第一章教学计划

教学内容：

1、几何概率；

2、概率空间（概率的公理化定义）。

教学目的及目标：

1、了解几何概率和公理化定义；

2、掌握概率的基本性质、

教学重点：

概率的性质及应用

教学难点：

对概率的公理化定义的理解。

§1.2　事件的概率

研究随机现象，不仅关心试验中会出现哪些事件，更重要的是想知道事件出现的可能性大小，也就是

事 件 的 概 率

事件A的概率(probability of A)记为P(A).

一、概率的统计定义

1. 频率的定义

在相同条件下，将实验进行了n次，在这n次实验中，事件A发生的次数n_A称为事件A的频数，比值n_A/n称为事件A发生的频率，并记为$f_n(A)$。

2. 频率的性质

(1) 非负性：$0 \le f_n(A)$；

(2) 规范性：$f_n(\Omega)=1$；

(3) 有限可加性：设A_1，A_2，..... A_m两两互不相容，则有

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$$

A的频率$f_n(A)$ 与其概率$P(A)$的区别与联系：

$P(A)$:客观，与试验无关。

$f_n(A)$:与试验有关——波动性（见下页）

$f_n(A)$）的值在一定程度上反映了$P(A)$的值。

考察$f_n(A)$的统计规律性

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从上述数据可以看出：(1)频率有随机波动性，即对于同样的n，所得的$f_n(H)$不尽相同；(2)抛硬币次数n较小时，频率$f_n(H)$随机波动的幅度较大，但随着n增大，频率$f_n(H)$呈现出稳定性，即当n逐渐增大时$f_n(H)$总是在0.5附近摆动，而逐渐稳定于0.5.

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

在大量实验中，随机事件发生的频率具有稳定性：

n越大，$f_n(A)$的波动越小；且随着n无限增大，$f_{\mathrm{n}}(A)$逐渐稳定在某个常数p的附近。

概率的统计定义：由于当实验次数n趋于无穷大时，频率$f_n(A)=n_A/n$ 会逐渐稳定于某一常数p，因此可将A的概率定义为：$P(A)=p$。

统计概率具有与频率类似的性质。

概率的统计定义的意义：

（1）应用中提供了求事件的概率的近似值的方法，可用n充分大时的频率作为概率的近似值。

（2）检验一种理论方法是否正确。

概率的统计定义的局限性：

（1）不能对任一事件都去通过大量实验来确定概率；

（2）即使做了大量实验也难以获得频率的稳定值。

（3）不严格，无法进行数学推理。

二、概率的古典定义

1．古典概型

若试验E满足

（1）有限样本空间：样本点总数有限；

（2）等可能性：各基本事件发生的可能性相同.

则称试验E为古典概型（或有限等可能概型）.

2、古典概率

设试验E是古典概型, 其样本空间Ω由n个样本点组成 , 事件A由k个样本点组成 . 则定义事件A的概率为:

$$P(A)=k/n=\frac{A\text{包含的样本点数}}{\Omega\text{中的样本点总数}}$$

称此概率为古典概率. 这种确定概率的方法称为古典方法 .

3．性质

（1）非负性：对于每一个事件A，有$P(A) \geq 0$；

（2）规范性：$P(\Omega)=1$；

（3）有限可加性：设A_1，A_2，..... A_m是两两互不相容的事件，即对于$i \neq j$, $A_i A_j=\phi$，$i, j=1,2,......m$, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

证明（略）：(1) (2) 显然成立。

(3)　设样本空间Ω含n个基本事件, A_k含有r_k(≤n)个基本事件，k=1,2,…,m,由概率的古典定义

$$P(A_k)=\frac{r_k}{n}$$

由于A_1，A_2，….. A_m两两互斥，所以

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\frac{\sum_{i=1}^{m}r_k}{n}=\sum_{i=1}^{m}\frac{r_k}{n}=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)$$

如何计算古典概率?

求古典概率的问题实际上就是计数问题 .

计算要点:

1、确定样本点并计算其总数;

2、计算事件所含样本点数。

排列组合是计算古典概率的重要工具 .

这里我们先简要复习一下计算古典概率所用到的

基本计数原理

1. 加法原理（并行）

设完成一件事有m种方式，

第一种方式有n_1种方法，

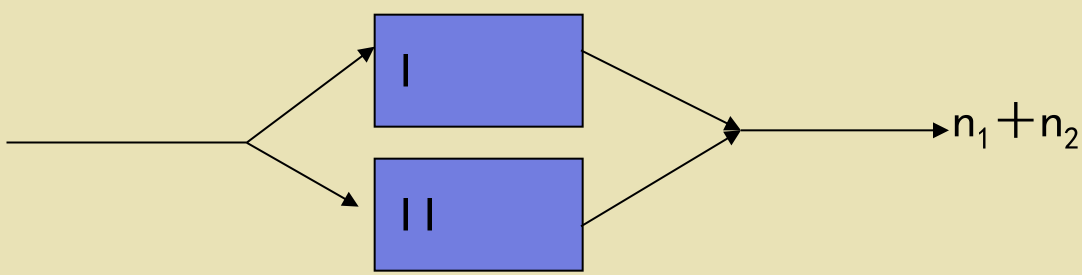
第二种方式有n_2种方法，

…；

第m种方式有n_m种方法，

无论通过哪种方法都可以完成这件事，

则完成这件事总共有$n_1 + n_2 + \ldots + n_m$种方法.



