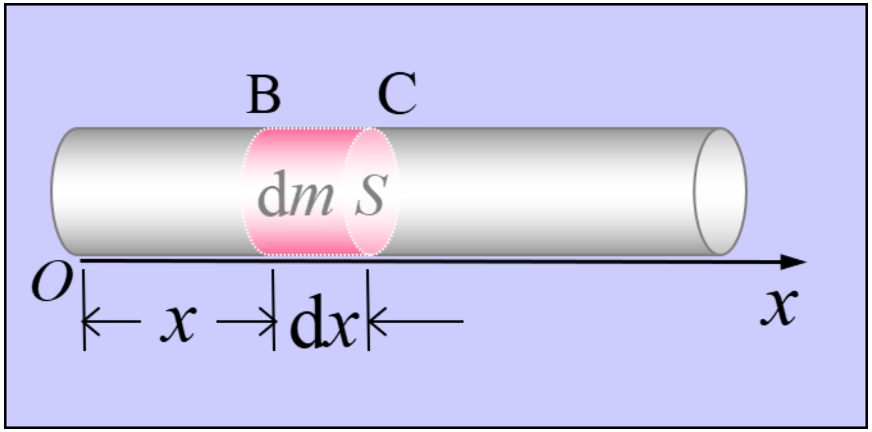
§10.3 波的能量 能流密度

一、波的能量 能量密度

平面简谐纵波在直棒中传播：



$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

1. 动能：

$$\mathrm{d}m = \rho S\,\mathrm{d}x = \rho\,\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2}\mathrm{d}m v^2 = \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}V v^2$$

而质元的振动速度：

$$v = \frac{dy}{dt} = -A\omega\sin\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

得到质元的振动动能：

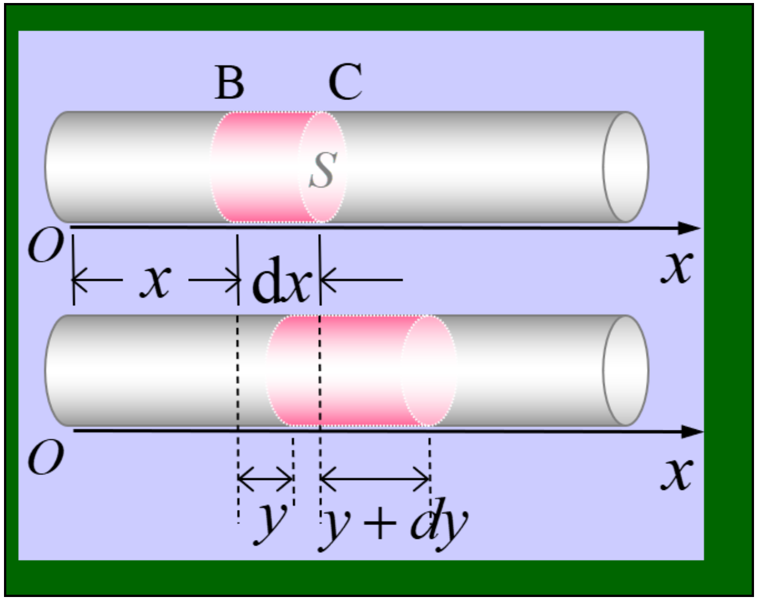
$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\mathrm{d}V$$

2. 势能：

应力与应变成正比：$\dfrac{\mathrm{d}F}{S} = Y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

虎克定律：$\mathrm{d}F = k\,\mathrm{d}y$

$$\therefore \quad k = \frac{SY}{\mathrm{d}x}$$



弹性势能：

$$\mathrm{d}E_p = \frac{1}{2}k(\mathrm{d}y)^2 = \frac{1}{2}\frac{SY}{\mathrm{d}x}(\mathrm{d}y)^2$$

$$= \frac{1}{2}SY\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$$

$$\mathbf{d}E_p = \frac{1}{2} SY\mathbf{d}x\left(\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}\right)^2$$

又 $y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\omega A}{u}\sin\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$

故 $\mathrm{d}E_\mathrm{p} = \frac{1}{2} Y \frac{\omega^2 A^2}{u^2}\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\mathrm{d}V$

