质点运动学

1. 描述质点运动的物理量

(1) 位矢：从坐标原点引向质点所在位置的有向线段。

在直角坐标系中 $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

(2) 运动方程

在直角坐标系中 $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$

直角坐标系中分量表示 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

在自然坐标中 $s = s(t)$

(3)位移：由质点的初始位置指向末位置的矢量。

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

在直角坐标系中 $\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\, j + \Delta z k$

(4)路程：物体运动时沿轨迹实际通过的路径长度称为路程，用s 表示.

一般情况下 $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$ **但** $|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$

(5)速度：质点位置对时间的一阶导数称为速度， $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

在直角坐标系中 $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\, j + v_z k$

$$= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} j + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} k$$

在自然坐标中 $$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\hat{t}$$

速度的大小称为速率，速率是标量 $$\upsilon=|\vec{\upsilon}|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

(6) 加速度: 质点运动速度对时间的一阶导数或位移对时间的二阶导数

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在直角坐标系中 $$\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y j+a_z k$$

$$=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}j+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}k$$

在自然坐标中 $$\vec{a}=a_\mathrm{t}\hat{t}+a_\mathrm{n}n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{t}+\frac{v^2}{\rho}n$$

2。 圆周运动的角量描述：

角位置： $\theta = \theta(t)$

角位移： $\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$

角速度： $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\upsilon}{R}$

角加速度: $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

法向加速度： $a_{\mathrm{n}} = \dfrac{\upsilon^2}{R} = R\omega^2$ **（指向圆心）**

切向加速度： $a_{\mathrm{t}} = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = R\beta$ **（沿切线方向）**

3. 相对运动和伽利略变换

伽利略速度变换式： $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u}$

质点动力学

1. 牛顿运动定律

(1) 牛顿运动三定律

牛顿第一定律： 任何物体都保持静止或匀速直线运动的状态，直到其他物体作用的力迫使它改变这种状态为止。

牛顿第二定律：

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

当m不变时：

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\vec{a}$$

牛顿第三定律：

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

力的矢量叠加原理：

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$$

(2) 力学中几种常见的力

万有引力： $\vec{F}=-G\frac{m_1m_2}{r^2}\hat{r}$

重力： $\vec{F}_{\mathrm{G}}=m\vec{g}$

弹簧的弹性力： $\vec{F}=-kx\vec{i}$

静摩擦力： $F_{\mathrm{s}}\leq F_{\mathrm{smax}}$ $F_{\mathrm{smax}}=\mu_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{N}}$

滑动摩擦力： $F_{\mathrm{k}}=\mu_{\mathrm{k}}F_{\mathrm{N}}$

(3) 应用牛顿运动定律解题的一般步骤

选取研究对象；分析受力情况，画出受力图；选取坐标系；列方程求解；讨论。

(4) 牛顿运动定律的适用范围

宏观低速物体；惯性系。

2. 功和能

(1) 功 $$A_{ab}=\int_a^b \mathrm{d}A=\int_{r_a}^{r_b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

重力的功： $$A=mg(y_a-y_b)$$

万有引力的功： $$A=-Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

弹簧弹性力的功： $$A=\frac{1}{2}kx_a^2-\frac{1}{2}kx_b^2$$

摩擦力的功： $$A=-\mu_{\mathrm{k}}mgs$$

(2) 功率 $$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$$

(3) 动能定理

质点的动能定理： $$\int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{1}{2}m\upsilon_b^2-\frac{1}{2}m\upsilon_a^2$$

质点系的动能定理： $$A_{外}+A_{内}=E_{kb}-E_{ka}$$

(4) 保守力 $\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=0$ **(重力、万有引力、弹簧弹性力等都是保守力)**

(5) 势能 $$E_{pa}=\int_a^{b(\text{势能零点})}\vec{F}_{保}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

重力势能： $E_p=mgy$ **(以 $y=0$ 的平面为势能零点)**

万有引力势能： $E_p=-G\dfrac{m_1m_2}{r}$ **(以无穷远处为势能零点)**

弹簧弹性力势能： $E_p=\dfrac{1}{2}kx^2$ **(以弹簧原长处为势能零点)**

保守力作功与势能的关系： $A_{保}=-\Delta E_p=-(E_{pb}-E_{pa})$

(6) 功能原理

$$A_{外}+A_{内非}=E_b-E_a$$

(7) 机械能守恒定律 **当** $A_{外}+A_{非保内}=0$ **时，** $E_k+E_p=$ **常量。**

3. 动量和动量定理

(1) 冲量

元冲量： $$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t$$

t_1 至 t_2 时间内的冲量： $$\vec{I} = \int \mathrm{d}\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$$

