主要内容:

- 马尔可夫链的概念;
- Chapman-Kolmogorov方程;
- 有限维分布;
- 马尔可夫链的遍历性.

马尔可夫链的概念

概率论里“抛硬币”的模型是一个典型的独立随机试验模型，独立随机试验模型的一个最直接的推广就是马尔可夫（Markov）链模型（简称马氏链），因早在19世纪初就对它进行研究的俄国数学建Markov而得名。

马氏链具有马尔可夫性（简称马氏性），马氏性是指如果给定了一个随机过程当前时刻t的值X_t，将来的值$X_s, s > t$只依赖于当前时刻t的值X_t，与过去的值$X_u, u < t$独立。当马氏链的指标集是非负整数集时，马氏链就是离散时间马氏链。

定义 (10.7.1)

设随机过程$X=\{X_n, n\geq 0\}$的状态空间是可数集，设为S，满足

(i) $\forall n\geq 0$， $\mathrm{P}(X_n\in S)=1$，

(ii) $\forall n\geq 0, \forall A\subset S, \forall i, j, i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}\in S$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_{n+1}\in A|X_n=x, X_{n-1}=i_{n-1}, \ldots, X_0=i_0)\\ =\mathrm{P}(X_{n+1}\in A|X_n=x)\end{aligned}\tag{1}$$

则称随机过程$X=\{X_n, n\geq 0\}$为离散时间马氏链。

性质**(1)**就是所谓的马氏性。

转移概率：

$$\mathrm{P}_{ij}(m, m+n) := \mathrm{P}\{X_{m+n} = x_j | X_m = x_i\}$$

满足

$$\sum_j \mathrm{P}_{ij}(m, m+n) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots$$

转移概率阵：

$$\mathbf{P}(m, m+n) := (\mathrm{P}_{ij}(m, m+n))$$

是有限维的，也有可能是无限维的。

定义

$$p_i = \mathrm{P}(X_0 = x_i),\ \forall\ x_i \in S$$

和

$$p(0) = (p_i)_{x_i \in S} = (p_0, p_1, \ldots).$$

表示X_0的概率分布函数，称之为离散时间马氏链的初始分布。

若$\mathrm{P}_{ij}(m, m+n)$只与状态i, j及时间长度n有关，则称马氏链X_n是齐次的（时齐的）。即

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{ij}(m_1, m_1+n) &= \mathrm{P}\{X_{m_1+n} = x_j | X_{m_1} = x_i\} \\ &= \mathrm{P}\{X_{m_2+n} = x_j | X_{m_2} = x_i\} \\ &= \mathrm{P}_{ij}(m_2, m_2+n)\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}_{ij}(m_1, m_1+n) = \mathrm{P}_{ij}(n).$$

例

(1) 从$\{1,2,\ldots,N\}$ 中任取一数，记为X_0;

(2) 从$\{1,2,\ldots,X_0\}$ 中任取一数，记为X_1;

(⋮) $\cdots$

(n+2) 从$\{1,2,\ldots,X_n\}$ 中任取一数，记为X_{n+1};

(⋮) $\cdots$

试证明$\{Xn, n=0,1,2,\ldots\}$是一个马氏链。

证明. 由题意，状态空间为$S=\{1,2,\ldots,N\}$。$\forall n\geq 0$, $\forall i_0,i_1,\ldots,i_n$, 转移概率为

$$\mathrm{P}\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,X_1=i_1,\ldots,X_n=i_n\}$$

$$=\begin{cases}0 & i_{n+1}>i_n\\ \frac{1}{i_n} & i_{n+1}<i_n\end{cases}$$

$$=\mathrm{P}\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n\}$$

证明. 由题意，状态空间为$S = \{1, 2, \ldots, N\}$。$\forall n \geq 0$, $\forall i_0, i_1, \ldots, i_n$, 转移概率为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n\} \\
&= \begin{cases} 0 & i_{n+1} > i_n \\ \frac{1}{i_n} & i_{n+1} < i_n \end{cases} \\
&= \mathrm{P}\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\}
\end{aligned}
$$

