Y=y$ ($0 < y < 1$) 的条件下, X 的条件概率密度.

五(8分) 一项研究比较两种不同复合材料制造的发动机轴承. 两种类型的轴承各



取 10 个进行使用寿命(以百万转为单位)的测试,由试验结果算得样本均值、样本方差如下:

$$\text{类型 1} \quad \bar{x} = 19.5 \quad s_x^2 = 9.5$$

$$\text{类型 2} \quad \bar{y} = 16.5 \quad s_y^2 = 8.5$$

假设类型 1, 类型 2 轴承的使用寿命分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

(1) 在水平 $\alpha = 0.1$ 下, 检验假设 $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ 对 $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$;

(2) 能否认为类型 1 轴承的平均寿命显著地大于类型 2 轴承的平均寿命(检验水平取 $\alpha = 0.05$).

六(12 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本.

(1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 是否是 θ 的无偏估计?

(3) 确定 a , 使得 $E(a\hat{\theta} - \theta)^2$ 最小.

七(8 分) 测量了 10 名 5~8 岁儿童的体重 x (单位: kg) 和体积 Y (单位: dm^3),

得数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 10)$, 并算得: $\sum_{i=1}^{10} x_i = 144$, $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 2136.84$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 141.2$,

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 2065.08, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 2095.42.$$

(1) 求线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$;

(2) 对回归方程作显著性检验, 即检验假设 $H_0: b = 0$ 对 $H_1: b \neq 0$. (水平取 $\alpha = 0.01$)

附: $t_{0.05}(18) = 1.734$, $F_{0.05}(9, 9) = 3.18$, $F_{0.01}(1, 8) = 11.3$, $t_{0.005}(8) = 3.355$.



北京邮电大学 2020-2021 第一学期

《概率论与数理统计》期末试题答案(计算机学院, 4 学分)

一、填空题与选择题 (每小题 4 分, 共 40 分)

1. 0.25

2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\frac{3}{4}$

4. 5

5. $\frac{3}{5}$

6. $f_z(z) = \begin{cases} \frac{4z}{(1+z^2)^3}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$

7. D

8. C

9. D.

10. B

二、(12 分)

解: (1) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{10}^{\infty} \frac{200}{x^2} dx = 20.$ 4 分

(2) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} \int_{10}^x \frac{200}{t^3} dt, & x \geq 10 \\ 0, & x < 10 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{100}{x^2}, & x \geq 10, \\ 0, & x < 10 \end{cases}$ 4 分

(3) $y = \ln x$ 的反函数为 $x = e^y$, 且 $\frac{dx}{dy} = e^y$, 所以 $Y = \ln X$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = f(e^y)e^y = \begin{cases} 200e^{-2y}, & y > \ln 10, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad \text{.....4 分}$$

三、(12 分)

解 (1) $E(Y) = 0, E(YZ) = E(XY^2) = E(X)E(Y^2) = 0$, 故

$$\text{Cov}(Y, Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z) = 0. \quad \text{.....4 分}$$



$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{1-y}, & y < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

五、(8 分)

解:(1)检验的拒绝域为

$$F \leq F_{0.95}(9,9) = \frac{1}{3.18}, \text{ 或 } F \leq F_{0.05}(9,9) = 3.18,$$

$$\text{其中检验统计量 } F = \frac{s_x^2}{s_y^2},$$

$$\text{由样本算得 } F = \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{9.5}{8.5} = 1.118, \text{ 易见 } F_{0.95}(9,9) < F = 1.118 < F_{0.05}(9,9), \text{ 样本没有}$$

落入拒绝域,所以不拒绝原假设,即认为两总体的方差无显著差异. $\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2)需检验假设

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \quad H_1: \mu_1 > \mu_2$$

检验的拒绝域为

$$t \geq t_{0.05}(18) = 1.734$$

$$\text{其中检验统计量 } t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}},$$

由样本算得

$$t = \frac{19.5 - 16.5}{3\sqrt{1/5}} = \sqrt{5},$$

易见 $t = \sqrt{5} \geq 1.734$, 从而样本落入拒绝域,所以拒绝原假设,即认为类型 1 轴承的平均寿命显著地大于类型 2 轴承的平均寿命.

$\dots\dots 4 \text{ 分}$

六、(12 分)

解:(1)似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \frac{x_1 \cdots x_n}{\theta^{2n}} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i},$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = -2n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$



$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{10} x_i y_i - \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i \cdot \sum_{i=1}^{10} y_i = 2095.42 - 14.4 \times 141.2 = 62.14,$$

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = 0.9826, \quad \hat{a} = 14.12 - 0.9826 \times 14.4 = -0.0294,$$

所以 y 关于 x 的线性回归方程为

$$\hat{y} = -0.0294 + 0.9826x. \quad \text{.....5 分}$$

$$(2) \quad S_{yy} = \sum_{i=1}^{10} y_i^2 - \frac{1}{10} \left(\sum_{i=1}^{10} y_i \right)^2 = 2065.08 - \frac{1}{10} \times 141.2^2 = 71.336,$$

$$S_R = \hat{b} S_{xy} = 0.9826 \times 62.14 = 61.0588,$$

$$S_E = S_{yy} - S_R = 71.336 - 61.0588 = 10.2772,$$

$$F = \frac{S_R}{S_E / 8} = 47.53,$$

由于 $F > F_{0.01}(1, 8) = 11.3$, 因此在显著水平 0.01 下认为回归方程是显著的.

.....3 分

附: $t_{0.05}(18) = 1.734$, $t_{0.005}(8) = 3.355$, $F_{0.05}(9, 9) = 3.18$, $F_{0.01}(1, 8) = 11.3$.