又 $\because u = \sqrt{Y/\rho} \Longrightarrow Y = u^2\rho$

弹性势能： $\mathbf{d}E_\mathbf{p} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\mathbf{d}V$

比较振动动能： $\mathbf{d}E_k = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\mathrm{d}V$

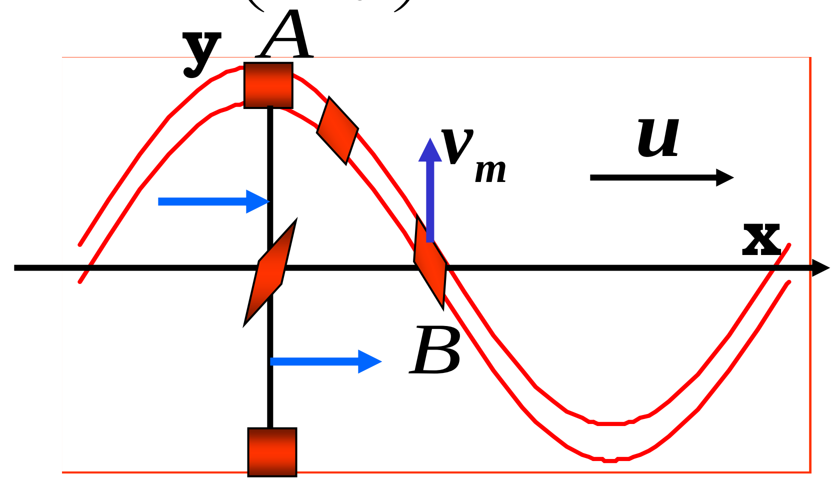
结论：在波动过程中，任一质元的动能和势能同相

讨论

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = dE_{k} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2 \omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\mathrm{d}V$$

B点：动能最大，势能也最大(相对形变最大)

A点：动能为零，势能也为零(相对形变为零)



3、质元的**机械能**：$\mathrm{d}E = \rho A^2\omega^2 \sin^2 \omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\mathrm{d}V$

$\Delta E_{总}$ **随 t、x 变，不守恒！**

最大位移 ⟶ 平衡位置，能量增大，从前面输入；
平衡位置 ⟶ 最大位移，能量减小，向后面输出。

==➔故波传播的过程是能量传播的过程

振动系统与波动能量的比较

孤立振动系统	波动
能量守恒	能量不守恒
动能、势能转换	沿波传播方向向前传播
E_k、E_p反相	E_k、E_p同相
$E=\frac{1}{2}kA^2$	$\mathrm{d}E=\rho A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\mathrm{d}V$
势能决定于形变 Δy	势能决定于相对形变 $\frac{\partial y}{\partial x}$

4、能量密度：单位体积介质中的波动能量

$$w=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V}=\rho A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

5、平均能量密度：

一个周期内所有能量之和与时间T的比值

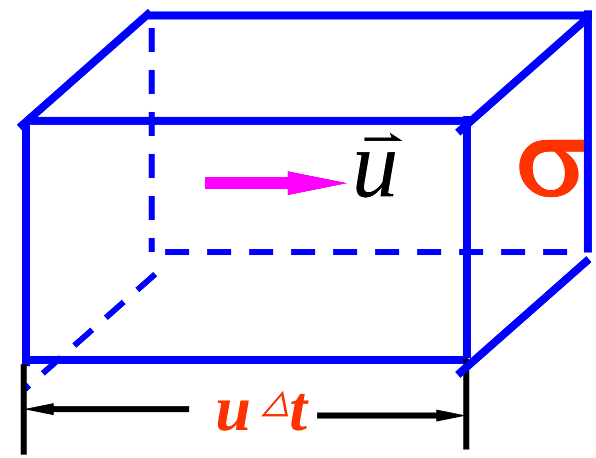
$$\bar{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\,\mathbf{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T \rho A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)dt=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

二、能流密度 波的强度

1、能流：**单位时间内通过某一截面的波动能量.**

$$P=\frac{\omega u\Delta t\sigma}{\Delta t}=\omega u\sigma$$

$$=u\sigma\rho A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$



2、平均能流

$$\overline{P}=\frac{1}{T}\int_0^T P\mathrm{d}t=\overline{\omega}u\sigma=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2u\sigma$$