基本计数原理

2. 乘法原理（串行）

设完成一件事有m个步骤，

第一个步骤有n_1种方法，

第二个步骤有n_2种方法，

…；

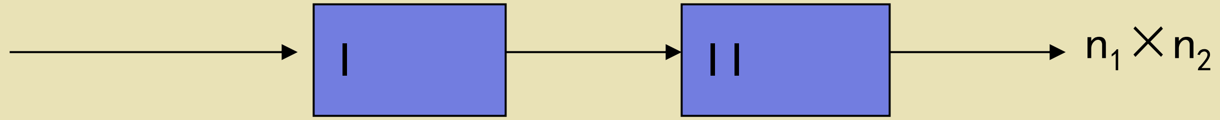
第m个步骤有n_m种方法，

必须通过每一步骤,才算完成这件事，

则完成这件事共有

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$$

种不同的方法．



几个简单的排列、组合公式

1、排列：从n个不同元素中取 k个

（$1 \le k \le n$)(无重复）的排列数为：

$$p_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$k = n$时，称为全排列。N个元素的全排列数为

$$P_n^n = p_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

从n个不同元素取 k个（允许重复）

（$1 \le k \le n$)的排列数为： $n \cdot n \cdots n = n^k$

2、组合：从n个不同元素取 k个（$1\leq k\leq n$)的不同组合总数为：

$$C_n^k=\frac{P_n^k}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

C_n^k 也记作 $\binom{n}{k}$ ，称为组合系数。

（*）3、组合系数与二项式展开的关系

组合系数$\binom{n}{k}$又常称为二项式系数，因为它出现在下面的二项式展开的公式中：

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

利用该公式，可得到许多有用的组合公式：

令 $a=b=1$,得

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

令 $a=-1,b=1$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

（*）4、n个不同元素分为k组，各组元素数目分别为$r_1,r_2,\cdots,r_k$的分法总数为

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!},\quad r_1+r_2+\cdots r_k=n$$

r_1个元素　　r_2个元素　　…　　r_k个元素

n个元素

因为 $C_n^{r_1}\cdot C_{n-r_1}^{r_2}\cdots C_{r_k}^{r_k}=\dfrac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$

4、古典概率计算举例

例1　把C、C、E、E、I、N、S七个字母分别写在七张不同样的卡片上，并且将卡片放入同一盒中，现从盒中任意一张一张地将卡片取出，并将其按取到的顺序排成一列，求排列结果恰好拼成一个英文单词：

S	*C*	*I*	*E*	*N*	*C*	*E*

的概率。

解：七个字母的排列总数为7！

拼成英文单词*SCIENCE* 的情况数为

$$2\times 2=4$$

故该结果出现的概率为：

$$p=\frac{4}{7!}=\frac{1}{1260}\approx 0.00079$$

小概率原理（小概率时间的实际不可能发生原理）

例2 设有N件产品,其中有M件次品,现从这N件中任取n件,求其中恰有k件次品的概率.

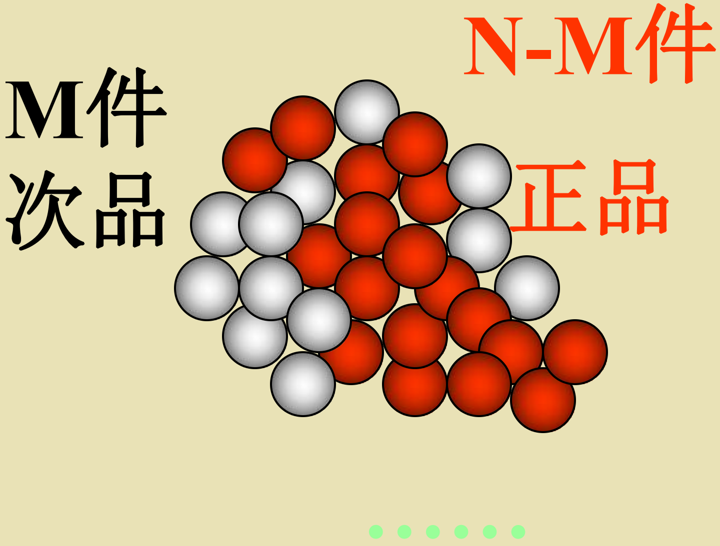
解：令B={恰有k件次品}

次品

正品

P(B)=?

$$P(B)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$



这是一种无放回抽样.

例3　n双相异的鞋共$2n$只，随机地分成n堆，每堆2只．问:“各堆都自成一双鞋” (事件A)的概率是多少？

解：把$2n$只鞋分成n堆,每堆2只的分法总数为 $\dfrac{(2n)!}{2^n}$

而出现事件A的分法数为$n!$,故

$$P(A) = \frac{n!}{(2n)!/2^n} = \frac{n!2^n}{(2n)!}$$

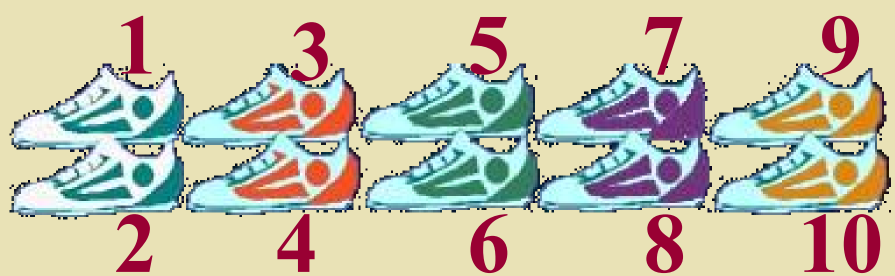
注意：

1、计数时要保持计数法则的一致性.

抽签与顺序无关

2、在用排列组合公式计算古典概率时，必须注意不要重复计数，也不要遗漏.

例如：从5双不同的鞋子中任取4只，这4只鞋子中“恰有两只配成一双”（事件A）的概率是多少？



下面的算法错在哪里？

$$P(A)=\frac{\binom{5}{1}\binom{8}{2}}{\binom{10}{4}}$$

从5双中取1双，从剩下的 8只中取2只

错在同样的“4只配成两双”重复计算了.

