§2.3 连续型随机变量及其概率密度

一、连续型随机变量及其概率密度

引例　在区间 $[a,b]$ 上任意投掷一个质点，以 X 表示这个质点的坐标. 设这个质点落在 $[a,b]$中任意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比，易知X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x<b,\\ 1, x\ge b.\end{cases}$$

现在，我们换一个角度来考虑：

由于X在[*a*, *b*]内等可能取值，而X在[*a*, *b*]上取值的概率为1，我们仿照物质直线线密度的定义将概率1在区间[*a*, *b*]上的平均值1/（*b*-*a*），称为X在[*a*, *b*]上的概率密度。

因为X不可能在[*a*,*b*]之外取值，所以它在[*a*, *b*]之外的概率密度为0。称

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, x\in[a,b],\\ 0, x\notin[a,b].\end{cases}$$

为X的概率密度函数。

问题：X在[*a*, *b*]内任意一点的概率是1/（*b*-*a*）吗？

易见

①对于任意区间[*c*,*d*]，有

$$P\left\{c \le x \le d\right\} = \int_{c}^{d} f(x)dx$$

②对于任意实数*x*，有

$$F(x) = P\left\{X \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

一般地，我们有如下定义：

1. 定义：设随机变量X的分布函数为$F(x)$，若存在非负可积函数$f(x)$，使得对于任意实数x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

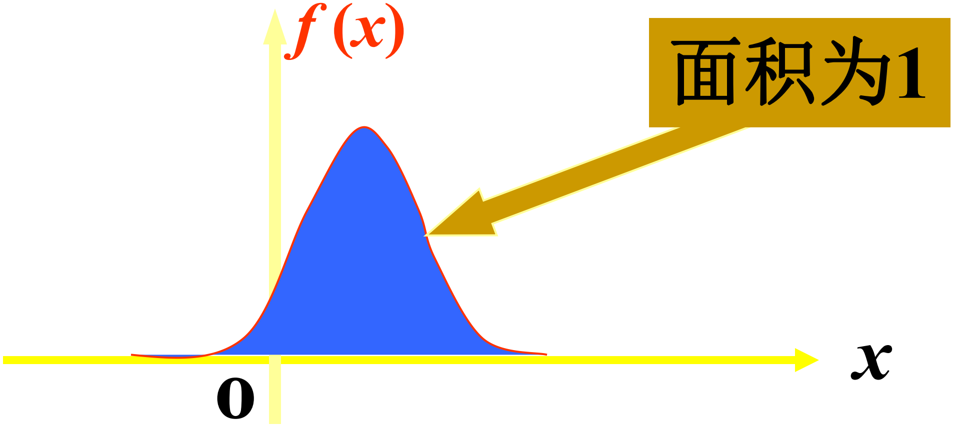
则称X为连续型随机变量，其中函数$f(x)$称为随机变量X的概率密度函数（ probability density function , p. d. f.），简称为概率密度或密度函数。

2. 概率密度函数的性质

1° $f(x) \geq 0$

2° $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

这两条性质是判定一个函数 $f(x)$是否为某$r.vX$的概率密度函数的充要条件.



3° $P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

几何意义：P$\{x_1<X\le x_2\}$等于区间$(x_1, x_2]$上以$y=f(x)$为边的曲边梯形的面积.

3．概率密度$f(x)$与分布函数$F(x)$的关系：

(1) $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

(2) 在$f(x)$的连续点x处，$f(x)=F'(x)$.

注意：对于$F(x)$不可导的点x处，$f(x)$在该点x处的函数值可任意给出。(参见引例)

例1：设随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

（1）试确定常数k，（2）求F(x)，(3)并求P{X>0.1}。

解：（1）由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} ke^{-3x}dx=\frac{k}{3}=1$

解得k=3.

于是X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 3e^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

(2) 从而

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}\int_0^x 3e^{-3t}dt=1-e^{-3x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

即$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-3x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

（3）$P\{X>0.1\}=\int_{0.1}^{\infty} f(x)dx=\int_{0.1}^{\infty}3e^{-3x}dx=e^{-0.3}\approx 0.7408$

练：确定常数A,B的值，使

$$F(x)=\begin{cases} Ae^{x}, x<0, \\ B-Ae^{-x}, x\ge 0. \end{cases}$$

为连续型随机变量X的分布函数，并求出X的概率密度及概率P{-1<X<2}。

解：由分布函数的性质知 $1=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=B$

所以 B=1.

又由连续型随机变量的分布函数的连续性知F(x)在x=0处有F(0-0)=F(0), 即：A=1-A,

所以：A=1/2

于是X分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, x<0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, x\geq 0.\end{cases}$$

X的概率密度为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & x<0\\ \frac{1}{2}e^{-x} & x\geq 0\end{cases}=\frac{1}{2}e^{-|x|}$$

$$\boldsymbol{P\{-1<X<2\}=F(2)-F(-1)=1-\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{2}e^{-1}}$$

3. 对 $f(x)$的进一步理解:

