§ 5. 3 电场强度通量 高斯定理

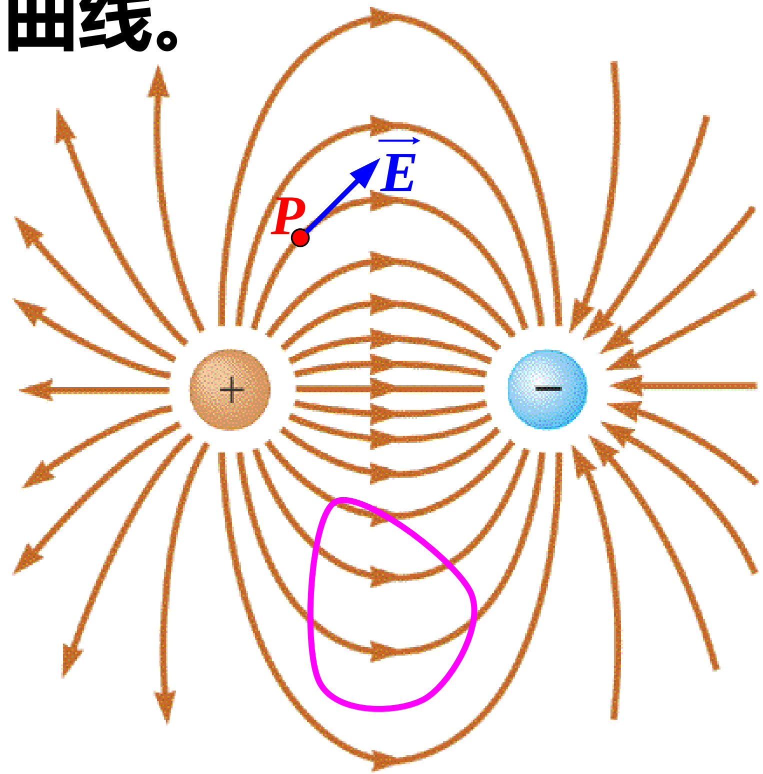
一.电场线

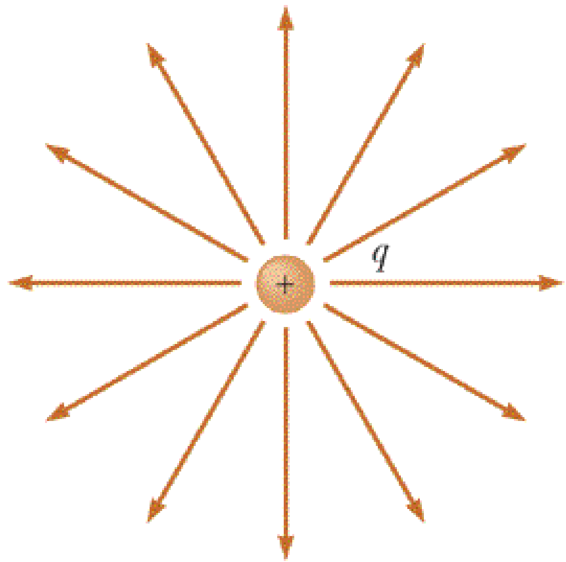
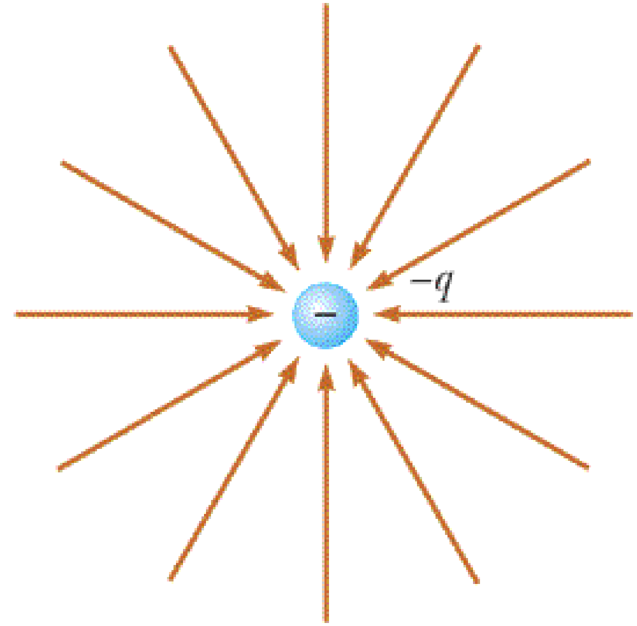
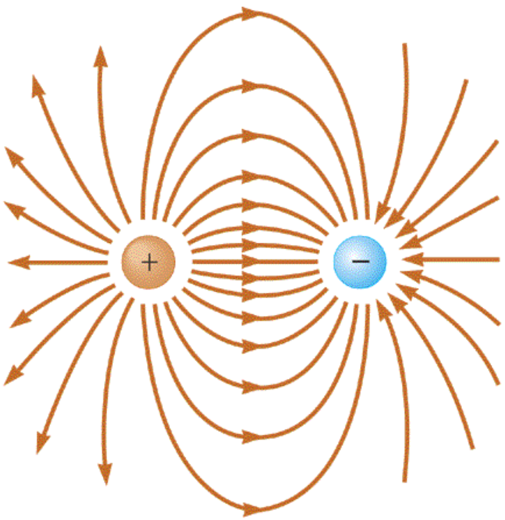
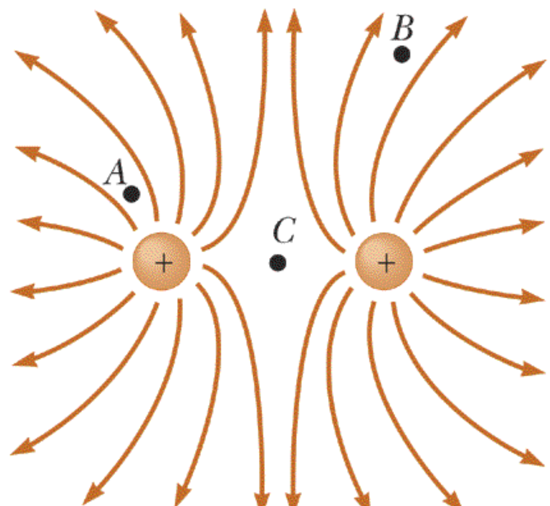
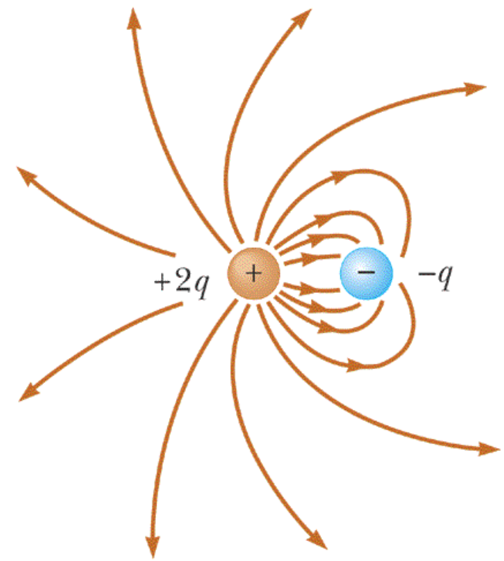
用来形象描述场强分布的一族空间曲线。