正确的答案是:

$$P(A)=\frac{\binom{5}{1}\binom{8}{2}-\binom{5}{2}}{\binom{10}{4}}$$

还有其它解法吗？（课下思考）

(一)取球问题

袋中共有N个球，N_1白，N_2红，采用摸后“放回”“不放回”两种方式任取出a+b个球，试求这a+b个球中恰含a个白b个红的概率。

解：

[不放回]　试验从N个球中取出a+b个球，有两种理解

（1）一次取出a+b个球；

（2）一个一个取，不放回，取a+b次；

按(1):每取一次就做了一次试验，构成一个基本事件，只观察颜色不分顺序，按组合计算样本点总数：

$$C_N^{a+b}$$

设A：a+b球中恰有a个白b个红，把A发生的过程分为串行的两步：在白球中取a个球，再在红球中取b个球按乘法原则所含样点是 $C_{N_1}^{a} \cdot C_{N_2}^{b}$

$$\therefore P(A) = \frac{C_{N_1}^{a} \cdot C_{N_2}^{b}}{C_{N}^{a+b}}$$

按（2）：一个一个取，每次记录下颜色和球的编号，不放回，取a+b个球是有顺序的，构成a+b个球的一个排列，样本点总数：

$$A_{N}^{a+b}$$

A的发生可分解为如下过程：

在这a+b个球的位置上，选a个位置放白球，剩下的放红球，样本点数：

$$C_{a+b}^{a} \cdot A_{N_1}^{a} \cdot A_{N_2}^{b}$$

$$\therefore P(A)=\frac{C_{a+b}^{a}\cdot A_{N_1}^{a}\cdot A_{N_2}^{b}}{A_N^{a+b}}=\frac{(a+b)!}{a!\cdot b!}\cdot A_{N_1}^{a}\cdot A_{N_2}^{b}\Big/A_N^{a+b}$$

$$=\frac{A_{N_1}^{a}}{a!}\cdot\frac{A_{N_2}}{b!}\Bigg/\frac{A_N^{a+b}}{(a+b)!}=C_{N_1}^{a}\cdot C_{N_2}^{b}\Big/C_N^{a+b}$$

因一个一个取与一次取出一样，因而又有如下方法：

$$P(A)=\frac{C_{N_1}^{a}\cdot C_{N_2}^{b}\cdot(a+b)!}{A_N^{a+b}}=\frac{C_{N_1}^{a}C_{N_2}^{b}}{C_N^{a+b}}$$

［放回抽样］ 一个一个取，故看为可重复的排列，样本空间的样本点数：N^{a+b}

由乘法、加法原理，A所含样本点数为:（分析同（2））

$$C_{a+b}^{a}\cdot N_1^{a}\cdot N_2^{b}$$

所以，所求概率为：

$$P(A)=\frac{C_{a+b}^{a}\cdot N_1^{a}\cdot N_2^{b}}{N^{a+b}}$$

（二）　放球问题

n个球，随机的放入N个盒（n≤ N），每盒容量不限，观察放法：

(1)某指定的n个盒中各有一个球A_1，求$P(A_1)$；

(2)恰有n个盒中各有一球A_2，求$P(A_2)$；

(3)某指定的盒子中恰有k个球A_3，求$P(A_3)$.

解：　试验：　一个一个放n个球入N个盒，每种方法构成了一种可重复的排列，于是

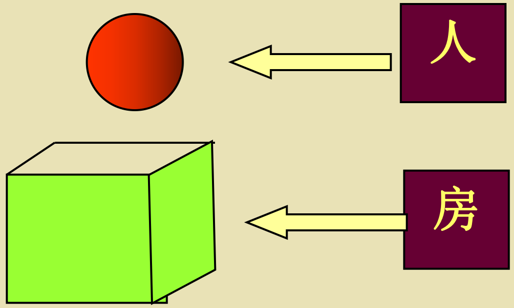
(1) $P(A_1) = n!/N^n$

(2) $P(A_2) = C_N^n \cdot n!/N^n \quad or \quad A_N^n$

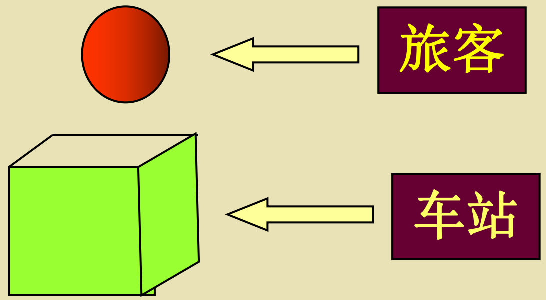
(3) $P(A_3) = C_n^k \cdot (N-1)^{n-k}/N^n$

注意：许多表面上提法不同的问题实质上属于同一类型：

有n个人，每个人都以相同的概率 $1/N$ ($N\geq n$)被分在 N 间房的每一间中，求指定的n间房中各有一人的概率.

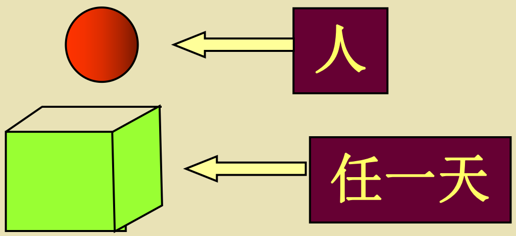


有n个旅客，乘火车途经N个车站，设每个人在每站下车的概率为$1/N$($N \geq n$)，求指定的n个站各有一人下车的概率.



例：设每人的生日在一年的任一天是等可能的，求任意**n**个人生日各不相同的概率**P(A)**.

解: 由放球模型



$$P(A)=\frac{C_{365}^{n}\cdot n!}{(365)^{n}} \quad or \quad \frac{A_{365}^{n}}{(365)^{n}}$$

所以，**n**个人中至少两个人生日相同的概率为: ***p***=1-***P(A)***,

计算如下：

n	20	23	30	40	50	64	100
p	***0.411***	***0.507***	***0.706***	***0.891***	***0.970***	***0.997***	***0.9999997***

（三）随机取数

例：1—N个数字任取k个数字，一个一个的取，取后放回，求：

（1）A：k个数字完全不同；

（2）B：不含1，2，……，N中指定的r 个数字；

（3）某指定的数字恰好出现m（≤ k）次;

（4）k个数字中最大数恰好为M。

解：试验为从1，2，……，N个数中有放回地依次取k个数字，每k个数字的一个排列构成一个基本事件，因此基本事件总数为N^k。

（1）因k个数字完全不同，实际为不可重复的排列，基本事件个数为：

$$C_n^k \cdot k!$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{C_n^k \cdot k!}{N^k}$$