3、能流密度（波的强度）：

垂直通过单位面积的能流。

$$S=\frac{P}{\sigma}=\omega u=u\rho A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

4、平均能流密度：

$$\bar{S}=\bar{\omega}u=\frac{1}{2}u\rho A^2\omega^2$$

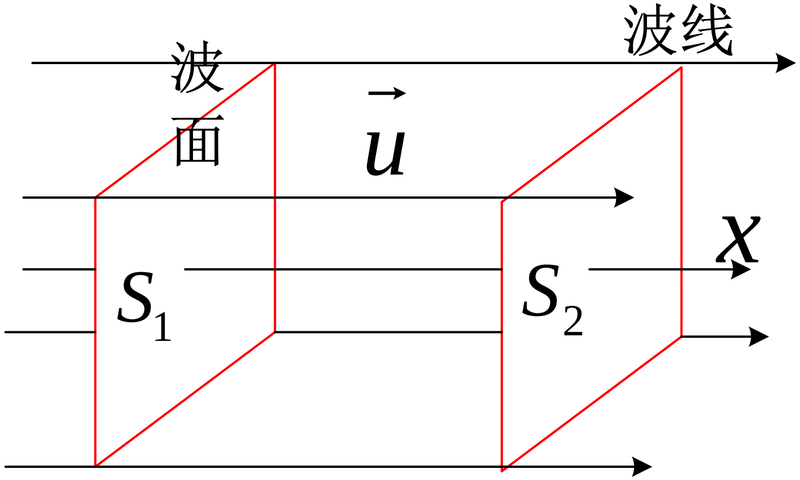
$$\vec{S}=\omega\vec{u}$$

电磁学中称为“坡印亭矢量”，

光学中称为“波的强度”，用 I 表示 $I\propto A^2$

三、平面波和球面波的能流

1、平面波



假设介质不吸收能量

$$\overline{P}=\overline{\omega}u\sigma=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2u\sigma$$

根据能量守恒 $\overline{P}_1=\overline{P}_2$

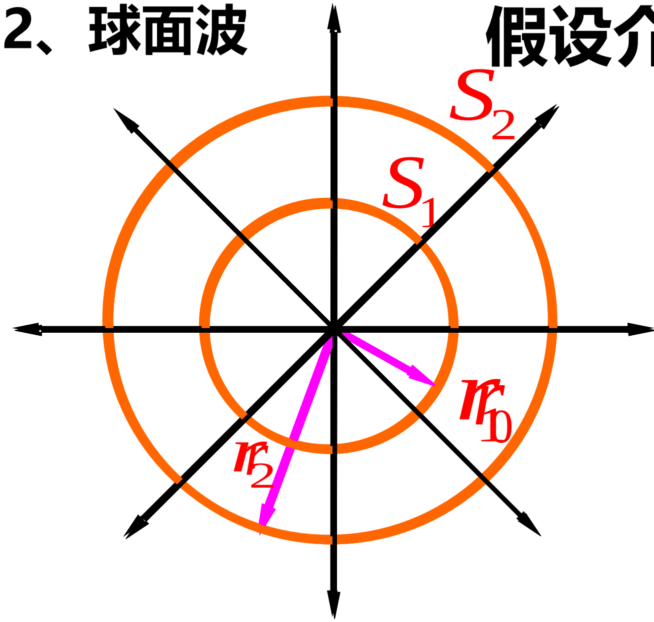
$$\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2uS_1=\frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2uS_2$$

$$S_1=S_2$$

$$A_1=A_2$$

结论：在均匀的不吸收能量的介质中传播的平面波，其振幅保持不变。

2、球面波



假设介质均匀，不吸收能量 $\overline{P} = \overline{\omega} u \sigma = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 u \sigma$

