§2.2 离散型随机变量及其分布

一、离散型随机变量及其分布律

1. 离散型随机变量的定义

设X为一随机变量，如X的全部可能取到的值是有限个或可列无限多个，则称随机变量X为离散型随机变量(discrete random variable)。

设X是一个离散型随机变量，它可能取的值是 $x_1, x_2, \ldots$.为了描述随机变量 X，我们不仅需要知道随机变量X的取值，而且还应知道X取每个值的概率.

定义1：设$x_k(k=1,2,\ldots)$是离散型随机变量X所取的一切可能值，称等式

$$P(X=x_k)=p_k,\quad k=1,2,\ldots\ \ldots$$

为离散型随机变量X的概率函数或分布律，也称概率分布.

其中 p_k $(k=1,2,\ldots)$ 满足:

（1）$p_k\geq 0,\qquad k=1,2,\ldots$

（2）$\sum_k p_k=1$

用这两条性质判断一个函数是否是概率函数

分布律的性质的证明

证明:非负性显然，下证规范性。设离散型 *r.v.* X的取值为$x_1,\ldots,x_n,\ldots$

则事件组$\{X=x_1\}$，…，$\{X=x_n\}$，…构成了Ω的一个划分。

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = x_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{X = x_k\}\right) = 1$$

例1　已知随机变量X的分布律为

X	−2	0	3	5
P	1/4	a	1/2	1/12

试求（1）待定系数a，（2）概率P{X>−1/2}。

解：（1）由分布律的性质可知

$$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=1$$

即可求得**a=1/6**。

（2）
$$P\left\{X>-\frac{1}{2}\right\}=P\{X=0\}+P\{X=3\}+P\{X=5\}$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

例2. 设随机变量X的概率函数为：

$$P(X=k)=a\frac{\lambda^k}{k!},\qquad k=0,1,2,\ \ldots,\qquad \lambda>0$$

试确定常数a .

解：依据概率函数的性质：

$$\begin{cases} P(X=k)\geq 0, \\ \sum_k P(X=k)=1 \end{cases}$$

欲使上述函数为概率函数

应有 $a\geq 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a\frac{\lambda^k}{k!}=ae^{\lambda}=1$$

从中解得 $a=e^{-\lambda}$

这里用到了常见的
幂级数展开式

$$e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$$

2、表示方法

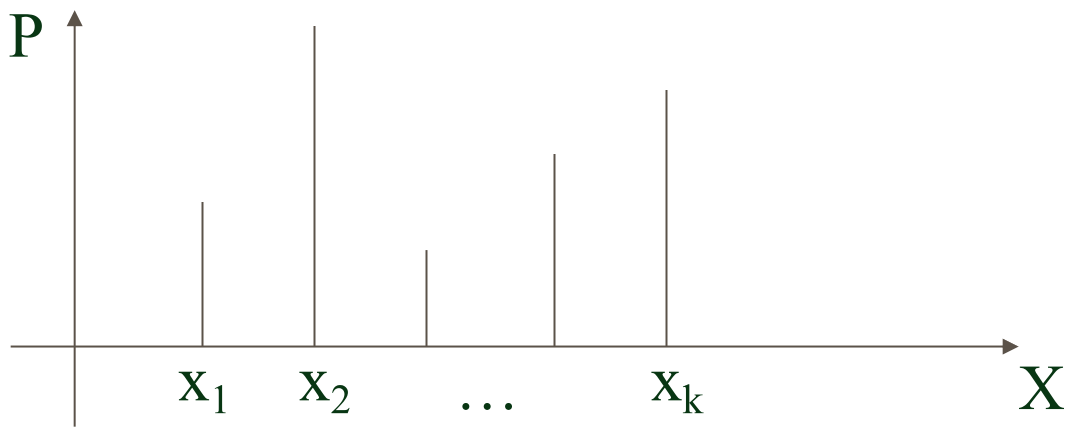
（1）列表法：分布律可以用表格的形式表示：x_n 一般从小到大排列。

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

（2）公式法

$$P(X=k)=\frac{C_3^{3-k}C_2^k}{C_5^3},\quad k=0,1,2$$

（3）图示法: 分布律可以用图形表示



3、离散型随机变量及其分布举例

例2. 某射手连续向一目标射击，直到命中为止，已知他每发命中的概率是p，求所需射击发数X的概率函数.

