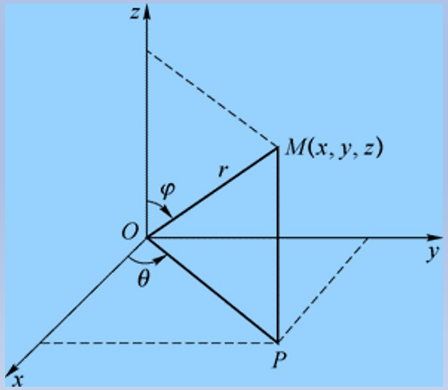
3.利用球面坐标计算三重积分

（一）球面坐标

设 $M(x, y, z)$为空间内一点，则点 M 也可用这样三个有次序的数 r、φ、θ 来确定，其中 r 为原点 O 与点 M 间的距离，φ 为$\vec{OM}$与 z 轴正向所夹的角，θ为从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向转到有向线段$\vec{OP}$的角，这里 P 为点 M 在 xOy 面上的投影，这样的三个数 r、φ、θ 叫做点 M 的球面坐标，这里 r、φ、θ 的变化范围为

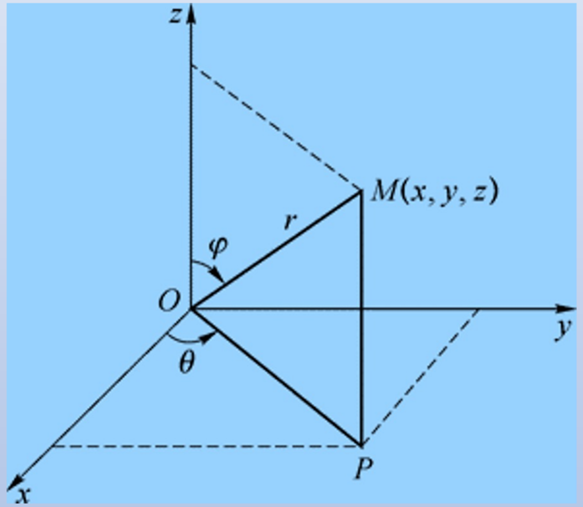
$$0\le r<+\infty,\ 0\le\varphi<\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi.$$



点 M 的直角坐标与球面坐标的关系:

$x = r\sin\varphi\cos\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\varphi$

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$



有

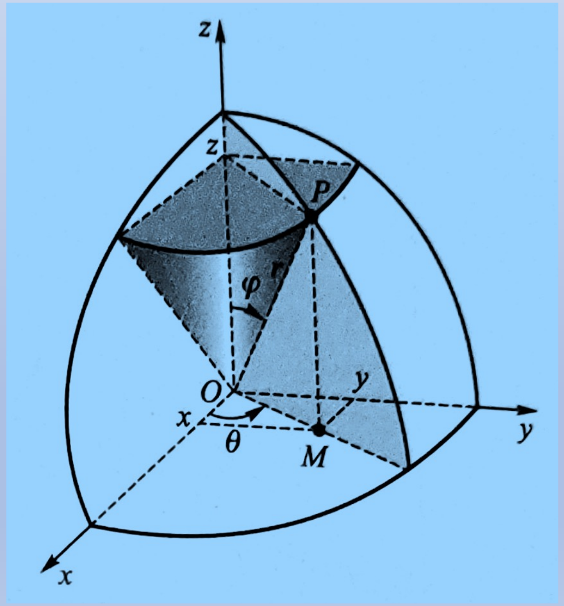
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\quad z^2 = \cot^2\varphi\left(x^2 + y^2\right).$$

坐标面 $r=r_0$, $\varphi=\varphi_0$, $\theta=\theta_0$ 的意义:

$r=$ 常数，即以原点为心的球面；

$\varphi=$ 常数，即以原点为顶点、z 轴为轴的圆锥面；

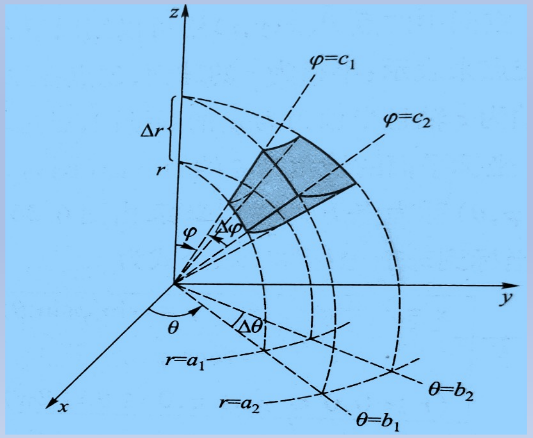
$\theta=$ 常数，即过 z 轴的半平面。

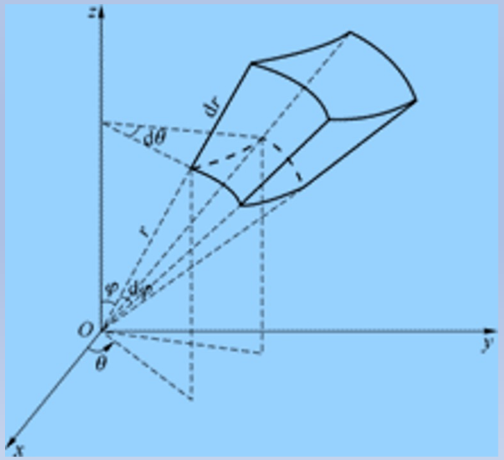


（二）三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$在球面坐标系中的计算公式

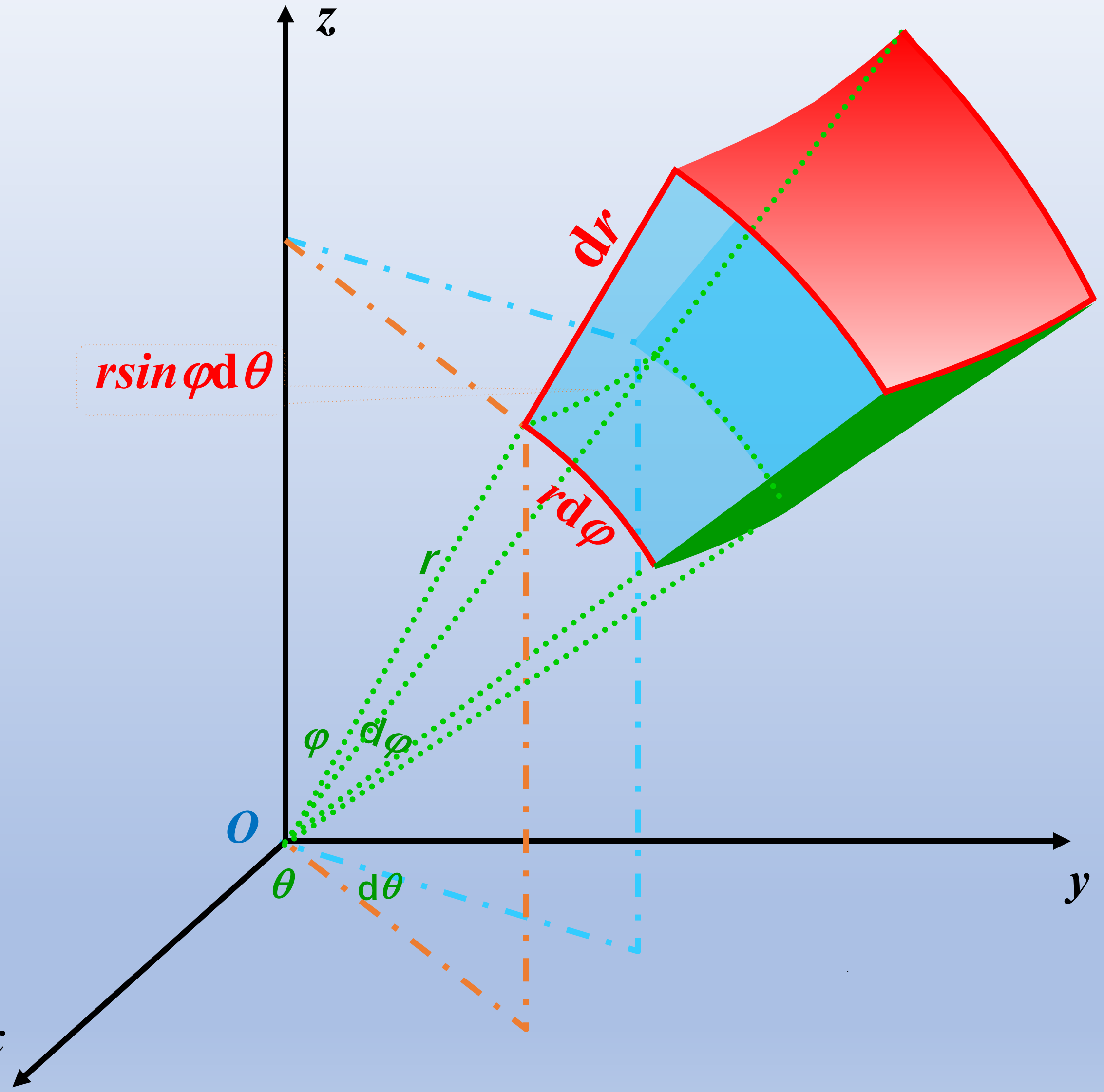
为了把三重积分中的变量从直角坐标变换为球面坐标，用三组坐标面 r=常数，φ=常数，θ=常数 把积分区域 Ω 分成许多小闭区域。考虑由 r，φ，θ 各取得微小增量 dr，dφ，dθ 所成的六面体的体积。不计高阶无穷小，可把这个六面体看作长方体，其经线方向的长为 rdφ，纬线方向的宽为 $r$sinφdθ，向径方向的高为 dr，于是得球面坐标系中的体积元素：

