第一章教学计划

教学内容：

1、事件的独立性；

2、伯努利试验概型。

教学目的及目标：

掌握事件的独立性和伯努利试验概型。

教学重点：

独立性，伯努利试验概型。

教学难点：

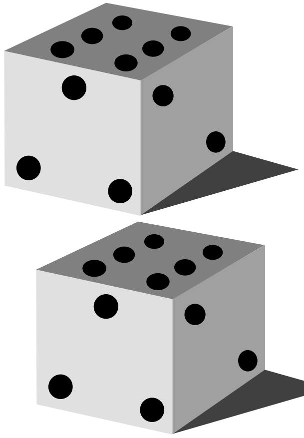
伯努利概型。

§1.5　事件的独立性

一、两事件的独立性

一般来说，一个试验的两个事件A,B是 有关联的，因此 $P(A|B) \neq P(A)$。但有时，事件B发生与否, 对事件A发生的概率没有影响， 如

将一颗均匀骰子连掷两次，



设　A：　“第二次掷出6点”，

　　B：　“第一次掷出6点”，

此时，称**A独立于B.**

数学表示：$P(A|B)=P(A)$，其中P(B)>0.

类似地，如果$P(B|A)=P(B)$，其中P(A)>0，则称**B独立于A**。

由于，P(A)>0, P(B)>0时，

$$P(A|B)=P(A) \text{ 和 } P(B|A)=P(B)$$

都等价于

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

所以，此时，A独立于B等价于B独立于A，故通常称**A与B相互独立**。

容易理解，零概率事件与任何事件独立。而且当P(A)=0或P(B)=0时，上式恒成立。因此，为了使独立性概念包括零概率事件的情形，我们采用如下定义：

定义1.5.1

设（Ω，F，P）为概率空间，A、B为两事件，如果A、B满足

$$P(AB)= P(A)\,P(B) \qquad (1)$$

则称**事件A与B相互独立**，简称**A与B独立**。

定理1.5.1

设P(B)>0，则A与B独立的充要条件是

$$P(A|B)=P(A);$$

同理，若P(A)>0，则A与B独立的充要条件是

$$P(B|A)=P(B)。$$

例1 从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记 A={抽到K}，B={抽到的牌是黑色的}

问事件A、B是否独立？

解：

由于 $P(A)=4/52=1/13$， $P(B)=26/52=1/2$

$$P(AB)=2/52=1/26$$

可见，$P(AB)=P(A)P(B)$

因此，事件A、B独立.

本问题也可以通过条件概率来解决:

由于 $P(A)=1/13$, $P(A|B)=2/26=1/13$

$P(A)=P(A|B)$, 所以事件A、B独立.

练：投掷一枚均匀的骰子。

（1）设A表示“掷得点数小于5”，B表示“掷得 奇数点”，问A,B是否独立?

独立。

（2）设A表示“掷得点数小于4”，B表示“掷得奇数点”，问A,B是否独立?

不独立。

事件互斥与事件独立的关系

（1）P(A)>0,P(B)>0的情形

若A、B互斥，即AB=Φ,则

$$P(AB)=0 \neq P(A)P(B)>0,$$

即A与B不独立.

反之，若A与B独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B)>0,$$

所以AB≠Φ，即 A 、B不互斥.

（2）极端情形：设A为任意事件

(i) $A\Phi=\Phi$

$$P(A\Phi) = P(\Phi) = 0 = P(A)P(\Phi)$$

这表明：Φ与任何事件既独立又互斥。

(ii) $A\,\Omega = A$

$$P(A\,\Omega) = P(A) = P(A)\cdot 1 = P(A)P(\Omega)$$

这表明：Ω与任何事件独立，但不一定互斥。

甲、乙两人向同一目标射击，记 A={甲命中}，B={乙命中}，A与B是否独立？

由于“甲命中”并不影响“乙命中”的概率，故认为A、B独立.

又如：一批产品共n件，从中抽取2件，设 A_i={第i件是合格品}　i=1,2

若抽取是有放回的，则A_1与A_2独立.

因为第二次抽取结果不受第一次抽取的影响.

若抽取是无放回的，则A_1与A_2不独立.

因为第二次抽取结果受到第一次抽取的影响.

练习

设A、B为互斥事件，且$P(A)>0, P(B)>0$，下面四个结论中，正确的是：

1. $P(B|A)>0$
2. $P(A|B)=\mathrm{P}(\mathrm{A})$
3. $P(A|B)=0$
4. $P(AB)=P(A)P(B)$

设A、B为独立事件，且$P(A)>0, P(B)>0$，下面四个结论中，正确的是：

1. $P(B|A)>0$
2. $P(A|B)=P(A)$
3. $P(A|B)=0$
4. $P(AB)=P(A)P(B)$

定理5.1.2 若两事件A、B独立，则

$\overline{A}$与B, A与$\overline{B}$, $\overline{A}$与$\overline{B}$ 也相互独立.