根据能量守恒 $\overline{P}_1 = \overline{P}_2$

$$\frac{1}{2}\rho A_1^2 \omega^2 u S_1 = \frac{1}{2}\rho A_2^2 \omega^2 u S_2$$

$$S_1 = 4\pi r_1^2$$
$$S_2 = 4\pi r_2^2$$

$$A_1^2 r_1^2 = A_2^2 r_2^2$$

$$A_1 r_1 = A_2 r_2$$

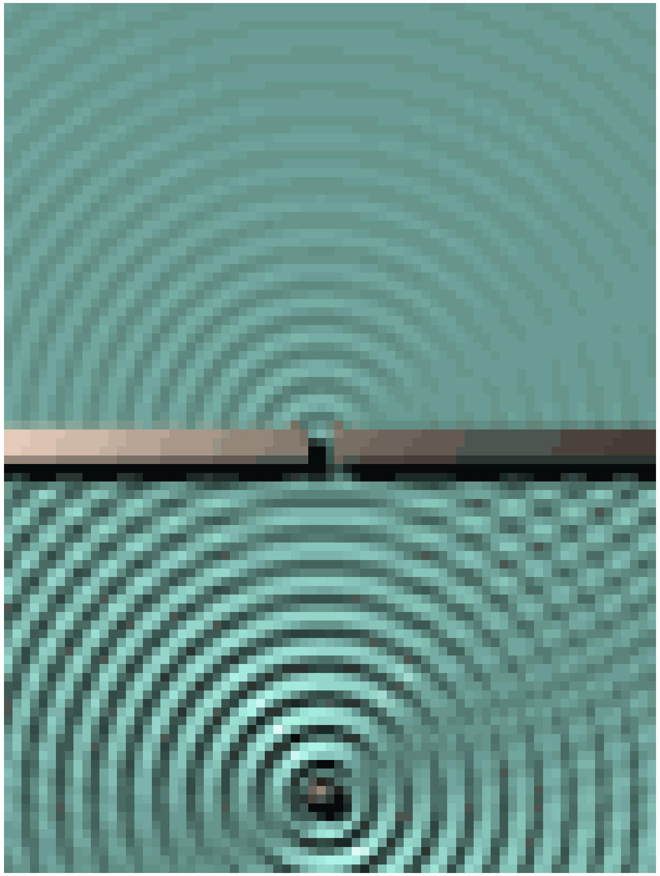
$$y(r,t) = \frac{A_0 r_0}{r}\cos[\omega(t - \frac{r - r_0}{u}) + \varphi_0]$$

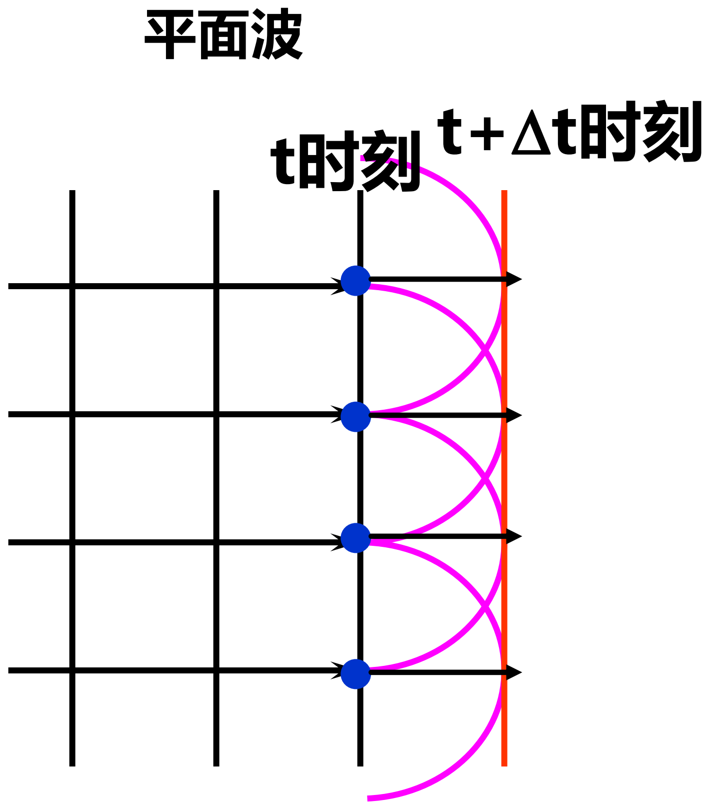
结论：在均匀的不吸收能量的介质中传播的球面波，离波源越远，振幅越小，振幅与波传播的距离成反比。

