北京邮电大学2019——2020学年第1 学期

4学时《概率论与随机过程》

(共三页)

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效。

一. 填空题（40分，每空4分）

1. 设A，B为两个相互独立的随机事件，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.3$，则$P(A\cup B)=$0.44.

2. 设某人首次击中目标的时刻X服从如下分布$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$，$k=1,2\ldots$，已知该人已经两次没有打中目标的，该人还需大于两次才能击中的概率为$(1-\mathrm{p})^2$

3. 设随机变量(X,Y)的分布律为

$X\backslash Y$	1	2	3
1	1/18	1/9	1/6
2	0	β	1/3

则β =1/3.

4 已知随机变量X的分布函数$\mathrm{F}_X(\mathrm{x})$, 则随机变量$Y=5\mathrm{X}+6$的分布函数$\mathrm{F}_Y(\mathrm{y})=\mathrm{F}_X(\frac{y-6}{5})$.

5. 随机变量ξ服从标准正态分布，则ξ^2与ξ的相关系数为 0 .

6．随机变量X_i服从参数为(n_i,p_i)的二项分布$(i=1,2)$，且这两个随机变量相互独立, 则$D(X_1-X_2)=n_1p_1(1-p_1)+n_2p_2(1-p_2)$

7. 某种种子的发芽率为0.2，现播种400粒该种种子，超过90粒种子发芽的概率为0.1056 （用中心极限定理近似计算，$\Phi(1.25)=0.8944,\Phi(1)=0.8413$）

8 设$\{W(t),t\geq 0\}$是参数为1的维纳过程。定义$X(t)=W(e^{3t})$， 则自相关函数$R_X(1,2)=e^3$.

9 设马氏链$\{X_n,n\geq 0\}$的状态空间$E=\{1，2，3\}$， 转移概率矩阵为$\begin{pmatrix}0.5&0.5&0\\0.5&0&0.5\\0&0.5&0.5\end{pmatrix}$, 状态1的平均返回时间为$=3$.

10 设$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$为平稳过程，自相关函数$R_X(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos\omega\tau$，其中$a, \omega$*是常数*，则

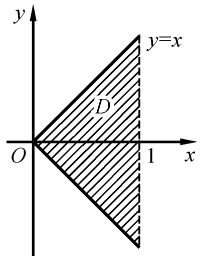
平均功率$Q = \underline{a^2/2}$

二.（15分）设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x,\ 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 1) *求二维随机变量关于 X 和 Y 的边缘概率密度函数；*

2) 条件概率密度$f_{Y|X}(y \mid x)$，$f_{X|Y}(x \mid y)$．



题 2 图

解:$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$= \begin{cases} \int_{-x}^{x} 1dy = 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$ --4’

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_{-y}^{1} 1dx = 1 + y, & -1 < y < 0, \\ \int_{y}^{1} 1dx = 1 - y, & 0 \le y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$ --5’

所以

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & |y| < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$ --3’

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{1-y}, & y < x < 1, \\ \frac{1}{1+y}, & -y < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$ --3’

三.（10分）

已知男人中有 5%是色盲患者，女人中有 0.25%是色盲患者。今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，问：

A 此人恰好是色盲患者的概率

B 已知此人是色盲患者，该人是男性的概率是多少？

解：A_1={男人}，A_2={女人}，B={色盲}，显然 $A_1 \cup A_2=S$，$A_1 A_2=\Phi$

由已知条件知$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$。$P(B|A_1)=5\%$, $P(B|A_2)=0.25\%$---------------2'

由全概率公式，可知

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{10000}$$

=2.625%--4'

由贝叶斯公式，有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{10000}}=\frac{20}{21}$$---------------------------4'

四（15分）

设齐次马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的状态空间为$E=\{a,b,c,d\}$，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

初始分布为$P(X_0=a)=P(X_0=b)=P(X_0=c)=P(X_0=d)=\frac{1}{4}$,

求

(1) $P(X_2=a)$;

(2) $P(X_2=a, X_4=b, X_5=b|X_1=d)$;

(3) $P(X_n=a)$, n=3,4,5,....