若x是 $f(x)$的连续点，则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X \le x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$$

$$= f(x)$$

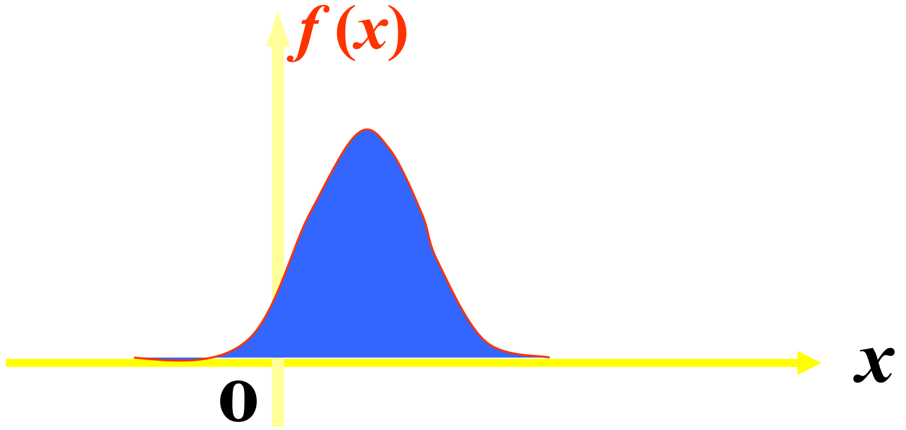
故 X的密度 $f(x)$ 在 x 这一点的值，恰好是 X落在区间 $(x, x + \Delta x]$上的概率与区间长度 Δx 之比的极限. 因此，如果把概率理解为质量，则 $f(x)$相当于线密度.

若不计高阶无穷小，有：

$$P\{x < X \le x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x$$

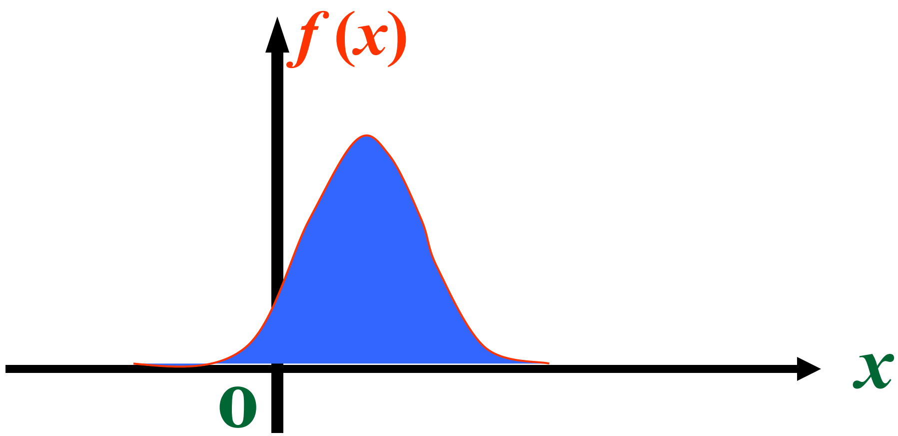
它表示随机变量 X 取值于 $(x, x+\Delta x]$ 的概率近似等于 $f(x)\Delta x$.

$f(x)\Delta x$ 在连续型 $r.v$ 理论中所起的作用与 $P(X = x_k) = p_k$ 在离散型 $r.v$ 理论中所起的作用相类似.



要注意的是，密度函数 $f(x)$在某点处a的高度，并不等于X取该值的概率．但是，$f(a)$越大，则X在a附近取值的概率就越大．也可以说，随机变量X在某点密度曲线的高度反映了X的值落在该点附近的概率大小.

由于连续型 $r.v$唯一被它的密度函数所确定. 所以，若已知密度函数，该连续型 $r.v$ 的概率规律就得到了全面描述.



下面给出几种重要连续型分布及相关例子.

二、三种重要的连续型分布：

1．均匀分布(Uniform Distribution)　设连续随机变量X具有概率密度

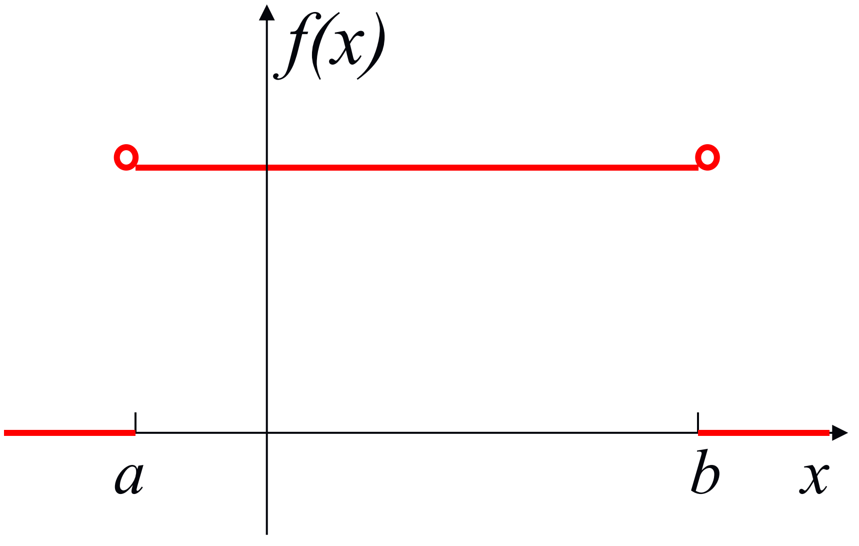
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