证明：仅证A与$\overline{B}$独立

A、B独立

$$P(A\overline{B}) = P(A - AB)$$

概率的性质

$$= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)\,P(B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)] = P(A)\,P(\overline{B})$$

故A与$\overline{B}$独立.

二、多个事件的独立性

1. 三个事件的独立性：

定义5.1.2 对于三个事件A、B、C，若

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

四个等式同时成立,则称事件A、B、C相互独立。

其中，前三个等式成立时，称A、B、C两两独立。

如：将一枚骰子掷两次，设

A：“第一次掷得偶数点”，

B：“第二次掷得奇数点”，

C：“两次都掷得奇数或偶数点”。

容易算出

$P(A)=1/2$，$P(B)=1/2$，$P(C)=1/2$，

$P(AB)=1/4$，$P(AC)=1/4$，$P(BC)=1/4$，

$P(ABC)=0$.

于是

$P(AB)=P(A)P(B)$;$P(AC)=P(A)P(C)$;$P(BC)=P(B)P(C)$

故A，B，C两两独立。

但**$P(ABC)=0\neq P(A)P(B)P(C)$**，即**A,B,C**不相互独立。

（2） $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$不能保证A,B,C两两独立。如下例：

一个均匀的正八面体，第1、2、3、4面染红色，第1、2、3、5面染白色，第1、6、7、8面染黑色。分别以A、B、C记投掷该八面体一次，底面出现红、白、黑色，则

$$P(A)=P(B)=P(C)=2/4=1/2$$

$$P(ABC)=1/8=P(A)\,P(B)P(C),$$

但是，

$$P(AB)=3/8\neq P(A)P(B),$$

所以，A,B,C不两两独立。

注意：本结论不能记为A,B,C相互独立不一定A,B,C两两独立。

2. n个事件的独立性

定义 5.1.3

设$A_1,A_2,\ldots,A_n$ 是n个事件(n≥2).若对于所有可能的组合$1\le i<j<k<\ldots\le n$成立：

$$P(A_i A_j)=P(A_i)P(A_j)$$

$$P(A_i A_j A_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$

……

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

则称事件$A_1,A_2,\ldots,A_n$相互独立。

注意：

（1）本定义包含等式总数为

$$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$$

（2） 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$ 是n个事件(n≥2)。如果对于所有任意的$1\le i<j\le n$，都成立：

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$$

则称事件$A_1,A_2,\ldots,A_n$两两独立。

（3）若n个事件相互独立，则它们中的任意m个（2≤m≤n)也相互独立。特别地， n个相互独立事件两两独立。

（4）若n个事件相互独立，则将其中任何m个(1≤m≤n)事件改为相应的对立事件、其它事件保持不变，形成的新的n个事件仍然相互独立。

三、独立性的概念在计算概率中的应用

设n个相互独立的事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$发生的概率分别为$p_1, p_2, \ldots, p_n$，则

（1）相互独立事件至少发生其一的概率

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n)$$
$$=1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots\ldots(1-p_n)$$

（2）相互独立事件至少一个不发生的概率

$$P(\overline{A}_1 \bigcup \overline{A}_2 \bigcup \cdots \bigcup \overline{A}_n) = 1 - p_1 p_2 \cdots p_n$$

例2 三人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为1/5，1/3，1/4，问三人中至少有一人能将密码译出的概率是多少？

解：将三人编号为1，2，3，

记 A_i={第i个人破译出密码} i=1,2,3

所求为 $P(A_1+A_2+A_3)$

记 A_i={第i个人破译出密码}　i=1,2,3

所求为 $P(A_1+A_2+A_3)$

已知, $P(A_1)=1/5, P(A_2)=1/3, P(A_3)=1/4$

$$P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\overline{A_1+A_2+A_n})$$

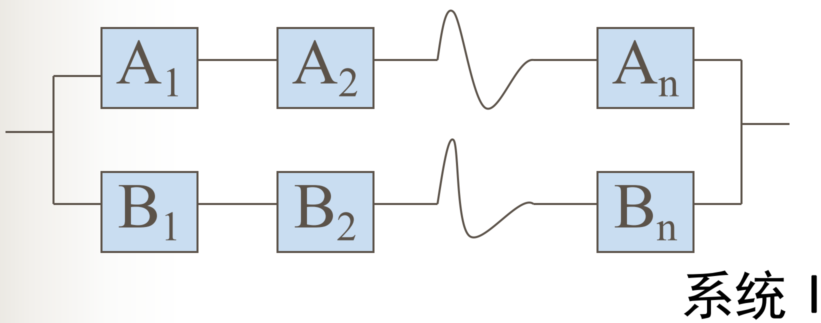
$$=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$$