规定：

方向： 电场线上每一点的切线方向为场强方向；

大小： 在电场中任一点，取一垂直于该点场强方向的面积元，使通过单位面积的电力线数目，等于该点场强的量值。



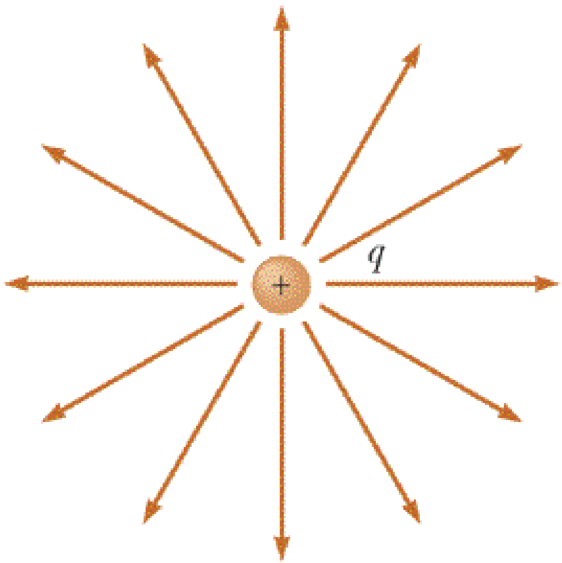

+
q

−
−q

+
−

A
B
C
+
+

+2q
+
−
−q

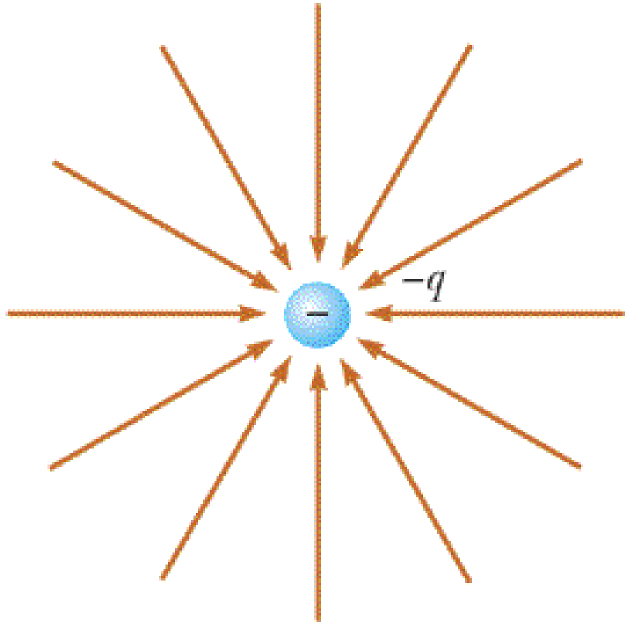
电场线的性质

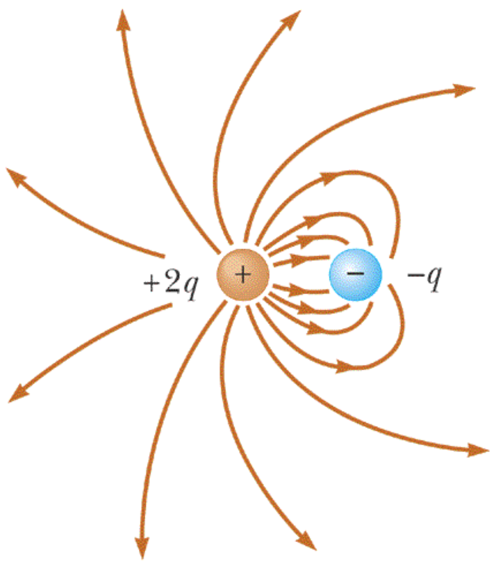
1)电场线起始于正电荷(或无穷远处)，
终止于负电荷，不会在没有电荷处中断；

2)两条电场线不会相交；

3)电场线不会形成闭合曲线。

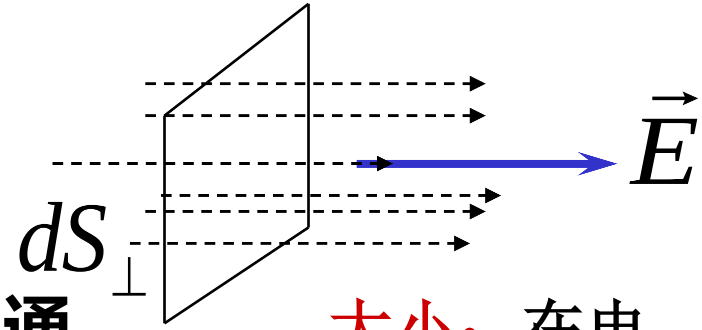






二.电通量 ϕ

通过任一面的电场线条数称为通过该面的电通量