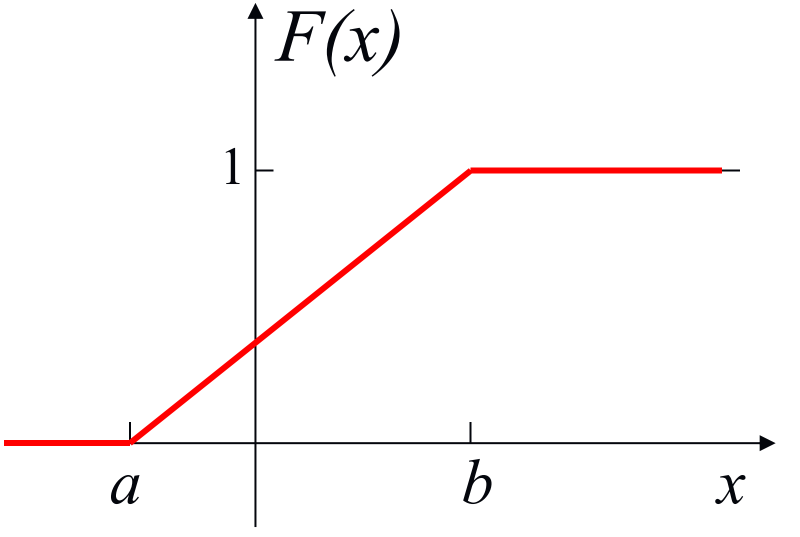
则称X在区间(a，b)上服从**均匀分布**，记为**X~U(a，b)**.

显然，若**X~U(a，b)**，则X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$

f(x)及***F(x)***的图形分别如:





均匀分布常见于下列情形：

如在数值计算中，由于四舍五入，小数点后某一位小数引入的误差；

公交线路上两辆公共汽车前后通过某汽车停车站的时间，即乘客的候车时间等.

例2 某公共汽车站从上午7时起，每15分钟来一班车，即 7:00，7:15，7:30, 7:45 等时刻有汽车到达此站，如果乘客到达此站时间 X 是 7:00 到 7:30 之间的均匀随机变量, 试求他候车时间少于5 分钟的概率.

解：以7:00为起点0，以分为单位

依题意，$X \sim U(0, 30)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & 0<x<30\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

从上午7时起，每15分钟来一班车，即 7:00，7:15，7:30等时刻有汽车到达汽车站，

为使候车时间少于 5 分钟，乘客必须在 7:10 到 7:15 之间，或在7:25 到 7:30 之间到达车站.

所求概率为:

$$P\{10 < X < 15\} + P\{25 < X < 30\}$$

$$= \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}, & 0 < x < 30 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

即乘客候车时间少于5 分钟的概率是1/3.

(1). 均匀分布的特性：若X~U(a，b)，对于任意的区间 $(c, c+l)\in(a, b)$，则

$$P\{c<X<c+l\}=\int_{c}^{c+l}\frac{1}{b-a}dx=\frac{l}{b-a}$$

即X落在(a, b)内长度相同的子区间内的概率相同，这个概率只依赖于区间的长度而不依赖于区间的位置。

(2). 在区间[a，b]上（内）随机取点就意味着所取点的坐标X服从[a，b]上（内）的均匀分布。

2. 指数分布（Exponential Distribution)

