第3章　多维随机变量及其分布

本章计划学时：6学时

教学基本要求：掌握联合分布、边缘分布、条件分布及独立随机变量的概念，会求随机变量函数的分布。

重点：多维随机变量的分布，随机变量的独立性，随机变量函数的分布

难点：与多维随机变量的分布有关的计算

第1次课

教学内容：

1.多维随机变量及其分布

2. 边缘分布

教学目的及目标：

1.掌握联合分布、边缘分布的概念；

2.能熟练解决有关问题，包括由联合分布（函数、律、密度）求边缘分布（函数、律、密度）及已知分布（函数、律、密度）求有关事件概率等问题。

教学重点：

联合分布与边缘分布的概念及其关系

教学难点：

已知联合分布求边缘分布，以及已知分布求概率等涉及二重积分计算的问题的正确解决。

第2次课

教学内容：

1. 条件分布
2. 随机变量的独立性

教学目的及目标：

掌握条件分布及独立随机变量的概念,并能熟练解决有关问题；

教学重点：

随机变量的独立性

教学难点：

条件分布

第3次课

教学内容：

1.随机变量函数的分布；

2.n维随机变量简介。

教学目的及目标：

1.熟练掌握求随机变量函数的分布的基本方法，会求三类（和、商、最大最小）函数的分布；

2.理解n维随机变量的有关概念，知道高维随机变量与二维随机变量解决方法及有关结论的平行性。

教学重点：

分布函数法及其应用

教学难点：

分布函数法及变换定理的理解和正确使用。

§3.1 多维随机变量及其分布

2、n维随机变量

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $\Omega=\{\omega\}$，设

$$X_1=X_1(\omega),X_2=X_2(\omega),\cdots,X_n=X_n(\omega)$$

是定义在 Ω上的n个随机变量，由它们构成的一个 n 维向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 叫做 n 维随机向量或 n 维随机变量.

其中，第i个随机变量X_i称为第i个分量（i=1,2,…,n)。

n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 取值范围是 R^n 或其子集。

多维随机变量的分布函数

设有n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$,我们称n元函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\},$$

为随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$的联合分布函数,或$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数,其中,$x_1,x_2,\cdots,x_n$为任意实数,

$$\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\}=\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i\le x_i\}$$

对于随机向量，不仅要研究各分量的概率分布，而且还要考察它们之间的联系，因而需要考虑这些分量的所谓联合分布。与一维的情况类似，我们也先借助于“分布函数”来研究随机向量的概率分布。

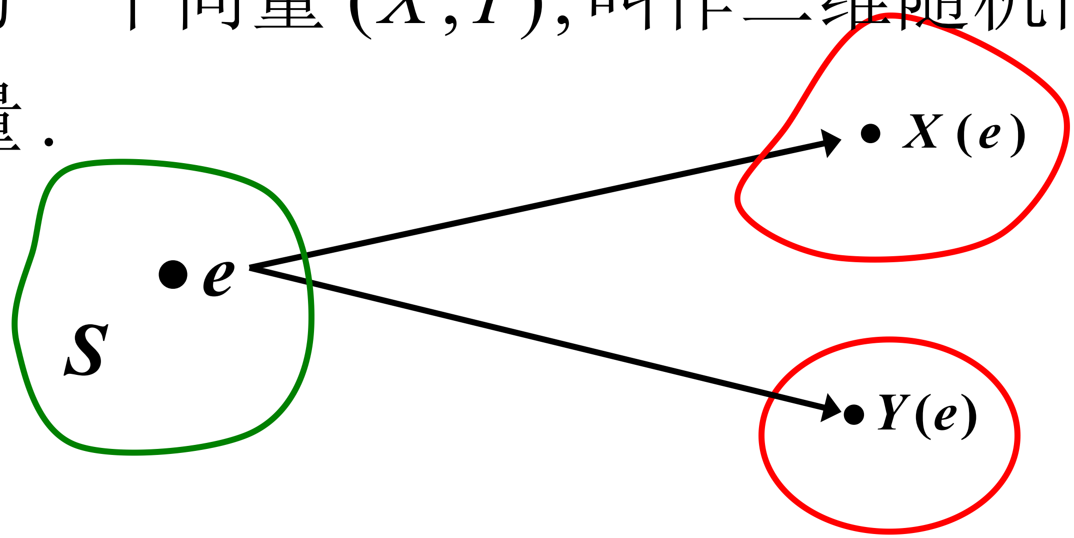
由于对二维随机向量和二维以上的随机向量的讨论没有本质差异，所以下面只讨论二维随机变量,有关方法和结论可平行推广至n维随机变量情形。

一、多维随机变量

1、二维随机变量

定义 设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $\Omega=\{\omega\}$，设 $X=X(\omega)$ 和 $Y=Y(\omega)$ 是定义在 Ω 上的随机变量，由它们构成的一个向量 (X,Y)，叫作二维随机向量或二维随机变量.

图示



实例1　炮弹的弹着点的位置（X, Y）就是一个二维随机变量.

实例2　考查某一地区学前儿童的发育情况，则儿童的身高 H 和体重 W 就构成二维随机变量（H, W）.

说明　二维随机变量（X, Y）的性质不仅与 X、Y 有关, 而且还与这两个随机变量的相互关系有关.

