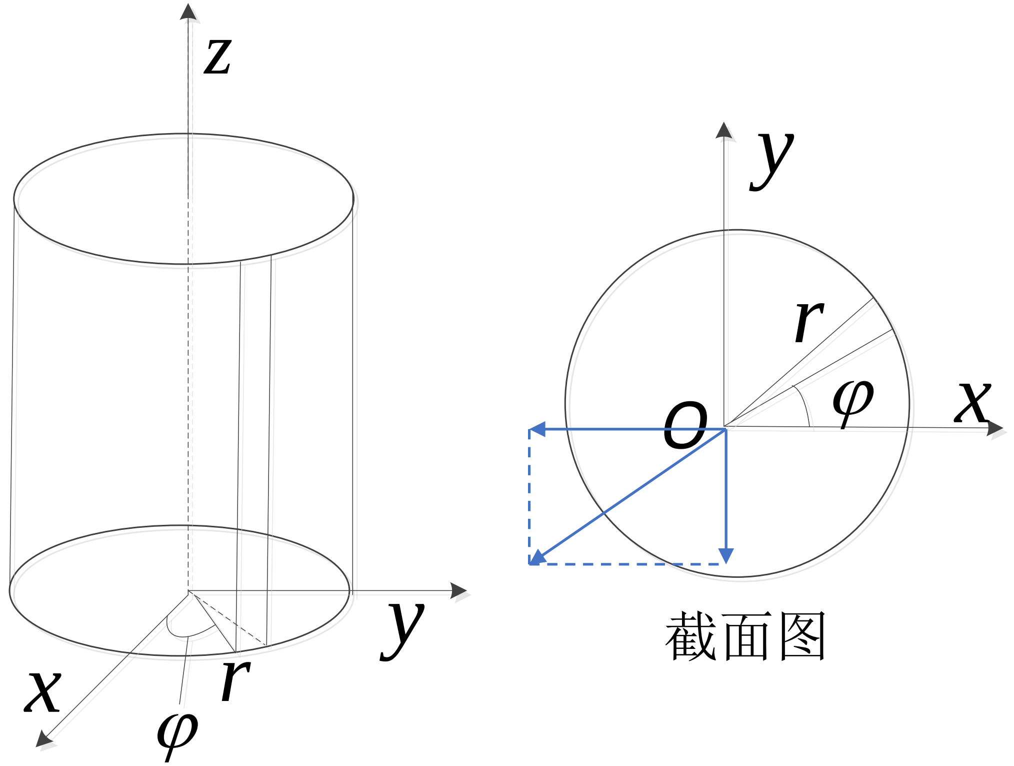
一个无限长带电圆柱面，面上电荷分布不均匀，面电荷密度为

$$\sigma = \sigma_0 \cos\varphi$$

，φ 角为r与x轴之间的夹角，如图所示。求圆柱面轴线z上的场强。



截面图

解：将无限长圆柱面划分成许多个无限长直导线，则无限长直导线作微元，其所带电量为

$$dq = \sigma ds = \sigma lrd\varphi \qquad (5\text{分})$$

其中 l 为 z 方向的线长，r 为圆柱面半径

又微元为无限长直导线，则有 $dq = \lambda l$

故有 $\lambda = \sigma rd\varphi$ (5 分)