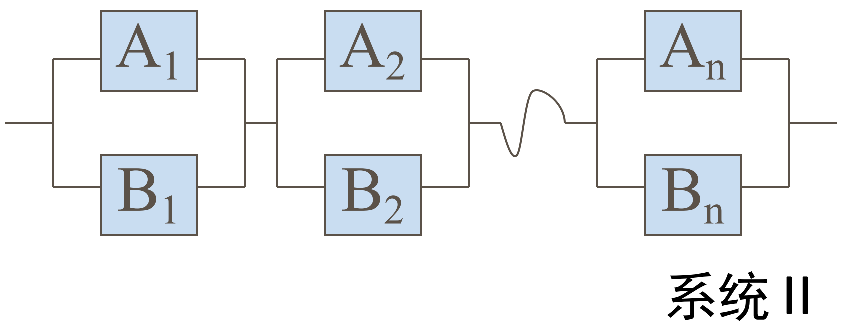
$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

$$=1-[1-P(A_1)][1-P(A_2)][1-P(A_3)]$$

$$=1-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{5}=0.6$$

例3：电路系统的可靠性。如图，两个系统各有2n个元件，其中系统Ⅰ先串联后并联，系统Ⅱ先并联后串联。求两个系统的可靠性大小并加以比较。





解：Ⅰ. 设A_i表示第i个元件正常工作。

A：Ⅰ中第一条支路正常工作，

B：Ⅰ中第二条支路正常工作，

$A \cup B$：表示Ⅰ系统正常工作

$$\text{而}P(A)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i)=r^n\text{(并联)}$$