二、二维随机变量的联合分布函数及边缘分布函数

（一）、 联合分布函数

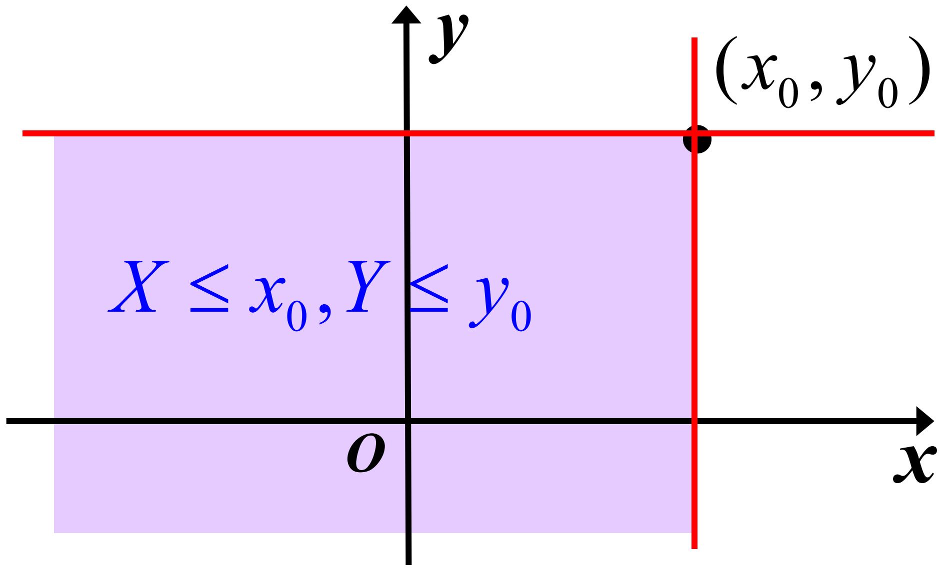
1、 定义

设 (X,Y) 是二维随机变量,对于任意实数 x,y,二元函数:

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\bigcap(Y\le y)\}=P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为随机变量X 和 Y 的联合分布函数,或二维随机变量 (X,Y) 的分布函数。

$F(x,y)$ 在点(x_0, y_0)处的函数值就是随机点落在如图所示区域内的概率.



2. 性质

1° $F(x,y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数，即对于任意固定的 y，当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$，

对于任意固定的 x，当 $y_2 > y_1$ 时 $F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$.

2° $0 \leq F(x,y) \leq 1$，且有

对于任意固定的 y，$F(-\infty,y) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$，

对于任意固定的 x，$F(x,-\infty) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$，

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y)=0,$$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y)=1.$$

3^{o} $\quad F(x,y)=F(x+0,y),\ F(x,y)=F(x,y+0),$

即 $F(x,y)$ 关于 x 右连续，关于 y 也右连续.

4^{o} 对于任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ x_1<x_2,\ y_1<y_2,$

有 $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\ge 0.$

证明 $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$

$$= P\{X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} - P\{X \le x_1, y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= P\{X \le x_2, Y \le y_2\} - P\{X \le x_2, Y \le y_1\}$$

$$- P\{X \le x_1, Y \le y_2\} + P\{X \le x_1, Y \le y_1\} \ge 0,$$

故 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \ge 0.$

反之，任一满足上述四个性质的二元函数$F(x, y)$都可以作为某个二维随机变量(X, Y)的分布函数。

图示记忆法。

（二）、 边缘分布函数

问题:已知 (X,Y) 的分布, 如何确定 X,Y 的分布?

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\},\quad F(x)=P\{X\le x\},$$

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty)=F_X(x)$$

(X,Y) 关于 X 的边缘分布函数 .

同理令 $x\to\infty$,

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=P\{X<\infty,Y\le y\}=P\{Y\le y\}$$

为随机变量 (X,Y) 关于 Y 的边缘分布函数.

例1.设（X,Y）的分布函数为

$$F(x, y) = A(B + \arctan\frac{x}{2})(C + \arctan\frac{y}{3})$$

1.A，B，C＝？ 2.关于X和Y的边缘分布函数 .

3. $P\{0 < X \le 2, 0 < Y \le 3\} = ?\ P(X > 2) = ?$

解： 1． 由分布函数的性质：

$$F(+\infty, +\infty) = A(B + \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2}) = 1$$

$$F(-\infty, y) = A(B - \frac{\pi}{2})(C + \arctan\frac{y}{3}) = 0\ , \forall y$$

$$F(x, -\infty) = A(B + \arctan\frac{x}{2})\ (C - \frac{\pi}{2}) = 0, \forall x$$

$$\therefore\ A = \frac{1}{\pi^2}, B = \frac{\pi}{2}, C = \frac{\pi}{2}$$

$2. \forall x \in R,$

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{x}{2}) \bullet \pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2}$$

$\forall y \in R,$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \frac{1}{\pi^2} \bullet \pi \bullet (\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{y}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{3}$$

$$3. P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F_X(2) = \frac{1}{4}$$

$$P(0 < X \le 2, 0 < Y \le 3) = F(2,3) - F(2,0) - F(0,3) + F(0,0)$$

$$= \frac{9}{16} - \frac{3}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

三、二维离散型随机变量及其分布律

1. 二维离散型随机变量

若二维随机变量 (X, Y) 所取的可能值是有限对或可列多对, 则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量.

2. 联合分布律

设二维离散型随机变量 (X,Y)所有可能取的值为 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \cdots,$ 记

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

称此为二维离散型随机 变量 (X,Y) 的分布律，或随机变量 X 和 Y 的联合分布律 .

其中 $p_{ij} \geq 0, \ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$

二维随机变量（X,Y）的分布律也可表示为

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

例2 一个袋中有三个球, 依次标有数字 1, 2, 2, 从中任取一个, 不放回袋中, 再任取一个, 设每次取球时, 各球被取到的可能性相等, 以 X, Y 分别记第一次和第二次取到的球上标有的数字, 求 (X, Y) 的分布律与分布函数.