(2) 动量定理

质点的动量定理： $$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

质点系的动量定理： $$\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i \vec{F}_i\right)\mathrm{d}t = \left(\sum_i m_i\vec{v}_{i2}\right) - \left(\sum_i m_i\vec{v}_{i1}\right)$$

(3) 动量守恒定律

当 $\sum_i \vec{F}_i = 0$ **时，** $\vec{p} = \sum_i m_i\vec{v}_i =$ **常矢量**

4. 角动量和角动量定理

(1) 力对固定点O的力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

(2) 质点对固定点O的角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$

(3) 角动量定理

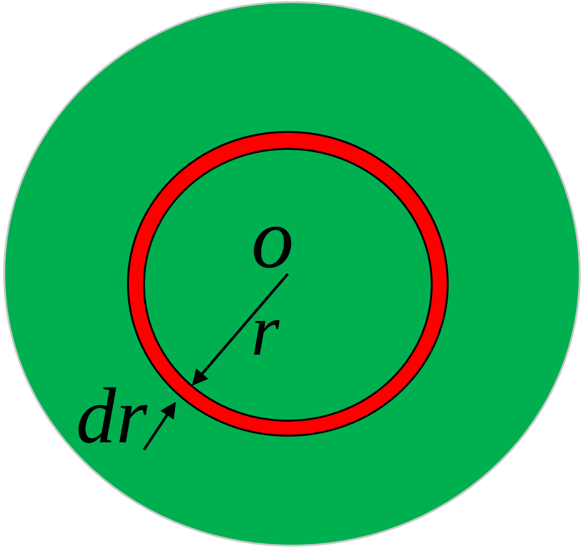
$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

