§3.4　随机变量的独立性

一、两个随机变量的独立性

设 X,Y是两个$r.v$，若对任意的x,y,有

$$P(X\leq x,Y\leq y)=P(X\leq x)P(Y\leq y)$$

则称X,Y相互独立 .

两事件A,B独立的定义是：

若$P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件A,B独立 .

1. 定义

设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x), F_Y(y)$ 分别是二维随机变 量 (X,Y) 的分布函数及边缘分布 函数. 若对于所有 x, y 有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y 是**相互独立**的.

这表明，两个$r.v$相互独立的充要条件是联合分布函数等于两个边缘分布函数的乘积 。

例1. 讨论本章第1节例1中X与Y的独立性。

解：(X, Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan y\right)$$

边缘分布函数分别为

$$F_x(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right), F_y(y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan y\right)$$

容易看出，对于任意实数x，y都有

$$F(x, y)=F_X(x)F_Y(y),$$

所以X与Y是相互独立的.

2.说明

(1) 若离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为

$$P\{X=i, Y=j\}=p_{ij}, \quad i, j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立

$$\Longleftrightarrow P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

即 $p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}.$

亦即两个离散型*r.v*相互独立的充要条件是联合概率函数等于两个边缘概率函数的乘积。

(2) 设连续型随机变量 (X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$，边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$,则有

$$X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立} \Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$$

在$f(x,y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$的一切连续点(x, y)处

有的书上称为“几乎处处成立”，含义是：在平面上除去面积为0的集合外，处处成立.

(3) X 和 Y 相互独立，则

对任意 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$，

事件 $\{x_1 < X \le x_2\}$ 与 $\{y_1 < Y \le y_2\}$ 也

例2：讨论X与Y的独立性：

$X \backslash Y$	-1	0	4	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
1	0.17	0.05	0.21	0.43
3	0.04	0.28	0.25	0.57
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	0.21	0.33	0.46	1

解: 由计算知 $P\{X=1\}=0.43$，$P\{Y=-1\}=0.21$，

且 $P\{X=1, Y=-1\}=0.17$，

容易看出 $P\{X=1, Y=-1\}\neq P\{X=1\}P\{Y=-1\}$

因此X与Y不独立。

（*）例 已知 (X,Y) 的分布律为

(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
p_{ij}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	α	β

(1) 求 α 与 β 应满足的条件；

(2) 若 X 与 Y 相互独立，求 α 与 β 的值.

解 将 (X,Y) 的分布律改写为

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\bullet}=P\{X=x_i\}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
$p_{\bullet j}=P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	$\frac{2}{3}+\alpha+\beta$

(1) 由分布律的性质知 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \ \frac{2}{3}+\alpha+\beta=1,$

故α与β应满足的条件是 $:\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 且 $\alpha+\beta=\frac{1}{3}.$

(2) 因为 X 与 Y 相互独立，所以有

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}, \quad (i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3)$$

特别有

$$p_{12} = p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 2} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} + \alpha\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{9},$$

又 $\alpha + \beta = \dfrac{1}{3},$

得 $\beta = \dfrac{1}{9}.$

练 已知随机变量**X,Y**相互独立，请完成下列概率分布表：

Y \ X	x_1	x_2	x_3	$P(Y=y_j)$
y_1	$1/24$	1/8	$1/12$	$1/4$
y_2	1/8	$3/8$	$1/4$	$3/4$
$P(X=x_j)$	1/6	$1/2$	$1/3$	1

练　设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-(x+} \\ 0 \end{cases}$$

问X和Y是否独立

对一切x, y，均有：

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

故X,Y独立

解：$f_X(x)=\int_0^{\infty} xe^{-(x+y)}dy = xe^{-x}$，　$x>0$

$f_Y(y)=\int_0^{\infty} xe^{-(x+y)}dx = e^{-y}$，　$y>0$

即：

$$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

若(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y, 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

情况怎样?

解： $f_X(x)=\int_x^1 2dy=2(1-x),\qquad 0<x<1$

$$f_Y(y)=\int_0^y 2dx=2y,\qquad 0<y<1$$

由于在区域（0，1）×（0，1）上，

$$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$$

故X与Y不独立.

例3 一负责人到达办公室的时间均匀分布在8−12时，他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7−9时，设他们两人到达的时间相互独立，求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟的概率.

解 设 X 和 Y 分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间，由假设 X 和 Y 的概率密度分别为

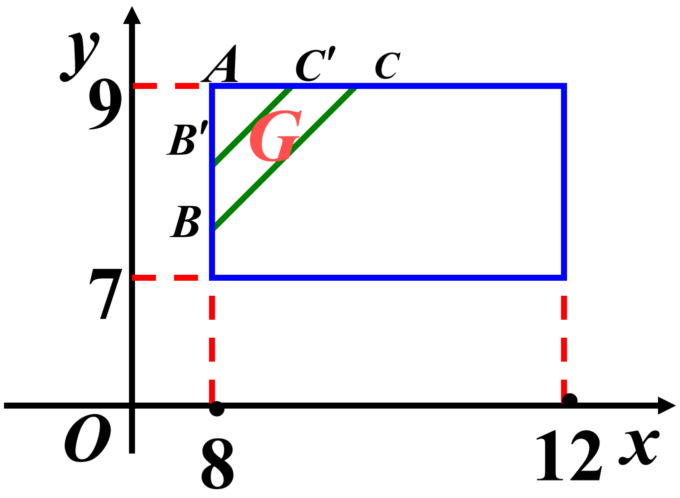
$$f_X(x)=\begin{cases}1/4, & 8<x<12,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1/2, & 7<y<9,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

由于 X,Y 相互独立，得 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$=\begin{cases}1/8, & 8<x<12,7<y<9,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$P\{|X-Y|\le 1/12\}$$