解: 显然，X可能取的值是1,2,… ,

为计算 $P(X=k)$， $k=1,2,\ldots,$

设 $A_k=\{$第k发命中$\}$，$k=1,2,\ldots,$

于是 $P(X=1)=P(A_1)=p,$

$$P(X=2)=P(\overline{A}_1 A_2)=(1-p)\cdot p$$

$$P(X=3)=P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3)=(1-p)^2\cdot p$$

……

设 $A_k=\{$第k发命中$\}$，$k=1, 2, \ldots,$

于是 $P(X=1)=P(A_1)=p,$

$$P(X=2)=P(\overline{A_1}A_2)=(1-p)\cdot p$$

$$P(X=3)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=(1-p)^2\cdot p$$

$$\cdots\cdots$$

可见 $P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p \qquad k=1,2,\cdots\cdots$

这就是求所需射击发数X的概率函数.

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p \qquad k=1,2,\cdots\cdots$$

若随机变量X的概率函数如上式，则称X具有几何分布.

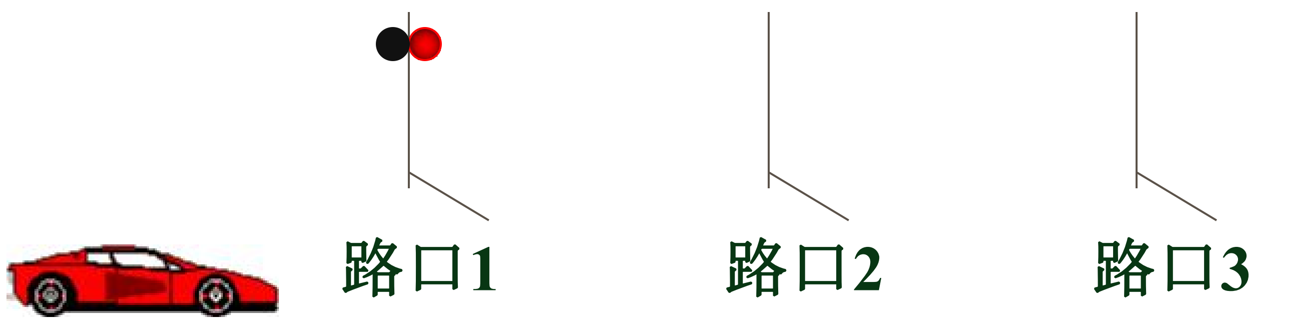
不难验证:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\cdot p=1$$

例3. 一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号灯显示的时间相等. 以X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数，求X的概率分布.

解: 依题意, X可取值0, 1, 2, 3.

