隐函数的求导法则

一、一个方程的情形

隐函数存在定理 1

设函数 $F(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$的某一邻域内具有连续偏导数, $F(x_0, y_0)=0$, $F_y(x_0, y_0)\neq 0$，则方程 $F(x, y)=0$ 在点(x_0, y_0)的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

求导公式证明:

将 $y=f(x)$代入 $F(x, y)=0$，得恒等式 $F(x, f(x))\equiv 0$,

等式两边对 x 求导得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

由于 F_y 连续，且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，所以存在(x_0, y_0)的一个邻域，在这个邻域同 $F_y\neq 0$，于是得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

例 1 验证方程 $x^2+y^2-1=0$ 在点(0, 1)的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数、当 $x=0$ 时 $y=1$ 的隐函数 $y=f(x)$，并求这函数的一阶与二阶导数在 $x=0$ 的值.

解： 设 $F(x, y)=x^2+y^2-1$，则 $F_x=2x$, $F_y=2y$, $F(0, 1)=0$, $F_y(0, 1)=2\neq0$. 因此由隐函数存在定理可知，方程 $x^2+y^2-1=0$ 在点(0, 1)的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数、当 $x=0$ 时 $y=1$ 的隐函数 $y=f(x)$.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x}{y},\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{y-x(-\frac{x}{y})}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3},$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=-1.$$

函数存在定理 2

设函数 $F(x, y, z)$在点 $P(x_0, y_0, z_0)$的某一邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0, y_0, z_0)=0$，$F_z(x_0, y_0, z_0)\neq 0$ ，则方程 $F(x, y, z)=0$ 在点(x_0, y_0, z_0)的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x, y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0, y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

例 2. 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解　设 $F(x, y, z)= x^2+y^2+z^2-4z$，则 $F_x=2x$, $F_z=2z-4$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x}{2z-4}=\frac{x}{2-z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)+x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)+x(\frac{x}{2-z})}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

例 3 设方程 $e^z = xyz$ 确定函数 $z = z(x, y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解法一（公式法）:令 $F(x, y, z) = e^z - xyz$，则

$$F_x = -yz, F_y = -xz, F_z = e^z - xy,$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{e^z - xy}.$$

解法二（求导法）:方程两边对 x 求导得:

$$e^z \frac{\partial z}{\partial x} = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{所以} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy};$$

方程两边对 y 求导得

$$e^z \frac{\partial z}{\partial y} = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}, \text{所以} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^z - xy}.$$

解法三（全微分）：　方程两边求全微分，得

$$e^z dz = yz dx + xz dy + xy dz,$$

从而 $dz = \frac{yz}{e^z - xy} dx + \frac{xz}{e^z - xy} dy$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^z - xy}.$$

例 4.设 $u=\mathrm{e}^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z-xyz=0$ 所确定，求 $u_x(0,1)$.

解: $u=\mathrm{e}^x yz^2$ 对 x 求偏导，并注意到 z 是由方程所确定的 x,y 的函数，得

$$u_x=\mathrm{e}^x yz^2+2\mathrm{e}^x yz\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

令 $F(x,y,z)=x+y+z-xyz=0$ 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=-\dfrac{1-zy}{1-yx}$，$z(0,1)=-1$

代入得

$$u_x=\mathrm{e}^x yz^2-2\mathrm{e}^x yz\cdot\frac{1-zy}{1-yx}$$

于是 $u_x(0,1)=\mathrm{e}^0\cdot1\cdot(-1)^2-2\mathrm{e}^0\cdot1\cdot(-1)\cdot\dfrac{1-1\cdot(-1)}{1-0\cdot1}=5$.

例 5. 设 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$ 确定 u 是 x,y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微，$p(t),\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，求 $p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$，对方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$ 两边分别关于 x，y 求偏导得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{p(x)}{1-\varphi'(u)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}-p(y)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{p(y)}{1-\varphi'(u)},$$

$$p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}=p(y)f'(u)\frac{p(x)}{1-\varphi'(u)}+p(x)f'(u)\left[-\frac{p(y)}{1-\varphi'(u)}\right]=0.$$

二、方程组的情形

在一定条件下，由个方程组 $F(x, y, u, v)=0$, $G(x, y, u, v)=0$ 可以确定一对二元函数 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$.

隐函数存在定理 3

设 $F(x, y, u, v)$、$G(x, y, u, v)$在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数，又 $F(x_0, y_0, u_0, v_0)=0$, $G(x_0, y_0, u_0, v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式：

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$不等于零,则

方程组

$$F(x, y, u, v)=0,\ G(x, y, u, v)=0$$

在点 $P(x_0,\ y_0,\ u_0,\ v_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，它们满足条件 $u_0=u(x_0, y_0), v_0=v(x_0, y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}.$$

例 6 设 $xu-yv=0$, $yu+xv=1$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

解： 两个方程两边分别对 x 求偏导，得关于 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 的方程组

$$\begin{cases} u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x}+v+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases},$$

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，解之得 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}$.

两个方程两边分别对 x 求偏导，得关于 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 的方程组

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y}-v-y\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ u+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases},$$

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，解之得 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$.

例 7 设函数 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$在点(u,v)的某一领域内连续且有连续偏导数，又

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0.$$

(1)证明方程组

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$$

在点(x,y,u,v)的某一领域内唯一确定一组单值连续且有连续偏导数的反函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$.

(2)求反函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$对 x,y 的偏导数；并证

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1.$$

解：

(1)将方程组改写成下面的形式

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) \equiv x - x(u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) \equiv y - y(u,v) = 0, \end{cases}$$

则按假设 $J = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0.$

由隐函数存在定理 3，即得所要证的结论.

(2)将方程组所确定的反函数 $u=u(x, y), v=v(x, y)$代入，即得

$$\begin{cases} x \equiv x[u(x,y), v(x,y)] \\ y \equiv y[u(x,y), v(x,y)], \end{cases}$$

将上述恒等式两边分别对 x 求偏导数,得

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial x}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = \dfrac{\partial y}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

由于 $J \neq 0$，故可解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

同理，可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v} & -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v} \\ -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u} \end{vmatrix} = \frac{1}{J^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & -\frac{\partial x}{\partial v} \\ -\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \end{vmatrix} = \frac{1}{J},$$

$$\boxed{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1}$$

练习

1. 设函数$z=z(x,y)$由方程$f\left(xz,yz\right)=0$确定，其中f具有连续的一阶偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$. (用三种方法)

2.设函数$u=f(x,y,z)$有连续的一阶偏导数，又函数$y=y(x)$及$z=z(x)$分别由下列两式确定：$e^{xy}-xy=2$，$e^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$，求$\frac{du}{dx}$.

3.设$y=y(x)$，$z=z(x)$由方程$z=xf(x+y)$和$F(x,y,z)=0$所确定的函数，其中f与F分别具有一阶导数或偏导数，求$\frac{dy}{dx}$，$\frac{dz}{dx}$.