证明. 由题意，状态空间为$S=\{1,2,\ldots,N\}$。
$\forall n\geq 0$, $\forall i_0,i_1,\ldots,i_n$, 转移概率为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,X_1=i_1,\ldots,X_n=i_n\}\\
&=\begin{cases} 0 & i_{n+1}>i_n \\ \frac{1}{i_n} & i_{n+1}<i_n \end{cases}\\
&=\mathrm{P}\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n\}
\end{aligned}
$$

假定所考虑的离散时间马氏链是齐次的。

n步转移概率记为

$$p_{ij}(n) = \mathrm{P}\{X_{m+n} = x_j | X_m = x_i\}$$

n步转移概率阵为$\mathbf{P}(n) = (p_{ij}(n))$.

1步转移概率记为

$$p_{ij} := p_{ij}(1) = \mathrm{P}\{X_{m+1} = x_j | X_m = x_i\}$$

1步转移概率阵为$\mathbf{P} := \mathbf{P}(1) = (p_{ij})$. 简称转移矩阵。

定理（补充1）

离散时间马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$由初始分布p和转移概率矩阵$\mathbf{P}$完全刻画。

证明. 由初始分布p的定义，$\mathrm{P}(X_0 = i_0) = p_{i_0}$。

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1) &= \mathrm{P}(X_1 = i_1 | X_0 = i_0)\mathrm{P}(X_0 = i_0) \\ &= p_{i_0,i_1} p_{i_0} \\ &= p_{i_0} p_{i_0,i_1}. \end{aligned}$$

对于$k = 1, 2, \cdots, n-1$，假设

$$\mathrm{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_k = i_k) = p_{i_0} p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{k-1},i_k}.$$

下面证明对于$k=n$也成立。

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}(X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n) \\
= & \mathrm{P}(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1},\ldots,X_0=i_0) \\
& \mathrm{P}(X_0=i_0,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1}) \\
= & \mathrm{P}(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1})\mathrm{P}(X_0=i_0,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1}) \\
= & p_{i_{n-1},i_n}\cdot p_{i_0}p_{i_0,i_1}\cdots p_{i_{n-2},i_{n-1}} \\
= & p_{i_0}p_{i_0,i_1}\cdots p_{i_{n-1},i_n}.
\end{aligned}
$$

由归纳法，结论成立。 $\square$

例

设$\{Xn, n = 0, 1, 2, \ldots\}$是独立同分布随机变量序列，$X_n$可能取值的全体记为$I = \{i, i \geq 1\}$,则$\{Xn\}$为马氏链，并求其一步转移概率，并问是否为时齐马氏链？

解. $\forall n, \forall j \geq 0$，因为

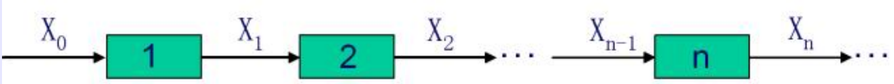
$$\begin{aligned} & \mathrm{P}\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n\} \\ & = \mathrm{P}\{X_{n+1} = j\} \\ & = \mathrm{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i_n\}, \end{aligned}$$

所以，$\{Xn\}$为马氏链。一步转移概率为

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i_n\} & = \mathrm{P}\{X_{n+1} = j\} \\ & = \mathrm{P}\{X_1 = j\} \end{aligned}$$

例

试从抛硬币，掷骰子的试验构造一个时齐马氏链。



0-1传输系统

例 (0-1传输系统（省略）)