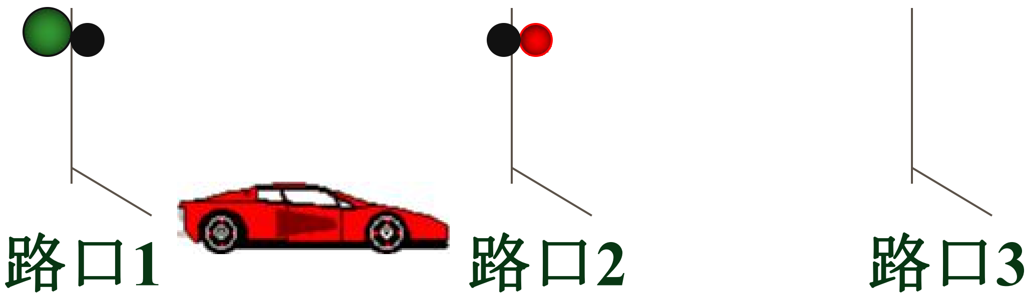
设 A_i={第i个路口遇红灯}，i=1,2,3



$P(X=0)=P(A_1)=1/2$,

*X*表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数

设 A_i={第i个路口遇红灯}, i=1,2,3

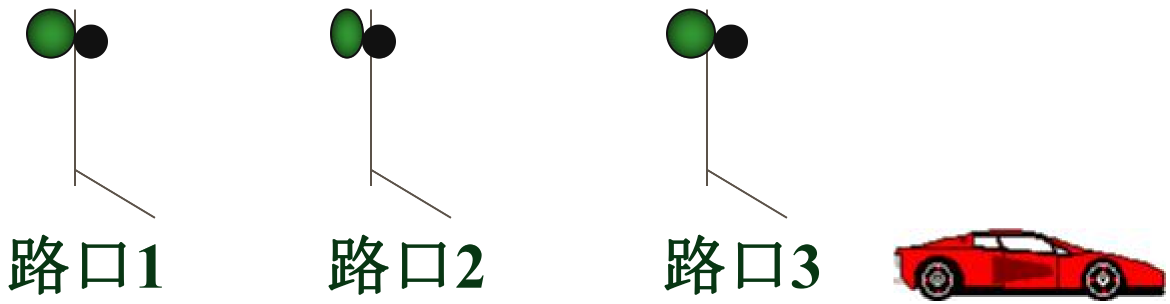


$$P(X=1)=P(\overline{A}_1 A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/4$$

$$P(X=2)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/8$$

X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数

设　A_i={第i个路口遇红灯}, i=1,2,3



$$P(X=3)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/8$$

即

$$X\sim\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{Bmatrix}$$

不难看到

$$\sum_{i=0}^{3}P(X=i)=1$$

例4　重复独立的进行贝努力试验，直到事件A出现r (r≥1)次为止，求试验次数X的分布律.

解：设每次试验事件A出现的概率为p，若当第k次试验时，事件A出现r次，则前k-1次试验事件A出现r-1次，于是

$$P\{X=k\}=C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}q^{k-1-(r-1)}\cdot p=C_{k-1}^{r-1}p^{r}q^{k-r}$$

k= r, r+1,…

称X服从Pascal分布。当r=1时，

$$\boldsymbol{P\{X=k\}=pq^{k-1}\quad k=1,2,\cdots}$$ X服从**几何分布。**

分布律与分布函数的关系

（1）已知随机变量X的分布律，可求出X的分布函数：

①设一离散型随机变量X的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k \quad (k=1,2,\ldots)$$

由概率的可列可加性可得X的分布函数为

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_k\le x}P\{X=x_k\}$$

即 $$F(x)=\sum_{x_k\le x}p_k$$

这里的和式是所有满足$x_k\le x$的k求和的。分布函数F(x)在$x=x_k(k=1,2,\ldots)$处有跳跃，其跃跳值为$p_k=P\{x=x_k\}$。

②已知随机变量**X**的分布律，亦可求任意随机事件的概率。

例如，求事件{**X**∈**B**}（**B**为实轴上的一个区间）的概率**P**{**X**∈**B**}时，只需将属于**B**的**X**的可能取值找出来，把**X**取这些值的概率相加，即可得概率**P**{**X**∈**B**}，即