$dv=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$.





$$dv = r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$



$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) \cdot r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

球面坐标系中的三重积分:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\phi)\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta .$$

这就是把三重积分从直角坐标变换为球面坐标的公式.

要球面坐标下计算三重积分，可把它化为对 r，次对 φ，最后对 θ 的三次积分.

若积分区域 Ω 的边界曲面是一个包围原点在内的闭曲面，其球面坐标方程为 $r = r(\varphi, \theta)$，则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) \cdot r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{r(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) \cdot r^2 dr$$

特别地，若积分区域 Ω 为球面 $r = a$ 所围成，则半径为 a 的球体体积：

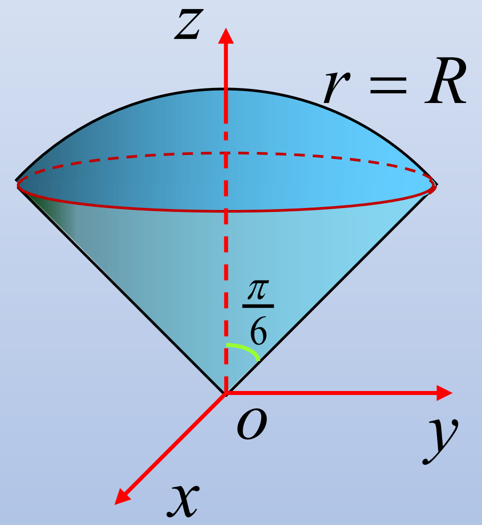
$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{a} r^2 dr = \frac{4}{3}\pi a^3$$

例1. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$，其中$\Omega$

为锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围立体.