(2) 同理

$$P(B) = \frac{(N-r)^k}{N^k}$$

(3) 同理

$$P(C) = \frac{C_k^m \cdot (N-1)^{k-m}}{N^k}$$

(4) 在这k个数字中，最大数不大于M的取法有M^k种。而最大数不大于M-1的取法有$(M-1)^k$种。

$$\therefore \quad P(D) = \frac{M^k - (M-1)^k}{N^k}$$

例：取球，袋中a个白，b个红球，一一取出，不放回，求事件A_k={第k次取出白球}的概率。

解：试验为将a+b个球编号一一不放回取出，全部取出构成的全排列，为一基本事件，总样本点(a+b)!。

事件A_k的过程（串行）：先从a个白球中选一个放在第k个位置C_a^1种，再在a+b-1个球作任意排列:

$$C_a^1 \cdot (a+b-1)!$$

$$\therefore \quad P(A_k) = \frac{a}{a+b}$$

解法2

如果将球认为只有颜色的区别，放入a+b个盒中，则哪a个位置放白球，构成一基本事件，总数为

$$C_{a+b}^{a}$$

设事件A为“第k个位置是白球”，则A中含基本事件数为

$$C_{a+b-1}^{a-1}$$

于是

$$P(A)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}}=\frac{a}{a+b}$$

三、几何概型

1、设样本空间Ω是平面上某个区域，其面积为$\mu(\Omega)$;

2、向区域Ω随机投掷一点。（“随机投掷”的含义）.

3、设事件A是Ω的某个区域，它的面积为$\mu(A)$。

则向区域Ω上随机投掷一点，该点落入区域A的概率为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)} \qquad (*)$$

4、假如样本空间Ω可用一线段，或空间中某个区域表示，并且向Ω上随机投掷一点的含义如前述，则事件A的概率仍可用（*）式确定，只不过 $\mu(\cdot)$ 解为长度或体积即可.

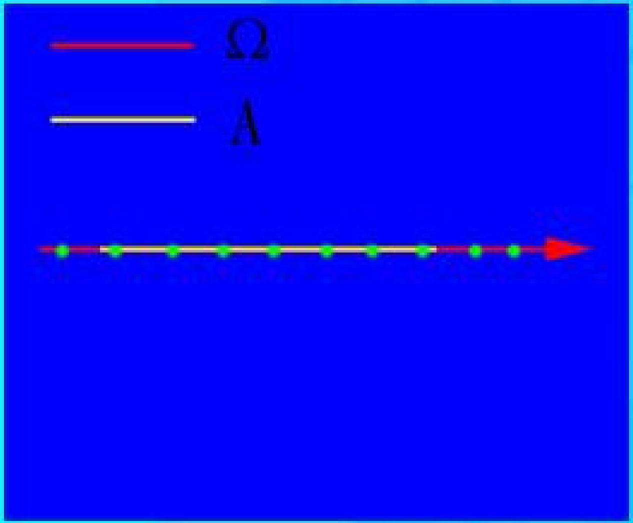
几 何 概 率

向一个有限区域Ω中任意投掷一质点， 假定随机点落入该区域的任一小区域 A 的可能性与小区域 A 的测度（可以是长度、 面积或体积等）成正比，而与 A 的位置与形状无关，称这种随机试验为几何概型。

例如

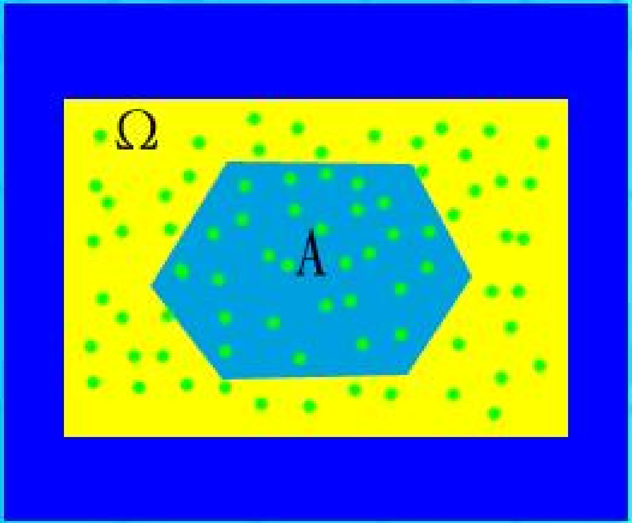
向线段上投点

P (A) =A 的长度 /Ω的长度



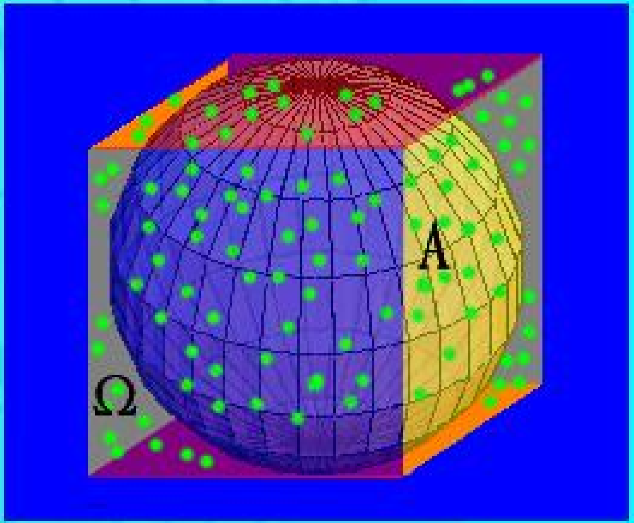
向平面上投点

P (A) =A 的面积 /Ω的面积



向一个立方体投点

P (A) =A 的体积 /Ω的体积



如果 "点落入小区域 A" 这一随机事件仍记作 A, 则

P (A) =A 的测度 /Ω的测度

这样算出的概率称为几何概率。

几何概率的性质：

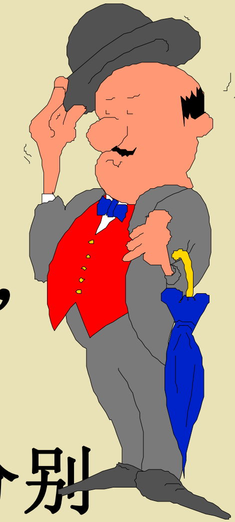
（1）对于每一个事件A，有$P(A)\geq 0$；

（2）$P(\Omega)=1$；

（3）设A_1，A_2，.. A_m ..是两两互不相容的事件，则对于$i\neq j$, $A_iA_j=\phi$，$i, j=1,2,......$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$$