若 r.v X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$\lambda>0$

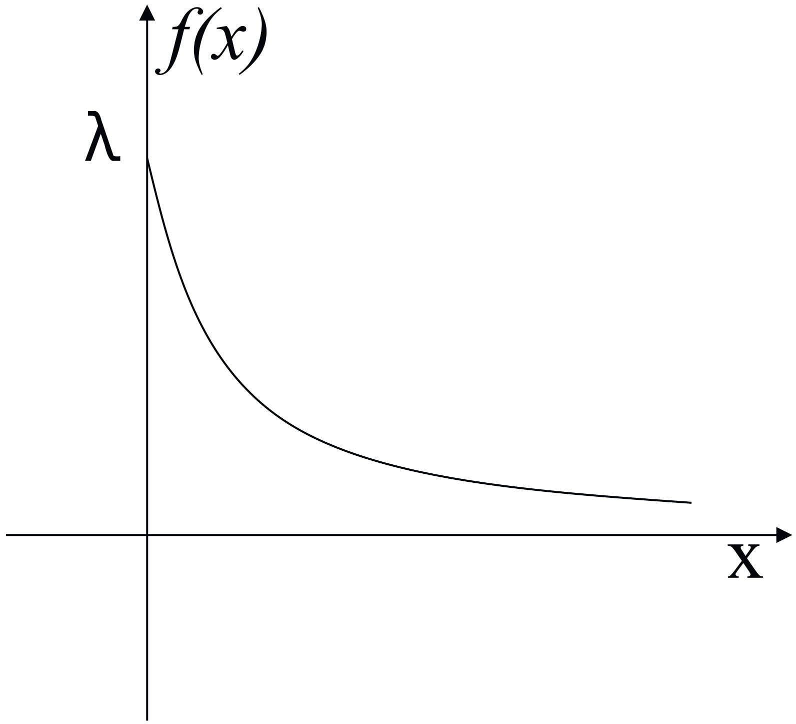
则称X服从参数为λ的指数分布，记为

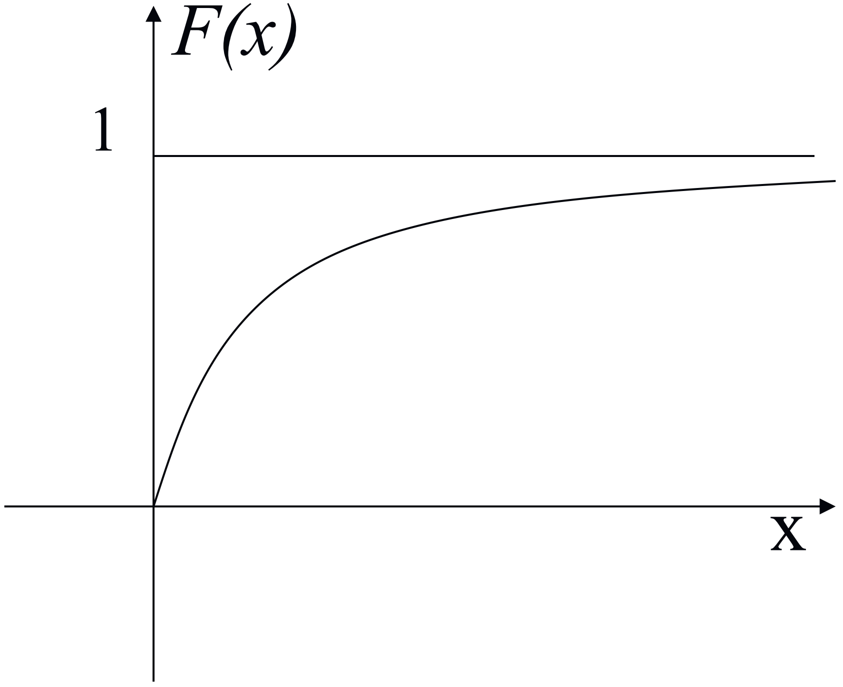
$$X\sim e(\lambda)$$

易证，此时X的分布函数为

$$\boldsymbol{F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}}$$

$f(x)$及$F(x)$的图形





设随机变量X服从参数为λ的指数分布，则对于任意的s>o，t>0，有

$$P\{X \ge s+t \mid X \ge s\} = \frac{P\{X \ge s+t, X \ge s\}}{P\{X \ge s\}}$$

$$= \frac{P\{X \ge s+t\}}{P\{X \ge s\}} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$$

即P{X≥s+t|X≥s}=P{X≥t}。

人们将指数分布的这个特性成为“无记忆性”。

指数分布常用于可靠性统计研究中，如元件的寿命.

例3 设设备在任何长度为t的 时间内发生故障的次数 $N(t) \sim P(\lambda t)$,求相继两次故障的间隔时间T的分布函数。

解：t>0时, {T>t}= {相继两次故障的时间间隔大于t}={在[0，t]时间内未发生故障}={N(t)=0}，即

{T>t}={N(t)=0}

$$\text{所以 } P\{T > t\} = P\{N(t) = 0\} = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t},$$

$$P\{T \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t} = F(t)$$

$$\text{所以} F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

T服从参数为λ的指数分布。

3. 正态分布(Normal Distribution)

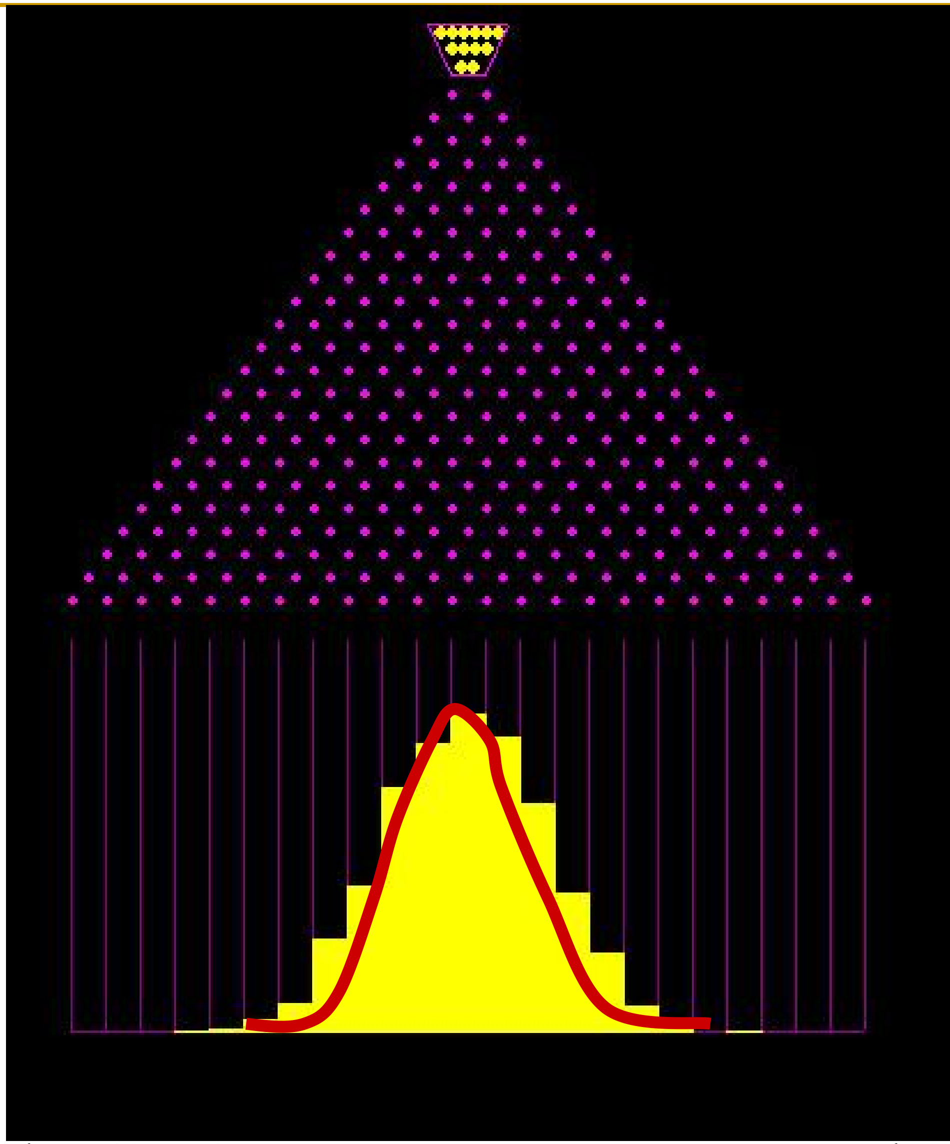
若r.v X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