穿过垂直于电场强度方向单位面积的电通量等于电场强度

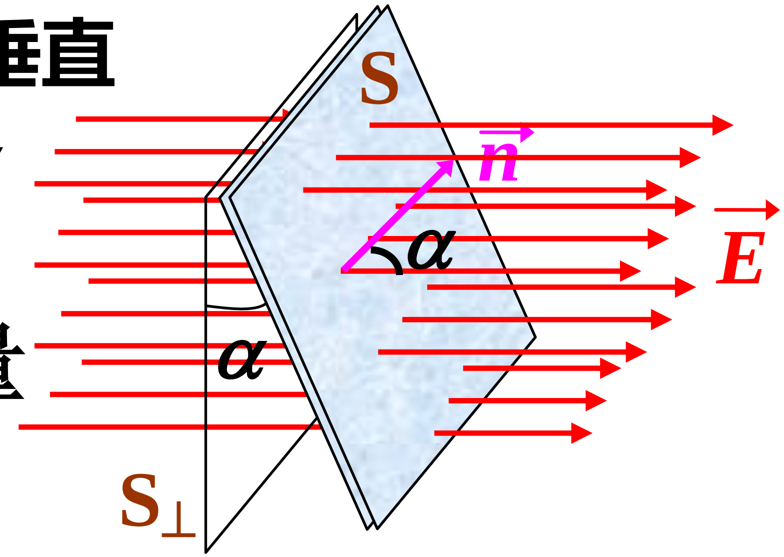
$$E = \frac{d\phi}{dS_{\perp}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi = Es_{\perp}}$$

均匀电场，面与电场线垂直

大小：在电场中任一点，取一垂直于该点场强方向的面积元，使通过单位面积的电场线数目，等于该点场强的量值。

均匀电场，面与电场线不垂直

$$\phi = Es_{\perp} = Es\cos\alpha$$



引入 $d\vec{s} = ds\hat{n}$ 面元矢量

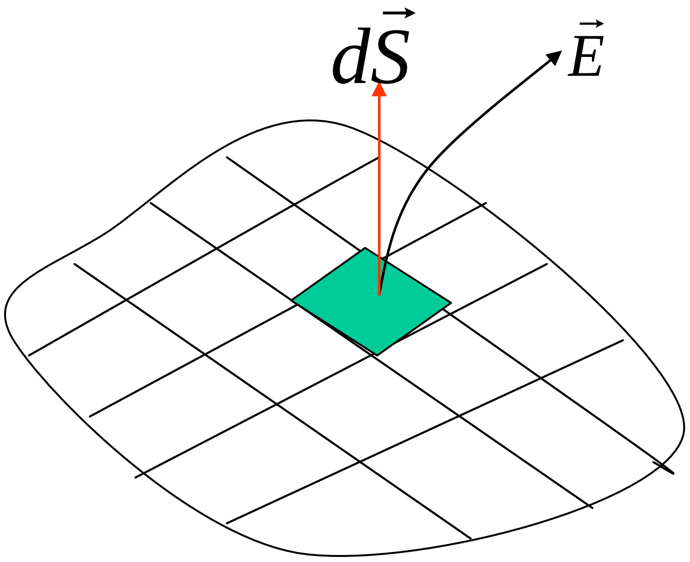
$$\boxed{\phi = \vec{E} \cdot \vec{S}}$$