则微元无限长直导线在圆柱轴线上产生的电场强度大小为

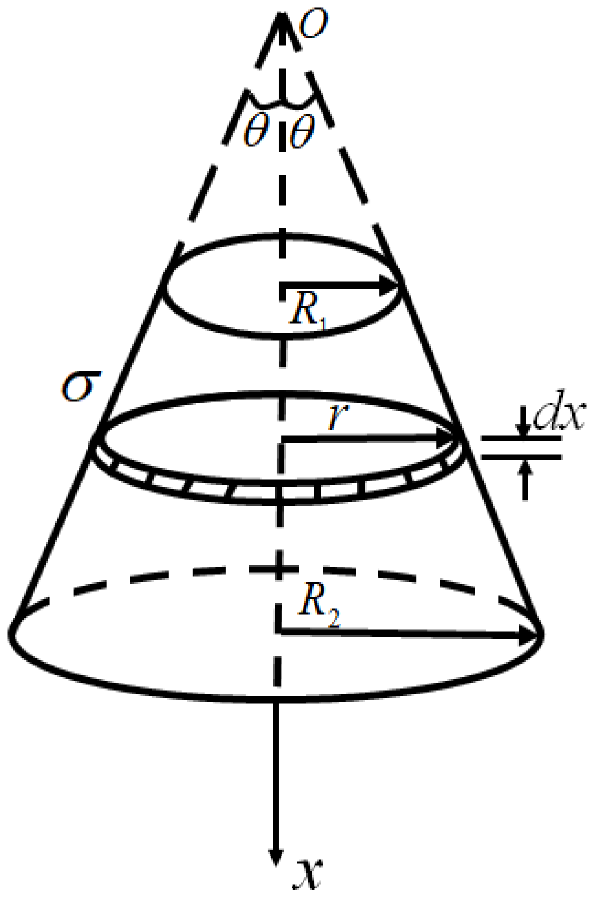
$$dE = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma_0 \cos\varphi d\varphi}{2\pi\varepsilon_0} \qquad (5\text{分})$$

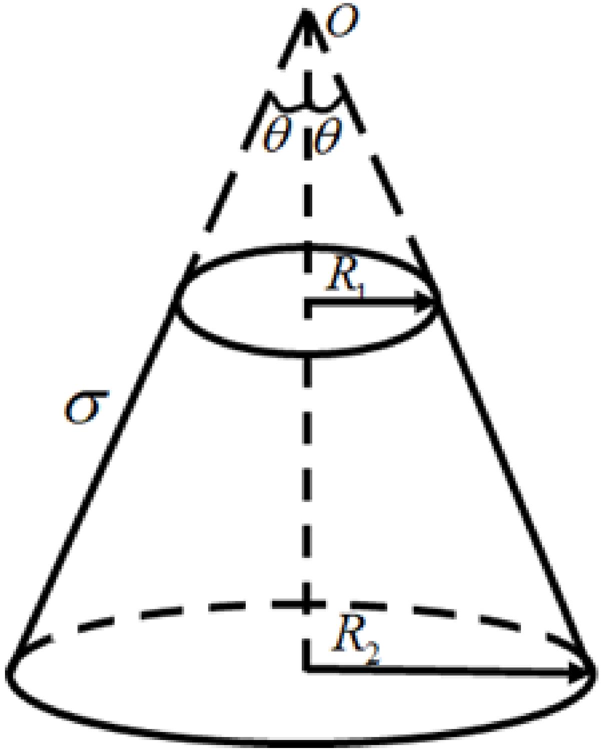
则有 $dE_x = dE\cos\varphi \quad dE_y = dE\sin\varphi$

$$E_x = \int dE_x = \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 \cos\varphi \cos\varphi d\varphi}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \qquad (5\text{分})$$

$$E_y = \int dE_y = \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 \cos\varphi \sin\varphi d\varphi}{2\pi\varepsilon_0} = 0 \qquad (5\text{分})$$

6C-3. 如图所示，有一上下底面半径分别为 R_1 和 R_2 的圆台面，其锥顶角为 2θ，圆台的侧面均匀带有正电荷，电荷面密度为 $+\sigma$，试求顶点 O 处的场强和电势。





半球面

解：如图，以 O 为原点，竖直向下为 x 轴正向。

在圆台面上任取一个半径为 r 的圆环作为微元，此微元的高为 dx，带电量为

$$dq=\sigma dS=\sigma\cdot 2\pi r\cdot\frac{dx}{\cos\theta}=\sigma\cdot 2\pi x\cdot tg\theta\cdot\frac{dx}{\cos\theta}$$

根据圆环在中轴线上的场强公式，该微元在 O 点产生的场强大小为

$$dE=\frac{xdq}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}=\frac{xdq}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2tg^2\theta+x^2\right)^{3/2}}=\frac{\sigma\sin 2\theta dx}{4\varepsilon_0 x}$$

$$E=\int dE=\frac{\sigma\sin 2\theta}{4\varepsilon_0}\int_{R_1/tg\theta}^{R_2/tg\theta}\frac{dx}{x}=\frac{\sigma\sin 2\theta}{4\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$ 方向沿 x 轴负向