同理 $P(B)=r^n$

所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=r^n+r^n-r^{2n}$

$=r^n(2-r^n)=R_{\mathrm{I}}$

II 第一对元件可靠性

$P(A_1\cup B_1)=P(A_1)+P(B_1)-P(A_1)P(B_1)=2r-r^2$,

第二对元件的可靠性

$P(A_2\cup B_2)=P(A_2)+P(B_2)-P(A_2)P(B_2)=2r-r^2$,

……

第n对元件的可靠性

$$P(A_n \cup B_n)=P(A_n)+P(B_n)-P(A_n)P(B_n)=2r-r^2$$

于是 $R_{II}=[r(2-r)]^n=r^n(2-r)^n$

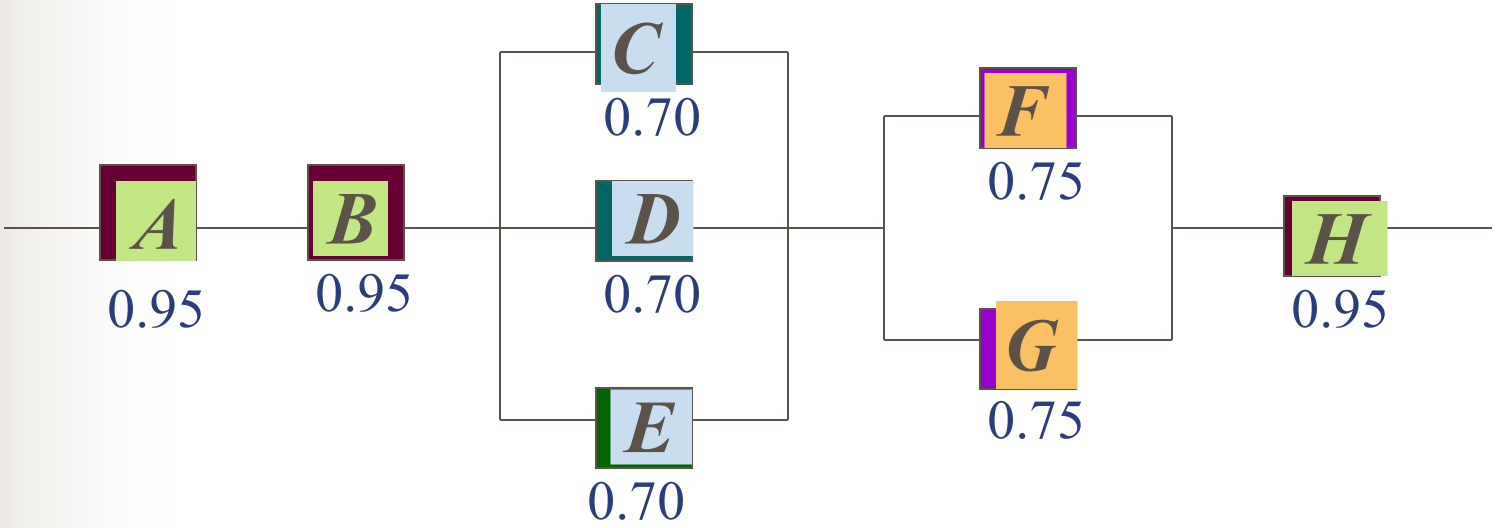
Ⅲ 比较大小. 比较$2-r^n$与$(2-r)^n$的大小。

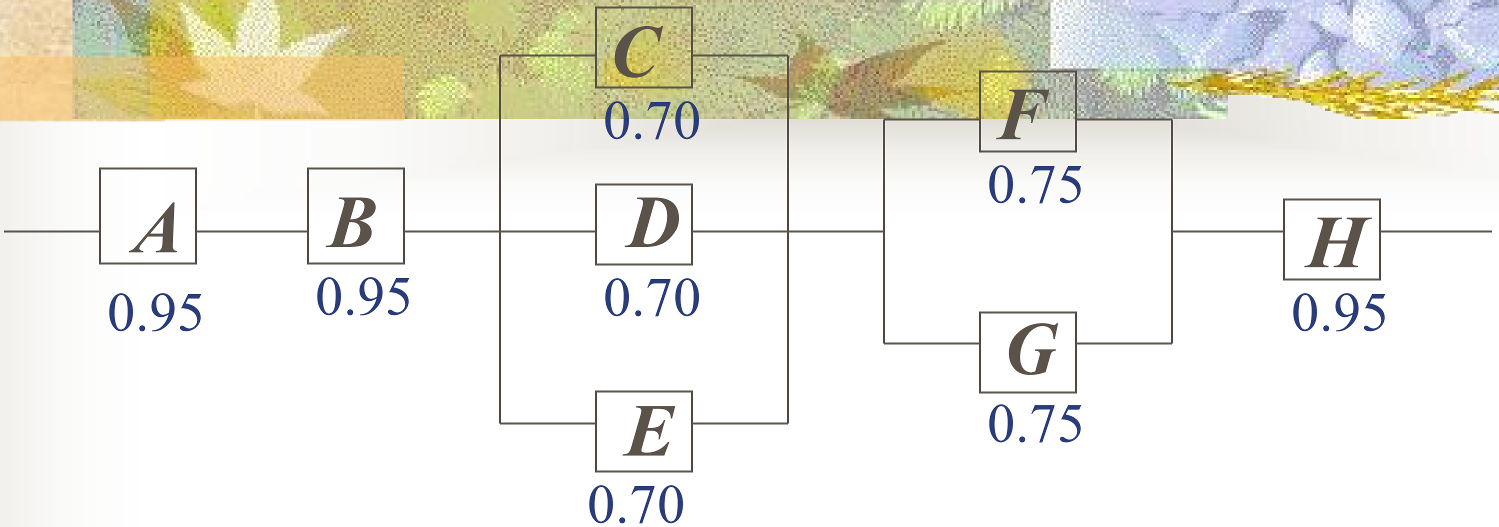
$n>1$时，$2-r^n<(2-r)^n$,

故第二个系统可靠性更高。

练:下面是一个串并联电路示意图. *A*、*B*、*C*、*D*、*E*、*F*、*G*、*H*都是电路中的元件. 它们下方的数是它们各自正常工作的概率.

求电路正常工作的概率.





解：将电路正常工作记为W，由于各元件独立工作，有

$$P(W)=P(A)P(B)P(C+D+E)P(F+G)P(H)$$

其中 $P(C+D+E)=1-P(\overline{C})P(\overline{D})P(\overline{E})=0.973$

$$P(F+G)=1-P(\overline{F})P(\overline{G})=0.9375$$

代入得 $P(W)\approx 0.782$

(*)例 2　甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别为0.4、0.5、0.7. 飞机被一人击中而击落的概率为0.2,被两人击中而击落的概率为0.6，若三人都击中，飞机必定被击落，求飞机被击落的概率.

