4.3　协方差与相关系数

4.3.1、问题的提出 对于二维随机变量(X,Y):

已知联合分布 $\rightleftarrows$ 边缘分布

这表明:二维随机变量是一个整体。它的各个分量除了具有各自的概率特性之外, 相互之间还有某种联系。

X,Y 的协方差

问题：用一个怎样的数去反映这种联系？

我们知道 $D(X+Y)=E(X+Y)^2-[E(X+Y)]^2$

$$=D(X)+D(Y)+2\boxed{E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}.$$

反映了随机变量X,Y 之间的某种关系。

4.3.2 定义

量 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 与 Y 的协方差. 记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$, 即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

若 $D(X)>0, D(Y)>0$,称

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$$

无量纲的量

为随机变量 X 与 Y 的相关系数.

4.3.3　协方差的性质与计算

1、计算

（1）利用随机变量函数的数学期望的计算公式，即

若（ X, Y ）为离散型随机变量，则

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}[x_i-E(X)][y_j-E(Y)]p_{ij}$$

若（ X ,Y ）为连续型，则

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)][y-E(Y)]f(x,y)dxdy$$

法2. 简算公式

$$(1)\ \mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y);$$

证明 $(1)\ \mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$$=E[XY-YE(X)-XE(Y)+E(X)E(Y)]$$

$$=E(XY)-2E(X)E(Y)+E(X)E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y).$$

2. 性质

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$;

(2) $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$， a,b 为常数;

(3) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.

问题： $Cov(aX+bY,cX+dY)=?$ $\quad D(aX+bY)=?$

答案：$acD(X)+bdD(Y)+(ad+bc)Cov(X,Y)$

$a^2D(X)+b^2D(Y)+2abCov(X,Y)$

例题选讲

例1 已知**X ,Y**的联合分布为

$Y \backslash X$	1	0
1	p	0
0	0	q

$0 < p < 1$

$p + q = 1$

求：$\operatorname{cov}(X, Y)$ 与 ρ_{XY}。

解

X	1	0
P	p	q

Y	1	0
P	p	q

XY	1	0
P	p	q

$$\left.\begin{array}{l} E(X) = p,\ E(Y) = p, \\ D(X) = pq,\ D(Y) = pq, \\ E(XY) = p, \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \operatorname{cov}(X, Y) = pq, \\ \rho_{XY} = 1 \end{array}$$

例2 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求 ρ_{XY}

解1 由 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},-\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},-\infty<y<+\infty.$$

$$\Rightarrow E(X)=\mu_1, E(Y)=\mu_2, D(X)=\sigma_1^2, D(Y)=\sigma_2^2.$$

所以

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$$

$$\underset{\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}=t}{\overset{\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}=s}{=\!=}}\quad \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} ste^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(s-\rho t)^2-\frac{1}{2}t^2}dsdt$$

令$s-\rho t=u$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} t(\rho t+u)e^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{1}{2}t^2}dudt$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}}du\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boldsymbol{\sigma_1\sigma_2\rho}$$

$$\therefore \rho_{XY}=\rho$$

***解2**

由 $$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},-\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},-\infty<y<+\infty.$$

$$\Rightarrow E(X)=\mu_1,\ E(Y)=\mu_2,\ D(X)=\sigma_1^2,\ D(Y)=\sigma_2^2.$$

而

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)$$

$$\cdot\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),\quad u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1},$

$\mathrm{Cov}(X,Y)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,tu+\rho\sigma_1\sigma_2u^2)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$+\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2\pi},$$

故有$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$.

于是 $$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho.$$

结论

(1) 二维正态分布密度函数 中,参数 ρ 代表了 X 与 Y 的相关系数；

(2) 二维正态随机变量 (X,Y) 的分量 X 与 Y 相关系数为零等价于 X 与 Y 相互独立.

若X ,Y的相关系数为零，则称X与Y不相关

即X ,Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$ X ,Y 不相关

例3 设 $(X,Y) \sim N(1,1;4,4;0.5)$, $Z = X + Y$, 求 ρ_{XZ}

解 $E(X)=E(Y)=1, D(X)=D(Y)=4,$

$$\rho_{XY}=1/2,\ \operatorname{cov}(X,Y)=2$$

$$\operatorname{cov}(X,Z)=\operatorname{cov}(X,X)+\operatorname{cov}(X,Y)=6$$

$$D(Z)=D(X+Y)$$

$$=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)=12$$

$$\therefore \quad \rho_{XZ}=3/\sqrt{12}=\sqrt{3/2}.$$

练 已知随机变量 X, Y 分别服从 $N(1,3^2), N(0,4^2)$,
$\rho_{XY} = -1/2$, 设 $Z = X/3 + Y/2$.

