北京邮电大学 2019-2020 学年

线性代数期末试题（A）

一. 填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 已知多项式 $p(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 & 0 \\ x^3 & x & 2 & 1 \\ -x^4 & 0 & x & 2 \\ 4 & 3 & 4 & x \end{vmatrix}$，则 $p(x)$ 中 x^7 的系数为 ______.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{vmatrix}=$ ______.

3. 已知 $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ 满足 $A^6=E$，则 $A^{11}=$ ________.

4. 已知 A 为 3 阶可逆矩阵，将 A 的第 3 列减去第 2 列对应元素后得到矩阵 B，则 $B^{-1}A=$ ________.

5. 已知 3 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足 $A^*=A^T$（A^*,A^T 分别表示 A 的伴随矩阵与转置矩阵），若 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a>0$，则 $a=$ ________.

6. 已知过原点的直线 L 与直线 L_1： $x-1=y+2=-z-4$ 相交，且与平面 $\Pi: x-y+2z=3$ 平行，则 L 的标准方程为________.

7. 设 $\alpha_1=(1,-1,0)$，$\alpha_2=(4,2,a+2)$，$\alpha_3=(2,4,3)$，$\alpha_4=(1,a,1)$，若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中任意两个向量都与另外两个向量等价，则
$a=$________.

8. 已知 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$，$|A|=0$，$|A|$ 的元素 a_{ij} 的余子式为 $M_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 若 $M_{11}\neq 0$，则方程组 $Ax=0$ 的通解为________.

9. 已知 3 阶实对称矩阵 A 与 $diag(1,-2,5)$ 相似， x 为任意 3 维单位列向量，则 $x^T Ax$ 的最大值为__________.

10. 设 $f(x,y,z)=2x^2+y^2+kz^2+2xy-4yz$，已知方程 $f(x,y,z)=1$ 的图形是椭球面，则 k 的取值范围是________.

二.（10 分）设 $\alpha_1=(2,2,-1)^T$， $\alpha_2=(-1,-2,1)^T$， $\alpha_3=(-1,-1,1)^T$，若矩阵 A 满足 $A\alpha_1=\alpha_2$， $A\alpha_2=\alpha_3$， $A\alpha_3=\alpha_1$，求 A.

三,（10 分） 设 $\alpha_1=(1,1,1,2)^T$，$\alpha_2=(2,1,1,6)^T$，$\alpha_3=(1,2,a-3,-2)^T$，$\alpha_4=(1,2,5,a)^T$，讨论 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关性.

四.（10 分） 设 $\alpha_1=(1,2,1,-4)^T$，$\alpha_2=(2,-2,3,-5)^T$，$\alpha_3=(3,0,4,-9)^T$，$\alpha_4=(1,-2,2,1)^T$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组，并将其余向量用该

极大无关组线性表示.

五. （12 分）已知方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ x_2+(3-a)x_3+2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$有无穷多解.

（1）求a,b；（2）求该方程组的通解.

六.（10 分）设$\alpha_1=(1,2,2,-1)$，$\alpha_2=(1,1,-1,1)$，求α_3,α_4，使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为正交向量组.

七.（12 分）用正交变换将二次型$f=3x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$化为标准形.

八. (6分) 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，$\beta_i=\sum_{j=1}^{m} b_{ji}\alpha_j$，$i=1,2,\cdots,n$. 求证：如果 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性相关，则 $r(B)<n$，其中 $B=(b_{ij})_{m\times n}$.