解 (X, Y) 的可能取为 $(1, 2)$, $(2,1)$, $(2,2)$.

$$P\{X=1, Y=2\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{3},\quad P\{X=2, Y=1\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=2, Y=2\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

$$p_{11} = 0, \quad p_{12} = p_{21} = p_{22} = \frac{1}{3},$$

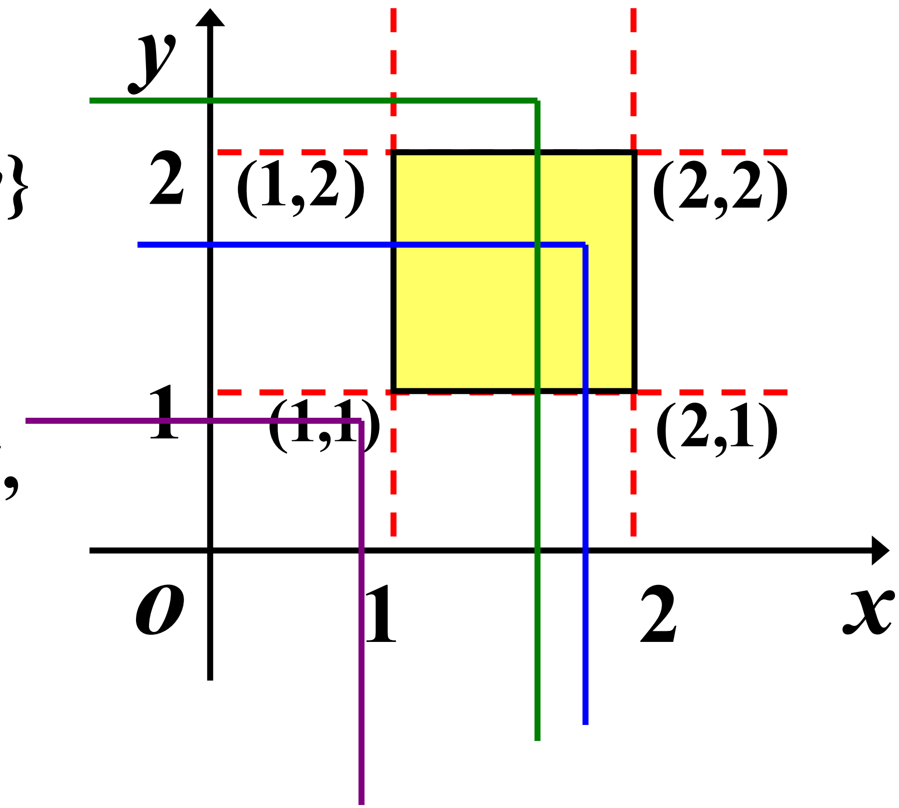
故（X, Y）的分布为

$Y \backslash X$	1	2
1	0	$1/3$
2	$1/3$	$1/3$

*下面求分布函数.

(1) 当 $x<1$ 或 $y<1$ 时，

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$
$$=0;$$

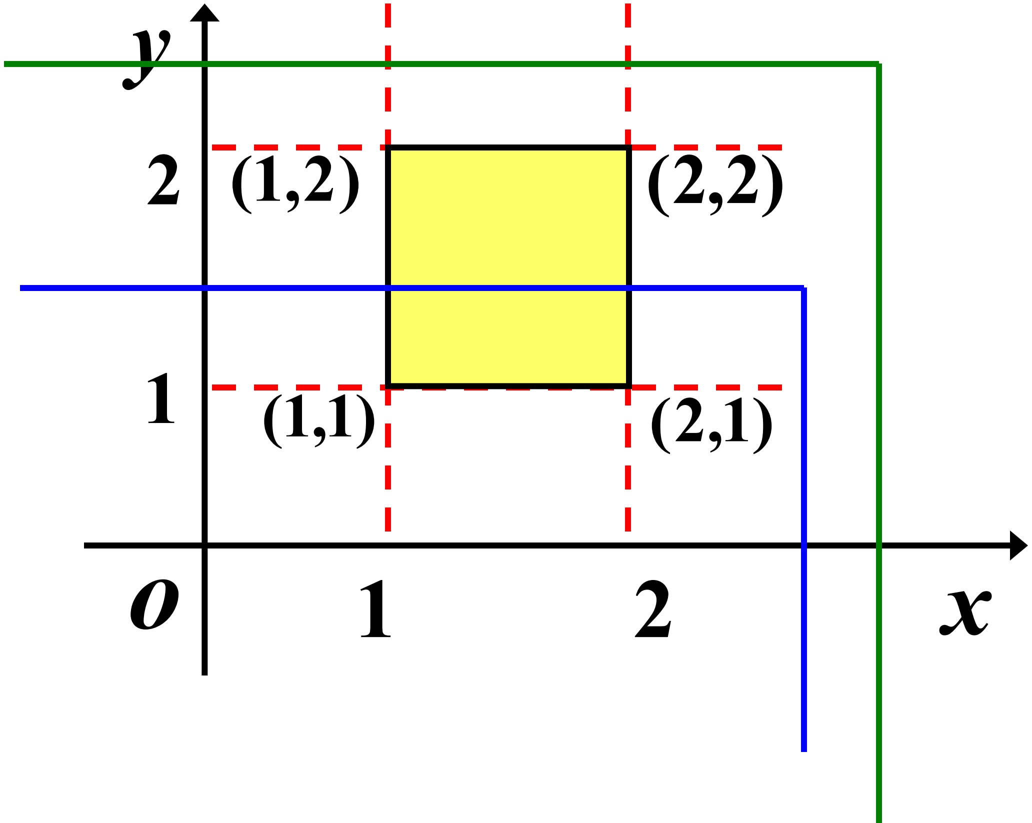


(2) 当 $1\le x<2, 1\le y<2$ 时，

$$F(x,y)=p_{11}=0;$$

(3) 当 $1\le x<2,\ y\ge 2$ 时，

$$F(x,y)=p_{11}+p_{12}=1/3;$$



(4) 当 $x \geq 2, 1 \leq y < 2$ 时， $F(x, y) = p_{11} + p_{21} = 1/3;$

(5) 当 $x \geq 2, y \geq 2$ 时, $F(x, y) = p_{11} + p_{21} + p_{12} + p_{22} = 1.$

所以(X,Y) 的分布为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<1 \text{ 或 } y<1,\\ \dfrac{1}{3}, & 1\le x<2, y\ge 2, \text{ 或 } x\ge 2, 1\le y<2,\\ 1, & x\ge 2, y\ge 2.\end{cases}$$

说明

离散型随机变量 (X,Y) 的分布函数归纳为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij},$$

其中和式是对一切满足 $x_i \le x, y_j \le y$ 的i, j求和.