解：设B={飞机被击落}，

A_i={飞机被i个人击中}, i=1,2,3

则A_1,A_2,A_3 互斥，且

$$B=A_1B+A_2B+A_3B$$

依题意，

$P(B|A_1)=0.2$,

$P(B|A_2)=0.6$,

$P(B|A_3)=1$

由全概率公式

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

故只要求$P(A_i)$

为求$P(A_i)$，设 H_i={飞机被第i人击中}，i=1,2,3;则H_1,H_2,H_3相互独立，且

$$P(A_1)=P(H_1\overline{H}_2\overline{H}_3+\overline{H}_1H_2\overline{H}_3+\overline{H}_1\overline{H}_2H_3)$$

$$P(A_2)=P(H_1H_2\overline{H}_3+H_1\overline{H}_2H_3+\overline{H}_1H_2H_3)$$

$$P(A_3)=P(H_1H_2H_3)$$

利用加法公式及事件独立性将数据代入计算得:

$P(A_1)=0.36;P(A_2)=0.41;P(A_3)=0.14$。于是，

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$=0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1$$

$$=0.458$$

即飞机被击落的概率为0.458.

§1.6 伯努利试验概型

试验的独立性

两个试验的独立性：若试验E_1的任一事件A与试验E_2的任一事件B独立，则称试验E_1与试验E_2独立。

多个试验的独立性：若试验E_1的任一事件A_1,试验E_2的任一事件A_2，…，试验E_n的任一事件A_n相互独立，则称试验E_1，试验E_2，……试验E_n相互独立。

重复独立试验序列：若试验E_1，E_2，……，E_n相互独立且完全相同，则称E_1，E_2，……E_n为重复独立试验序列。

Bernoulli试验： 只有两个可能的结果A和 $\bar{A}$ 的试验称为Bernoulli试验。

n重Bernoulli试验： 设E为Bernoulli试验，将E独立地重复进行n次就得到一个n重Bernoulli试验。

设在每一次Bernoulli试验中，$P(A)=p$，则有

Bernoulli 定理： 事件A在n重Bernoulli试验中恰好发生k次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad k=0,1,\ldots,n, \quad q=1-p$$

证明：由n重贝努利试验，事件A在某指定的k次试验中出现，而在其余n-k次试中不出现的概率为 $p^k(1-p)^{n-k} = p^k q^{n-k}$

而在n次试验中事件A发生k次共有C_n^k种不同情况，对应的结果为互不相容事件，故由概率的可加性可得

$$P_n(k) = C_n^k P^k q^{n-k} \qquad k = 0,1,\ldots,n, \quad q = 1-p$$

注：

（1） $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$

（2）由于 $P_n(m)$ 就是 $\left(q + px\right)^n$ 的展开式中

x^m项的系数，所以概率 $P_n(m)$ 的分布也称为

二项分布（**Bionomial Distribution).**

例1（乒乓球赛）甲、乙进行乒乓球单打比赛，已知每局甲胜的概率为0.6，乙胜的概率为0.4.比赛可采用三局两胜制或五局三胜制。问在那种赛制下，甲胜的可能性比较大?

解:用A表示“甲获胜”。

（1）三局两胜制:

甲获胜的情况有两种:

A_1——“甲净胜两局”，

A_2——“前两局甲一胜一负，第三局甲胜”。

则，A_1,A_2互斥，且$A=A_1+A_2$，于是

$P(A_1)=P_2(2)=0.6^2=0.36$

$P(A_2)=P_2(1)\times 0.6=2\times 0.6\times 0.4\times 0.6=0.288$

$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=0.648$

（2）五局三胜制：

甲获胜的情况有三种：

B_1——“甲净胜三局”，

B_2 ——“前三局两胜一负，第四局甲胜”。

B_3——“前四局甲、乙各胜两局，第五局甲胜”，则B_1,B_2,B_3互斥，且$A=B_1+B_2+B_3$。于是

$P(B_1)=P_3(3)=0.6^3=0.216$

$P(B_2)=P_3(2)\times 0.6=3\times 0.6^2\times 0.4\times 0.6=0.259$

$P(B_3)=P_4(2)\times 0.6=6\times 0.6^2\times 0.4^2\times 0.6=0.207$

所以

$$P(A)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=0.682$$

因此，采用五局三胜制甲获胜的概率更大一些。

练:

1. (巴拿赫问题)某数学家有两盒火柴,每一盒有N根。每次使用时，他在任一盒中取一根，问他发现一盒空时，另一盒还有k根火柴的概率是多少？

$$C_{2N-k}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}$$

练2 一袋中装有3个黑球7个白球共10个球，每次从中任取一球，取后放回。

（1）如果共取10次，求10次中能取到黑球的概率以及10次中恰好取到3次黑球的概率。

（2）如果未取到黑球就一直取下去，直到取得黑球为止，求恰好要取3次的概率以及至少要取3次的概率。

解：记A_i为“第i次取到的是黑球”，则$P(A_i)=3/10, i=1,2,\ldots$

（1）10次中能够取到黑球的概率

$$p_1 = 1 - P_{10}(0) = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^{10}$$