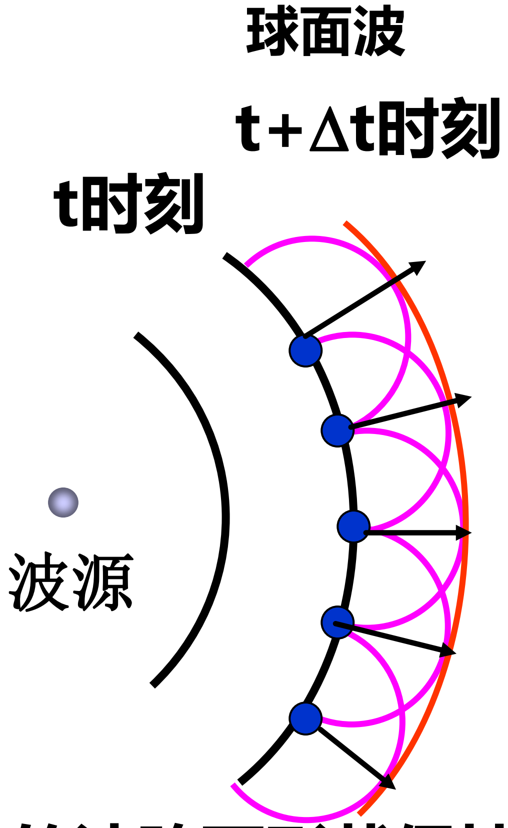
§10.4 惠更斯原理
与波的干涉

一、惠更斯原理：

波在传播过程中，波面上各点都可以看作是发射波的波源(子波源)，在其后的任一时刻，这些子波的包络面就是新的波面。







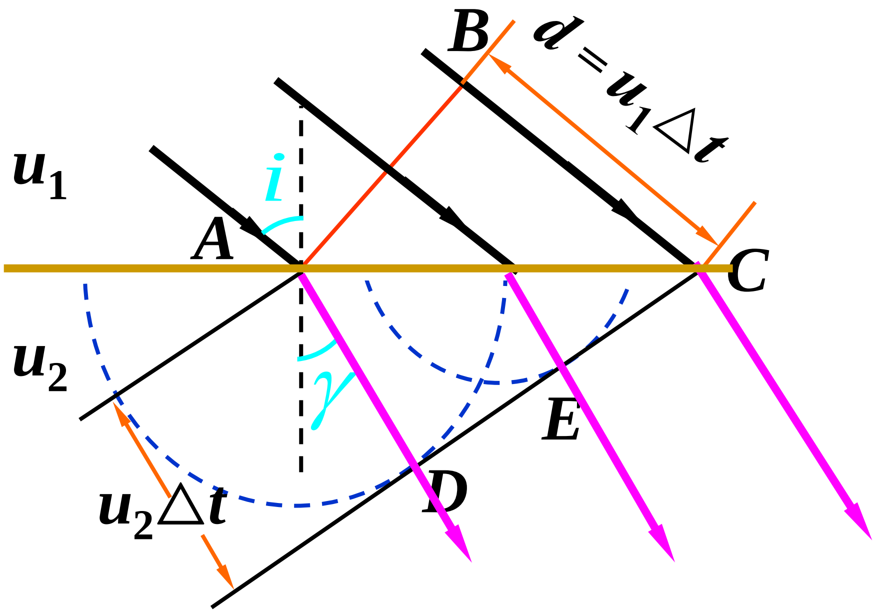
结论：经过Δt时间后，两种波的波阵面形状保持不变。
条件是：媒质是各向同性的均匀介质

惠更斯原理适用于一切波(机械波、电磁波)

优点：由一个波阵面可以知道下一个波阵面

缺点：包络面只能往前画，即 $x' = x + u\Delta t$ **，而不是** $x' = x - u\Delta t$ **，这属于波传播方向问题。**

惠更斯原理可 解释反射、折射、衍射现象；



$$\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{u_1 \Delta t}{u_2 \Delta t} = \frac{u_1}{u_2}$$