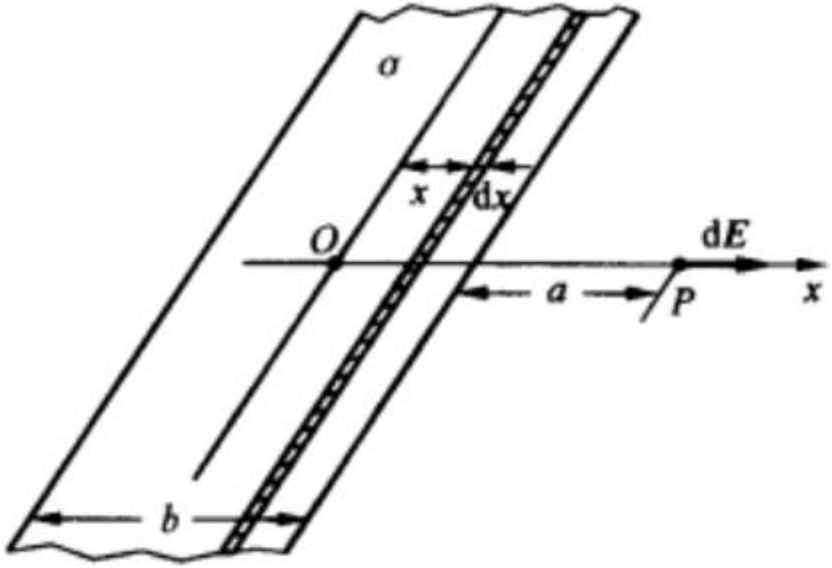
又根据圆环在中轴线上的电势公式，该微元在 O 点产生的电势为

$$dU=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+x^2\right)^{1/2}}=\frac{\sigma tg\theta dx}{2\varepsilon_0}$$

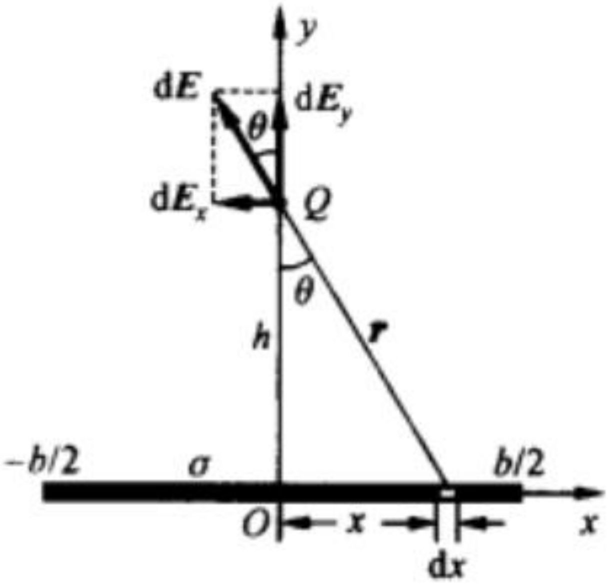
故整个圆台面在 O 点产生的电势为

$$U=\int dU=\frac{\sigma tg\theta}{2\varepsilon_0}\int_{R_1/tg\theta}^{R_2/tg\theta}dx=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R_2-R_1\right)$$

一宽为 b 的无限长均匀带电平面薄板，其电荷面密度为 σ，如图所示， 试求



(a)



(b)

（1）薄板所在平面内，距薄板边缘为 a 处的电场强度；

（2）通过薄板的几何中心的垂直线上与薄板的距离为 h 处的电场强度.

解 在薄板上取一宽为 $\mathrm{d}x$ 的窄条视为无限长均匀带电直导线，其单位长度上带电量为 $\lambda = \sigma \mathrm{d}x$.

$$\mathrm{d}E = \frac{\sigma \mathrm{d}x}{2\pi\varepsilon_0\left(a + \frac{b}{2} - x\right)}$$

整个薄板在 P 点产生的电场强度大小为

$$E = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\sigma \mathrm{d}x}{2\pi\varepsilon_0\left(a + \frac{b}{2} - x\right)} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a+b}{a}$$