10次中恰好取到3次黑球的概率

$$p_2 = P_{10}(3) = C_{10}^{3}\left(\frac{3}{10}\right)^{3}\left(\frac{7}{10}\right)^{7}$$

（2）恰好要取3次的概率

$$p_3=\left(\frac{7}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{10}\right)$$

至少要取3次的概率

$$p_4=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)=\left(\frac{7}{10}\right)^2$$

3. 一辆机场大巴载有25名乘客 途径9个车站，每位乘客都等可能地在这9站中的任意一站下车（且不受其他乘客下车与否的影响），车只在有乘客下车时才停车。

（1）求该车“在第i站停车”的概率以及“在第i站不停车的条件下在第j站停车”的概率。

（2）判断“第i站停车”与“第j站停车”这两个事件是否独立。

解：记A_k：“第k位乘客在第i站下车”

B：“第i站停车”，即“第i站有人下车”

C：“第j站停车”，即“第j站有人下车”

则

$$P(B)=1-\left(\frac{8}{9}\right)^{25}, P(C)=1-\left(\frac{8}{9}\right)^{25}$$

“在第i站不停车的条件下在第j站停车”的概率

$$P(C\mid\overline{B})=1-\left(\frac{7}{8}\right)^{25}$$

由于 $P(C\mid\overline{B})\neq P(C)$

所以，$\overline{B}$ 与C不独立，从而B与C不独立。

一些常用公式

1. n重Bernoulli试验中，A发生的次数介于m_1和m_2之间的概率：$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$

2. n重Bernoulli试验中，A至少发生r次的概率：

$$P(m \ge r) = \sum_{m=r}^{n} P_n(m) = 1 - \sum_{m=0}^{r-1} P_n(m)$$

3. n重Bernoulli试验中，A至少发生1次的概率：

$$P_n(m \ge 1) = \sum_{m=1}^{n} P_n(m) = 1 - P_n(0) = 1 - (1-p)^n$$

4. 在Bernoulli试验序列中，“事件A在第k次试验才首次发生”(k≥1)的概率为：

$$g(k,p)=q^{k-1}p,q=1-p$$

例3、 若在一年中某类保险者中每人死亡的概率为0.005。现有10000个人参加人寿保险。试求在未来的一年中，这些保险者中（1）有40人死亡的概率；（2）死亡人数不超过70个的概率。

解：

（1） $$P_{10000}(40)=C_{10000}^{40}0.005^{40}\times0.995^{9960}$$

（2） $$P_{10000}(0\le m\le70)=\sum_{m=0}^{70}C_{10000}^{m}0.005^{m}\times0.995^{10000-m}$$