非均匀电场，s为任意面

面积元的电通量

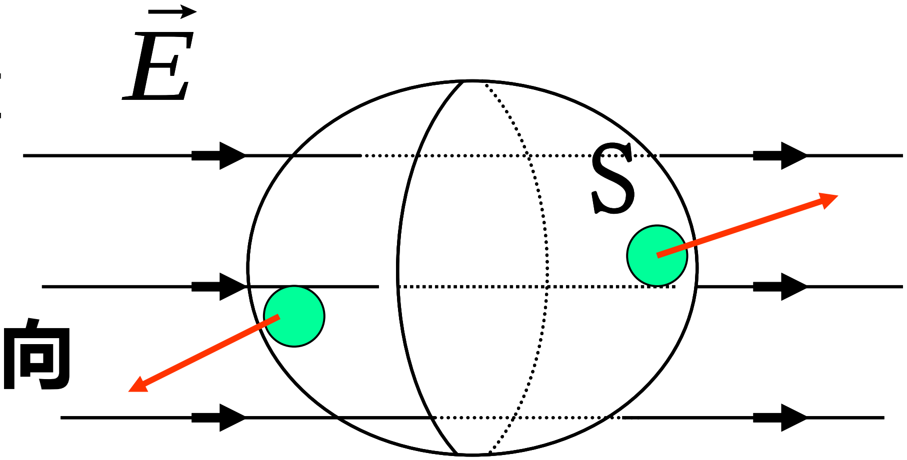
$$\Delta\Phi_E = E_i \Delta S_i \cos\theta_i = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i$$

总电通量 $$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



通过闭合面的电通量

$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$



规定：闭合曲面内向外的方向为面积元法线的正方向

若$\vec{E}$与$d\vec{s}$间为锐角

$$\vec{E}\cdot d\vec{s} > 0$$

若$\vec{E}$与$d\vec{s}$间为钝角

$$\vec{E}\cdot d\vec{s} < 0$$

例：以边长为*l* 的立方体一角为原点，建立坐标系，电场方向指向*x*正方向，求通过立方体的电通量。

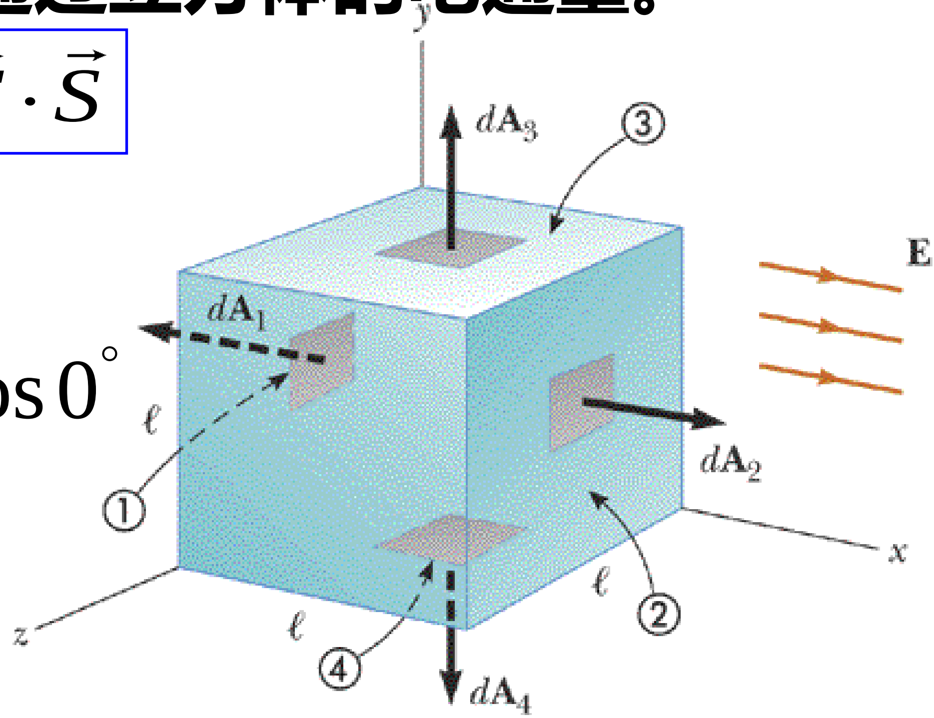
$$\boxed{\phi = \vec{E}\cdot\vec{S}}$$

解：

$$\Phi_E = \iint_1 \vec{E}\cdot d\vec{A} + \iint_2 \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$= \iint_1 EdA\cos 180^\circ + \iint_2 EdA\cos 0^\circ$$