$$P\{X\in B\}=\sum_{x_k\in B}p_k$$

因此，离散型随机变量的分布律完整地描述它的概率分布情况。

（2）已知随机变量**X**的分布函数，可求出**X**的分布律：

设一离散型随机变量**X**的分布函数为**F(x)**，并设**F(x)**的所有间断为$x_1, x_2, \ldots$，那么，**X**的分布律为

$$P\{X = x_k\} = F(x_k) - F(x_k - 0) \qquad k = 1, 2, 3, \cdots$$

例6：设随机变量X的分布律为

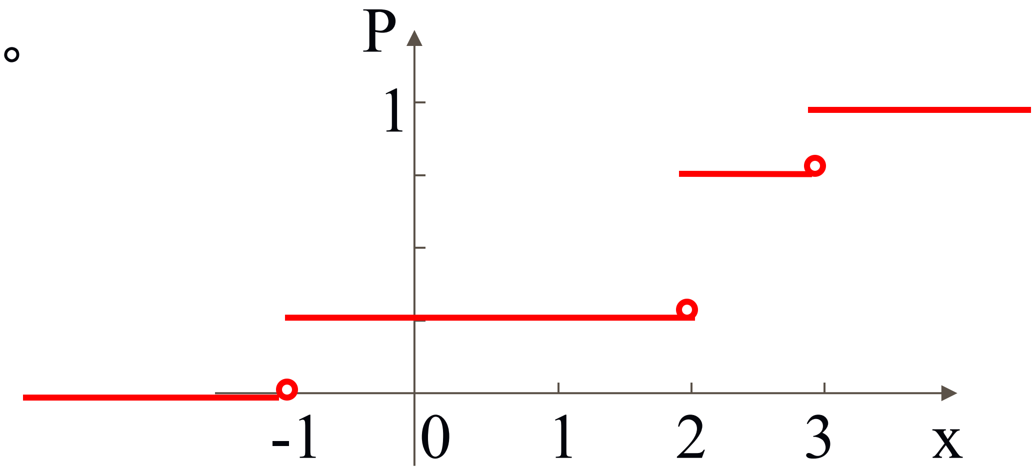
X	−1	2	3
P	1/4	1/2	1/4

求**X**的分布函数，并求 $P\{2 \le X \le 3\}$, $P\left\{\frac{3}{2} \le X \le \frac{5}{2}\right\}$, $P\left\{X \le \frac{1}{2}\right\}$

解：由概率的有限可加性，得所求分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ \frac{1}{4} & -1\le x<2 \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2} & 2\le x<3 \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} & x\ge 3 \end{cases} \quad \text{即} \quad F(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ \frac{1}{4} & -1\le x<2 \\ \frac{3}{4} & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$

F（x）的图形如下图所示，它是一条阶梯形的曲线，在x＝－1，2，3处有跳跃点，跳跃值分别为1/4，1/2，1/4。



于是

$$P\{2 \le X \le 3\} = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P\left\{\frac{3}{2} \le X \le \frac{5}{2}\right\} = P\{X = 2\} = \frac{1}{2}$$

$$P\left\{X \le \frac{1}{2}\right\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{4}$$

二、三种常用离散型随机变量的分布

1.（0—1）分布：

设随机变量X只可能取0与1两个值，它的分布律为 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$，$k=0$，1. $(0<p<1)$ 则称X服从（0—1）分布，记为$X\sim$（0—1）分布。

（0—1）分布的分布律用表格表示为：

X	0	1
P	$1-p$	p

易求得其分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-p & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$

2. 二项分布（binomial distribution)：

定义：若离散型随机变量X的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k} \quad k=0,1,\cdots,n$$

其中**0<*p*<1,*q*=1-*p***, 则称X服从参数为*n*,*p*的二项分布，记为***X*~*b*(*n*,*p*)**.

（1）试验模型：在***n***重贝努利试验中，若以***X***表示事件*A*出现的次数，则***X***是一随机变量，***X***可能取的值为**0**，**1**，**2**，**…**，***n***，由二项概率公式可得***X***的分布律为