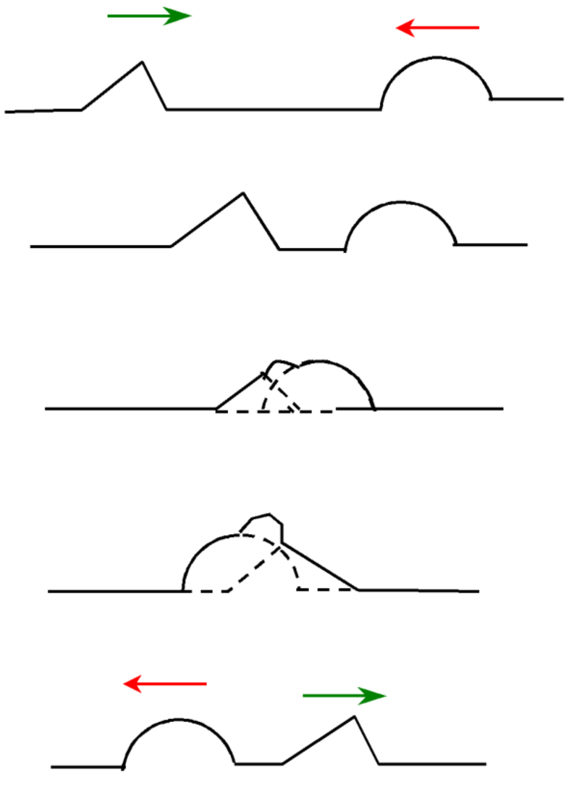
二、波的叠加与干涉

1、波传播的独立性

媒质中同时有几列波时，每列波都将保持自己原有的特性(传播方向、振动方向、频率等), 不受其它波的影响，各自独立传播，波形也不发生改变，即保持**波传播的独立性**

2、波的叠加原理

各列波在相遇区域内，某点振动是各列波单独存在时对该点所引起振动的合成。



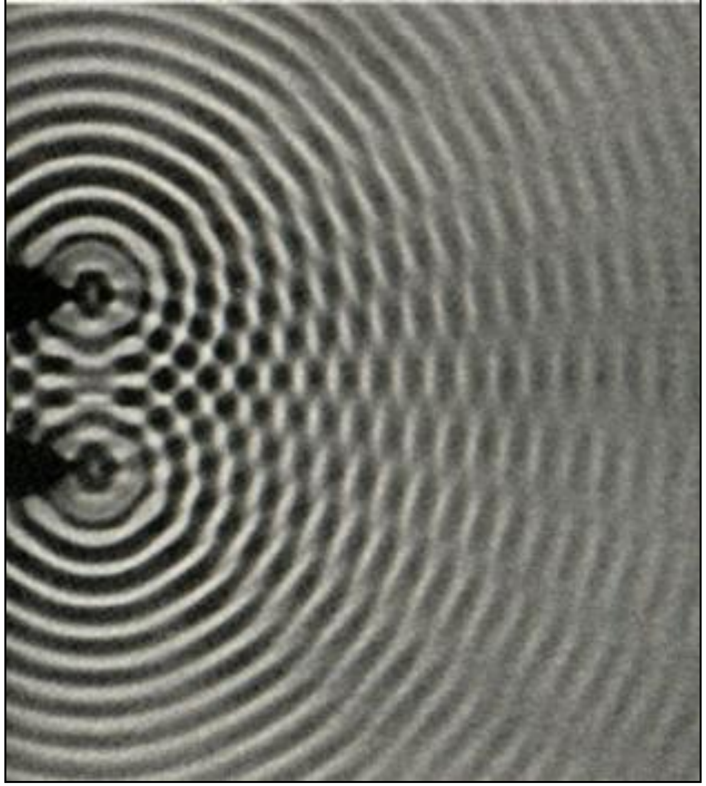
(1)波的叠加原理仅适用于线性波的问题.

(2)波的叠加原理对电磁波也适用.

3、波的干涉

干涉现象:

当两列（或多列）波叠加时，其合振动的振幅 A 和合强度 I 将在空间形成一种稳定的分布，即某些点上的振动始终加强，某些点上的振动始终减弱的现象.