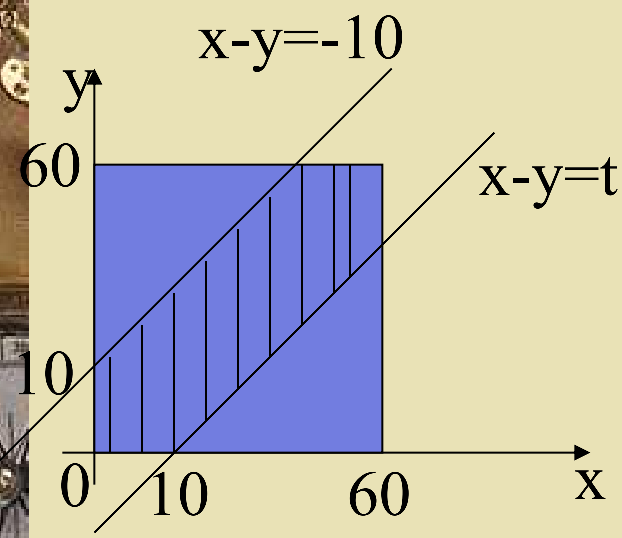
例4甲，乙两人相约中午12点到1点间在某地会面，并约定先到者需等候10分钟方可离去。设甲，乙两人在12-1点任意一个时刻到达约会地点的可能性相同。试求“甲，乙两人会面”（事件A) 的概率。



解:以12时为起点,以分为单位,记x, y分别为甲、乙到达约会地点的时刻。依题意

$$\Omega=\{(x, y) \mid 0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60\}$$

$$A=\{(x, y) \mid |x-y|\le 10,\ (x, y)\in\Omega\}$$



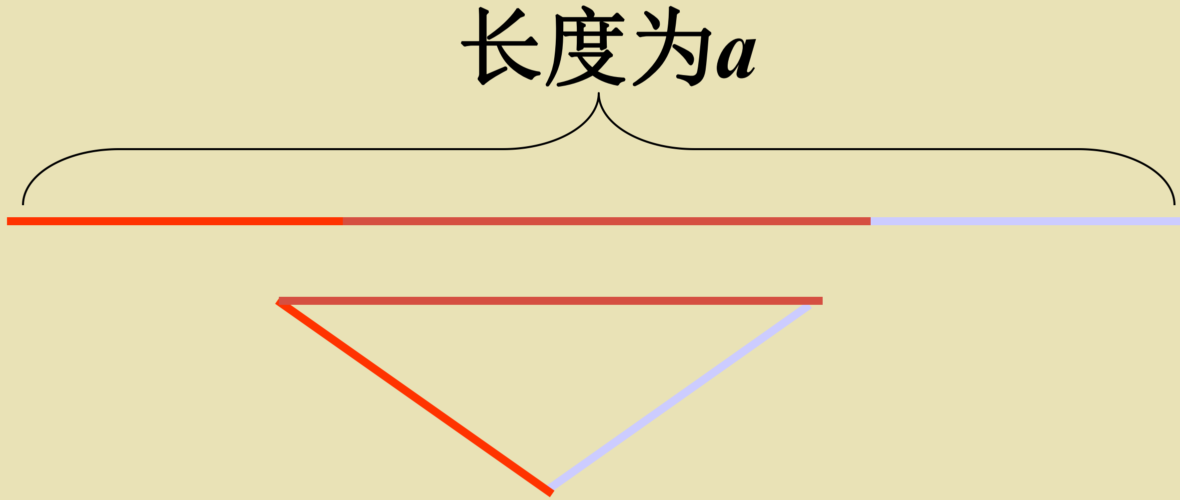
$$P(A)=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{正方形的面积}}=\frac{1100}{3600}=\frac{11}{36}$$

类似的问题如：

甲、乙两船同日欲靠同一码头，设两船各自独立地到达，并且每艘船在一昼夜间到达是等可能的．若甲船需停泊1小时，乙船需停泊2小时，而该码头只能停泊一艘船，试求其中一艘船要等待码头空出的概率.

在某一分钟的任何时刻，信号进入收音机是等可能的. 若收到两个互相独立的这种信号的时间间隔小于0.5秒，则信号将产生互相干扰. 求发生两信号互相干扰的概率.

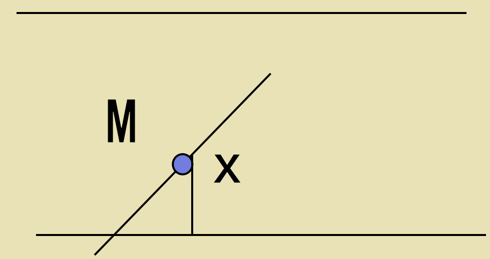
把长度为a的线段在任意两点折断成为三线段，求它们可以构成三角形的概率.



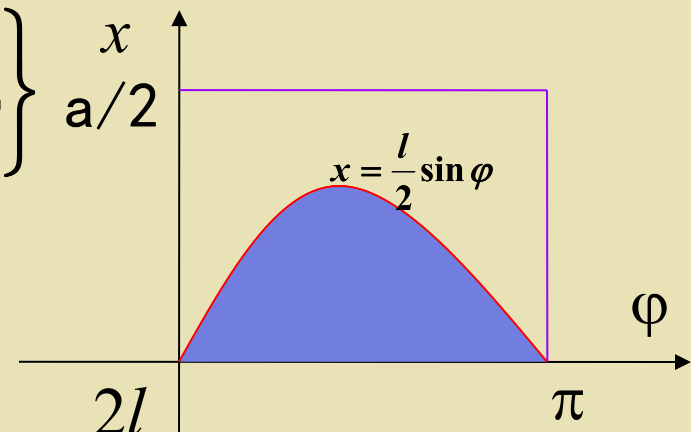
例 （蒲丰投针问题）平面上有等距离为a的一些平行线，向平面上任意投一长为l 的针($l<a$),试求针与平行线相交(事件A）的概率。