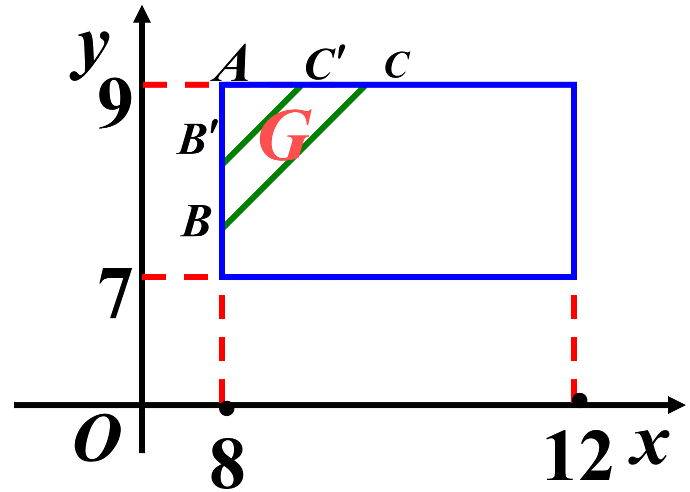


$$=\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{的面积}).$$

而　G的面积$=\Delta ABC$的面积$-\Delta AB'C'$的面积

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{1}{6}.$$



于是　$P\{|X-Y|\le 1/12\}$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{ 的面积})=\frac{1}{48}.$$

因此负责人和他的秘书 到达办公室的时间相差 不超过5分钟的概率为$\frac{1}{48}$.

例4: 设(X,Y)~N(μ$_1$，μ$_2$，σ$_1^2$，σ$_2^2$，ρ)，证明X与Y相互独立的充要条件为ρ=0。

证明: (X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}$$

$$-2\rho\frac{(x-\mu_1)(x-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}]\}$$

关于X和Y的边缘密度分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}},f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}}$$

因此 $f_X(x)\cdot f_Y(y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-[\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}]}$

(1) 充分性：显然，如果 ρ =0, 则对所有x，y有

$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ ，即X与Y相互独立。

(2) 必要性：如果X与Y相互独立，由于$f(x,y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$都是连续函数，故对所有x，y都有$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ ，特别地，取$x=\mu_1$ ，$y=\mu_2$可得

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$$

从而ρ=0.

二、多个随机变量的独立性

1、定义： 设n维随机变量(X_1，X_2,...，X_n)的分布函数为$F(x_1,x_2,...x_n)$, X_k 的边缘分布函数为$F_{X_k}(x_k)$, $k=1, 2,\ldots, n$,若对于任意实数$x_1, x_2,\ldots, x_n$，都有

$$F(x_1,\ldots x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\ldots.F_{X_n}(x_n)$$

则称$X_1,X_2,\ldots X_n$ 相互独立。

2、说明：

(i)对于离散型随机变量的情形. 若对任意整数i_1, i_2, …, i_n及任意实数 $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$，恒有

$$P\{X_{i_1} = x_{i_1}, \ldots, X_{i_n} = x_{i_n}\} = P\{X_{i_1} = x_{i_1}\} \ldots P\{X_{i_n} = x_{i_n}\}$$

则称离散型随机变量X_1, X_2, …, X_n相互独立。

(ii) 设X_1，X_2，…，X_n为n 个连续型随机变量. 若对任意的$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$，

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_n}(x_n)$$

几乎处处成立，则称X_1，X_2，…，X_n相互独立。

三、多维随机变量的独立性

1、定义：设n维随机变量$(X_1,X_2,...X_n)$的分布函数为$F_X(x_1,x_2,...x_n)$；m维随机变量$(Y_1,Y_2,\ldots Y_m)$的分布函数为$F_Y(y_1,y_2,\ldots y_m)$；$X_1,X_2,...X_n,Y_1,Y_2,\ldots Y_m$组成的$n+m$维随机变量（$X_1,X_2,...X_n,Y_1,Y_2,\ldots Y_m$)的分布函数为$F$（$x_1,x_2,...x_n,y_1,y_2,\ldots y_m$).

若F（$x_1,x_2,...x_n,y_1,y_2,\ldots y_m$)

$$= F_X(x_1,x_2,...x_n)\cdot F_Y(y_1,y_2,\ldots y_m)$$

对于任意实数$x_1,x_2,...x_n,y_1,y_2,\ldots y_m$恒成立，则称$n$维随机变量$(X_1,X_2,...X_n)$与$m$维随机变量$(Y_1,Y_2,\ldots Y_m)$独立。

2、独立性的有关定理

定理1.

如果随机变量$X_1, X_2, \dots, X_n$相互独立，$I_1, I_2, \dots, I_n$为数轴上任意n个区间，则事件$\{X_1 \in I_1\}, \{X_2 \in I_2\}, \dots, \{X_n \in I_n\}$相互独立。

定理2. 若$X_1, X_2, \dots, X_n$相互独立，则

(1) 其中任意k个随机变量也相互独立。

(2) $Y_1 = g_1(X_1), Y_2 = g_2(X_2), \dots, Y_n = g_n(X_n)$也相互独立，$g_i(x)(i=1,2,\dots,n)$为$n$个连续函数。

定理3. 若$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$和$(Y_1,Y_2,\ldots,Y_m)$相互独立，则

（1）$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$中任意k个随机变量构成的随机向量与$(Y_1,Y_2,\ldots,Y_m)$中任意l个随机变量构成的随机向量也相互独立。

（2）$g_1(X_1, X_2,\ldots, X_n)$与$g_2(Y_1,Y_2,\ldots,Y_m)$也相互独立，其中$g_1$，$g_2$为连续函数。