第二篇 随机过程

计划教学周数：6

计划教学时数：18

随机过程研究的肇始

1905

Albert Einstein（1879-1955）

1923

Norbert Wiener (1894 - 1964)

Back

随机过程部分教学基本要求

- 理解随机过程及其有限维分布的概念，掌握常见随机过程的基本概率特性及基本数字特征；
- 理解平稳过程及其遍历性和功率谱密度的概念及性质，并能解决有关问题。

第六章
随机过程及其统计描述

◀Back

§6.1 随机过程的概念

一、随机过程概念的引入

现实世界中的许多随机现象是随时间的进展而发展变化的。如

股票在一个交易日中的价格，

飞机在某次航行中的位置，

接收机从$t=0$到$t=l$观察到的噪声电压，

……

这些随时间的进展而发展变化的随机现象就是所谓的随机过程

(stochastic processes)；

另外，以上述过程为研究对象的数学学科也称为随机过程

——概率论的“动力学”部分。

问题：如何描述随机过程？

分析：1. 若对随机过程做一次全程观察（例如对某天某支股票的价格作一次全程跟踪）——结果：一个时间的函数$x_1(t)$；若再次观察，又会得到函数$x_2(t)$, … 全部可能的观察结果就构成一个时间函数族。

2. 随机过程在某个确定时刻t_0（例如观察某支股票在开盘10分钟时的价格）——结果：一个随机变量$X(t_0)$；因为随机过程在其相应时段T（称为参数集）中的每个时刻t都对应着这样一个随机变量$X(t)$，所以随机过程就等价于一族随机变量$\{X(t), t\in T\}$。

二、随机过程的定义

定义1： 设E是一个随机试验，样本空间为$\Omega=\{\omega\}$，参数集$T\subset(-\infty,+\infty)$，如果对任意$t\in T$，有一定义在$\Omega$上的随机变量$X(\omega,t)$与之对应，则称随机变量族$\{X(\omega,t),t\in T\}$是参数集为$T$的随机过程，简记为$\{X(t),t\in T\}$或$\{X(t)\}$。

定义2 对随机过程$\{X(\omega,t),t\in T\}$进行一次试验（即在T上进行一次全程观测），其结果是t的函数，记为$x(t),t\in T$，称它为随机过程的一个样本函数。

Back

说明 随机过程$\{X(\omega, t), \quad t \in T\}$的含义如下：

(1) 随机过程$\{X(\omega, t), t \in T\}$是定义在$\Omega \times T$上的二元函数，因此可以从不同角度去理解——

(i) $t \in T$取定，则$X(\omega, t)$——随机变量；

(ii)$\omega \in \Omega$取定，则$X(\omega, t)$——普通函数$x(\omega, t)$;

(iii) t,ω均取定，

则$X(\omega, t)$——数—全体：χ—状态空间或相空间(实数集)

若当$t=t_0 \in T$时$X(t_0)=x \in \chi$，则称随机过程$\{X(t)\}$**在时刻t_0处于状态x.**

(2)由定义1可见，随机过程是有限维随机变量的推广。

(3)在理论分析时往往用随机变量族的描述方式，在实际测量和处理中往往采用样本函数族的描述方式。

Back

三、例

例1：抛掷一枚硬币，样本空间是Ω={H,T}，其中 $P(H)=P(T)=1/2$, 现定义：

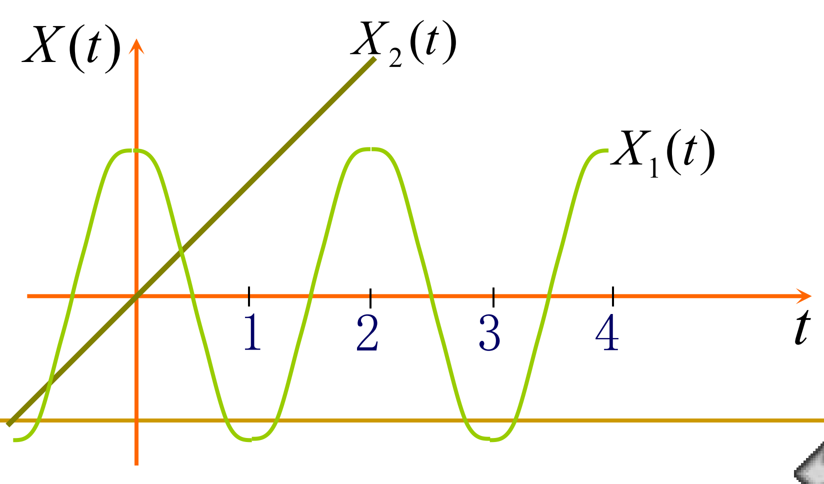
$$X(t)=\begin{cases} \cos\pi t & \text{当出现}H \\ t & \text{当出现}T \end{cases} \quad t\in(-\infty,+\infty),$$