只传输$\{0,1\}$的**n**级数字串联传输系统，设每一级的传真率为p，误码率为$q=1-p$，并设一个单位时间传输一级，X_0是第一级的输入，X_n是第n级的输出$(n\geq 1)$，那么$\{X_n, n=0,1,2,\ldots\}$是一随机过程，状态空间$\mathcal{S}=\{0,1\}$．当$X_n=i, i\in\mathcal{S}$为已知时，X_{n+1}所处状态的概率分布只与$X_n=i$ 有关，而与时刻n以前所处的状态无关，所以它是一个马氏链，而且是齐次的。一步转移概率为

$$p_{ij}=\mathrm{P}\{X_{n+1}=j|X_n=i\}=\left\{\begin{array}{ll} p, & j=i \\ q, & j\neq i \end{array}\right.$$

转移概率矩阵

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$$

定理 (Chapman-Kolmogorov方程)

设$\{X_n\}$为马氏链，则对于任意的正整数k, m，有

$$p_{ij}(m+n) = \sum_k p_{ik}(m) p_{kj}(n),$$

称此方程为**Chapman-Kolmogorov**方程，简称$C-K$方程。

证明.

$$\begin{aligned}
& p_{ij}(m+k) \\
= & \mathrm{P}\{X_{m+n}=x_j|X_0=x_i\} \\
= & \sum_k \mathrm{P}\{X_{m+n}=x_j, X_m=x_k|X_0=x_i\} \\
= & \sum_k \mathrm{P}\{X_{m+n}=x_j|X_m=x_k, X_0=x_i\}\cdot \\
& \cdot\mathrm{P}\{X_m=x_k|X_0=x_i\} \\
= & \sum_k p_{ik}(m)p_{kj}(n).
\end{aligned}$$

由Chapman-Kolmogorov方程,

$$\mathbf{P}(m+k) = \mathbf{P}(m)\mathbf{P}(k),$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(2) &= \mathbf{P}^2 \\ &\vdots \\ \mathbf{P}(n) &= \mathbf{P}^n. \end{aligned}$$

例 (10.21天气预报问题)

若下雨与否是一个马氏链，设0表示下雨，1表示无雨，且

$$p_{00} = \alpha = 1 - p_{01} \quad p_{10} = \beta = 1 - p_{11}.$$

求今天有雨时，第五天也有雨的概率。

解.由题意，是一个两个状态$\{0,1\}$的马氏链，一步转移概率为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}^4.$$

今天有雨时，第五天也有雨的概率为$\mathbf{P}^4$的第00个元素[自己计算:)]。

一维分布：$\forall n$,

$$\begin{aligned} P\{X_n = x_j\} &= \sum_{i=1}^{\infty} P\{X_n = x_j | X_0 = x_i\} P\{X_0 = x_i\} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i(0) p_{ij}(n), \ j = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

设$p(n) = (p_1(n), p_2(n), \ldots)$，用矩阵表示

$$p(n) = p(0)\mathbf{P}(n).$$

即一维分布由初始分布和n步转移概率矩阵所确定。

n维分布：$\forall n$,

$$\begin{aligned}
& \mathrm{P}\{X_{t_1}=x_{i_1},X_{t_2}=x_{i_2},\ldots,X_{t_n}=x_{i_n}\} \\
= \ & \mathrm{P}\{X_{t_1}=x_{i_1}\}\mathrm{P}\{X_{t_2}=x_{i_2}|X_{t_1}=x_{i_1}\}\cdots \\
& \mathrm{P}\{X_{t_n}=x_{i_n}|X_{t_1}=x_{i_1},X_{t_2}=x_{i_2},\ldots,X_{t_{n-1}}=x_{i_{n-1}}\} \\
= \ & \mathrm{P}\{X_{t_1}=x_{i_1}\}\mathrm{P}\{X_{t_2}=x_{i_2}|X_{t_1}=x_{i_1}\}\cdots \\
& \mathrm{P}\{X_{t_n}=x_{i_n}|X_{t_{n-1}}=x_{i_{n-1}}\} \\
= \ & p_{i_1}(t_1)p_{i_1i_2}(t_2-t_1)\cdots p_{i_{n-1}i_n}(t_n-t_{n-1})
\end{aligned}$$

n维分布也由初始分布和转移概率所确定。

例 (10.22)

设$\{X_n, n \geq 0\}$是具有三个状态$0, 1, 2$的齐次马氏链，一步转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

初始分布$p_i(0) = \frac{1}{3}$，$i = 0, 1, 2$. 求

1. $\mathrm{P}\{X_0 = 0, X_2 = 1\}$,
2. $\mathrm{P}\{X_2 = 1\}$.