$$= -EA + EA = 0$$



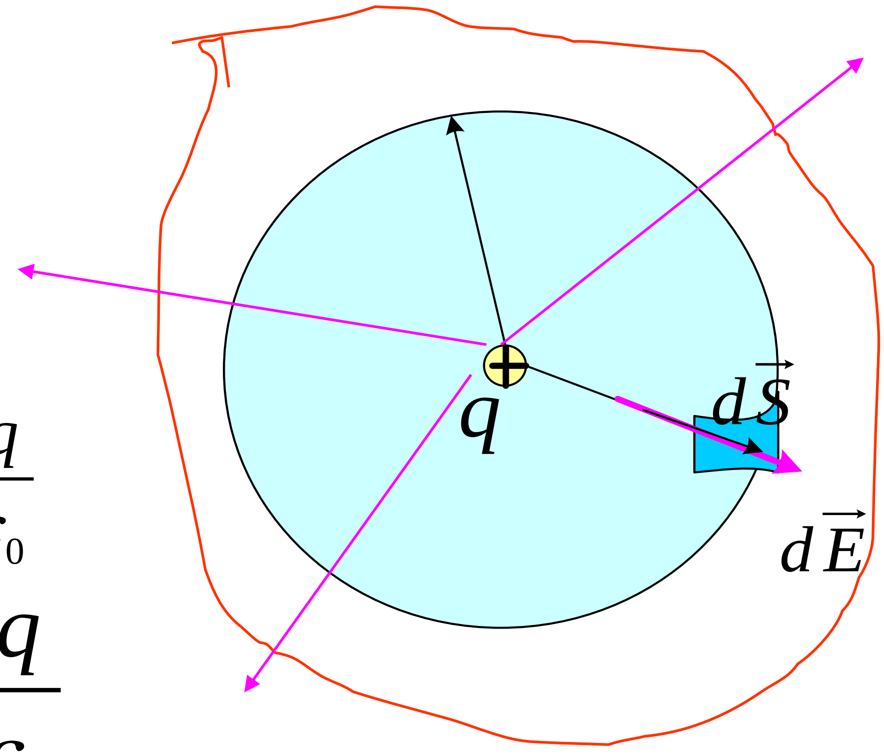
三. 高斯定理

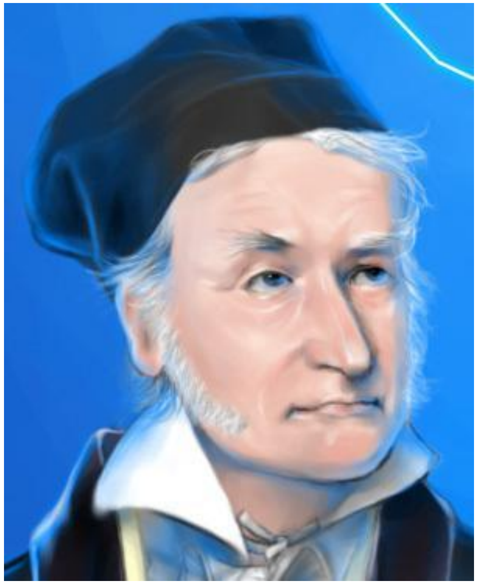
1. 高斯面内包含一个电荷

$$\Phi_E = \oint_{\text{球面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{球面}} E dS$$

$$= E \oint_{\text{球面}} dS = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right) \left(4\pi r^2 \right) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{\text{球面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{任意面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