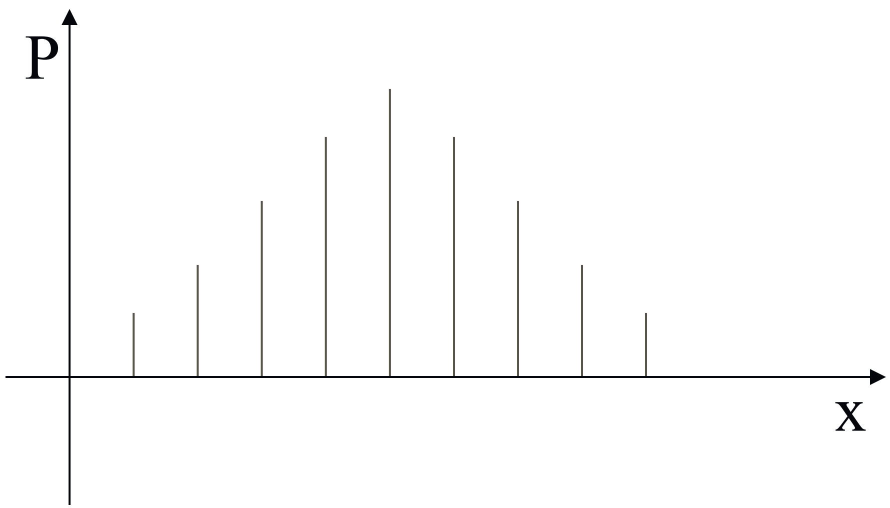
$$\boldsymbol{P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{1-k} \quad k=0,1,\cdots,n}$$

即***X***服从二项分布。

（2）因为 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{1-k} = (p+q)^n = 1$ ，其中 $C_n^k p^k q^{n-k}$ 恰为二项式 $(p+q)^n$ 的一般项，故称为二项分布。

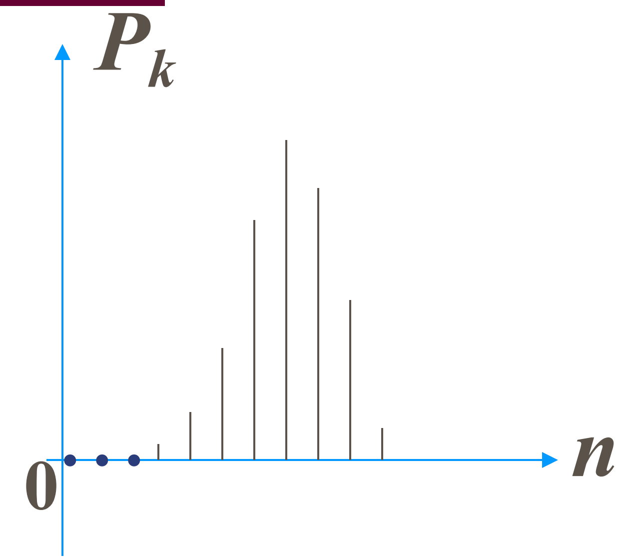
（3）当n=1时，二项分布为（0—1）分布，即 $X \sim b(1, p)$。

（4）二项分布分布律的图形为：



二项分布的图形特点： $X \sim B(n,p)$

对于固定n及p，当k增加时，概率$P(X=k)$先是随之增加直至达到最大值，随后单调减少.



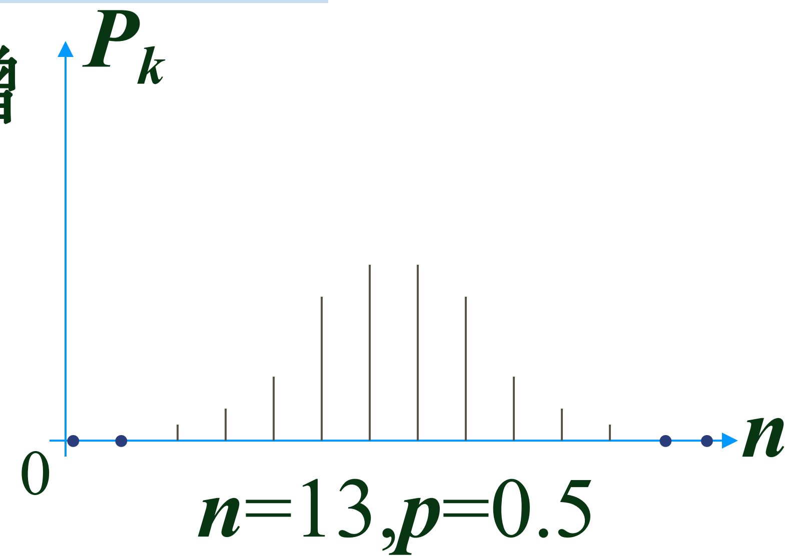
$n=10, p=0.7$

当$(n+1)p$不为整数时，二项概率$P(X=k)$在$k=[(n+1)p]$达到最大值；

($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)

二项分布的图形特点： $X\sim B(n,p)$

对于固定n及p，当k增加时 ,概率$P(X=k)$ 先是随之增加直至 达到最大值,随后单调减少.