其中 μ 和 σ^2 都是常数, μ 任意, $\sigma>0$, 则称X服从参数为μ和 σ^2的正态分布，记作

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)$$

$f(x)$所确定的曲线叫作正态曲线.



高尔顿钉板试验

这条曲线就近似我们将要介绍的正态分布的密度曲线。

验证$f(x)$是一个合理的概率密度函数:

①显然，$f(x) \geqq 0$;

②下面验证 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

对于积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$, 作代换 $t=\frac{x-\mu}{\sigma}$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

因为$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$,所以$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

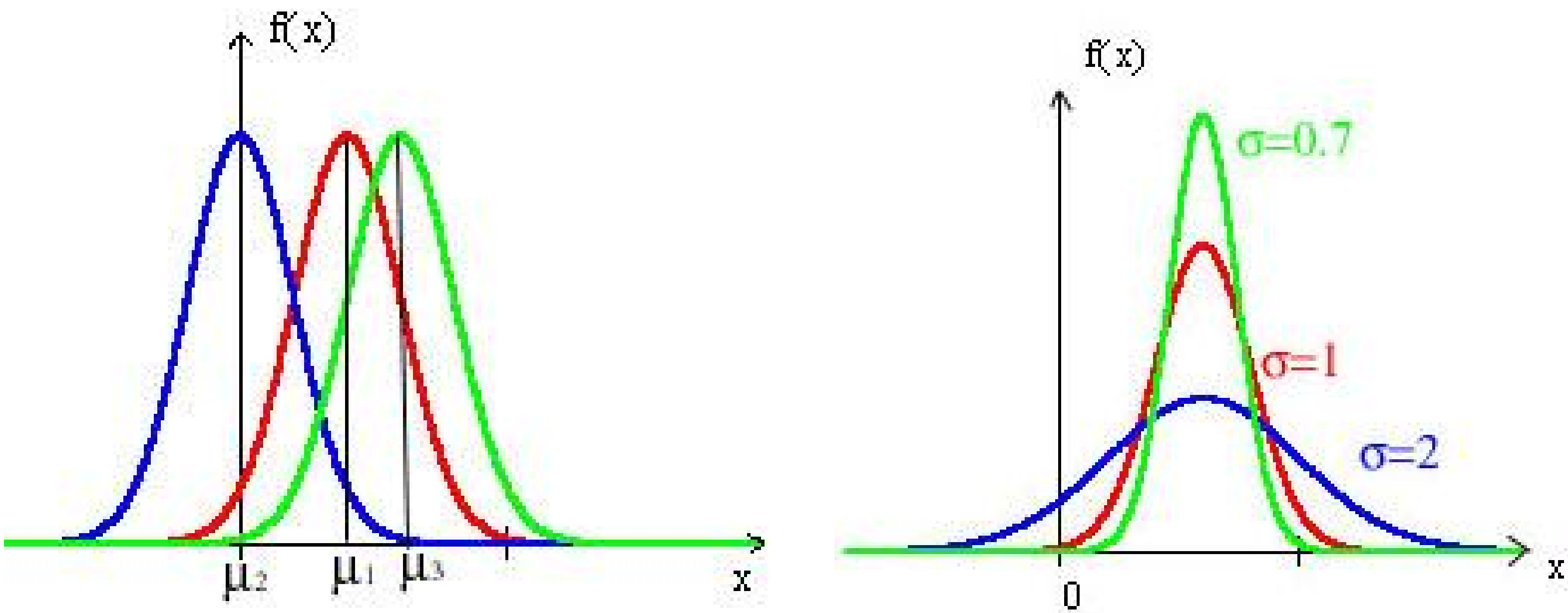
正态分布是应用最广泛的一种连续型分布.