例3 设随机变量 X 在 $1, 2, 3, 4$ 四个整数中等可能地取值，另一个随机变量 Y 在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数值. 求 (X, Y) 分布律，及 $P(X \le Y), P(X = 2)$ 的值.

解 $\{X = i, Y = j\}$ 的取值情况是：$i = 1, 2, 3, 4,$

j 取不大于 i 的正整数. 且由乘法公式得

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{Y = j \mid X = i\}P\{X = i\} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{4},$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \quad j \le i.$$

于是 (X, Y) 的分布律为

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

$$P\{X \le Y\} = P\{X=1, Y=1\} + P\{X=1, Y=2\} +$$

$$P\{X=1, Y=3\} + P\{X=1, Y=4\} + P\{X=2, Y=2\} +$$

$$P\{X=2, Y=3\} + P\{X=2, Y=4\} + P\{X=3, Y=3\} +$$

$$P\{X=3, Y=4\} + P\{X=4, Y=4\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} = \frac{25}{48}$$

$$P\{X=2\} = P\{X=2, Y=1\} + P\{X=2, Y=2\} +$$

$$P\{X=2, Y=3\} + P\{X=2, Y=4\} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

3. 边缘分布律

定义 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots.$

记
$$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\}, \quad i=1,2,\cdots,$$

$$p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=P\{Y=y_j\}, \quad j=1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}\ (i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}\ (j=1,2,\cdots)$ 为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},\ i = 1,2,\cdots;$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j = 1,2,\cdots.$$

例4　　已知下列分布律求其边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{12}{42}$	$\frac{12}{42}$
1	$\frac{12}{42}$	$\frac{6}{42}$

解

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j}=P\{Y=y_j\}$
0	$\frac{12}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{12}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{3}{7}$
$p_{i\bullet}=P\{X=x_i\}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

注意

联合分布 $\xrightarrow{}$ 边缘分布

$\cancel{\xleftarrow{}}$

(*) 练　一整数 N 等可能地在 $1,2,3,\cdots,10$ 十个值中取一个值. 设 $D=D(N)$ 是能整除 N 的正整数的个数, $F=F(N)$ 是能整除 N 的素数的个数. 试写出 D 和 F 的联合分布律, 并求边缘分布律.

解

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

由此得 D 和 F 的联合分布律与边缘分　布律:

$F \backslash D$	1	2	3	4	$P\{F=j\}$
0	$1/10$	0	0	0	$1/10$
1	0	$4/10$	$2/10$	$1/10$	$7/10$
2	0	0	0	$2/10$	$2/10$
$P\{D=i\}$	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$	1

或将边缘分布律表示为

D	1	2	3	4
p_k	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$

F	0	1	2
p_k	$1/10$	$7/10$	$2/10$

四、二维连续型随机变量及其概率密度

(一)、二维连续型随机变量及其联合概率密度

1.定义

对于二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$，如果存在非负的函数 $f(x,y)$ 使对于任意 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

则称 (X,Y) 是连续型的二维随机变 量，函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量 (X,Y) 的概率密度，或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度 .

2. 联合概率密度的性质

(1) $f(x,y) \geq 0.$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F(\infty,\infty) = 1.$

(3) 设 G 是 xOy 平面上的一个区域，点 (X,Y)落在 G内的概率为

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(4)若 $f(x,y)$在(x,y)连续,则有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$

几何意义

几何上，$z = f(x, y)$ 表示空间的一个曲面 .

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$$

表示介于 $f(x, y)$和 xOy 平面之间的空间区域的全部体积等于1.

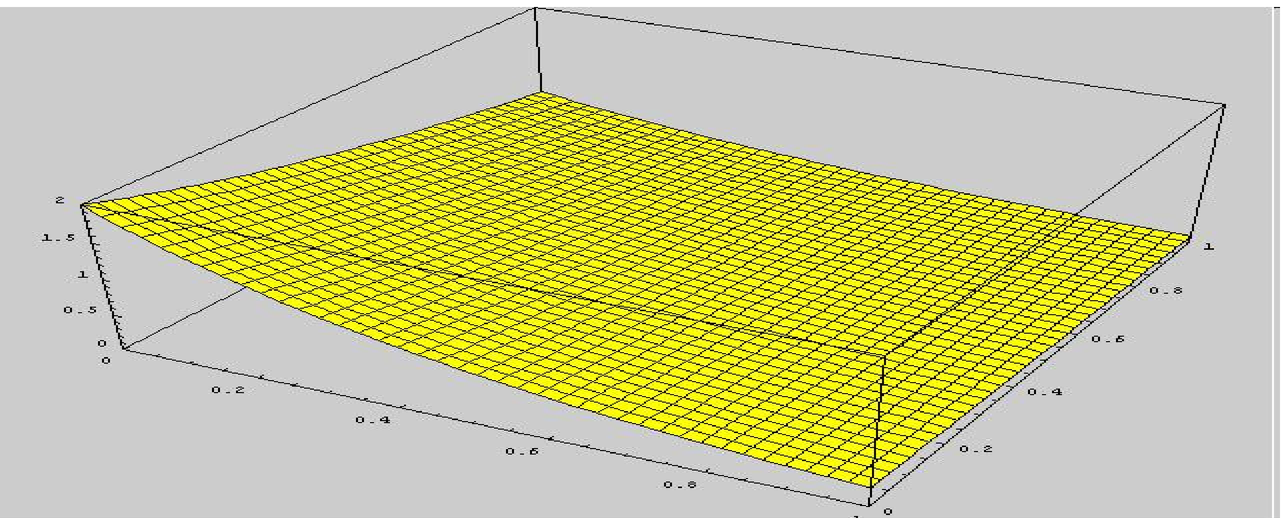
$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$P\{(X,Y) \in G\}$的值等于以G为底，以曲面$z = f(x,y)$为顶面的柱体体积 .