当$(n+1)p$为整数时，二项概率$P(X=k)$在$k=(n+1)p$和$k=(n+1)p-1$处达到最大值.

课下请自行证明上述结论.

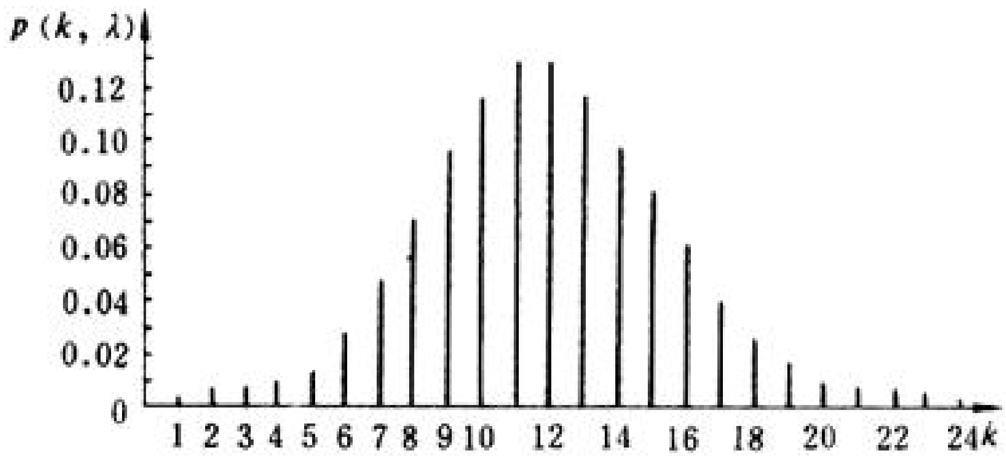
3、泊松分布的定义及图形特点

设随机变量X所有可能取的值为0，1，2，…，且概率分布为：

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots\cdots,$$

其中 λ >0 是常数,则称 X 服从参数为λ 的泊松分布,记作X~$P(\lambda)$.

泊松分布的图形特点：　　$X \sim P(\lambda)$



泊松分布$P(\lambda)$ ($\lambda=12$)

n重Bernoulli试验模型是经常遇到的试验模型。但当试验次数n很大时，二项概率的计算非常麻烦，如

$$P(X>5)=\sum_{k=6}^{5000}P(X=k)=\sum_{k=6}^{5000}C_{5000}^{k}(\frac{1}{1000})^{k}(\frac{999}{1000})^{5000-k}$$

为解决诸如此类的问题，我们可以采用泊松分布或者正态分布进行近似计算.

事实上，这两种分布最初都是作为二项分布的近似被引入的.

二项分布的泊松近似

泊松，S.-D.

历史上，泊松分布是作为二项分布的近似，于1837年由法国数学家泊松（Poisson)引入的 .

泊松定理

设 λ 是一个正整数，$p_n=\dfrac{\lambda}{n}$，则有

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots$$

证明略.

定理的条件意味着当 n很大时，p_n 必定很小. 因此，泊松定理表明，当 n 很大，p 很小时有以下近似式：

$$\boxed{C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}$$

其中 $\lambda = np$

也就是，n很大时，$B(n,p) \approx P(np)$

实际计算中，

$n \geq 100, np \leq 10$ 时近似效果就很好

当 n 很大时，p 不是很小，而是很大(接近于1)时， 能否应用二项分布的泊松近似？

容易理解，当 p 不是很小，而是很大(接近于1)，可将问题略为转换一下，仍然可以应用泊松近似.