解: 在球面坐标系下

$$\Omega:\begin{cases}0\le r\le R\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$



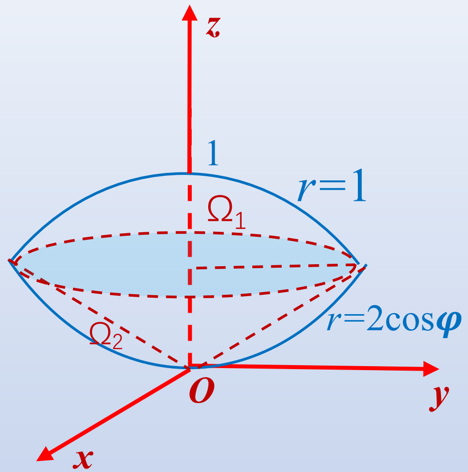
$$\therefore\quad \iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/6}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^4\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{5}\pi R^5(2-\sqrt{3})$$

例 2.计算积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$,其中

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 2z,x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$$



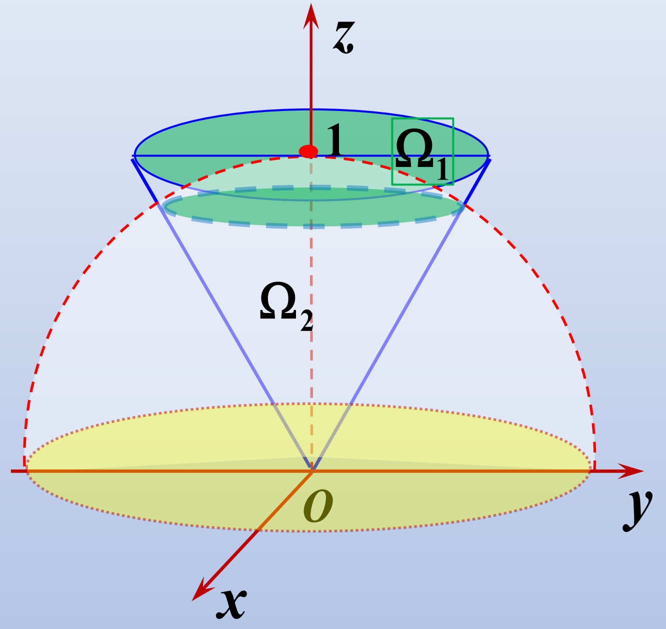
解： 用 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ 将Ω分成两部分

$\Omega_1: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}, 0\le r\le 1$， $\Omega_2: 0\le\theta\le 2\pi, \dfrac{\pi}{3}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le r\le 2\cos\varphi$

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{2\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi d\varphi+\frac{2\pi}{5}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\varphi)^5\sin\varphi d\varphi=\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{30}=\frac{7\pi}{30}.$$

例3 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|\mathrm{d}v$, 其中$\Omega$由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成.



解: 如图，记 Ω_1 为Ω中 $x^2+y^2+z^2\geq 1$的部分，

即Ω中位于球面$x^2+y^2+z^2=1$以外的部分，

$\Omega_2=\Omega-\Omega_1$,

则$\Omega_1: 1\leq r\leq \dfrac{1}{\cos\varphi}$,

$0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{4}$,

$0\leq\theta\leq 2\pi$;

$\Omega_2: 0\leq r\leq 1$,

$0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{4}$, $\quad 0\leq\theta\leq 2\pi$.

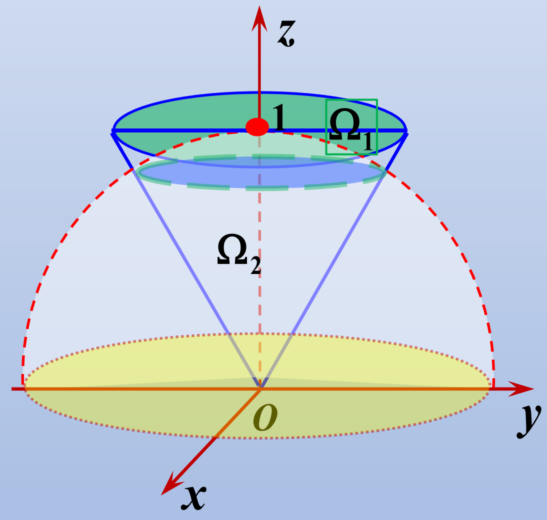
于是 $\iiint\limits_{\Omega}\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|\mathrm{d}v$

$$=\iiint\limits_{\Omega_1}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1)\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega_2}(1-\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_1^{\frac{1}{\cos\varphi}}(r-1)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{1}(1-r)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\right)+\frac{\pi}{6}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}(\sqrt{2}-1).$$



例 4 计算积分$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dv$，其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}$.