E 的方向沿 x 轴正方向；

(2) 窄条在 Q 点产生的电场强度大小为

$$\mathrm{d}E = \frac{\sigma \mathrm{d}x}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\mathrm{d}E_x = -\mathrm{d}E\sin\theta = -\frac{\sigma \mathrm{d}x}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{x}{r} = -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+h^2)}$$

$$\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\cos\theta = \frac{\sigma \mathrm{d}x}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{h}{r} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{h\mathrm{d}x}{(x^2+h^2)}$$

则整个薄板在 Q 点产生的电场强度的分量各为

$$E_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+h^2)} = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\ln(x^2+h^2)\Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = 0$$

$$E = E_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\frac{h\mathrm{d}x}{(x^2+h^2)} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\frac{h}{h}\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

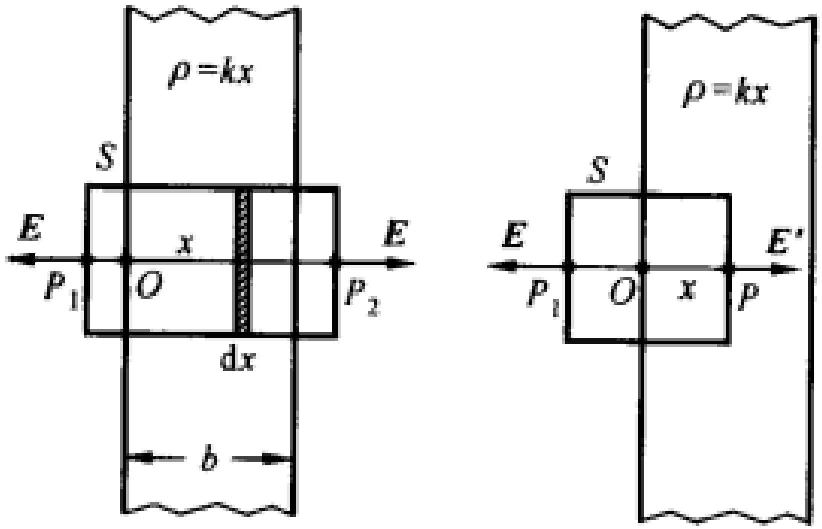
$$= \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\arctan\frac{b}{2h}$$

E 的方向沿 y 轴正方向.

如图所示为厚度 b 的无限大带电平板，电容率为 ε_0，其电荷体密度 $\rho=kx(0\leqslant x\leqslant b)$，式中 k 为常量．求：

（1）平板外侧 P_1 和 P_2 处的电场强度大小（P_1，P_2 分别与板的左侧、右侧等距离）；

（2）平板内 x 处 P 点的电场强度；



(a)　　　　(b)

解 (1) 由对称分析，平板两侧的 E 的大小处处相等，方向垂直于平板，过 P_1 和 P_2 点作圆柱形高斯面，如图中(a)所示.

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2ES = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

而
$$\sum q_i = \int \rho \mathrm{d}V = \int_0^b kx \cdot S\mathrm{d}x = \frac{kSb^2}{2}$$

则有
$$2ES = \frac{kSb^2}{2\varepsilon_0}$$

得
$$E = \frac{kb^2}{4\varepsilon_0} \quad （板外两侧为均匀场）$$

(2) 过 P_1 点和板内 P 点作圆柱形高斯面，如图(b)所示.

P_1 处的场强 E 为已知，设 P 点处场强为 E'，由高斯定理：

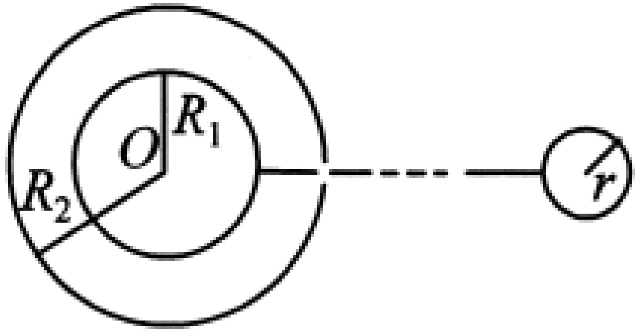
$$ES + E'S = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$$