相干条件 频率相同、振动方向相同、相位差恒定;

相干波 满足相干条件的波;

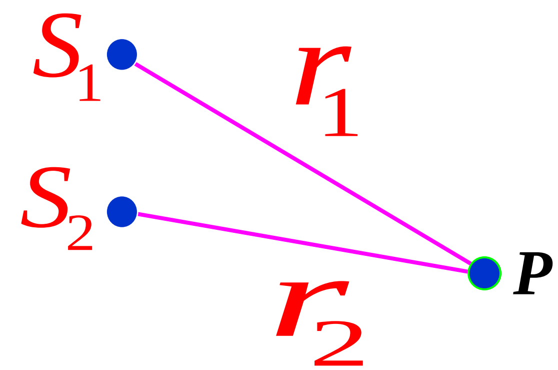
相干波源 产生相干波的波源;

$S_1: \quad y_1 = A_{10}\cos(\omega t + \varphi_1) \quad S_2: \quad y_2 = A_{20}\cos(\omega t + \varphi_2)$

两波源在场点P产生的谐振动方程为

$$y_{P1} = A_1 \cos\left[\omega\left(t - \frac{r_1}{u}\right) + \varphi_1\right]$$

$$y_{P2} = A_2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{r_2}{u}\right) + \varphi_2\right]$$



P点的合振动表达式：

$$y_P = y_{P1} + y_{P2} = A\cos(\omega t + \varphi)$$

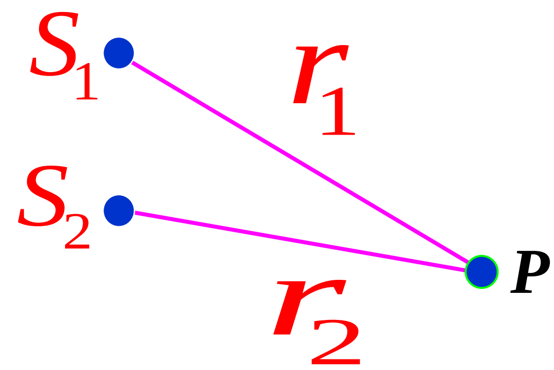
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{\omega}{u}(r_2 - r_1)]}$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin(\varphi_1 - \frac{\omega}{u}r) + A_2\sin(\varphi_2 - \frac{\omega}{u}r_2)}{A_1\cos(\varphi_1 - \frac{\omega}{u}r_1) + A_2\cos(\varphi_2 - \frac{\omega}{u}r_2)}$$

$$y_P = y_{P1} + y_{P2} = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi$$



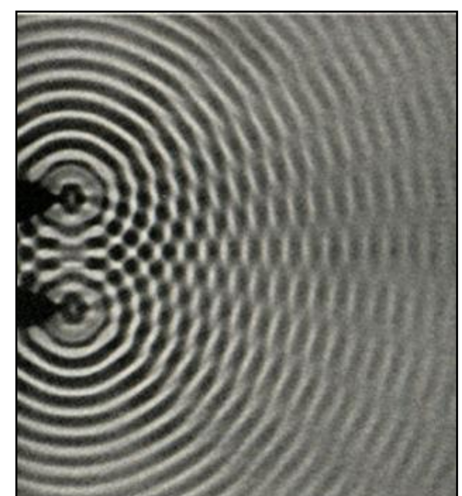
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{\omega}{u}(r_2 - r) = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

(1) $\Delta\varphi = \pm 2k\pi, k = 0, 1, 2\cdots$

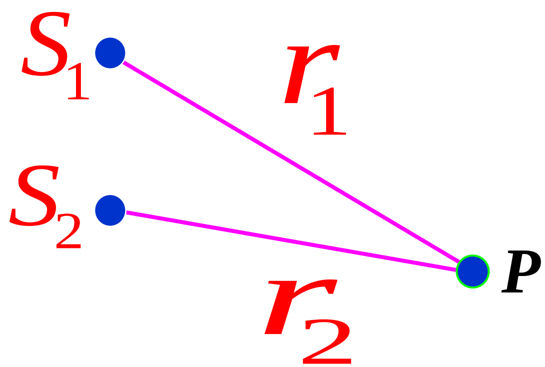
则 $A = A_1 + A_2$ $\quad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ 振动加强，

“相长干涉”