德莫佛(**Abraham De Moivre**,1667-1754)最早(1734年）发现了二项概率的一个近似公式，这一公式被认为是正态分布的首次露面.

德莫佛


AD3806003S7
DEUTSCHE BUNDESBANK
Banknote
10
1777–1855 Carl Friedr. Gauß
ZEHN DEUTSCHE MARK
Deutsche Bundesbank
Frankfurt am Main
2. Januar 1989
AD3806003S7

正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的图形特点



μ 决定了图形的中心位置，σ 决定了图形中峰的陡峭程度.

*我们可以根据密度函数的表达式，得出正态分布的图形特点：

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

容易看到，$f(x)>0$

即整个概率密度曲线都在x轴的上方。

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

令$x=\mu+c$，$x=\mu-c$ $(c>0)$，分别代入$f(x)$，可得

$$f(\mu+c)=f(\mu-c)$$

且 $f(\mu+c)\le f(\mu)$, $f(\mu-c)\le f(\mu)$

故$f(x)$以μ为对称轴，并在$x=\mu$处达到最大值：

$$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

当$x\rightarrow \pm\infty$时，$f(x)\rightarrow 0$,

这说明曲线 $f(x)$向左右伸展时，越来越贴近x轴, 即$f(x)$以x轴为渐近线。

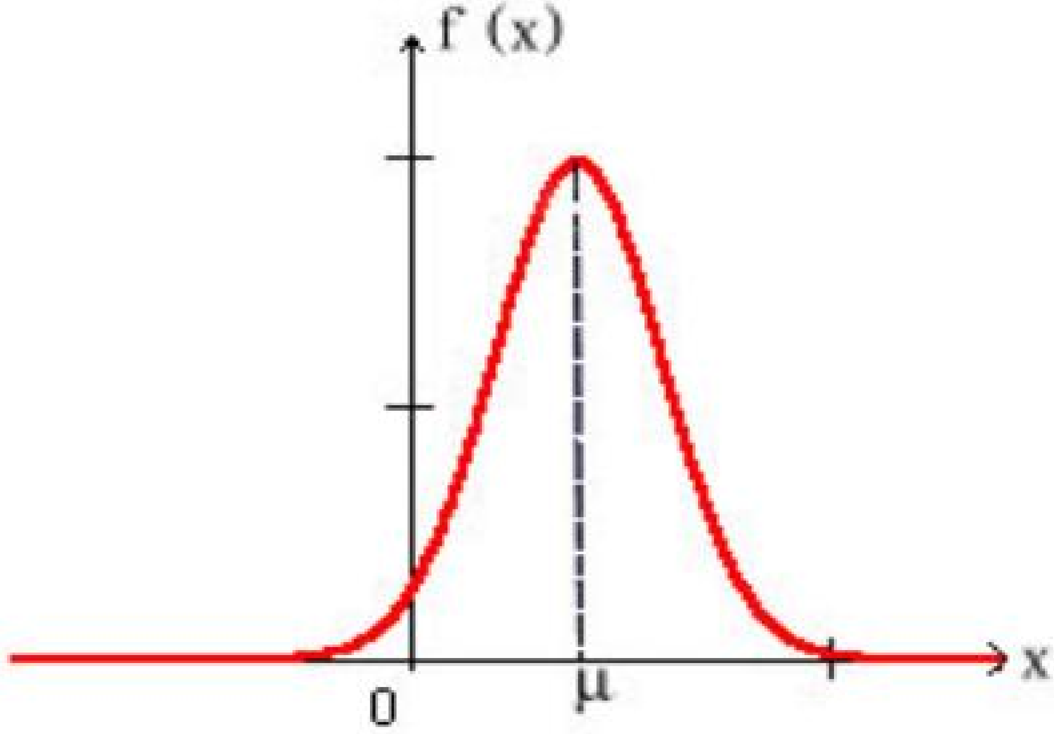
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

