无穷级数习题课

1. 判别级数的敛散性:

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln\left(n^2+1\right)}$，　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\tan\left(\sqrt{n^4+1}\pi\right)$

（3）$\sqrt{3-\sqrt{6}}+\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6}}}+\cdots+\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}+\cdots$

（4）$\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$，　(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-\ln n}$

2. 设 $u_n\neq 0\left(n=1,2,\ldots\right)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 条件收敛

3. 填空

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}=$______

(2) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-\frac{1}{2}$ 处收敛, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ ______.（收敛还是发散）

(3) 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+a)^n}{2^n}$ 在 $x=-\ln 2$ 处（　），

在 $x=\pi$ 处（　）;（填：条件收敛、绝对收敛、发散或敛散性不能确定）

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<\frac{1}{2}\\ x, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$，$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，则 $s(\frac{3}{2})=$

______; $s(\frac{5}{2})=$______.

4. 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1+2x}{2-x}\right)^n$ 的收敛域

5. 求下列级数的和函数

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$　（2）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+3)!}x^{2n}$

6. 求级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2-1\right)2^n}$ 的和。

7. 设 $f\left(x\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$，试将 $f\left(x\right)$ 展开成 x 的幂级数。

8. 设 $f\left(x\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，在$\left[0,1\right]$上收敛，试证：当$a_0=a_1=0$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$必定收敛。

9. 已知函数 $f(x)=x^2, x\in\left[0,2\pi\right)$ 是周期为2π 的周期函数，

（1） $f\left(x\right)$展开为傅立叶级数；

（2）证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$；

（3）求积分$\int_0^1\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}dx$的值。