解 设M表示针的中点，x表示M与最近的平行线的距离，φ表示针与此线的夹角，则

$$\Omega=\{(x,\ \varphi)\mid 0\le x\le a/2,\ 0\le\varphi\le\pi\}$$



$$A=\left\{(x,\varphi)\mid x\le\frac{l}{2}\sin\varphi,(x,\varphi)\in\Omega\right\}$$



$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi\,d\varphi\Big/\frac{a\pi}{2}=\frac{2l}{\pi a}$$

蒲丰投针问题与蒙特卡洛方法

针长L

线距a

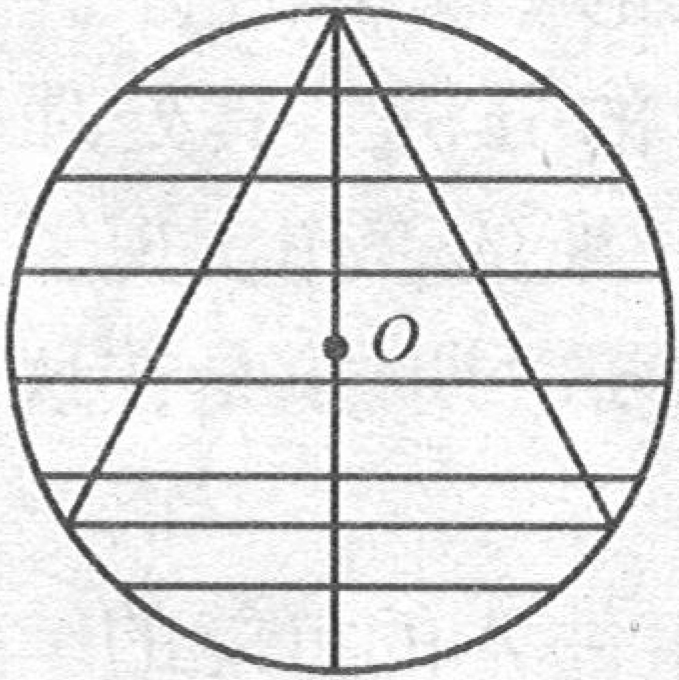
$$\pi \approx \frac{2Ln}{am}$$

当投针次数n很大时，用针与线相交的**频率**m/n近似针与线相交的**概率**p，从而求得π的近似值.

实验者	年份	针长	投掷次数	相交次数	π的实验值
Wolf	1850	0.8	5000	2532	3.1596
Smith	1855	0.6	3204	1218.5	3.1554
De Morgan, C.	1860	1.0	600	382.5	3.137
Fox	1884	0.75	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901	0.83	3408	1808	3.1415929
Reina	1925	0.5419	2520	859	3.1795

1899年贝特朗悖论：

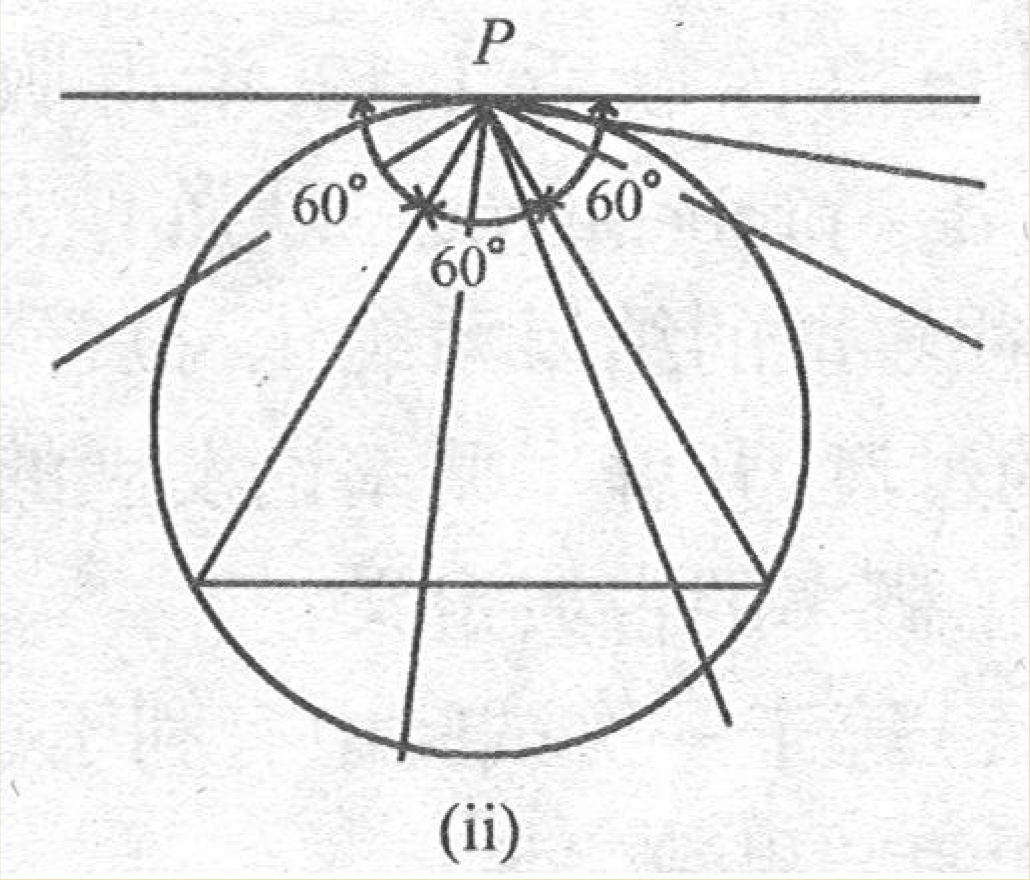
圆的弦长超过圆内接正三角形边长的概率。



(i)