(4) 角动量守恒定律 当$\vec{M}=0$时,$\vec{L}=$常矢量

例：质量为m，半径为R的圆盘，可绕过盘中心且垂直于盘面的轴转动，在转动过程中单位面积所受空气的阻力为 $f = -kv$

$t = 0$ 时，圆盘的角速度为 ω_0 若盘在任意时刻的速度 $\omega = \omega(t)$

求：盘在任意时刻的力矩



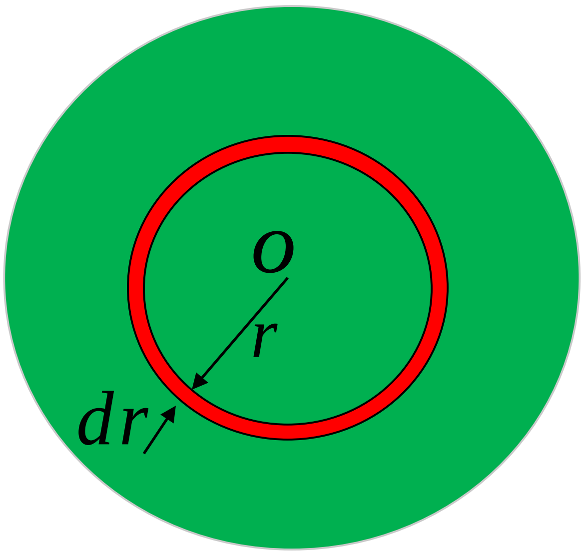
解：取半径为r宽为dr的圆带

作用在该圆带上的力矩：

$$dM = r \times (2\pi r dr) f$$

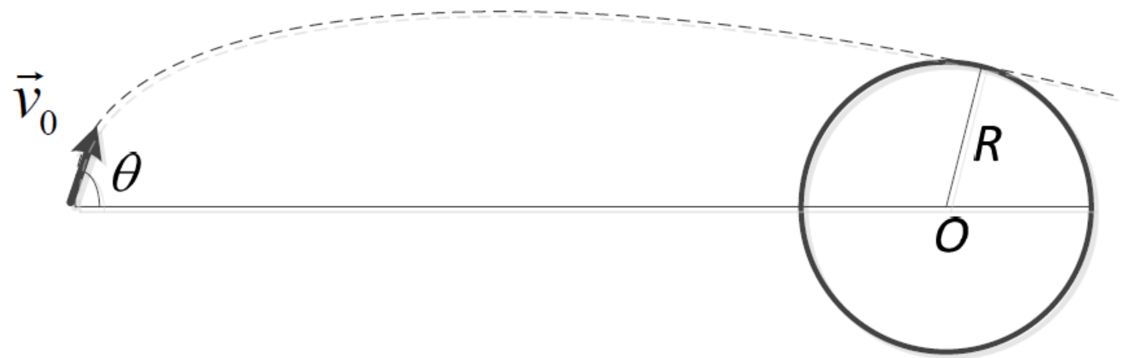
$$= -2\pi k v r^2 dr$$

$$= -2\pi k \omega r^3 dr$$



$$M = -\int_0^R 2\pi k \omega r^3 dr = -\frac{1}{2}\pi k R^4 \omega$$

例：有一宇宙飞船欲考察一质量为M、半径为R 的行星。如图所示，相对于行星，当飞船静止于太空并且距离行星中心$4R$ 处时，以初速度$\overrightarrow{V_0}$发射一质量为m 的探测器($m<<M$)，要使探测器恰好擦着行星表面着陆，则发射时的倾角θ应为多少？



由角动量守恒可得：$4Rmv_0 \sin\theta = Rmv$

由机械能守恒 $$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{4R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

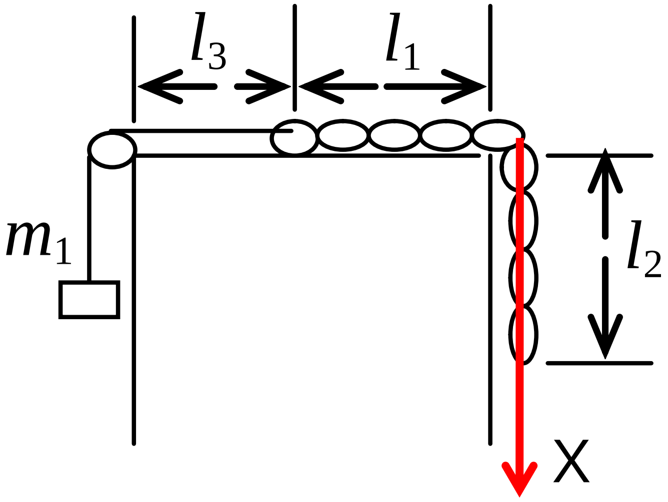
$$\theta = \arcsin[\frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{3GM}{2Rv_0^2}}]$$

例：已知一质量为m的质点在x轴上运动，质点只受指向原点的引力的作用，引力大小与质点离原点的距离x的平方成反比，即 $f=-k/x^2$

，k是比例常数．设质点在 x=A时的速度为零，质点在x=A /4处的速度的大小．

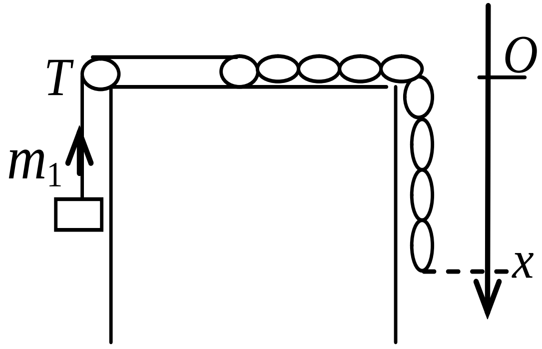
例：一支点以初速度 v0 作直线运动，初始位移为零，因受阻力作减速运动，加速度与速度之间的关系为$a = -kv^2$ ，试求速度随位移的变化规律

例质量m =10 kg、长l =40 cm的链条，放在光滑的水平桌面上，其一端系一细绳，通过滑轮悬挂着质量为m_1 =10 kg的物体，如图所示．$t = 0$时,系统从静止开始运动, 这时$l_1 = l_2$ =20 cm< l_3．设绳不伸长，轮、绳的质量和轮轴及桌沿的摩擦不计，求当链条刚刚全部滑到桌面上时，物体m_1速度和加速度的大小．



分别取m_1和链条m为研究对象，坐标如图.