例5 设二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x,y)$; (2) 求概率 $P\{Y\le X\}$.



解 (1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

$$=\begin{cases}\int_{0}^{y}\int_{0}^{x} 2\mathrm{e}^{-(2u+v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得 $$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{y}), & x>0, y>0.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 将 (X,Y)看作是平面上随机点的坐标,

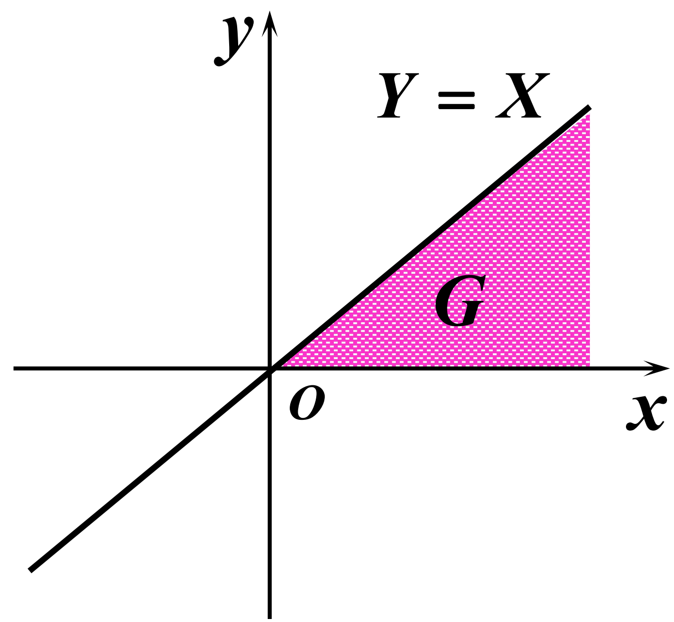
即有 $\{Y \le X\} = \{(X,Y) \in G\}$,

$$P\{Y \le X\} = P\{(X,Y) \in G\}$$

$$= \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}.$$

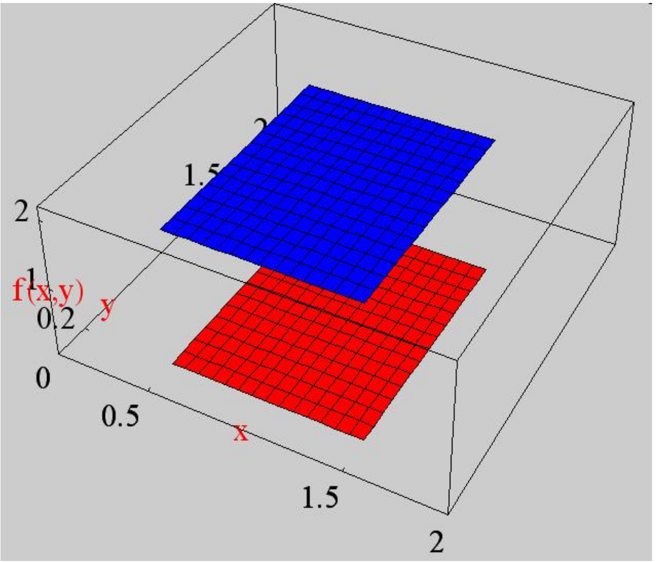


3. 二维均匀分布和二维正态分布

(1) 二维均匀分布

定义　设 D 是平面上的有界区域, 其面积为 S, 若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

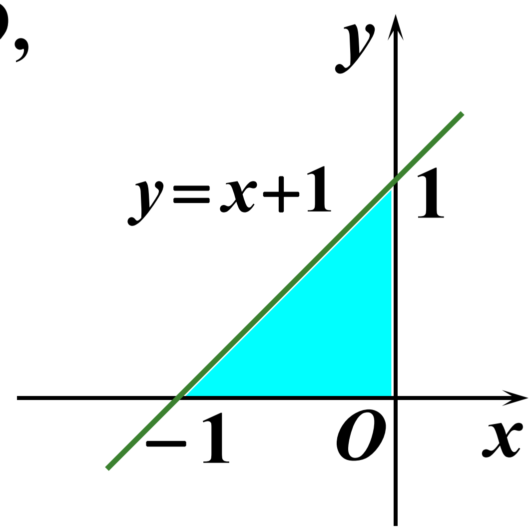
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



则称 (X, Y) 在 D 上服从均匀分布.

例6　已知随机变量 (X, Y) 在 D上服从均匀分布，试求(X, Y)的概率密度及分布函数，其中D 为 x 轴，y 轴及直线 $y=x+1$ 所围成的三角形区域 .

