全微分及其应用

一、全微分的定义

根据一元函数微分学中增量与微分的关系,有

偏增量与偏微分:

$f(x+\Delta x, y)-f(x, y)\approx f_x(x, y)\Delta x,$

$f(x+\Delta x, y)-f(x,y)$为函数对 x 的偏增量, $f_x(x, y)\Delta x$ 为函数对 x 的偏微分;

$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)\approx f_y(x, y)\Delta y,$

$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)$为函数对 y 的偏增量, $f_y(x, y)\Delta y$ 为函数对 y 的偏微分.

全增量: $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$.

计算全增量比较复杂,我们希望用 Δx、Δy 的线性函数来近似代替之.

定义 如果函数 $z=f(x, y)$在点(x, y)的全增量

$$\Delta z= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)\ (\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\ ),$$

其中 A、B 不依赖于 Δx、Δy 而仅与 x、y 有关，则称函数 $z=f(x, y)$在点(x, y)可微，而称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x, y)$在点(x, y)的全微分，记作 dz，即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$

如果函数在区域 D 内各点处都可微分，那么称这函数在 D 内可微分.

定理(可微必要条件)

如果函数 $z=f(x, y)$在点(x, y)可微分，则

(1) 函数在该点连续；

(2) 函数在该点的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$必定存在，且函数 $z=f(x, y)$在点(x, y)的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

证：（1）如果 $z=f(x, y)$在点(x, y)可微, 则

$$\Delta z= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

$$\lim_{\rho\to 0}\Delta z=0,$$ 从而

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y)=\lim_{\rho\to 0}[f(x,y)+\Delta z]=f(x,y),$$

即 $$\lim_{(u,v)\to(x,y)} f(u,v)=f(x,y),$$

因此函数 $z=f(x, y)$在点(x, y)处连续.

(2) 设函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)可微分. 于是有$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$.

特别当$\Delta y=0$ 时有

$$f(x+\Delta x, y)-f(x, y)=A\Delta x+o(|\Delta x|).$$

上式两边各除以Δx, 再令$\Delta x\to 0$ 而取极限, 就得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[A+\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}]=A,$$

从而$\frac{\partial z}{\partial x}$存在, 且$\frac{\partial z}{\partial x}=A$. 同理$\frac{\partial z}{\partial y}$存在, 且$\frac{\partial z}{\partial y}=B$. 所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在是可微的必要条件，但不是充分条件.

由定义知, $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微分的充分必要条件是

$f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ 都存在且

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\rho}=0,$$

其中 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

例如，函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$

在点(0,0)处虽然有 $f_x(0,0)=0$ 及 $f_y(0,0)=0$,但函数在(0,0)不可微分,

即$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]$不是较 ρ 高阶的无穷小.

这是因为当$(\Delta x, \Delta y)$沿直线 $y=x$ 趋于(0, 0)时,

$$\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{\Delta x\cdot\Delta x}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,\ 0)\cdot\Delta x+f_y(0,\ 0)\cdot\Delta y]}{\rho}\neq 0.$$

(事实上，此极限不存在！)

例 1. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在，但不可微.

证： 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$\left|f(x,y)\right|=\left|\frac{x^2y^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\right|\leq\frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$$，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0),$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续；

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在；

但

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,\ 0)\cdot\Delta x+f_y(0,\ 0)\cdot\Delta y]}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^2}\neq 0$$

(事实上，此极限不存在),

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

定理(可微的充分条件)

如果函数 $z=f(x, y)$的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点(x, y)连续，则函数在该点可微分.

证： $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$= \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) \right] + \left[f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \right],$$

根据 Lagrange 微分中值定理，存在$\theta_1, \theta_2 \ (0<\theta_i<1, i=1,2)$，使得

$$\Delta z = f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y.$$

因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点(x, y)连续，有

$$\lim_{\rho\to 0} f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y), \quad \lim_{\rho\to 0} f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x,y),$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

所以

$$f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)=f_x(x,y)+\alpha(\rho),\quad f_y(x,y+\theta_2\Delta y)=f_y(x,y)+\beta(\rho),$$

其中$\alpha(\rho),\beta(\rho)$当$\rho\to 0$时为无穷小；

$$\begin{aligned}\Delta z &= \left[f_x(x,y)+\alpha(\rho)\right]\Delta x+\left[f_y(x,y)+\beta(\rho)\right]\Delta y\\ &= f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+\alpha(\rho)\Delta x+\beta(\rho)\Delta y,\end{aligned}$$

由$\left|\dfrac{\alpha(\rho)\Delta x+\beta(\rho)\Delta y}{\rho}\right|\le|\alpha(\rho)|+|\beta(\rho)|\to 0\ (\rho\to 0)$可知

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha(\rho)\Delta x+\beta(\rho)\Delta y}{\rho}=0,$$ 即$\alpha(\rho)\Delta x+\beta(\rho)\Delta y=o(\rho)$，于是

$$\Delta z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+o(\rho),$$

由定义知，函数 $z=f(x,y)$在点(x, y)可微分.