解：根据对称性，有

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dv=\iiint\limits_{\Omega} x^2 dv=\iiint\limits_{\Omega} y^2 dv,$$

积分区域Ω在球坐标下表示为

$$\Omega=\left\{(r,\varphi,\theta)\,\middle|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le R\right\},$$

$$I=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dv=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{\pi}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^R r^4 dr=\frac{\pi}{30}R^5.$$

练习

1. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dv$，其中 Ω是由 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，$z=1$, $z=4$ 围成区域. $[21\pi]$

2. 设Ω是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 所围区域, 计算积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dv$. $\left[\frac{64}{5}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\pi\right]$

3. 计算积分 $I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$. $[\frac{\pi}{8}]$

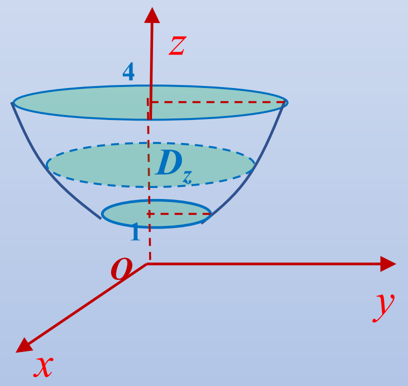
4. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^3+y^3+z^3)dv$，Ω:由 $x^2+y^2+z^2=2z(z\ge 1)$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围. $[\frac{31\pi}{15}]$

1.计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dv$ Ω是由 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z=1$, $z=4$ 围成区域.

解：根据对称性，$\iiint\limits_{\Omega}xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2}dv=0$.

$$I=\iiint\limits_{\Omega}x^2dv=\int_1^4dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}x^2dxdy=\int_1^4dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}(\rho\cos\theta)^2\rho d\rho$$

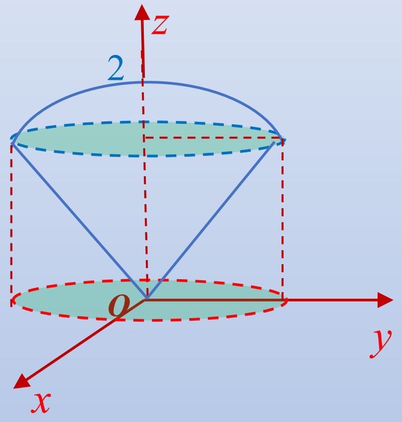
$$=\int_1^4dz\int_0^{2\pi}\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{\sqrt{2z}}\cdot\cos^2\theta d\theta=\pi\int_1^4z^2dz=21\pi.$$



2. 设Ω是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 所围区域,

计算积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dv$.

解：根据对称性，有



$\iiint\limits_{\Omega}2xydv=0$, $\iiint\limits_{\Omega}2xzdv=0$, $\iiint\limits_{\Omega}2yzdv=0$ ， 于是

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$$

Ω在球坐标下表示为： $0\le\theta\le2\pi,0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4},0\le r\le2$,

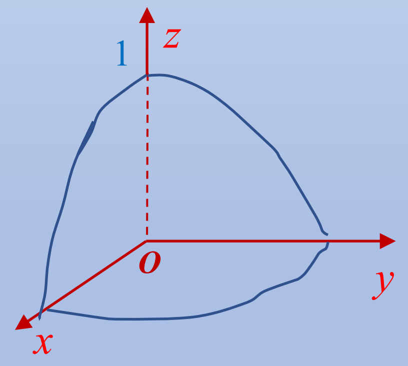
$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^2 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^2 r^4dr=\frac{64}{5}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

3. 计算积分 $I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dz$.