解　由 $f(x,y)=\begin{cases}1/S, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

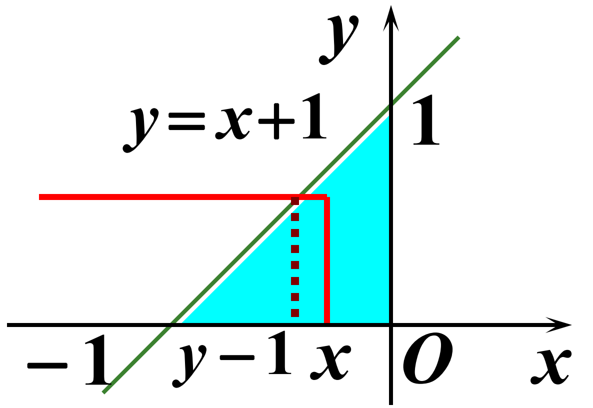


得 $f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

当 $x<-1$ 或 $y<0$ 时，$f(x,y)=0$

$$\Rightarrow F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=0;$$

当$-1 \le x < 0,\ 0 \le y < x+1$时,



$$\Rightarrow F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-1}^{y-1}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1} 2\,\mathrm{d}v + \int_{y-1}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{y} 2\,\mathrm{d}v$$

$$= (2x - y + 2)y;$$

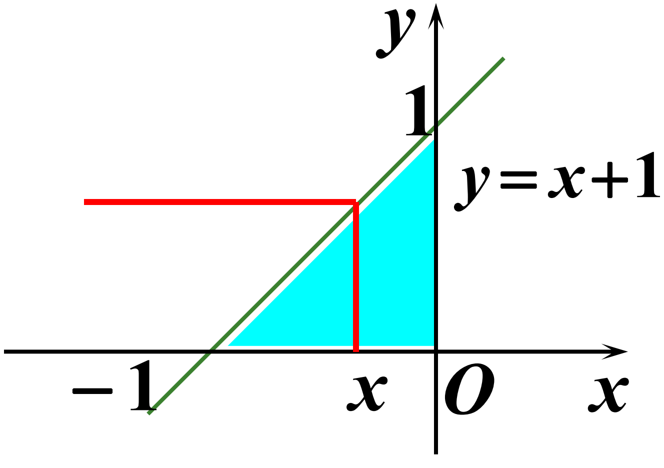
或

$$F(x,y) = \int_{0}^{y} dv\int_{y-1}^{x} 2\,\mathrm{d}u = (2x - y + 2)y$$

当$-1\le x<0,\ y\ge x+1$时,

$$\Rightarrow F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_{-1}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1}2\,\mathrm{d}v=(x+1)^2;$$



当 $x \geq 0, 0 \leq y < 1$ 时,

$$\Rightarrow F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

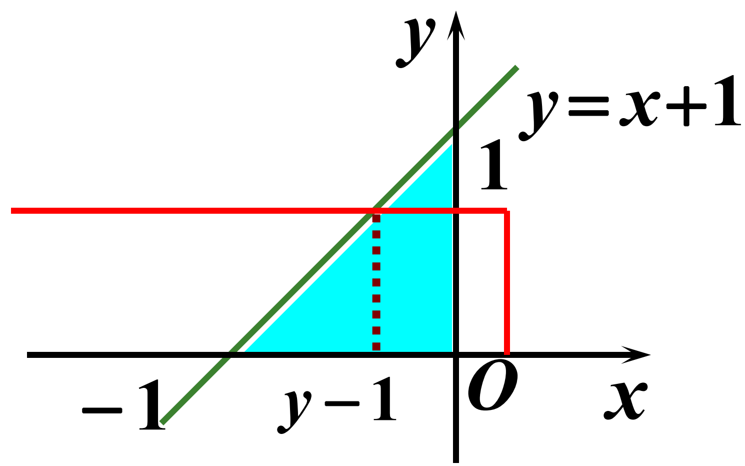
$$= \int_{-1}^{y-1}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1} 2\,\mathrm{d}v + \int_{y-1}^{0}\mathrm{d}u\int_{0}^{y} 2\,\mathrm{d}v$$

$$= (2-y)y;$$

或

$$F(x,y) = \int_{0}^{y} dv\int_{v-1}^{0} 2\,\mathrm{d}u$$

$$= (2-y)y$$



当 $x \geq 1,\ y \geq 1$ 时,

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{-1}^{0}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1} 2\,\mathrm{d}v = 1.$$

所以 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < -1, \text{或 } y < 0, \\ (2x - y + 2)y, & -1 \leq x < 0,\ 0 \leq y < x+1, \\ (x+1)^2, & -1 \leq x < 0,\ y \geq x+1, \\ (2-y)y, & x \geq 0,\ 0 \leq y < 1, \\ 1, & x \geq 1,\ y \geq 1. \end{cases}$$

(2) 二维正态分布

若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

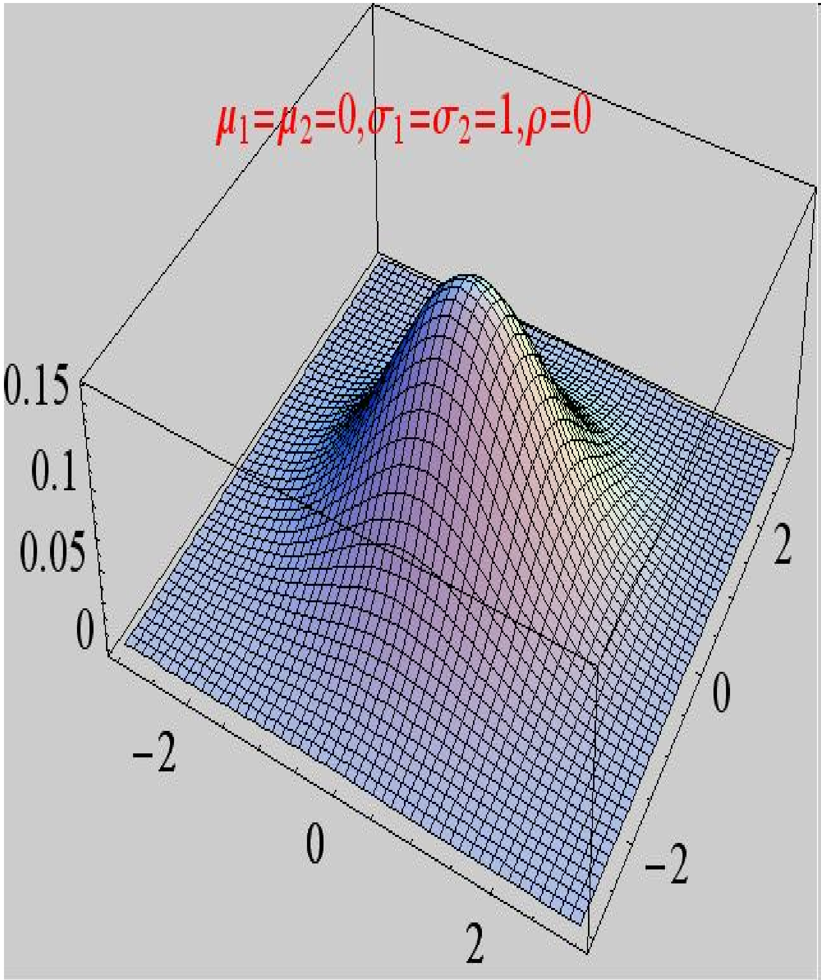
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