则$\{X(t), t\in(-\infty,+\infty)\}$是一随机过程。

解：对任意固定的t, $X(t)$是随机变量，取值为$\cos\pi t$和t

$$P(X(t)=\cos\pi t)=P(X(t)=t)=\frac{1}{2}$$

此随机过程的样本函数只有两个，即$X_1(t)=\cos\pi t, X_2(t)=t$



Back

例2：考虑 $X(t)=\alpha cos(\omega t+\Theta), t\in(-\infty,+\infty)$, 式中$\alpha$和$\omega$是正常数, Θ是在$(0,2\pi)$上服从均匀分布的随机变量,

这是一个随机过程。

对每一固定的时刻t, $X(t)=\alpha cos(\omega t+\Theta)$是随机变量$\Theta$的函数,

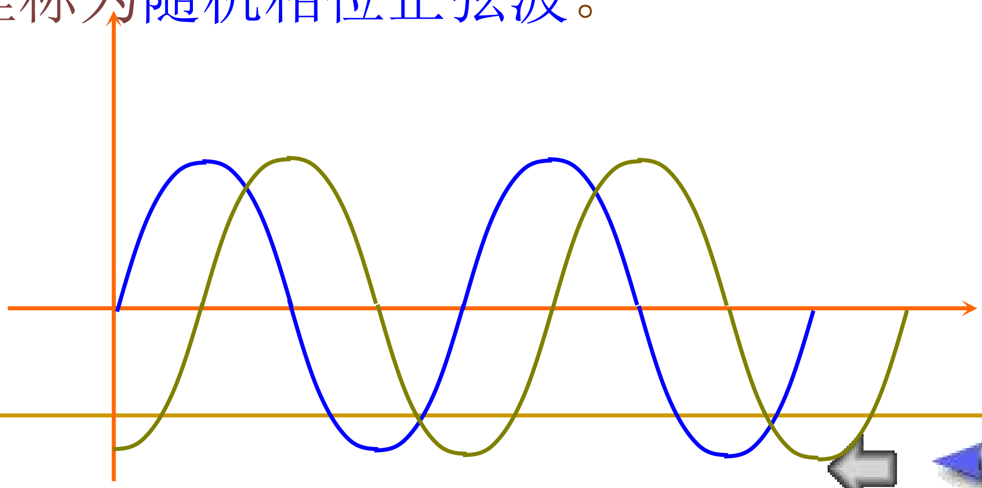
从而也是随机变量。它的状态空间是$[-\alpha,\alpha]$.

在$(0,2\pi)$内随机取一数θ,相应的就得到一个样本函数

$x(t)=\alpha cos(\omega t+\theta)$,

这族样本函数的差异在于它们相位θ的不同,

故这一过程称为随机相位正弦波。



四、随机过程的分类：

（一）根据参数集T和任一时刻的状态划分——参数集T：离散集，连续集；任一时刻的状态：离散型随机变量，连续型随机变量。

1、连续型随机过程——连续参数、连续状态空间

2、离散型随机过程——连续参数、离散状态空间

3、离散型随机序列——离散参数、离散状态空间

4、连续型随机序列——离散参数、连续状态空间

例子如下：对于随机相位正弦波，

若只在时间集$T=\{\Delta t, 2\Delta t, \cdots n\Delta t, \cdots\}$上观察$X(t)$，就得到

随机序列$\{X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots\}, X_n = X(n\Delta t)$是连续型随机变量。

（二）按分布特性分类：

依照过程在不同时刻状态的统计依赖关系分类。

例如：独立增量过程，马尔可夫过程，平稳过程等。