(1) 求 Z 的数学期望和方差 .

(2) 求 X 与 Z 的相关系数 .

解 (1)由 $E(X) = 1,\ D(X) = 9,\ E(Y) = 0,\ D(Y) = 16.$

得 $$E(Z) = E\left(\frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right) = \frac{1}{3}E(X) + \frac{1}{2}E(Y) = \frac{1}{3}.$$

$$D(Z) = D\left(\frac{X}{3}\right) + D\left(\frac{Y}{2}\right) + 2\mathrm{Cov}\left(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + \frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X, Y)$$

$$= \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + \frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = 3.$$

$$(2)\ \ \mathrm{Cov}(X, Z) = \mathrm{Cov}\left(X, \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X, X) + \frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X, Y)$$

$$= \frac{1}{3}D(X) + \frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$= 3 - 3 = 0.$$

故 $\rho_{XZ} = \mathrm{Cov}(X, Z)\Big/\left(\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}\right) = 0.$

4.3.4 相关系数的性质及意义

考虑以X的线性函数 $a+bX$ 近似Y。不难理解，我们可以用均方误差

$$e=E\{[Y-(a+bX)]^2\}$$
$$=E(Y^2)+b^2E(X^2)+a^2-2bE(XY)+2abE(X)-2aE(Y)$$

来衡量用$a+bX$来近似Y的好坏程度：e的值越小，表示$a+bX$与Y的近似程度越好。因此，我们考虑取a,b使e达到最小值，即可求得Y的最佳近似$a+bX$中的a,b。为此，将e分别关于a,b求偏导数，并令它们等于零，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial e}{\partial a}=2a+2bE(X)-2E(Y)=0,\\[2ex] \dfrac{\partial e}{\partial b}=2bE(X^2)-2E(XY)+2aE(X)=0.\end{cases}$$

解之得
$$b_0=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}$$
$$a_0=E(Y)-E(X)\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}$$
将a_0, b_0代入（4.3.7）得
$$\min_{a,b} e=E\{[Y-(a+bX)]^2\}=E\{[Y-(a_0+b_0X)]^2\}$$
$$=\left(1-\rho_{XY}^2\right)D(Y)$$
由此，易得下述定理：

定理4.3.2 设ρ $_{XY}$为X与Y的相关系数，则

$$(1)\left|\rho_{XY}\right|\le 1$$

（2）$\left|\rho_{XY}\right|=1$ 的充要条件是，存在常数 a,b，使
$$P\{Y=a+bX\}=1$$

***证明**

(1) $\boldsymbol{|\rho_{XY}| \le 1.}$

$$(1)\ \min_{a,b} e = E\{[Y-(a_0+b_0X)]^2\} = (1-\rho_{XY}^2)D(Y) \ge 0$$

$$\Rightarrow 1-\rho_{XY}^2 \ge 0 \quad \Rightarrow |\rho_{XY}| \le 1.$$

(2) $\boldsymbol{|\rho_{XY}| = 1}$ **的充要条件是，存在常数** $\boldsymbol{a, b}$ **使**

$$P\{Y = a + bX\} = 1.$$

事实上，$|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow E[(Y-(a_0+b_0X))^2] = 0$

而 $E[(Y-(a_0+b_0X))^2]$

$$= D[Y-(a_0+b_0X)] + [E(Y-(a_0+b_0X))]^2$$

所以 $E[(Y-(a_0+b_0X))^2]=0 \Leftrightarrow$

$$D[Y-(a_0+b_0X)]=0, \quad \boldsymbol{E[Y-(a_0+b_0X)]=0.}$$

由方差性质知，这等价于

$$\boldsymbol{P\{Y-(a_0+b_0X)=0\}=1,}$$

即$P\{Y=a_0+b_0X\}=1.$

特别，当$\rho_{XY}=1$时，$Cov(X,Y)>0$，$b_0=\dfrac{Cov(X,Y)}{D(X)}>0$

当$\rho_{XY}=-1$时，$Cov(X,Y)<0$，$b_0<0$

$$\min_{a,b} e = E\{[Y-(a+bX)]^2\} = E\{[Y-(a_0+b_0X)]^2\}$$
$$= (1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