设链条在桌边悬挂部分为x，



$$m_1 g - T = m_1 a$$
$$T - xgm/l = ma$$

解出 $a = \frac{1}{2} g(1 - x/l)$

当链条刚刚全部滑到桌面时$x = 0$，$a = \frac{1}{2} g = 4.9\ \mathrm{m/s^2}$

$$a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\upsilon \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}$$

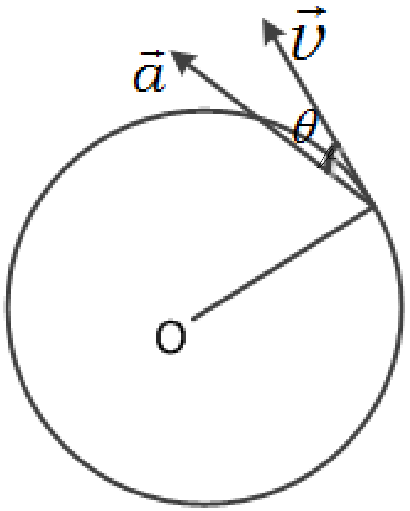
$$\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon = -a\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} g(1 - x/l)\,\mathrm{d}x$$

两边积分 $\int_0^{\upsilon} 2\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon = -\int_{l_2}^{0} g(1 - \frac{x}{l})\,\mathrm{d}x$

$$\upsilon^2 = gl_2 - \frac{1}{2} gl_2^2/l = (3/4) gl_2$$

$\upsilon = \frac{1}{2}\sqrt{3gl_2} = 1.21\ \mathrm{m/s}$ （也可用机械能守恒解υ）

例、一质点沿半径为R的圆周轨道运动，初速率为v0，其加速度方向与速度方向之间的夹角θ恒定，试求质点的速率v与时间的关系。



解：有已知，可得 $a_t = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}, a_n = \frac{v^2}{R}$

又 $\frac{a_t}{a_n} = ctg\theta$

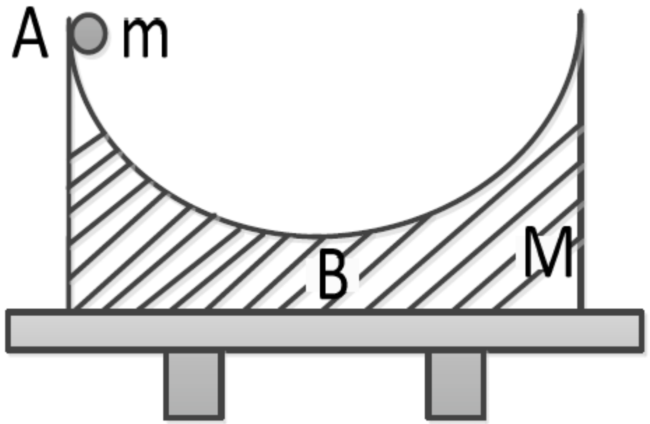
则有 $\mathrm{d}\upsilon = \frac{v^2}{R} ctg\theta\, \mathrm{d}t$

即 $\frac{\mathrm{d}\upsilon}{v^2} = \frac{ctg\theta}{R}\mathrm{d}t$

两边积分 $\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}\upsilon}{v^2} = \int_0^t \frac{ctg\theta}{R}\mathrm{d}t$

求得 $\upsilon = \frac{v_0 R}{R - v_0 t ctg\theta}$

例、一质量为 m 的小球，从内壁为半球形的容器边缘点 A 滑下。设容器质量为 M，半径为 R， 内壁光滑，并放于水平桌面上，桌面摩擦可以忽略不计。一开始小球和容器都处于静止状 态。当小球沿内壁滑到容器底部的 B 处时，求此时受到的向上的支持力。



解答：设小球速率 v_m ，容器速率为 v_M ，则由动量守恒和能量守恒定律，则有

$$Mv_M - mv_m = 0$$

$$\frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 = mgR$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2MgR}{M+m}} \qquad v_M = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2MgR}{M+m}}$$

小球与容器之间有相对运动，相对于容器的运动速度大小为

$$v'_m = v_m - (-v_M)$$

则以容器为参考系时，小球做圆周运动，分析其法线方向，则有

$$F - mg = \frac{mv'^2_m}{R}$$

可得小球所受的支持力为

$$F = mg\left(3 + \frac{2m}{M}\right)$$