下面我们看一个应用的例子.

例7　为保证设备正常工作，需要配备适量的维修人员．设共有300台设备，每台独立工作，且发生故障的概率都是0.01。若在通常的情况下，一台设备的故障可由一人来处理， 问至少应配备多少维修人员，才能保证当设备发生故障时不能及时维修的概率小于0.01?

我们先对题目进行分析：

300台设备，独立工作，出故障概率都是0.01. 一台设备故障一人来处理.

问至少配备多少维修人员，才能保证当设备发生故障时不能及时维修的概率小于0.01?

设X为300台设备同时发生故障的台数，

对300台设备工作的考察可以看成是300重贝努里试验.

因此， $X \sim B(n,p)$，$n=300$, $p=0.01$

300台设备，独立工作，出故障概率都是0.01．一台设备故障一人来处理.

问至少配备多少维修人员，才能保证当设备发生故障时不能及时维修的概率小于0.01?

设X为300台设备同时发生故障的台数，

$$X \sim B(n,p),\ n=300,\ p=0.01$$

设需配备N个维修人员， 则要求的是满足

$$P(X>N)<0.01 \quad 或 \quad P(X\leq N)\geq 0.99$$

的最小的N.

下面给出正式求解过程：

解：设X为300台设备同时发生故障的台数，

$X \sim B(n,p)$，$n=300,\ p=0.01$

设需配备N个维修人员， 所求的是满足

$P(X>N) < 0.01$的最小的N.

$$P(X>N) = \sum_{k=N+1}^{300} C_{300}^{k} (0.01)^{k} (0.99)^{300-k}$$

$$\approx \sum_{k=N+1}^{300} \frac{3^k e^{-3}}{k!}$$

$$\approx \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{3^k e^{-3}}{k!}$$

n大,p小,$np=3$,
用 $\lambda=np=3$
的泊松近似

我们求满足 $\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{3^k e^{-3}}{k!}<0.01$ 的最小的N.

查泊松分布表得

$$\sum_{k=9}^{\infty}\frac{e^{-3}3^k}{k!}\approx 0.0038,\quad \sum_{k=8}^{\infty}\frac{e^{-3}3^k}{k!}\approx 0.012,$$

$N+1\geq 9$, 即$N\geq 8$

即至少需配备8个维修人员.

例8 设有80台设备，每台设备情况如上例。（1）若由一个人负责维修20台设备，求这80台设备发生故障，而不能及时修理的概率；

（2）若由三个人共同负责维修80台，求设备发生故障不能及时修理的概率。

解：（**1**）设**X**为**1**个人负责的**20**台设备中发生故障的机器数,则**X~B(20，0.01)**。因为一人只能修一台机器，故这**20**台设备发生故障不能及时维修的概率为：

$$P\{X \geq 2\} = \sum_{k=2}^{20} P\{X = k\} = \sum_{2}^{20} C_{20}^{k} (0.01)^{k} (0.99)^{20-k}$$

$$\approx \sum_{k=2}^{20} \frac{(0.2)k}{k!} e^{-0.2} \approx \sum_{2}^{\infty} \frac{(0.2)k}{k!} = 0.0175$$

故所求概率为：

$$1-(1-0.0175)^{4} = 0.0682$$

（2）设X为发生故障的机器数，X~B(80，0.01)

X取值：0，1，2，…，80。

$$P\{X \geq 4\} = \sum_{k=4}^{80} C_{80}^{k} (0.01)^{k} (0.09)^{80-k} \approx \sum_{k=4}^{80} \frac{(0.8)^{k}}{k!} e^{-0.8}$$

$$\approx \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(0.8)^{k}}{k!} e^{-0.8} = 0.0091$$

结论：（1）>>（2），说明尽管情况2任务重了（一个人修27台），但工作质量提高了，也说明，概率方法可用来讨论国民经济中某些问题，以使达到更有效地使用人力、物力、资源的目的，这是运筹学的任务，概率论是解决运筹学问题的有力工具。