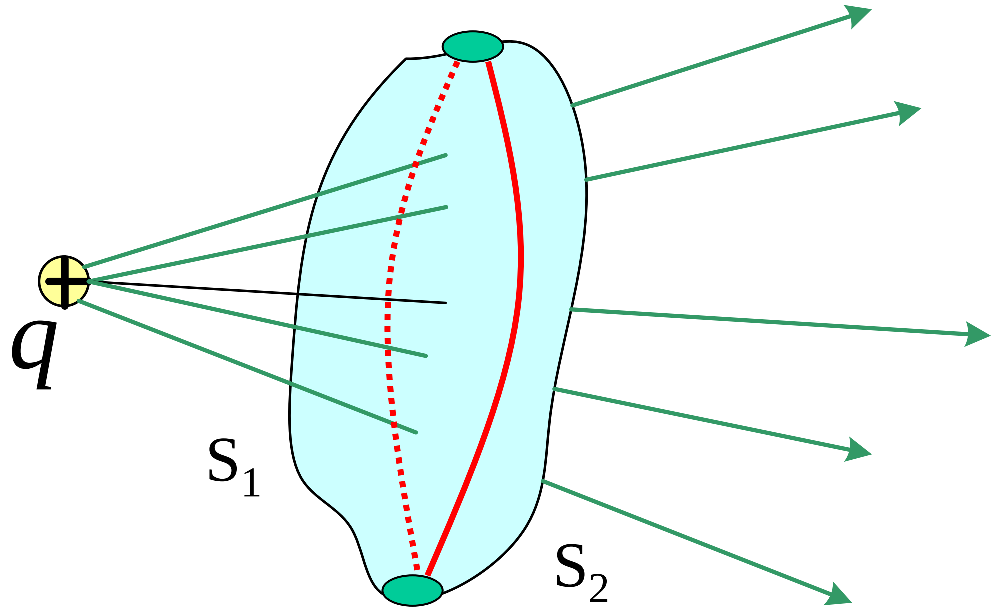


2.高斯面内不包含电荷

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

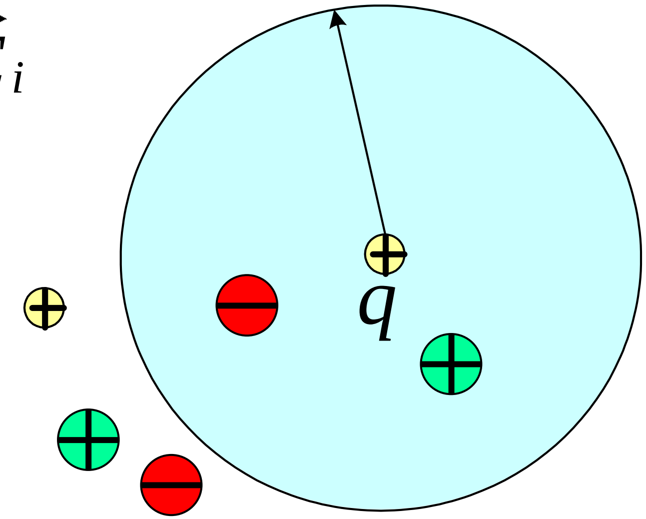
$$= \int_{S1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S2} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= 0$$



3.高斯面内外有*n*个电荷

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$



$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{S}$$

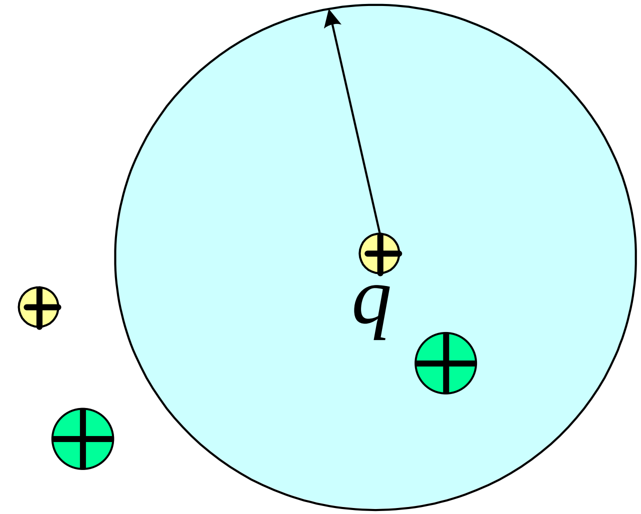
$$= \sum_i \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_i \Phi_{Ei}$$

$$\text{而}\ \Phi_{Ei} = \begin{cases} \dfrac{q_i}{\varepsilon_0} & q_i \text{ 在 } S\text{内} \\ 0 & q_i\text{在}S\text{外} \end{cases}$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

……高斯定理



注意：1.闭合面内、外电荷对电场都有贡献，但只有闭合面内的电荷对电通量有贡献；
2.静电场是有源场，源头为正电荷，源尾负电荷

意义：在真空中的静电场中，通过任意闭合曲面的电场强度通量等于该曲面内所包围电荷的代数和除以ε_0

4.高斯定理与库仑定律的关系

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

1.高斯定理由库仑定律推导而来；
2.库仑定律适用于静电场：
3.高斯定理既适用于静电场，也适用于变化的电场和电磁场;
4.高斯定理是更基本的方程。

四 高斯定理应用

对 Q 的分布具有某种对称性的情况下

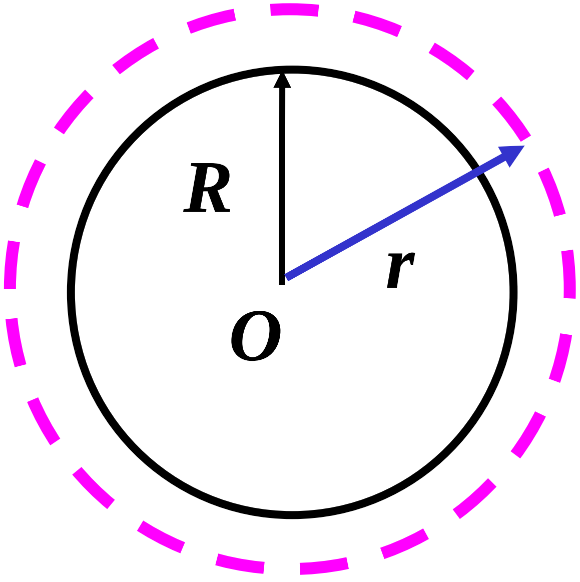
利用高斯定理解 $\vec{E}$ 较为方便

常见的电量分布的对称性：

球对称	**柱对称**	**面对称**
球体	**无限长圆柱**	**无限大平板**
球面	无限长**柱面**	**无限大平面**
（点电荷）	**无限长直导线**	