注意：偏导连续只是函数可微的充分条件，不是必要条件.
即可微函数的偏导数未必连续.

例 2. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$，证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微;但偏导函数 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

证： 首先 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$，

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-[f_x(0,\ 0)\cdot\Delta x+f_y(0,\ 0)\cdot\Delta y]}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cos\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0,$$

（ 这是因为 $\left|\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cos\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right|\le\dfrac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\dfrac{\rho}{2}\to0\,(\rho\to0)$ ）

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微;

当$(x,y)\neq(0,0)$时，$f(x,y)=xy\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$，

$$f_x(x,y)=y\cos\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f_y(x,y)=x\cos\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$\left|y\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le|y|\to 0\ \left((x,y)\to(0,0)\right),\quad \left|x\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le|x|\to 0\ \left((x,y)\to(0,0)\right);$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{2x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\sin\frac{1}{2x^2}\text{不存在},$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\sin\frac{1}{2x^2}\text{不存在},$$

从而$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_y(x,y)$均不存在，

所以偏导函数$f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$在点$(0,0)$处不连续.

以上两个定理的结论可推广到三元及三元以上函数.

按着习惯, Δx、Δy 分别记作 dx、dy, 并分别称为自变量的微分,则函数 $z=f(x, y)$的全微分可写作

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\ .$$

二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和

类似，三元函数 $u=f(x, y, z)$的全微分为

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\ .$$

全微分的四则运算

定理. 设多元函数u,v可微分，则函数$u\pm v,uv,\frac{u}{v}(v\neq 0)$可微分，且

(1) $d(u\pm v)=du\pm dv$；

(2) $d(uv)=vdu+udv$；

(3) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$.

例 3 计算函数 $z=x^2y+y^2$ 的全微分.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y,\quad dz=2xydx+\left(x^2+2y\right)dy$

另解：
$$dz=d\left(x^2y\right)+d\left(y^2\right)=2xydx+x^2dy+2ydy$$
$$=2xydx+\left(x^2+2y\right)dy.$$

例 4 计算函数 $z=e^{xy}$ 在点(2, 1)处的全微分.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)} = e^2$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)} = 2e^2$,

$$\left.dz\right|_{(2,1)} = e^2 dx + 2e^2 dy$$

例 5 计算函数 $u = x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解： $\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz},\ \frac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz}$,

$$du = dx + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz}\right)dy + ye^{yz}dz$$

例 6 求函数 $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ 当 x=2,y=1,Δx=0.01,Δy=0.03 时的全增量与全微分.

解:

$$\Delta z=\frac{(x+\Delta x)(y+\Delta y)}{(x+\Delta x)^2-(y+\Delta y)^2}-\frac{xy}{x^2-y^2}$$

$$dz=\frac{-y\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)^2}\Delta x+\frac{x\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)^2}\Delta y$$

将 x=2,y=1,Δx=0.01,Δy=0.03 代入得:

$$\Delta z=\frac{2.01\times1.03}{(2.01)^2-(1.03)^2}-\frac{2\times1}{2^2-1^2}\approx0.0283,$$

$$dz=\frac{-1\times5}{3^2}\times0.01+\frac{2\times5}{3^2}\times0.03\approx0.0278.$$

全微分在近似计算中的应用*

当 $z=f(x,y)$在点(x,y)的两个偏导数连续,并且$|\Delta x|,|\Delta y|$都很小时,有近似等式:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y)\approx f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y;$$

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y.$$

例 计算$1.04^{2.02}$的近似值

解：设函数$z=f(x,y)=x^y$， 要求$f(1.04,2.02)$的近似值,

取$x=1, \Delta x=0.04$， $y=2, \Delta y=0.02$， 则

$$f(1.04,2.02)\approx f_x(1,2)0.04+f_y(1,2)0.02+f(1,2)=1.08$$