用求导的方法可以证明，

$$x=\mu\pm\sigma$$

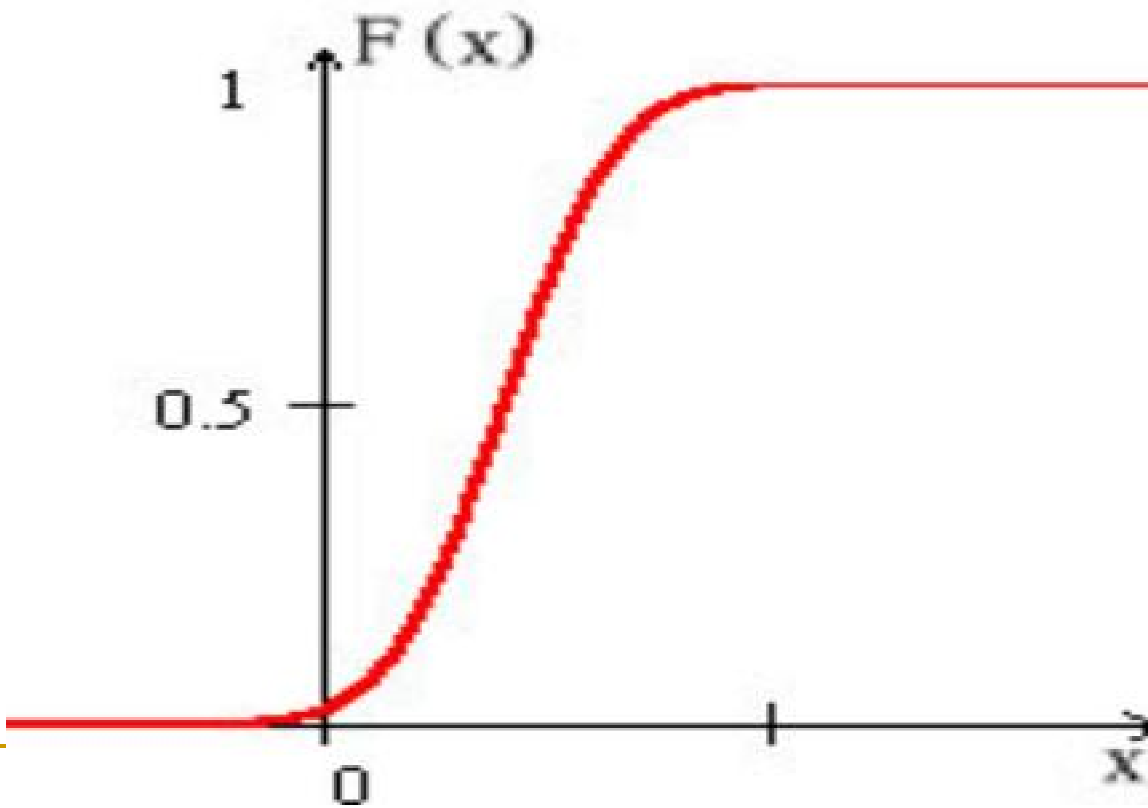
为$f(x)$的两个拐点的横坐标。

根据对密度函数的分析，可以初步画出正态曲线的图形：



服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量 X的分布函数

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt,\quad -\infty<x<\infty$$



正态分布由它的两个参数μ和σ唯一确定， 当μ和σ不同时，得到不同的正态分布。其中最重要的是

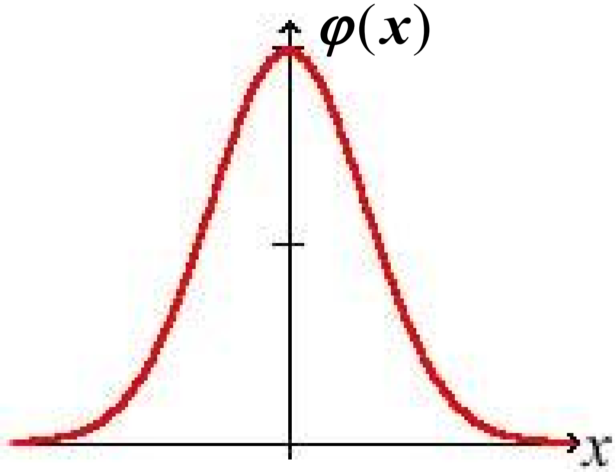
标准正态分布

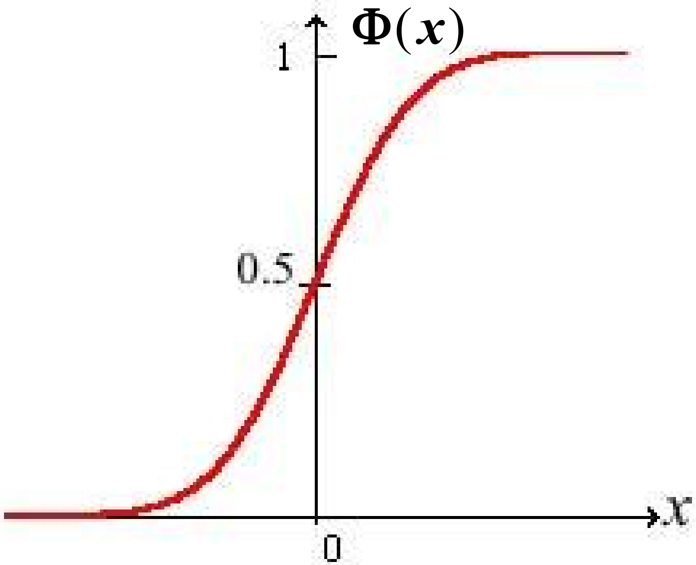
$\mu=0,\sigma=1$ 的正态分布称为标准正态分布.