解. 两步转移概率矩阵

$$P^{(n)} = P^n = P$$

(1) $P(X_2 = a) = \sum_{i=a,b,c,d}(q_i(0)\, p_{ia}^{(2)}) = 0.25;$ ……..5’

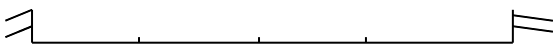
(2) $P(X_2 = a, X_4 = b, X_5 = b | X_1 = d) = p_{da}^{(1)} p_{ab}^{(2)} p_{bb}^{(1)} =$

$1/64;$ ……..5’

(3) $P(X_n = a) = 0.25$ ……..5’

五.（8 分）

设一醉汉 Q（或看作一随机游动的质点），在如图所示直线的点集 I＝{1，2，3，4，5}上作游动，仅在 1 秒、2 秒…等时刻发生游动。游动的规则是：如果 Q 现在位于点 $\boldsymbol{i}$ ($1<\boldsymbol{i}<5$)，则下一时刻各以 1/3 的概率向左或向右移动一格，或以 1/3 的概率留在原处；如果 Q 现在位于 1（或 5）这点上，则下一时刻就以概率 1 移动到 2（或 4）点上。1 和 5 这两点称为反射壁。设 X(n)表示第 n 秒醉汉 Q 所在的位置。



1）证明 X(n)是一个 Markov 链，并写出它的一步转移概率矩阵。

2）将该 Markov 链的状态空间按互通关系分类，说明各个状态的周期性，正常返性，遍历性；

3）求*以下* 5 *个极限* $\lim_{n\to\infty} P(X(n) = i)$，$i = 1,2,3,4,5$。

解：

1）证明：

$$P\big(X(n) = i_n \big| X(n-1) = i_{n-1}, X(n-2) = i_{n-2} \ldots, X(1) = i_1\big)$$

$$
=\begin{cases}\frac{1}{3}, & i_n=i_{n-1}+1\neq 2\\ \frac{1}{3}, & i_n=i_{n-1}-1\neq 4\\ \frac{1}{3}, & i_n=i_{n-1}\neq 1 \text{ 或 } 5\\ 1, & i_{n-1}=5, i_n=4 \text{ 或者 } i_{n-1}=1, i_n=2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}
$$

$=P\left(X(n)=i_n \middle| X(n-1)=i_{n-1,}\right)$，故 X$(n)$是一个 Markov 链。

X(n)*的一步转移概率矩阵为*

$$
P=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{array}\\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{array}
$$

---2’

2) {1,2,3,4,5}为一个互通类。

所有状态都是非周期，正常返，均为遍历状态 -----------------------2’

3 平稳分布需满足以下方程：

$$
\begin{cases}\pi P=\pi\\ \pi_i\geq 0\\ \pi_5+\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1\end{cases}.\text{其中该方程存在唯一的解，}
$$

$$
\text{解得}\pi_5=\pi_1=\frac{1}{11},\pi_2=\pi_3=\pi_4=3/11
$$

由于该马氏链是遍历不可约马氏链，所以$\pi_i=\lim\limits_{n\to\infty}P(X(n)=i)$，$i=$ 1,2,3,4,5-------------------------------------4’

六.（6 分）

设平稳随机过程$X_1(t)$和$X_2(t)$相互独立，且$E(X_1(t))=0$. $X_1(t)$,$X_2(t)$功率谱密度分别为$S_1(\omega)=\frac{4}{\omega^2+4}$和$S_2(\omega)=\frac{\omega^2}{\omega^2+4}$.

(1) 证明随机过程$X(t) = X_1(t) + X_2(t)$是平稳过程；

(2) 求$X(t)$的平均功率。

解：

(1) 证明：$X(t)$为二阶矩过程……………………………………………………………1'

因为$X_1(t)$与$X_2(t)$相互独立，所以他们的的互相关函数为

$E[X_1(t)X_2(t+\tau)] = E[X_1(t)]E[X_2(t+\tau)] = 0$，

所以可以认为只与时差τ有关，与时间 t 无关，所又因为这两个过程都是平稳过程，所以他们是平稳相关的，因此他们和 X(t) 以也是平稳过程。. …….3'

(2) $X(t)$的谱密度为$S_X(\omega) = S_{X_1}(\omega) + S_{X_2}(\omega)$=1;所以$X(t)$为白噪声，平均功率为 +∞……………………………………………..2'

七.（6 分）

利用概率公理化定义证明不可能事件的概率为 0，即$P(\emptyset) = 0$.

证明：

令$A_i = \emptyset, i = 1,2, \dots$

则$A_1, A_2, A_3 \dots$是一列两两互不相容的事件列。

由概率公理化定义的第三条即可列可加性可知

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)$$

假若$P(\emptyset) \neq 0$，由概率的非负性可知$P(\emptyset) > 0$，因此$\sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)$是发散的，与$P(\emptyset)$是非负实数矛盾。因此假设不成立，即$P(\emptyset) = 0$。

证毕。