解：累次积分对应的三重积分的积分区域Ω在球面坐标下表示为

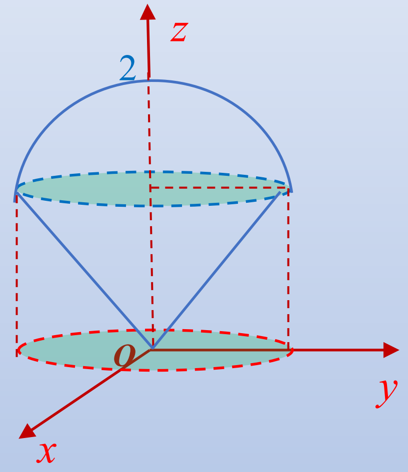
$$\boldsymbol{\Omega=\left\{(r,\varphi,\theta)\middle|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 1\right\}}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{\pi}{8}.$$



4. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^3+y^3+z^3)dv$,$\Omega$:由 $x^2+y^2+z^2=2z(z\ge 1)$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围.

解:根据对称性, $\iiint\limits_{\Omega}x^3dv=0$, $\iiint\limits_{\Omega}y^3dv=0$.积分区域$\Omega$在球面坐标下表示为



$$\mathbf{0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le r\le 2\cos\varphi}$$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}z^3dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}(r\cos\varphi)^3\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{r^6}{6}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}\cdot\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{64}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^9\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{32}{15}\pi\left(-\cos^{10}\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{31}{15}\pi.$$

三重积分的换元法

定理 设 $f(x,y,z)$ 在空间区域Ω上连续，变换T： $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w), z=z(u,v,w)$将 $Ouvw$ 空间的闭区域 Ω' 变为 $Oxyz$ 空间的闭区域 Ω，且满足

(1) $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ 在 Ω' 上具有一阶连续偏导数；

(2) 在 Ω' 上雅可比式 $J(u,v,w)=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\neq 0$;

(3) 变换 $T:\Omega' \to \Omega$ 是一对一的，则有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\left|J(u,v,w)\right|dudvdw$$

例1 计算$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\cos(x+y+z)^2dv$, 其中

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le x-y\le 1, 0\le x-z\le 1, 0\le x+y+z\le 1\}.$$

解：为了使积分区域Ω变得简单，作坐标变换：

$$u=x-y,\quad v=x-z,\quad w=x+y+z,$$

于是

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=3\qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}=\frac{1}{3}$$

于是 $$I=\iiint\limits_{\Omega} w\cos w^2\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

$$=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega} w\cos w^2 dudvdw$$

再用u,v,w表示Ω, 得

$$\Omega'=\{(u,v,w)\,|\,0\le u\le 1,0\le v\le 1,0\le w\le 1\}$$

因此

$$I=\int_0^1 du\int_0^1 dv\int_0^1 \frac{1}{3}w\cos w^2 dw=\frac{1}{6}\sin 1.$$

例2 求 $\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dv$，其中$\Omega$为椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1.$$

解　作广义球面坐标变换

$$\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\varphi \end{cases}$$

$$J(r,\varphi,\theta)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=abcr^2\sin\varphi$$

用 r,φ,θ 表示 Ω 得

$$\Omega' = \left\{ (r,\varphi,\theta) \middle| 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le r \le 1 \right\}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} r^2 \cdot abcr^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$= abc\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{4\pi}{5} abc .$$

例3 设$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$

试求出由平面$(A, B, C > 0)$

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = \pm A,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = \pm B,$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = \pm C,$$

所围成的平行六面体V的体积.

解:

由平行六面体V的边界的特征可作

变换$T: u = a_1 x + b_1 y + c_1 z,$

$v = a_2 x + b_2 y + c_2 z,$

$w = a_3 x + b_3 y + c_3 z.$

求出变换T的$Jacobi$行列式

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}} = \frac{1}{\Delta}.$$

经过变换T:

由此空间区域V变换成

长方体区域$\Omega:[-A,A]\times[-B,B]\times[-C,C]$.

$(A>0,B>0,C>0)$.

根据三重积分的换元积分公式可得

V的体积$|V|=\iiint_V 1\cdot dxdydz=\iiint_\Omega \left|\dfrac{1}{\Delta}\right| dudvdw$

$$=\frac{8\cdot ABC}{|\Delta|}.$$