例1 均匀带电球面　　总电量为 Q

半径为 R 求：电场强度分布



解：根据电荷分布的对称性，

选取合适的高斯面(闭合面)

$$r > R \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS$$

$$= E \oint_S dS = E 4\pi r^2$$

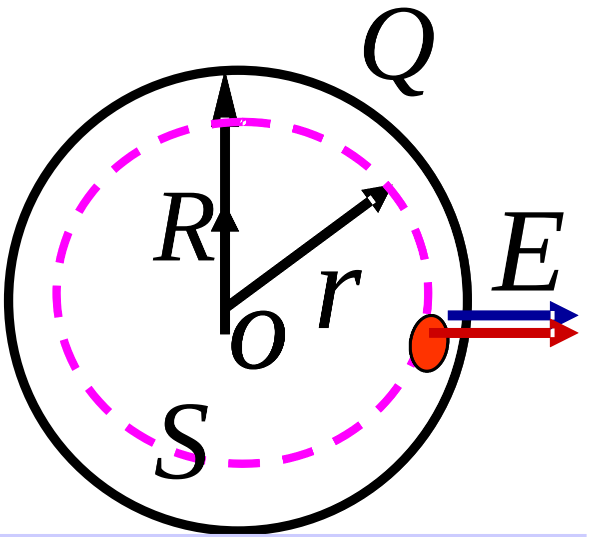
$$\therefore E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \therefore E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}}$$

$$r < R \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint E\,dS$$

$$= E\oint dS = E\,4\pi r^2$$

$$\therefore\ E\,4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = 0$$



$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

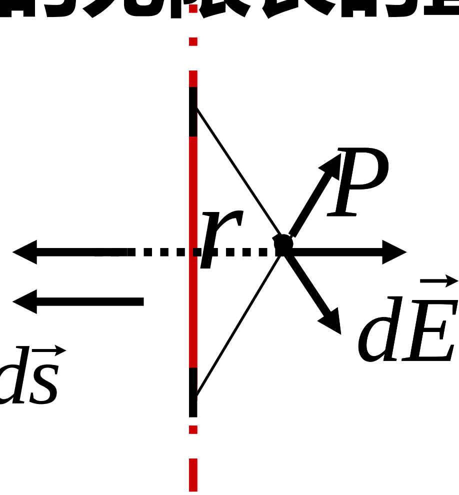
$$r > R \qquad E = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}$$

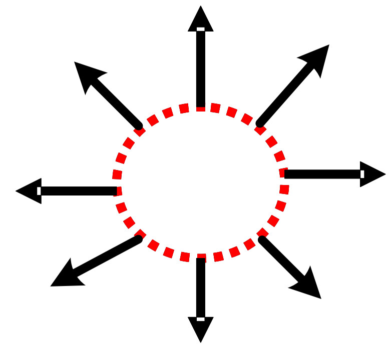
$$r < R \qquad E = 0$$

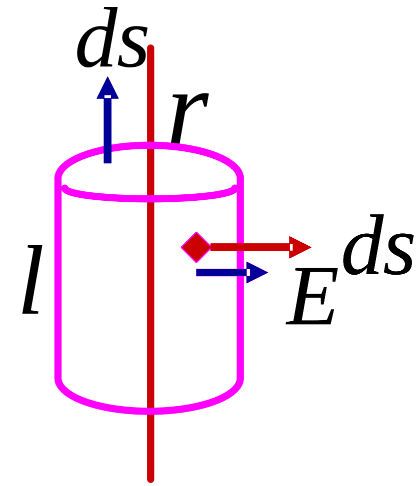
例2 均匀带电的无限长的直线　线密度 λ

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{\text{侧面}} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \iint_{\text{两底面}} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$= E2\pi r l$$





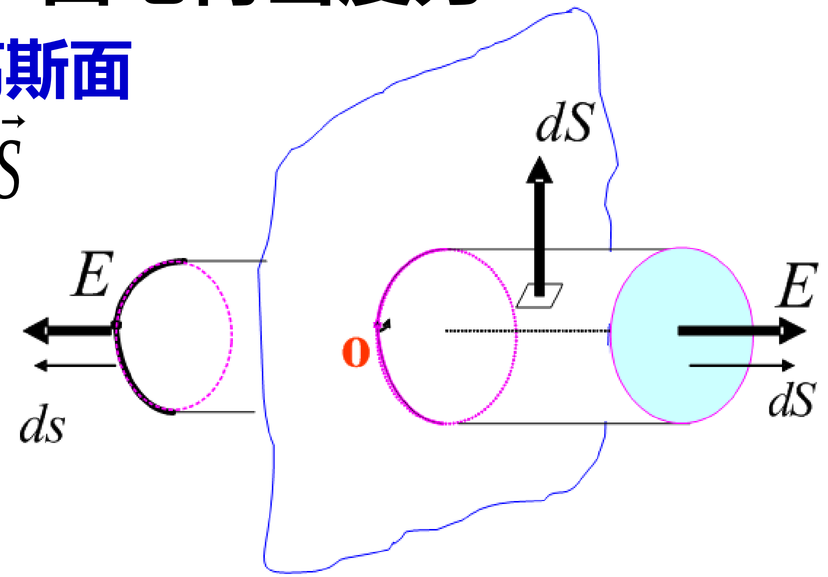


$$E2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

例3.无限大带电面产生的场强，面电荷密度为 σ

解：选中轴线垂直于平面的圆柱作高斯面



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{\text{左底面}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{\text{右底面}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{\text{侧面}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= ES + ES = 2ES$$