而 $\sum q_{内} = \int \rho \mathrm{d}v = \int_0^x kx \cdot S\mathrm{d}x = \dfrac{ksx^2}{2}$，代入上式，有

$$E' = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0 S} - E = \frac{ksx^2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{kb^2}{4\varepsilon_0} = \frac{k}{2\varepsilon_0}\left(x^2 - \frac{b^2}{2}\right)$$

(3) $E' = 0$ 处，$x^2 - \dfrac{b^2}{2} = 0$ 得 $x = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

半径分别为 R_1 和 R_2（$R_2>R_1$）的两个同心导体薄球壳，分别带有电荷 Q_1 和 Q_2，今将内球壳用细导线与很远处半径为 r 的导体球相连，如图所示，忽略细导线上的电荷，导体球原来不带电，试求相连后导体球所带的电荷。



由于二者距离很远，因此计算电势各算各的

假设导体球带电 q，则球壳内表面 Q_1-q。

二者由导线相连，则 $V_{壳内}=V_{球}$

而 $V_{球}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$。

球壳内表面：$V_{壳内}=\frac{Q_1-q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$。

$$\therefore \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Q_1-q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

可求出 q。

26. 如图 2-5-20 所示，在半径为R的导体球外与球心O相距为a的一点A处放置一点电荷$+Q$，在球内有一位于AO的延长线上的B点，$OB=r$，试求

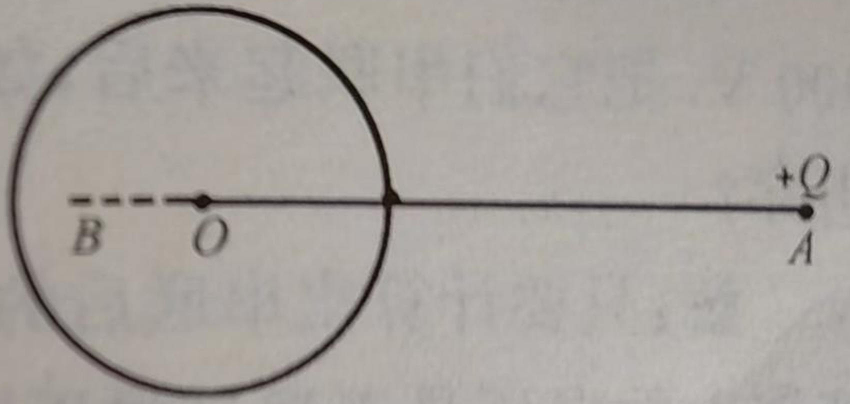


图 2-5-20

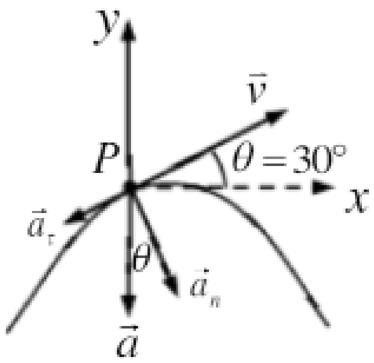
(1) 导体上的感应电荷在B点产生的场强；

(2) B点电势.

一物体做斜抛运动，测得在 P 点速度大小为 v, 方向与水平方向成 30°，则轨道在此点的曲率半径为__________。

1．一物体作如图所示的斜抛运动，测得在轨道 P 点处速度大小为 v，其方向与水平方向成 30° 角。则物体在 P 点的切向加速度

a_τ =______________，轨道的曲率半径 ρ =________________。



答案：$-\dfrac{1}{2}g$；$\dfrac{2v^2}{\sqrt{3}g}$。

解：$\vec{a}=-g\vec{j}$　　$a_\tau=a\sin\theta=-g\sin30^\circ=-\dfrac{1}{2}g$

$a_n=a\cos\theta=-g\cos30^\circ$。又因 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$，所以 $\rho=\left|\dfrac{v^2}{a_n}\right|=\dfrac{v^2}{g\cos30^\circ}=\dfrac{2v^2}{g\sqrt{3}}$

