二、交错级数及其审敛法

交错级数: 交错级数是这样的级数, 它的各项是正负交错的.

交错级数的一般形式为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$或$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$, 其中$u_n>0$.

例如, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是交错级数, 但$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1-\cos n\pi}{n}$ 不是交错级数.

定理7（Leibniz定理）

如果交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件:

(1) $u_n \geq u_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$；(2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

则级数收敛, 且其和 $s \leq u_1$, 其余项r_n的绝对值$|r_n| \leq u_{n+1}$.

简要证明：设前 n 项部分和为 s_n.

由 $s_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n\ 1}-u_{2n})$， 及

$$s_{2n}=u_1-(u_2-u_3)+(u_4-u_5)+\cdots+(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}$$

看出数列$\{s_{2n}\}$单调增加且有界$(s_{2n}<u_1)$，所以收敛.

设 $s_{2n}\to s(n\to\infty)$，则也有 $s_{2n+1}=s_{2n}+u_{2n+1}\to s(n\to\infty)$，

所以 $s_n\to s(n\to\infty)$. 从而级数是收敛的，且 $s<u_1$.

因为 $|r_n|=u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots$也是收敛的交错级数，所以$|r_n|\leq u_{n+1}$.

例 6 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ $,p>0$ 收敛，并估计和及余项.

证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 是一个交错级数，令$u_n=\frac{1}{n^p}$，$\{u_n\}$单调减少趋于0，根据莱布尼兹定理，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 收敛；其和$s<u_1=1$，余项的绝对值$|r_n|<\frac{1}{(n+1)^p}$.

$P=1$时

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2$$

利用函数$\ln(1+x)$的 n 阶麦克劳林展开式：当$x>-1$时，

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}，其中 0<\theta<1;$$

令 $x=1$ 得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}},$$

$$\left|1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\ln 2\right|<\frac{1}{n+1}，所以\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2.$$

例7. 以下级数是否为交错级数，判别其敛散性

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$

(3) $a-\dfrac{b}{2}+\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{4}+\cdots+\dfrac{a}{2n-1}-\dfrac{b}{2n}+\cdots$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^{n+1}}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}$

解：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ 是一个交错级数，$u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$，因为 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$，所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}\neq 0$(事实上通项极限不存在)，不满足级数收敛的必要条件，从而级数发散.

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ 是一个交错级数，$u_n=\sqrt[n]{n}-1$，

令 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}-1\,(x\geq 2)$，$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，故当 $n\geq 3$ 时，$\{u_n\}$ 单调减少；

又因为 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=0$，根据莱布尼兹定理，

级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ 收敛.

（3） $a-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\cdots+\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}+\cdots$

当$a=b$时，级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}a\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$是一个交错级数，且满足莱布尼兹定理条件，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛，再根据收敛级数的性质，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a\frac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛；

当$a\neq b$时，级数加括号$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}\right)$，其通项

$$\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}=a\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\frac{a-b}{2n},$$

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$收敛(可以看作$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$加括号级数),而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a-b}{2n}$发散(因为调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散),根据收敛级数的性质，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}\right)$发散，从而原级数发散.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^{n+1}}\ (p>0)$是一个交错级数，通项

$$\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^{n+1}}=\frac{(-1)^n}{n^p}+\frac{1}{n^p\left[n^p+(-1)^{n+1}\right]};$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 收 敛, 级 数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\left[n^p+(-1)^{n+1}\right]}$ 是 正 项 级 数， 且 当 $n\to\infty$ 时，

$\frac{1}{n^p\left[n^p+(-1)^{n+1}\right]}\sim\frac{1}{n^{2p}}$， 若 $0<p\le\frac{1}{2}$， 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\left[n^p+(-1)^{n+1}\right]}$ 发散， 若 $p>\frac{1}{2}$，

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\left[n^p+(-1)^{n+1}\right]}$ 收敛；

所 以 当 $0<p\le\frac{1}{2}$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^{n+1}}\ (p>0)$ 发 散； 当 $p>\frac{1}{2}$ 时， 级 数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^{n+1}}\ (p>0)$ 收敛.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]$是一个交错级数，级数变成$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$，

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故原级数发散.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}$ 是一个交错级数，

通项 $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n\left[n+(-1)^{n+1}\right]}\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+(-1)^{n+1}}\right]}$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\left[n+(-1)^{n+1}\right]}\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+(-1)^{n+1}}\right]}$ 为正项级数，且当 $n\to\infty$ 时，通项

$\frac{1}{\sqrt{n\left[n+(-1)^{n+1}\right]}\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+(-1)^{n+1}}\right]}\sim\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$，又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\left[n+(-1)^{n+1}\right]}\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+(-1)^{n+1}}\right]}$ 收敛；根据收敛级数的性质，

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}$ 收敛.

方法 2　级数通项 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}}}=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[1-\dfrac{1}{2}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]$

$=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$，令 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，$b_n=\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$，则 $u_n=a_n+b_n$；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛；因为当 $n\to\infty$ 时，$b_n\sim\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛；

根据收敛级数的性质，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}$ 收敛.