高斯定理

$$2ES = \frac{\sum\limits_{S内} q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

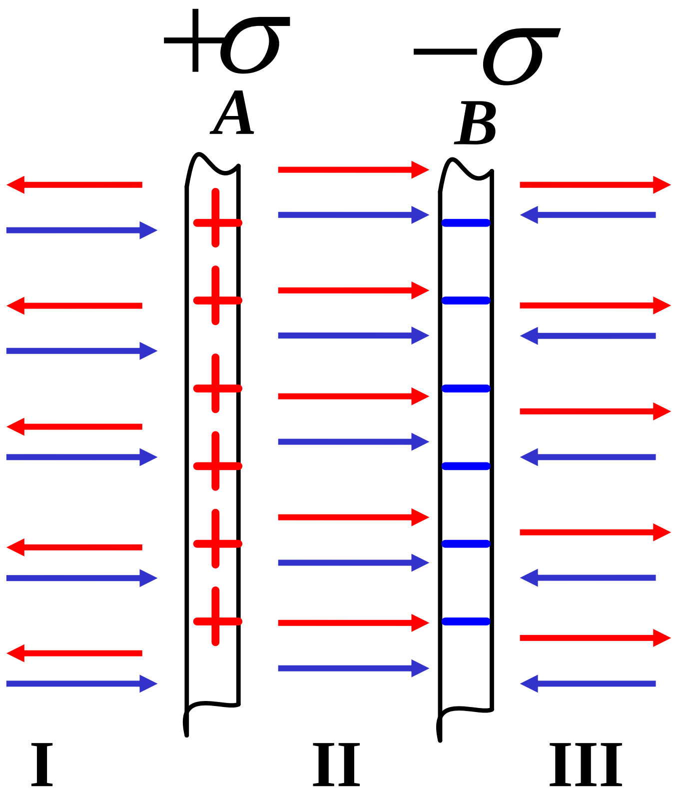
因此 $$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

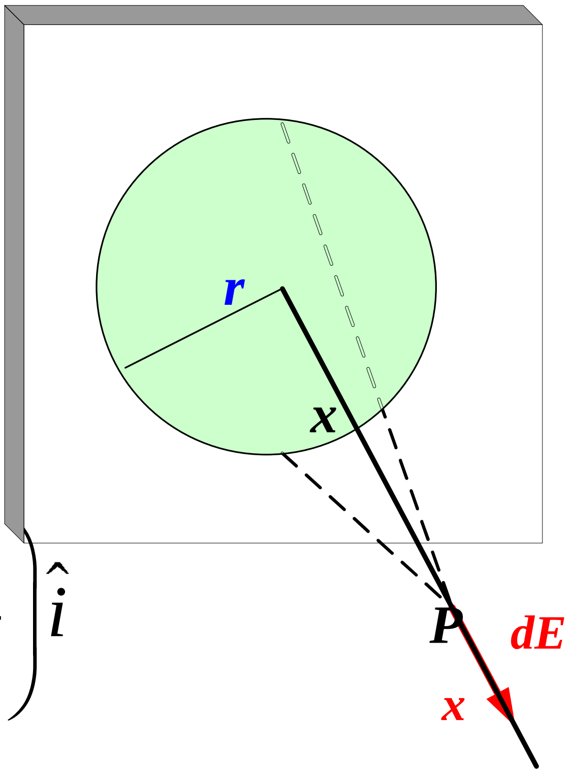
I: $$E_A - E_B = 0$$

II: $$E_A + E_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

III: $$E_A - E_B = 0$$



例4 无限大带电面，面电荷密度 +σ，今在其上挖一半径为R 的 圆盘，求Ox轴上一点P的电场强度。



解：补偿法：认为盘的面电荷密度为σ

无限大带电平面 $\vec{E}_{平} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}$

圆盘 $$\vec{E}_{盘} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\hat{i}$$

则P点的总场强

$$\vec{E} = \vec{E}_{平} - \vec{E}_{盘} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\hat{i}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\hat{i}$$

小结：求场强的方法

高斯定理 → 带电体上电荷分布具有某种对称性(如板类、柱类、球类)

高斯面的选择：

高斯面上各点*E*大小相等，且处处垂直于高斯面

场强叠加原理(积分法) → **除具有对称性的带电体外，还可求出更多带电体的电场分布**