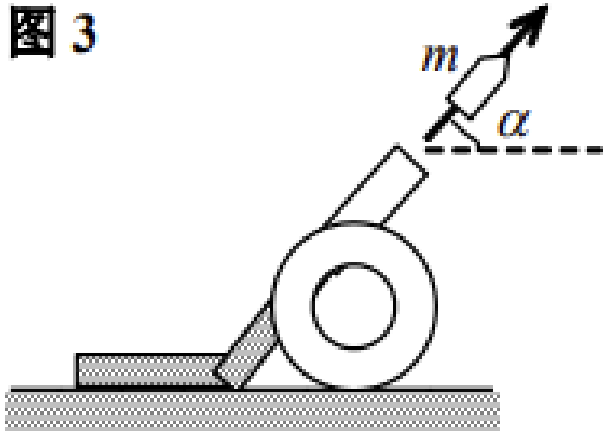
（25 分）如图 3，水平硬地面上一辆静止的炮车发射炮弹．炮车质量为 M，炮身仰角为α ，炮弹质量为 m，炮弹刚出口时，相对于炮身的速度为 u，地面对炮车的阻力大小远小于发炮冲力，求：

(1) 炮弹刚出炮口时，炮车的反冲速度大小；

(2) 若炮筒长为l,求发炮过程中炮车移动的距离；

(3) 设地面对炮车的阻力大小与炮车速率成正比，比例系数为 k，求炮弹发出后，炮车停止前所移动的距离。

图 3



三. 解：(1) 以炮车与炮弹为系统，地面为参考系，水平方向动量守恒.

设炮车相对于地面的速率为 V_x，则有

$$-MV_x + m(u\cos\alpha - V_x) = 0 \qquad \cdots\cdots 4\ 分$$

$$V_x = mu\cos\alpha / (M+m) \qquad \cdots\cdots 1\ 分$$

(2) 解法一：

以炮车与炮弹为系统，地面为参考系，系统水平方向不受外力，

根据质心运动定理，质心水平速度为 0 不变，即质心水平坐标不变，

设发炮前炮车和炮弹坐标分别为 x_1 和 x_2，发炮过程中两者位移为 d_1 和 d_2，则

$$Mx_1 + mx_2 = M\left(x_1 + d_1\right) + m\left(x_2 + d_2\right) \qquad \cdots\cdots 4\ 分$$

$$d_2 - d_1 = l\cos\alpha \qquad \cdots\cdots 4\ 分$$

解得 $$d_1 = -ml\cos\alpha / (M+m) \qquad \cdots\cdots 2\ 分$$

炮车后退了 $ml\cos\alpha/(M+m)$ 的距离.

解法二：

以 $u(t)$ 表示发炮过程中任一时刻炮弹相对于炮身的速度，该瞬时炮车的速度为

$$V_x(t) = -mu(t)\cos\alpha/(M+m) \qquad \cdots\cdots 4\ 分$$

积分求炮车后退距离

$$\Delta x = \int_0^t V_x(t)\,\mathrm{d}t = -m/(M+m)\int_0^t u(t)\cos\alpha\,\mathrm{d}t \qquad \cdots\cdots 4\ 分$$

$$\Delta x = -ml\cos\alpha/(M+m) \qquad \cdots\cdots 2\ 分$$

即向后退了 $ml\cos\alpha/(M+m)$ 的距离.

(3) 由题意知，炮车所受阻力 $f=-kv$

根据牛顿第二定律，质点加速度

$$a=\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{M}v$$

移项，两边同时做定积分 $\int_{V_x}^{v}\frac{dv}{v}=\int_0^t-\frac{k}{M}dt$

可得速度随时间变化公式 $v=V_xe^{-\frac{k}{M}t}$

由于 $v=dx/dt$，可得

$$dx=V_xe^{-\frac{k}{M}t}dt$$

两边同时做定积分 $\int_0^x dx=\int_0^t V_xe^{-\frac{k}{M}t}dt$

可得距离随时间变化公式 $x=\frac{MV_x}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{M}t}dt\right)$

当 $t=\infty$ 时，炮车有最大移动距离

$$x_m=\frac{MV_x}{k}=\frac{Mmu\cos\alpha}{k(M+m)}$$

$$f=-kv=ma=m\frac{dv}{dt}$$

$$\therefore -kv=m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=mv\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore -k\,dx=m\,dv$$

$$\therefore -k\int_0^x dx=m\int_{V_x}^0 dv$$

$$\therefore x=\frac{MV_x}{k}=\frac{Mmu\cos\alpha}{k(M+m)}$$