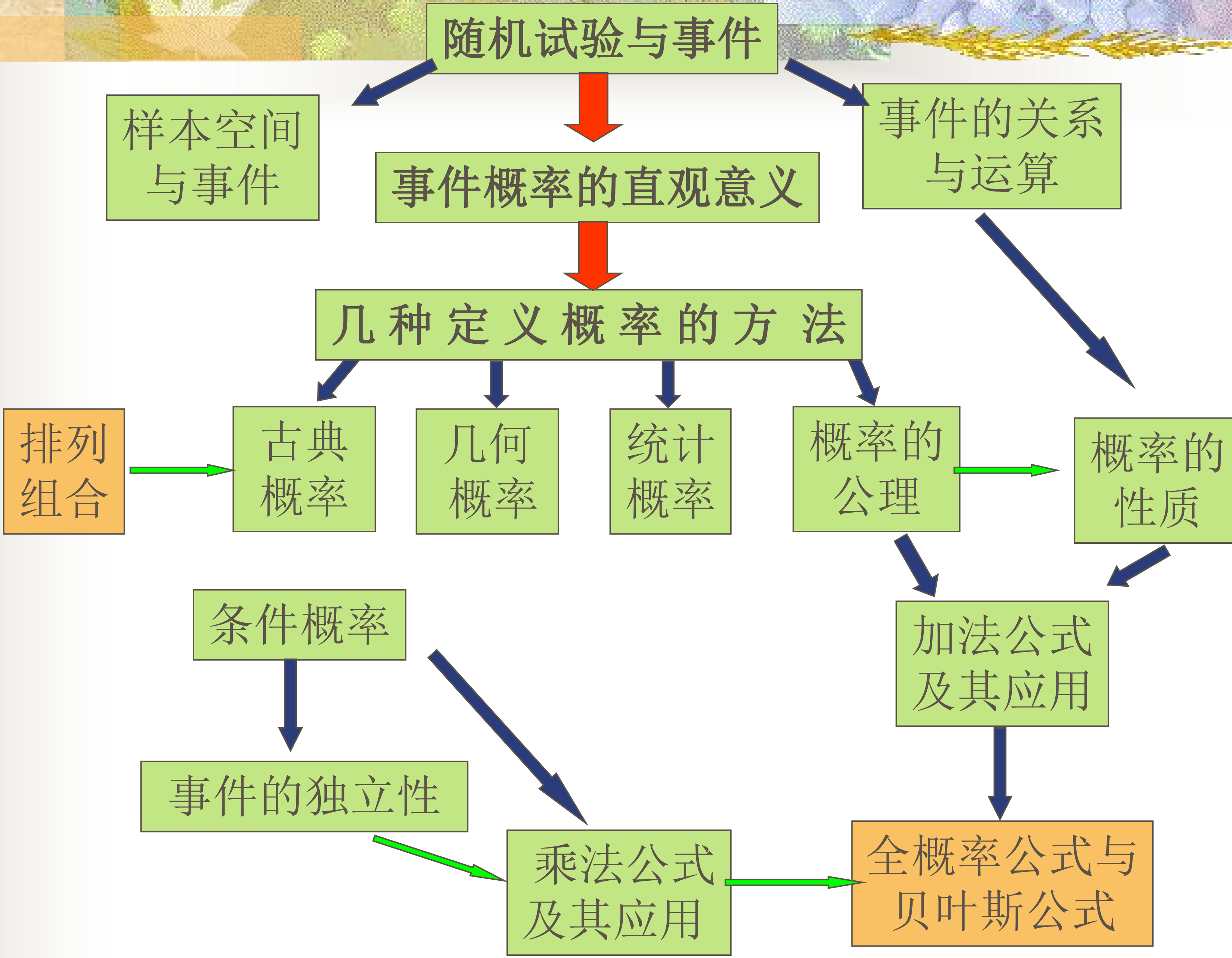
小结：

1. 条件概率是概率论中的重要概念，它与独立性有密切的关系，在不具有独立性的场合，它将扮演主要的角色。
2. 乘法公式、全概公式、贝叶斯公式在概率论的计算中经常使用，请牢固掌握。
3. 独立性是概率论中的最重要概念之一，亦是概率论特有的概念，应正确理解并应用于概率的计算。
4. 贝努利概型是概率论中的最重要的概型之一，在应用上相当广泛。

第一章要点回顾

1. 样本点与样本空间的概念， 事件的关系及运算；
2. 古典概率的计算；
3. 概率的定义及性质；
4. 条件概率、乘法公式、全概公式与贝叶斯公式；
5. 事件独立性的概念及其在事件概率计算中的使用；
6. 贝努利概型与伯努利定理。

第一章内容总框图


随机试验与事件
样本空间与事件
事件概率的直观意义
事件的关系与运算
几 种 定 义 概 率 的 方 法
排列组合
古典概率
几何概率
统计概率
概率的公理
概率的性质
条件概率
加法公式及其应用
事件的独立性
乘法公式及其应用
全概率公式与贝叶斯公式

例

用一种检验法检测产品中是否含有某种微量杂质的效果如下：

真含有杂质时，检测结果为含有杂质的概率是0.8;真不含有杂质时，检测结果为不含有杂质的概率是0.9。根据以往的经验，一产品含有杂质的概率为0.4。今独立地对一产品进行了三次检验，结果是有两次鉴定为含有杂质，而有一次鉴定为不含有杂质。求此产品真的含有杂质的概率。

解：记A:“产品真的含有杂质”

B:“检验结果为含有杂质”

C:“进行三次检验，结果为2次含有杂质，1次不含杂质”，则所求概率为P(A|C)。

由题意有：

$$P(B|A)=0.8, P(\overline{B}|\overline{A})=0.9, P(A)=0.4, P(\overline{A})=0.6$$

由全概率公式有

$$P(C)=P(AC)+P(\overline{A}C)=P(A)P(C|A)+P(\overline{A})P(C|\overline{A})$$

其中

$$P(C|A)=C_3^2\left[P(B|A)\right]^2P(\overline{B}|A)$$

$$=3\times0.8^2\times0.2=0.384$$

$$P(C|\overline{A})=C_3^2\left[P(B|\overline{A})\right]^2P(\overline{B}|\overline{A})$$

$$=3\times0.1^2\times0.9=0.027$$

所以

$$P(C)=0.4\times0.382+0.6\times0.027=0.1698$$

从而

$$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}\approx0.905$$

练：

一男子到闹市区去，他遇到背后袭击并被抢劫，他断定凶手是个白人。然而，当调查这一案件的法院在相似的条件下多次重复现场情况时，受害者正确识别袭击者种族的次数约占80%。求袭击者为白人的概率。