例9 （寿险）在保险公司里有**2500**个同一年龄和同社会阶层的人参加人寿保险，其中每人在一年里死亡的概率为**0.002**，每个参加保险的人在一月一日付**12**元保险费，而死亡时家属可由保险公司领**2000**元。（1）求公司亏本的概率（2）求获利不小于**10000**元的概率。

解；（1）公司一年总收入**2500*12=30000**，

X：一年中死亡人数。

X~b(2500 , 0.002),要**2000X>30000**

$$P\{公司亏本\} = P\{X > 15\} = \sum_{k=16}^{2500} C_{2500}^{b} (0.002)^{k} (0.998)^{2500-k}$$

$$\approx \sum_{k=16}^{\infty} \frac{e^{-5} 5^{k}}{k!} = 0.000069 \qquad (\lambda = 5)$$

(2)

$$P\{\text{获利} \geq 10000\} = P\{30000 - 2000X \geq 10000\}$$

$$= P\{X \leq 10\}$$

$$\approx \sum_{k=0}^{10} \frac{e^{-5} 5^k}{k!} = 1 - \sum_{k=11}^{\infty} \frac{e^{-5} 5^k}{k!}$$

$$= 1 - 0.013695 = 0.986305$$

近数十年来，泊松分布日益显示其重要性,成为概率论中最重要的几个分布之一.

在实际中，许多随机现象服从或近似服从泊松分布.

Back

我们把在每次试验中出现概率很小的事件称作稀有事件.

如地震、火山爆发、特大洪水、意外事故等等

由泊松定理，n重贝努里试验中稀有事件出现的次数近似地服从泊松分布.

*泊松分布产生的一般条件

在自然界和人们的现实生活中, 经常要遇到在随机时刻出现的某种事件. 我们把在随机时刻相继出现的事件所形成的序列, 叫做随机事件流.

若事件流具有平稳性、无后效性、普通性，则称该事件流为泊松事件流（泊松流）.

下面简要解释平稳性、无后效性、普通性.

平稳性:

在任意时间区间内，事件发生k次$(k \geq 0)$的概率只依赖于区间长度而与区间端点无关.

无后效性:

在不相重叠的时间段内，事件的发生是相互独立的.

普通性:

如果时间区间充分小，事件出现两次或两次以上的概率可忽略不计.

例如

一放射性源放射出的 α 粒子数;

某电话交换台收到的电话呼叫数;

到某机场降落的飞机数;

一个售货员接待的顾客数;

一台纺纱机的断头数; …

都可以看作泊松流.

对泊松流，在任意时间间隔$(0,t)$内,事件(如交通事故)出现的次数服从参数为λt的泊松分布 . λ称为泊松流的强度.

三、其它常见分布简述

（i）超几何分布

设一堆同类产品共N件，其中有M个次品，现从中任取n个(为方便计算。假定n≤N-M)，则这n个中所含的次品数X是个离散型随机变量，X的分布律为

$$P\{X=m\}=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \qquad m=0,1,\cdots,l$$

其中L=min(M，n) ,这个概率分布称为超几何分布。

(ii)几何分布

在独立重复试验中，设A在每次试验中发生的概率均为p，记X为A首次发生时的试验次数。则不难验证，X具有如下分布律

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p \qquad k=1,2,\cdots \qquad q=1-p$$

这个概率分布称为几何分布。

（iii）帕斯卡分布

在独立重复试验中，若记X为A在第r次发生时的试验次数,则X的分布律为

$$P\{x=k\}=C_{k-1}^{r-1}q^{k-r}p^{r} \qquad k=r,r+1,\cdots \qquad q=1-p$$

这个分布称为帕斯卡分布。

这一讲，我们介绍了离散型随机变量及其概率分布,以及几种离散型分布.

对于离散型随机变量，如果知道了它的概率函数,也就知道了该随机变量取值的概率规律. 在这个意义上，我们说

离散型随机变量由它的概率函数唯一确定.

下一节，我们将向大家介绍连续型随机变量的描述方法.