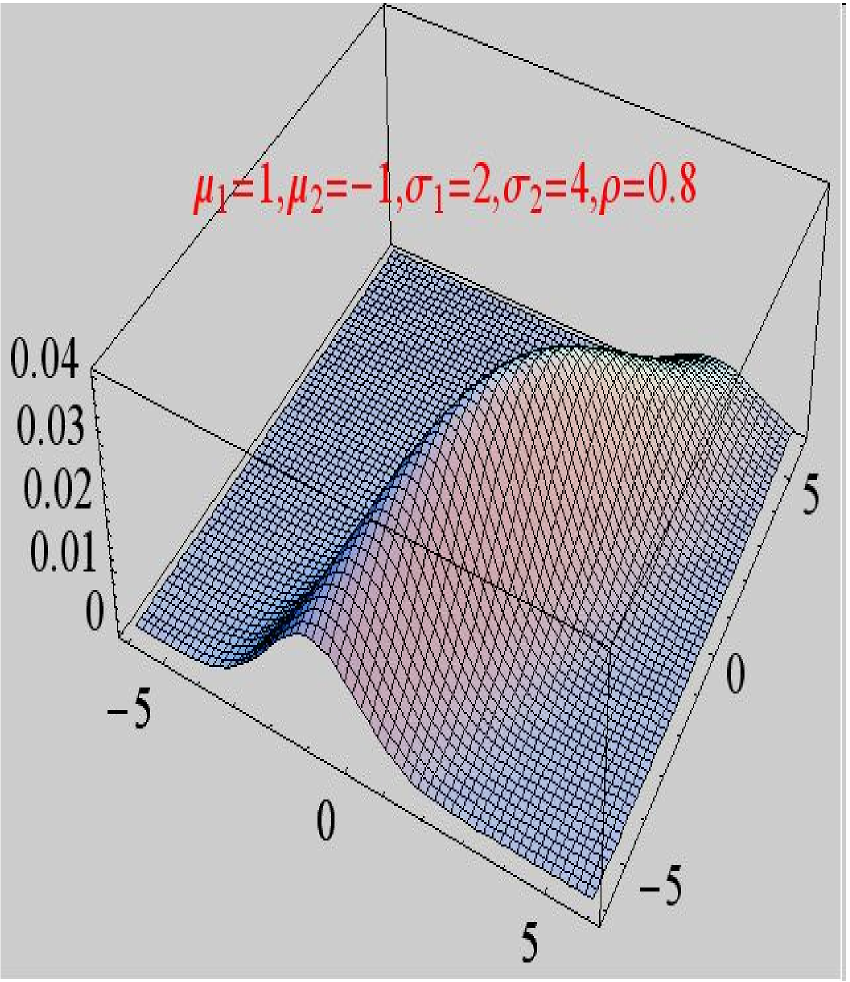
$$(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty),$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$均为常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1.$

则称 (X,Y)服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布 .记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

二维正态分布的图形


$\mu_1=\mu_2=0,\sigma_1=\sigma_2=1,\rho=0$
0.15
0.1
0.05
0
-2
0
2
2
0
-2


$\mu_1=1,\mu_2=-1,\sigma_1=2,\sigma_2=4,\rho=0.8$
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-5
0
5
5
0
-5

(二)、边缘概率密度

定义

对于连续型随机变量(X,Y)，设它的概率密度为$f(x,y)$，由于

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u,$$

记
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

称其为随机变量(X,Y)关于X的边缘概率密度.

同理可得 Y 的边缘分布函数

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

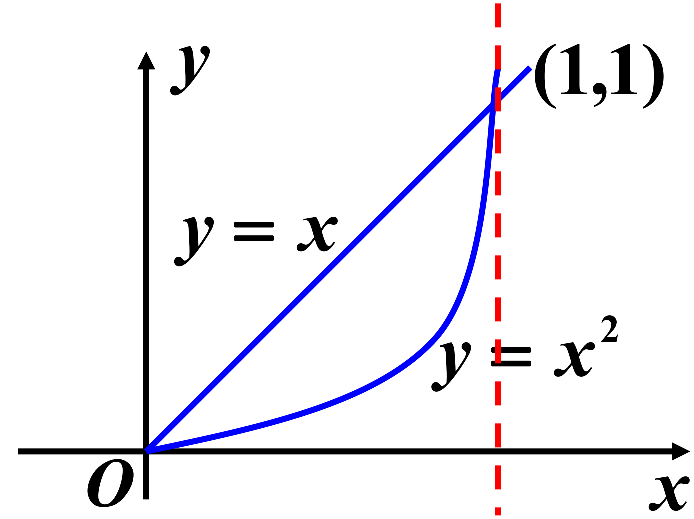
Y 的边缘概率密度.