解：记A:“袭击者为白人”，B: “受害者指认袭击者为白人”，索求概率为P(A|B)。由题意

$$P(B \mid A)=0.8, P(\overline{B} \mid \overline{A})=0.8$$

设该地白人比例为p，即P(A)=p，则

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A)+P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})}$$

$$=\frac{p \times 0.8}{p \times 0.8+(1-p) \times 0.8}=\frac{4p}{1+3p}$$

若$p=1/2$, 则所求概率为0.8;

若$p<1/2$, 则所求概率小于0.8;

若$p>1/2$, 则所求概率大于0.8。

例3 配 对 问 题

某人将三封写好的信随机装入三个写好地址的信封中，问没有一封信装对地址的概率是多少？

设A_i={第i封信装入第i个信封} i =1,2,3

A={没有一封信装对地址}

则 $\overline{A}$={至少有一封信装对地址}

直接计算$P(A)$不易推广，我们先算$P(\overline{A})$

$$\overline{A} = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\overline{A} = A_1 + A_2 + A_3$$

应用加法公式

$$P(\overline{A}) = P(A_1 + A_2 + A_3)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2)$$
$$- P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

其中 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

代入计算 $P(\overline{A})$ 的公式中

$$P(\overline{A}) = P(A_1 + A_2 + A_3)$$

$$= 3 \cdot \frac{2!}{3!} - 3 \cdot \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{3}$$

于是

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}$$

推广到n封信,用类似的方法可得:把n 封信随机地装入n个写好地址的信封中, 没有一封信配对的概率为:

$$1 - (1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!})$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

实际中的各种配对问题

学生和学习证配对;

人和自己的帽子配对;

两副扑克牌配对;

球箱号码配对…

还可以举出其它配对问题，并提出其中要回答的概率问题(课下练习).

复习思考题 1

1. "事件A不发生，则$A=\Phi$"，对吗？试举例证明之。
2. "两事件A和B为互不相容，即$AB=\Phi$，则A和B互逆"，对吗？反之成立吗？试举例说明之。
3. 设A和B为两事件，$A\cup B=\bar{A}B\cup A\bar{B}\cup AB$，即"$A,B$至少有一发生"事件为"$A,B$恰有一发生$\left(\bar{A}B\cup A\bar{B}\right)$"事件与"$A,B$同时发生$(AB)$"事件的和事件。此结论成立吗？
4. 甲、乙两人同时猜一谜，设A={甲猜中}，B={乙猜中}，则$A\cup B$={甲、乙两人至少有1人猜中}。若$(A)=0.7$，$P(B)=0.8$，则"$P(A\cup B)=0.7+0.8=1.5$"对吗？
5. 满足什么条件的试验问题称为古典概型问题？

6. 一口袋中有10个球,其中有1个白球及9个红球。从中任意取一球

设$A=\{取到白球\}$,则$\overline{A}=\{取到红球\}$,且设样本空间为S,$S=\{A,\overline{A}\}$,

S中有两个样本点,而A是其中一个样本点,问$P(A)=\frac{1}{2}$对吗?

7. 如何理解样本点是两两互不相容的?

8. 设A和B为两随机事件，试举例说明$P(AB)=P(B|A)$表示不同的意义。

9. 设A和B为随机事件,$P(A)\neq 0$,问$P(B\mid A)=P(B)-P(\overline{B}\mid A)$是否成立?

$P(B\mid A)=1-P(\overline{B}\mid A)$是否成立?

10. 什么条件下称两事件A和B相互独立?

什么条件下称n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立?

11. 设A和B为两事件，且$P(A)\neq 0,P(B)\neq 0$, 问A和B相互独立、A和B互不相容能否同时成立？试举例说明之。

12. 设A和B为两事件，且$P(A)=a,P(B)=b$,问：

(1) 当A和B独立时, $P(A \cup B)$为何值?

(2) 当A和B互不相容时，$P(A \cup B)$为何值?

13. 当满足什么条件时称事件组$A_1, A_2, \cdots, A_n$为样为本空间的一个划分？

14. 设A,B,C为三随机事件，当$A \neq B$，且$P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$时，$P(C|A)+P(C|B)$有意义吗？试举例说明。

15. 设A,B,C为三随机事件, 且$P(C) \neq 0$, 问 $P(A \cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$是否成立？若成立，与概率的加法公式比较之。