其密度函数和分布函数常用$\varphi(x)$和$\Phi(x)$表示:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty$$

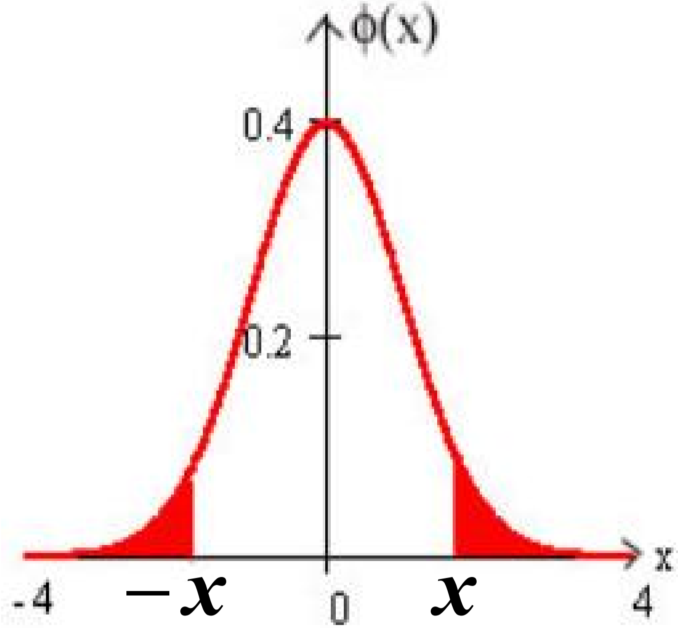
$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$





正态分布表

书末附有标准正态分布的分布函数的数值表，有了它，可以解决一般正态分布的概率计算查表.



$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

表中给的是x>0时, $\Phi(x)$的值.

当$-x$<0时

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

标准正态分布的重要性在于：

任何一个一般的正态分布都可以通过线性变换转化为标准正态分布.

它的依据是下面的定理：

定理1

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

根据定理1, 只要将标准正态分布的分布函数制成表，就可以解决一般正态分布的概率计算问题.

若 $X \sim N(0,1)$,

$$P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Y \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

3σ准则

由标准正态分布的查表计算可以求得，

当$X \sim N(0, 1)$时，

$$P(|X| \leq 1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$

$$P(|X| \leq 2) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544$$

$$P(|X| \leq 3) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9974$$

这说明，X的取值几乎全部集中在$[-3,3]$区间内，超出这个范围的可能性仅占不到0.3%.

将上述结论推广到一般的正态分布，

$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$时，

$$P(|Y-\mu| \leq \sigma) = 0.6826$$

$$P(|Y-\mu| \leq 2\sigma) = 0.9544$$

$$P(|Y-\mu| \leq 3\sigma) = 0.9974$$

可以认为，Y的取值几乎全部集中在

$[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 区间内.

这在统计学上称作“3σ 准则”

（三倍标准差原则）.

例4： 设$X \sim N(1.5，2^2)$，求$P\{-1 \le X \le 2\}$。

解：

$$P\{-1 \le X \le 2\} = \Phi\left(\frac{2-1.5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-1.5}{2}\right)$$

$$= \Phi(0.25) - \Phi(-1.25) = \Phi(0.25) + \Phi(1.25) - 1$$

$$= 0.5987 + 0.8944 - 1$$

$$= 0.4931$$

例5 设$X \sim N(3, 4)$，求数c，使得 $P\{X>c\}=2P\{X\le c\}$。

解：
$$P\{X \le c\} = \Phi\left(\frac{c-3}{2}\right)$$
$$P\{X > c\} = 1 - P\{X \le c\} = 1 - \Phi\left(\frac{c-3}{2}\right)$$

因此题设条件可写为$1-\Phi\left(\frac{c-3}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{c-3}{2}\right)$

故$\Phi\left(\frac{c-3}{2}\right) = \frac{1}{3}$，从而$\Phi\left(\frac{3-c}{2}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

查表可得：$(3-c)/2=0.43$， 于是$c=2.14$

例6 假设测量的随机误差$X\sim N(0\ ,\ 10^2)$,试求在100次独立重复测量中至少有三次测量误差的绝对值大于19.6的概率α,并利用Possion分布求α的近似值。

解：设p为每次测量时误差绝对值大于19.6的概率,则

$$p=P\{|X|>19.6\}=P\{|X|/10 > 19.6/10\}$$

$$=P\{|X|/10>1.96\} =1- P\{|X|/10\le 1.96\}$$

$$=1-[\Phi(1.96)-\Phi(-1.96)]$$

$$=1-\Phi(1.96)+1-\Phi(1.96)=2-2\Phi(1.96)$$

$$=0.05$$

设Y表示100次独立测量中“测量误差大于19.6”这一事件发生的次数,则 Y~*b*(100 , 0.05)。因为

$$\lambda = np = 100 \times 0.05 = 5$$

所以

$$\alpha = P\{Y \geq 3\} \approx \sum_{k=3}^{\infty} \frac{5^k e^{-5}}{k!} = 0.8753$$

再看一个应用正态分布的例子:

例8 公共汽车车门的高度是按男子与车门顶头碰头机会在0.01以下来设计的. 设男子身高$X \sim N(170, 6^2)$, 问车门高度应如何确定?

解: 设车门高度为h cm, 按设计要求

$$P(X \geq h) \leq 0.01$$

或 $$P(X < h) \geq 0.99,$$

下面我们来求满足上式的最小的 h.

求满足 $P(X< h) \geq 0.99$ 的最小的 h.

因为 $X\sim N(170, 6^2)$, 所以 $\dfrac{X-170}{6} \sim N(0,1)$

由 $P(X< h)= \Phi(\dfrac{h-170}{6}) \geq 0.99$

查表得 $\Phi(2.33)=0.9901>0.99$

所以 $\dfrac{h-170}{6}=2.33$,

即 $h=170+13.98 \approx 184$

设计车门高度为184厘米时，可使男子与车门碰头机会不超过0.01.