例7 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$



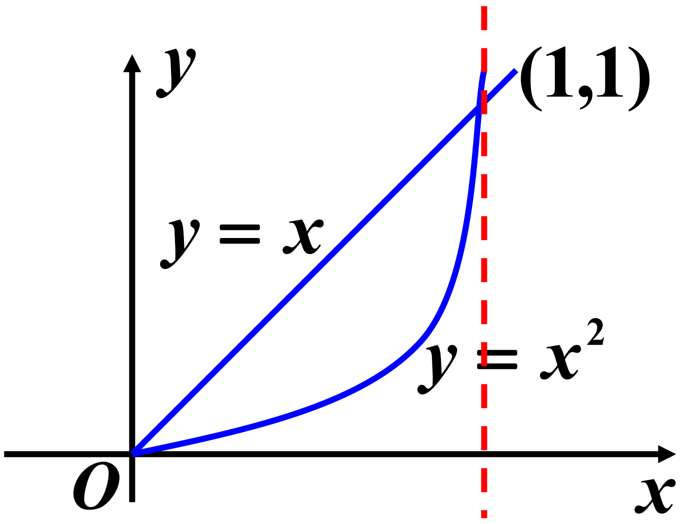
当 $0\le x\le 1$ 时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x^2}^{x} 6\,\mathrm{d}y = 6(x-x^2).$$

当 $x < 0$ 或 $x > 1$时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}\,y = 0.$$



因而得

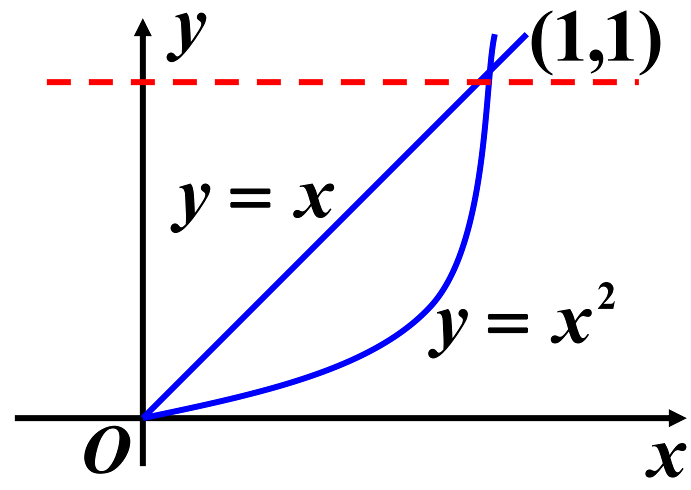
$$f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当$0 \le y \le 1$时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,\mathrm{d}x$$

$$= 6(\sqrt{y} - y).$$



当$y < 0$或$y > 1$时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = 0.$

得 $$f_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

练　设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0 \quad , & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1) c的值；　（2）两个边缘密度。

解：(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$

由

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$$

确定C

$$=\int_0^1[\int_0^x cy(2-x)dy]dx$$

$$=c\int_0^1[x^2(2-x)/2]dx=5c/24=1,$$

$\Rightarrow$　$c=24/5$

练 设(X,Y)的概率密度是

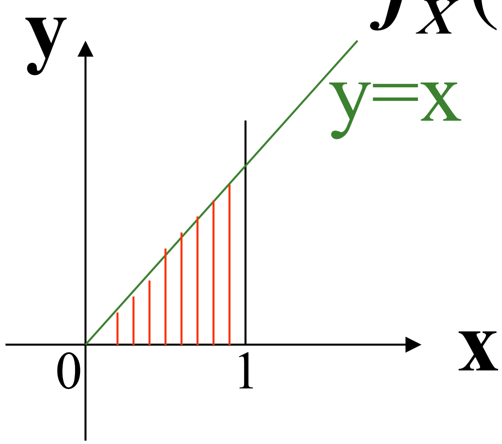
$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le \\ 0\ , & \text{其} \end{cases}$$

注意积分限

求 (1) c的值; (2) 两个边缘密度 .

解: (2)

$$f_X(x)=\int_0^x \frac{24}{5}y(2-x)dy$$



$$=\frac{12}{5}x^2(2-x),\qquad 0\le x\le 1$$

注意取值范围

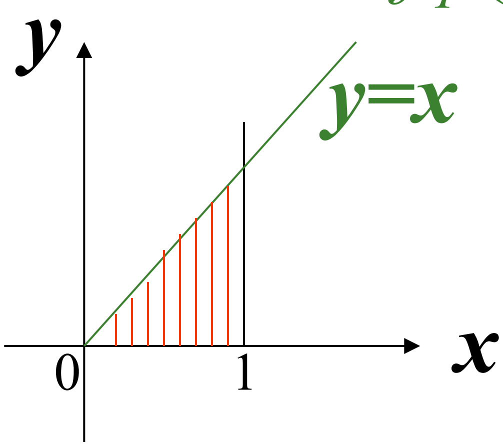
练 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0\quad , & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1) c的值; (2) 两个边缘密度

注意积分限

解: (2) $f_Y(y)=\int_y^1 \frac{24}{5}y(2-x)dx$



$$=\frac{24}{5}y\left(\frac{3}{2}-2y+\frac{y^2}{2}\right),\quad 0\le y\le 1$$

注意取值范围

即

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{12}{5}x^2(2-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{24}{5}y(\dfrac{3}{2}-2y+\dfrac{y^2}{2}), & 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

在求连续型 $r.v$ 的边缘密度时，往往要求联合密度在某区域上的积分. 当联合密度函数是分片表示的时候，在计算积分时应特别注意积分限 .

*例8 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 都是常数，且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,$
$-1<\rho<1.$

试求二维正态随机变量 的边缘概率密度 .

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y,$ 由于

$$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$=\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}\mathrm{d}y,$$

令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),$

则有 $$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad -\infty<x<+\infty.$$

同理可得

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\quad -\infty<y<+\infty.$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布,
并且都不依赖于参数 ρ.

令 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y),$$

显然, (X,Y) 不服从正态分布, 但是

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

因此边缘分布均为正态分布的随机变量, 其联合分布不一定是二维正态分布.