若 $I_1 = I_2 = I_0$ $\qquad I_{\max} = 4I_0$



$$y_P = y_{P1} + y_{P2} = A\cos(\omega t + \varphi)$$



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

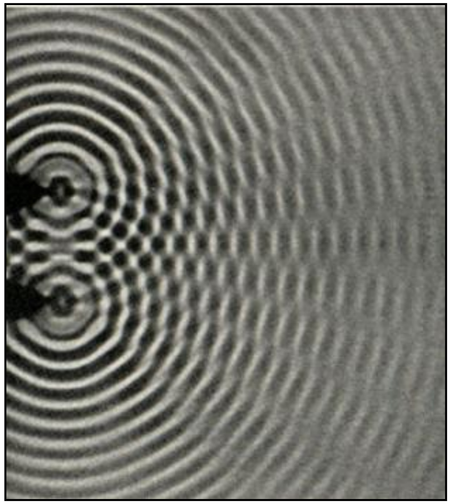
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{\omega}{u}(r_2 - r) = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

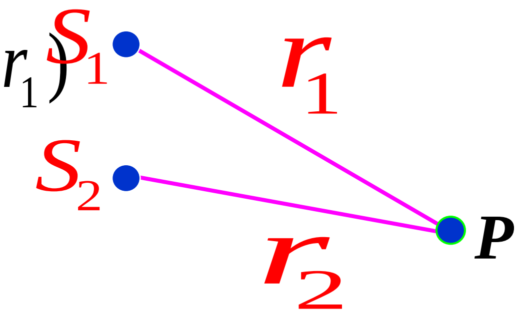
(2) $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi, k = 0,1,2\cdots$

则 $A = |A_1 - A_2|$ $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}$ 振动减弱，

如果 $I_1 = I_2 = I_0$ $I_{\min} = 0$ “相消干涉”



$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{\omega}{u}(r_2 - r) = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$



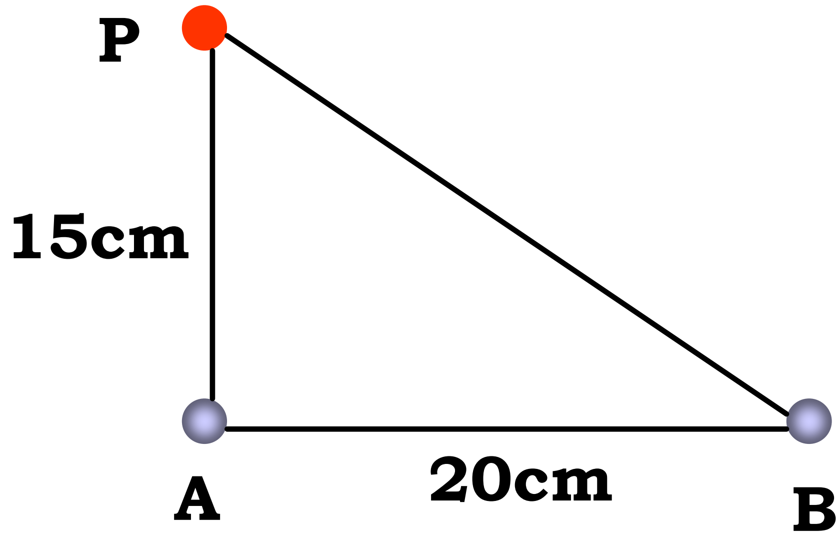
(3)特殊情况: $\varphi_2 = \varphi_1 \quad \Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \begin{cases} \pm 2k\pi & \text{干涉相长} \\ \pm(2k+1)\pi & \text{干涉相消} \end{cases}$$

波程差

$$r_2 - r_1 = \begin{cases} k\lambda & \text{干涉相长} \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{干涉相消} \end{cases}$$

例题：**A**、**B**为两个相干波源，振幅为**5cm**，频率为**100Hz**，波速为**10m/s**，当**A**点为波峰时，**B**点恰为波谷，确定两列波在**P**点干涉的结果。



$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

$$= \pi - \frac{2\pi}{0.1}(0.25 - 0.15)$$

$$= -\pi$$

相位反相，**A=0**，处于静止

两相干波源S_1和S_2相距λ/4，（λ为波长），S_1的相位比S_2的相位超前 $\pi/2$

，在S_1，S_2的连线上，S_1外侧各点（例如P点）两波引起的两谐振动的相位差__________.