北京邮电大学 2019-2020 学年

线性代数期末试题（A）

一. 填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 已知多项式 $p(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 & 0 \\ x^3 & x & 2 & 1 \\ -x^4 & 0 & x & 2 \\ 4 & 3 & 4 & x \end{vmatrix}$，则 $p(x)$ 中 x^7 的系数为 ______.

答案：-3

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{vmatrix}=$ ______.

答案：$2(a-1)(a-2)(a-3)$

3. 已知 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ 满足 $A^6=E$，则 $A^{11}=$ ______.

答案：$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

4. 已知 A 为 3 阶可逆矩阵，将 A 的第 3 列减去第 2 列对应元素后得到矩阵 B，则 $B^{-1}A=$ ______.

答案：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. 已知 3 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足 $A^*=A^T$（A^*,A^T 分别表示 A 的伴随矩阵与转置矩阵），若 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a>0$，则 $a=$ ______.

答案： $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 已知过原点的直线 L 与直线 L_1： $x-1=y+2=-z-4$ 相交，且与平面

$\Pi: x-y+2z=3$ 平行，则 L 的标准方程为________.

答案：$x=\frac{y}{3}=z$

7. 设 $\alpha_1=(1,-1,0)$，$\alpha_2=(4,2,a+2)$，$\alpha_3=(2,4,3)$，$\alpha_4=(1,a,1)$，若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中任意两个向量都与另外两个向量等价，则
$a=$________.

答案：$a=1$

8. 已知 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$，$|A|=0$，$|A|$ 的元素 a_{ij} 的余子式为 $M_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

若 $M_{11}\neq 0$，则方程组 $Ax=0$ 的通解为________.

答案： $x=k\left(M_{11},-M_{12},\cdots,(-1)^{n+1}M_{1n}\right)^T$，$k$ 为任意常数

9. 已知 3 阶实对称矩阵 A 与 $diag(1,-2,5)$ 相似，x 为任意 3 维单位列向量，则

x^TAx 的最大值为__________.

答案：5

10. 设 $f(x,y,z)=2x^2+y^2+kz^2+2xy-4yz$，已知方程 $f(x,y,z)=1$ 的图形是椭球面，则 k 的取值范围是________.

答案：$k>8$

二.（10 分）设 $\alpha_1=(2,2,-1)^T$，$\alpha_2=(-1,-2,1)^T$，$\alpha_3=(-1,-1,1)^T$，若矩阵 A 满足 $A\alpha_1=\alpha_2$，$A\alpha_2=\alpha_3$，$A\alpha_3=\alpha_1$，求 A.

解：已知 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1)$

即 $A\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$，

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 3\\ -3 & 3 & 2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

三,（10 分） 设 $\alpha_1=(1,1,1,2)^T$，$\alpha_2=(2,1,1,6)^T$，$\alpha_3=(1,2,a-3,-2)^T$，$\alpha_4=(1,2,5,a)^T$，讨论 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关性.

解：$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 6\\ 1 & 2 & a-3 & -2\\ 1 & 2 & 5 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & a-4 & -4\\ 0 & 1 & 4 & a-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & a-4 & -4\\ 1 & 4 & a-2\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 2\\ 0 & a-5 & -2\\ 0 & 3 & a\end{vmatrix}=-(a-2)(a-3)$，

当 $a\neq 2$ 且 $a\neq 3$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关；当 $a=2$ 或 $a=3$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

四.（10 分） 设 $\alpha_1=(1,2,1,-4)^T$，$\alpha_2=(2,-2,3,-5)^T$，$\alpha_3=(3,0,4,-9)^T$，$\alpha_4=(1,-2,2,1)^T$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组，并将其余向量用该

极大无关组线性表示.

解：对$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$作初等行变换，化为行最简形，得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&-2&0&-2\\1&3&4&2\\-4&-5&-9&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为极大无关组（8 分），$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$.

五.（12 分）已知方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_2+2x_3+2x_4=1\\x_2+(3-a)x_3+2x_4=b\\3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$有无穷多解.

（1）求a,b；（2）求该方程组的通解.

解：（1）对方程组的增广矩阵作初等行变换，得

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&1&3-a&2&b\\3&2&1&a&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&1-a&0&b-1\\0&0&0&a-1&0\end{array}\right),$$

故$a=b=1$.

（2）继续对上述行阶梯形矩阵作初等行变换，化为行最简形，得

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\end{array}\right),$$

原方程组同解于$\begin{cases}x_1-x_3-x_4=-1\\x_2+2x_3+2x_4=1\end{cases}$，取特解$\eta=(-1,1,0,0)^T$，

对应齐次方程组$\begin{cases}x_1-x_3-x_4=0\\x_2+2x_3+2x_4=0\end{cases}$的通解为

$x = x_3(1,-2,1,0)^T + x_4(1,-2,0,1)^T$， x_3, x_4 为任意实数.

所求方程组的通解为

$x = k_1(1,-2,1,0)^T + k_2(1,-2,0,1)^T + (-1,1,0,0)^T$，

k_1, k_2 为任意实数.

六.（10 分） 设 $\alpha_1 = (1,2,2,-1)$， $\alpha_2 = (1,1,-1,1)$，求 α_3, α_4，使 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为正交向量组.

解：依题意， α_3, α_4 是方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 的正交的解向量.

该方程组的一组基础解系为 $\xi_1 = (4,-3,1,0)$， $\xi_2 = (-3,2,0,1)$.

取 $\alpha_3 = \xi_1 = (4,-3,1,0)$，

$$\alpha_4 = \xi_2 - \frac{(\xi_2, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)}\xi_1$$

$$= (-3,2,0,1) - \frac{-18}{26}(4,-3,1,0) = \frac{1}{13}(-3,-1,9,13).$$

七.（12 分） 用正交变换将二次型 $f = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$ 化为标准形.

解： f 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-6)$$

A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$.

求解 $Ax = 0$，得 A 的对应 $\lambda_1 = 0$ 的单位特征向量为 $p_1 = \frac{1}{3}(2,1,2)^T$；

求解 $(A-3E)x=0$，得 A 的对应 $\lambda_2=3$ 的单位特征向量为 $p_2=\frac{1}{3}(1,2,-2)^T$；

求解 $(A-6E)x=0$，得 A 的对应 $\lambda_3=6$ 的单位特征向量为 $p_3=\frac{1}{3}(-2,2,1)^T$.

令 $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，则在正交变换 $x=Py$ 下，f 化为标准形

$f=3y_2^2+6y_3^2$.

八.（6 分） 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，$\beta_i=\sum_{j=1}^{m} b_{ji}\alpha_j$，

$i=1,2,\cdots,n$. 求证：如果 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性相关，则 $r(B)<n$，其中 $B=(b_{ij})_{m\times n}$.

证明：由已知可得 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)B$.

如果 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性相关，则存在不全为零的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得

$a_1\beta_1+a_2\beta_2+\cdots+a_n\beta_n=0$. 令 $\tilde{x}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，

即 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\tilde{x}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)B\tilde{x}=0$.

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，所以 $B\tilde{x}=0$，这说明 n 元齐次线性方程组

$Bx=0$ 有非零解 $\tilde{x}$，所以 $r(B)<n$.