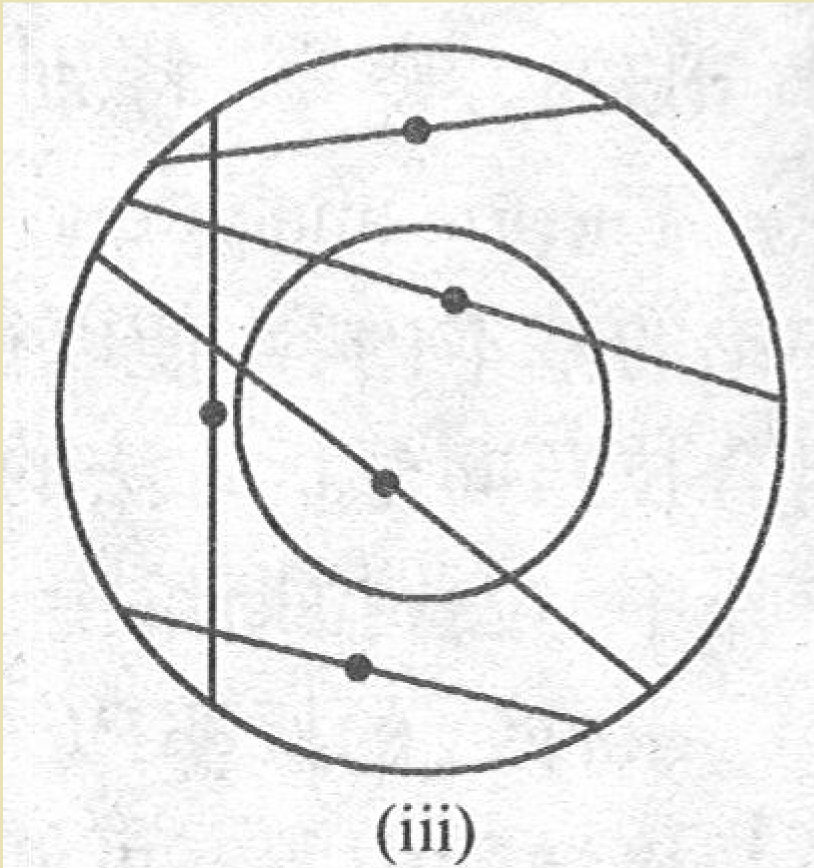
（1）考虑与某确定方向平行的弦。

则所求概率为1 / 2



（2）考虑从圆上某固定点P引出的弦。

则所求概率为1 / 3



（3）弦的中点落在圆的某个部分的概率与该部分的面积成正比

则所求概率为1 / 4

长度大于内接正三角形边长的中点皆落在半径为r / 2的同心圆内，故所求概率应为：

$$\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 / \pi r^2 = \frac{1}{4}$$

一题多解，答案不同，原因何在？

原因在于取弦时采用了不同的等可能性假定。

第一种解法假定弦的中点在圆内均匀分布；

第二种解法假定弦的端点在圆周上均匀分布；

第三种解法则假定弦的中点在直径上均匀分布。

这三种答案是针对不同的随机试验，对于各自试验而言都是正确的。

几何方法的正确运用，有赖于“等可能性”的明确规定.

考虑用一个天平称物时的误差，这个试验的结果就有无限多个，而且这些结果不具有前述几何概率定义中的“等可能性”.

那么，如何知道误差落在某个范围内的概率呢？

1933年，《概率论基础》出版。前苏联数学家柯尔莫哥洛夫给出了概率的公理化定义.

柯尔莫哥洛夫，A. H.

科尔莫哥罗夫
（1903-1987）

即通过规定概率应具备的基本性质来定义概率.

柯尔莫哥洛夫提出的公理为数很少且极为简单，但在此基础上建立起了概率论的宏伟大厦.

下面介绍用公理给出的概率定义.

§ 1.3 概率的公理化定义

1.事件域

将试验E的样本空间为Ω，　Ω的某些子集组成的集合记为F，如果F　满足：

(i)$\Omega \in F$　，

(ii)若$A \in F$　，则 $\bar{A} \in F$，

(iii)若$A_i \in F$　，则$\cup A_i \in F$　，i=1,2,3,…

则称F　为事件域。

定义：设F 为事件域，P是定义在F 上的实值集函数，如果它满足：

(1) 对于任意的$A \in F, 0 \le P(A)$ ；

(2) $P(\Omega) = 1$;

(3) 若$A_i \in F, n = 1,2,\cdots$, 且当$i \ne j$时$A_i A_j = \phi$, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称P为定义在{Ω, F }的概率，对于任意事件A，称函数值P(A) 为事件A的概率，称三元总体{Ω, F ,P} 为概率空间。

概率的性质

(1) P(ϕ)=0,

(2) $A_i, A_j, i, j = 1,2,\cdots,n, i \neq j$,两两互不相容，

则 $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$;

(3) $P(A) = 1 - P(\overline{A})$,

$\because P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$

（4）若A⊂B，则P(B-A)=P(B)-P(A)，P(B) ⩾ P(A).

因为B=A∪(B-A)。

（5）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，A、$(B-AB)$互不相容

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

同理：$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-$

$$P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

一般的:加法定理:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}A_i-\sum_{1\le i\le j\le n}P(A_iA_j)+$$

$$\sum_{1\le i\le j\le k\le n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P\left(A_1A_2\cdots A_n\right)$$

（6）概率的连续性（*）：

$$若 A_1 \subset A_2 \subset \cdots, A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m, 则: P(A) = \lim_{m\to\infty} P(A_m);$$

$$若 A_1 \supset A_2 \supset \cdots, A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m, 则: P(A) = \lim_{m\to\infty} P(A_m).$$

证：$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = A_1 \cup A_2\overline{A_1} \cup A_3\overline{A_2} \cup \cdots$ 两两互不相容。

$$而 A_1 \cup A_2\overline{A_1} \cup A_3\overline{A_2} \cup \cdots \cup A_m\overline{A_{m-1}} = A_m,$$

$$令: B_1 = A_1, B_2 = A_2\overline{A_1}, \cdots, B_m = A_m\overline{A_{m-1}},$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} P(B_m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} P(B_k)$$

$$= \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{m} B_k\right) = \lim_{m\to\infty} P(A_m).$$