相关系数ρ_{XY}是一个用来表征X,Y之间线性关系紧密程度的量

当$|\rho_{XY}|$较大时，$e(a_0,b_0)$较小，表明X,Y线性关系的程度较好；

当$|\rho_{XY}|=1$时，$e(a_0,b_0)=0$，表明X,Y之间以概率1存在线性关系；

当$|\rho_{XY}|$较小时，$e(a_0,b_0)$较大，表明X,Y线性关系的程度较差；

特别地，当$\rho_{XY}=0$时，X与Y之间的线性相关程度最差，于是有下面的定义：

定义：$\rho_{XY}=0$，称X与Y不相关

注意，X与Y不相关，只是对于线性关系而言的

X与Y相互独立是就一般关系而言的

随机变量X与Y不相关，即$\rho_{XY}=0$的等价条件有：

1. $Cov(X,Y)=0$
2. $E(XY)=E(X)E(Y)$
3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

从而可知，当X与Y相互独立$\Rightarrow$ X与Y一定不相关

反之，若X与Y不相关，X与Y却不一定相互独立

但是

若（ $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ ）服从二维正态分布，

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 不相关

例4 设 θ 服从 $[0,2\pi]$ 的均匀分布，$\xi=\cos\theta,\eta=\cos(\theta+a)$，这里 a 是常数，求 ξ 和 η 的相关系数？

解

$$E(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\,\mathrm{d}x=0,$$

$$E(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x+a)\,\mathrm{d}x=0,$$

$$E(\xi^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$E(\eta^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(x+a)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$E(\xi\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\cdot\cos(x+a)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos a,$$

由以上数据可得相关系数为 $\rho=\cos a$.

设 θ 服从 $[0,2\pi]$ 的均匀分布，$\xi=\cos\theta$，$\eta=\cos(\theta+a)$，这里 a 是常数，求 ξ 和 η 的相关系数？

$$\rho=\cos a$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}a=0\text{时},\ \rho=1,\ \xi=\eta,\\[2ex] \text{当}a=\pi\text{时},\ \rho=-1,\ \xi=-\eta,\end{array}\right\}\text{存在线性关系}.$$

当 $a=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $a=\dfrac{3\pi}{2}$ 时，$\rho=0$，ξ 与 η 不相关.

但 $\xi^2+\eta^2=1$，因此 ξ 与 η 不独立.

这表明 **相互独立** $\begin{array}{c}\Longrightarrow\\ \not\Longleftarrow\end{array}$ **不相关**

4.4 协方差矩阵

设 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的二阶混合中心矩

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, n$$

都存在，则称矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为 n 维随机变量的 **协方差矩阵** .

例如　二维随机变量 (X_1, X_2) 的协方差矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

其中　$c_{11} = E\{[X_1 - E(X_1)]^2\},$

$$c_{12} = E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\},$$

$$c_{21} = E\{[X_2 - E(X_2)][X_1 - E(X_1)]\},$$

$$c_{22} = E\{[X_2 - E(X_2)]^2\}.$$

由于 $c_{ij} = c_{ji}\ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$，所以协方差矩阵为对称的非负定矩阵 .

利用协方差矩阵，可由二维正态变量的概率密度推广得到n维正态变量的概率密度。

设 (X_1, X_2) 服从二维正态分布，其 概率密度为

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

引入

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

及(X_1,X_2)的协方差矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

由于 $\quad \det C=(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2,$

$$C^{-1}=\frac{1}{\det C}\begin{pmatrix}\sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2\\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\begin{pmatrix}\sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2\\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{pmatrix}.$$

$$(X-\mu)^{\mathrm{T}}C^{-1}(X-\mu)$$

$$=\frac{1}{\det C}(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2)\begin{pmatrix}\sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2\\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\ x_2-\mu_2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right].$$

于是 (X_1,X_2) 的概率密度可写成

$$f(x_1,x_2)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{2/2}(\det C)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^{\mathrm{T}}C^{-1}(X-\mu)\right\}.$$

推广 n维正态分布

n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度可表示为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^{\mathrm{T}} C^{-1}(X-\mu)\right\}.$$

其中$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

n 维正态变量的性质

1. n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的每一个分量 X_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ 都是正态变量;

反之, 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是正态变量, 且相互独立, 则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n 维正态变量.

2. n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布的充要条件是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的任意的线性组合 $l_1X_1 + l_2X_2 + \cdots + l_nX_n$ 服从一维正态分布 (其中 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 不全为零).

3. 若 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布，设 $Y_1, \cdots, Y_k$ 是 $X_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 的线性函数，则 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ 也服从k维正态分布.

线性变换不变性

4. 设 $(X_1, \cdots, X_n)$ 服从 n维正态分布，则“ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立” 与“ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 两两不相关” 是等价的.