解. 二步转移概率矩阵

$$\mathbf{P}(2) := \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

所以,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X_0 = 0, X_2 = 1\} &= \mathrm{P}\{X_0 = 0\}\mathrm{P}\{X_2 = 1 | X_0 = 0\} \\ &= p_0(0)p_{01}(2) = \frac{5}{48}. \end{aligned}$$

$$\mathrm{P}\{X_2 = 1\} = p_0(0)p_{01}(2) + p_1(0)p_{11}(2) + p_2(0)p_{21}(2) = \frac{11}{24}$$

定义 (10.7.2)

设马尔可夫链$\{X_n\}$的状态空间为$\mathcal{S}$，如果对于所有的$x_i, x_j \in \mathcal{S}$，转移概率$p_{ij}(n)$存在不依赖于i的极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j.$$

或

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(n) = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

则称此链具有遍历性，又若$\sum_k \pi_k = 1$，称$\pi = (\pi_1, \pi_2 \dots)$为此链的极限分布。

定理

设齐次马氏链$\{X_n\}$的状态空间为有限集$\mathcal{S}=\{x_1,\ldots,x_N\}$，一步转移概率矩阵是$\mathbf{P}$. 如果存在正整数$m$，使对任意的$x_i,x_j\in\mathcal{S}$，都有

$$p_{ij}(m)>0,\quad i,j=1,2,\ldots,N$$

则此链具有遍历性，且有极限分布$\pi=(\pi_1,\pi_2\ldots,\pi_N)$，它是方程组

$$\begin{aligned}\pi &= \pi\mathbf{P}\\ \text{即：}\quad \pi_j &= \sum_{i=1}^{N}\pi_i p_{ij},\quad j=1,2,\ldots,N,\end{aligned}\qquad (2)$$

定理 (接上)

满足条件

$$\begin{aligned} \pi_j &> 0, \\ \sum_{i=1}^{N} \pi_i &= 1 \end{aligned}$$

的唯一解。

证明省略。

另外将(2)写成矩阵形式，

$$\pi = \pi \mathbf{P},$$

从而

$$\pi = \pi \mathbf{P} = \pi \mathbf{P}^2 = \cdots = \pi \mathbf{P}^n.$$

由上

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}(n). \qquad (3)$$

对于任意的状态i，任意的n，由**(3)**得

$$\begin{aligned}
P(X_n = i) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = i | X_0 = k) P(X_0 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{ki}(n) \\
&= \pi_i.
\end{aligned}$$

若初始分布是$\{\pi_j, j \in S\}$，则X_n的分布独立于n。
基于此，也称$\{\pi_j, j \in S\}$为马氏链的平稳分布。

例

设一马氏链的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

试讨论其遍历性.

解. 因为

$$\mathbf{P}(2)=\mathbf{P}^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}(3)=\mathbf{P}^3=\mathbf{P}$$

进而

$$\mathbf{P}(n)=\begin{cases} \mathbf{p}^2, & n\text{为偶数} \\ \mathbf{p}, & n\text{为奇数} \end{cases}$$

所以，$\mathbf{P}(n)$不存在极限。故不具有遍历性。

例（P433，例10.23）

用

$$\pi \mathbf{P} = \pi$$

$$\sum_k \pi_k = 1$$

$$\pi_k \geq 0$$

求平稳分布。

小结