利用性质计算概率

这里主要举例说明如何利用逆事件的概率公式和概率加法公式计算随机事件的概率。

1. 逆事件的概率公式　对任一事件 A，有　$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

例1 设P(A)=0.7,P(A-B)=0.3,求 $P(\overline{AB})$

解:由于P(A-B）=P(A)-P(AB)

所以 P(AB) =P(A)- P(A-B）=0.4

因此 $P(\overline{AB})$ **=1- P(AB）=0.6**

例2 将一颗骰子抛掷4次，问至少出一次“6”点的概率是多少？

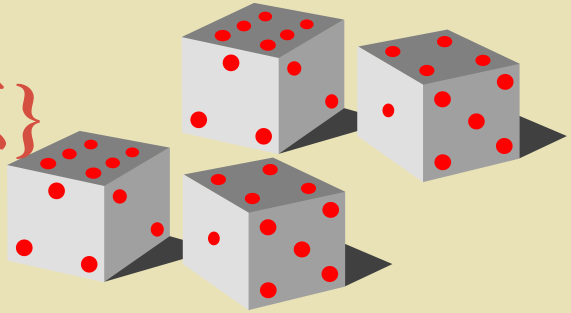
令 事件A={至少出一次“6”点}

A发生 $\Longleftrightarrow$ {出1次“6”点}$\cup${出2次“6”点}

{出3次“6”点}$\cup${出4次“6”点}

直接计算A的概率较麻烦，我们先来计算A的对立事件

$\overline{A}$={4次抛掷中都未出“6”点}



的概率.

由于将一颗骰子抛掷4次,共有

$6\times6\times6\times6$ =1296种等可能结果,

而导致事件 $\overline{A}$={4次抛掷中都未出“6”点}的结果数有$5\times5\times5\times5$=625种

因此

$$P(\overline{A})=\frac{625}{1296}=0.482$$

于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=0.518$$

例3　有r个人，设每个人的生日等可能地取365天中的任何一天，试求事件“至少有两人同生日”的概率.

解：令　A={至少有两人同生日}

则　$\overline{A}$={ r 个人的生日各不相同}

为求$P(A)$，先求$P(\overline{A})$

$$P(\overline{A})=\frac{P_{365}^{r}}{(365)^{r}}$$

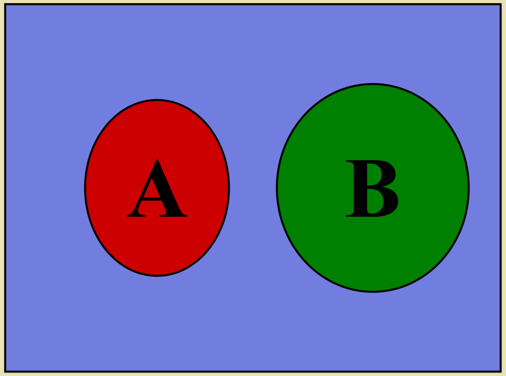
$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{P_{365}^{r}}{(365)^{r}}$$

表 3.1

人数	至少有两人同生日的概率
20	0.411
21	0.444
22	0.476
23	0.507
24	0.538
30	0.706
40	0.891
50	0.970
60	0.994

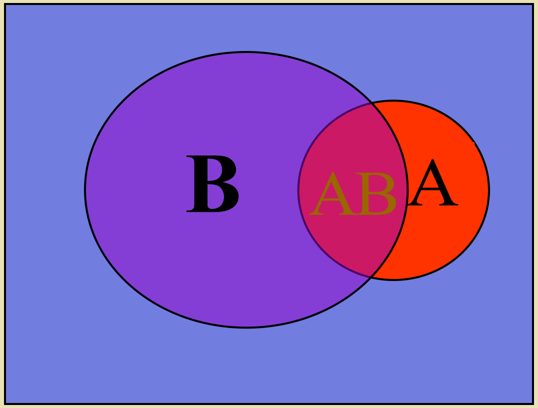
2. 概率加法公式应用举例

(1)互斥事件的加法公式



$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

(2)相容事件的加法公式

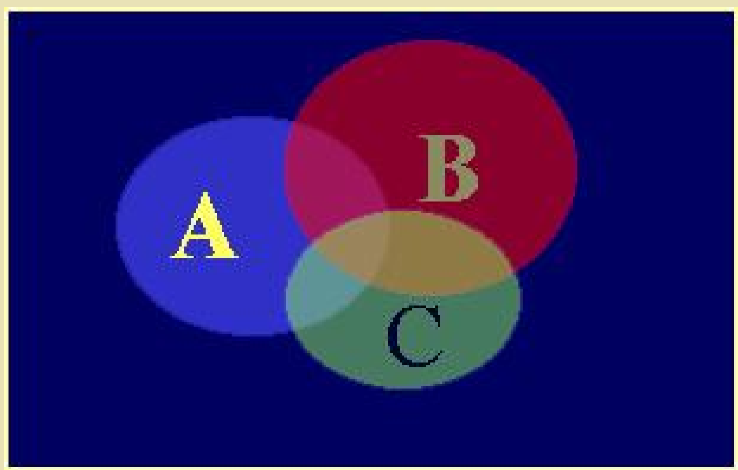


$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

推广到多个事件

三个事件和的概率为

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$



*n*个事件和的概率为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k)$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

例4. 甲、乙两人先后从52张牌中各抽取13张,求甲或乙拿到4张A的概率.

1) 甲抽后不放回，乙再抽;

2) 甲抽后将牌放回，乙再抽.

解：设A={甲拿到4张A}， B={乙拿到4张A}

所求为$P(A+B)$

1) A、B互斥

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

$$=\frac{C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}}+\frac{C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}}\frac{C_{35}^{9}}{C_{39}^{13}}=\frac{2C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}}$$

解：设A={甲拿到4张A}， B={乙拿到4张A}

所求为$P(A+B)$

2) A、B相容

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=\frac{2C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}}-\frac{C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}}\frac{C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}}$$

$$=\frac{2C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}}-\frac{C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}}\frac{C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}}$$

注意区分事件是否相容！