§2.4 随机变量函数的分布

一、问题的提出

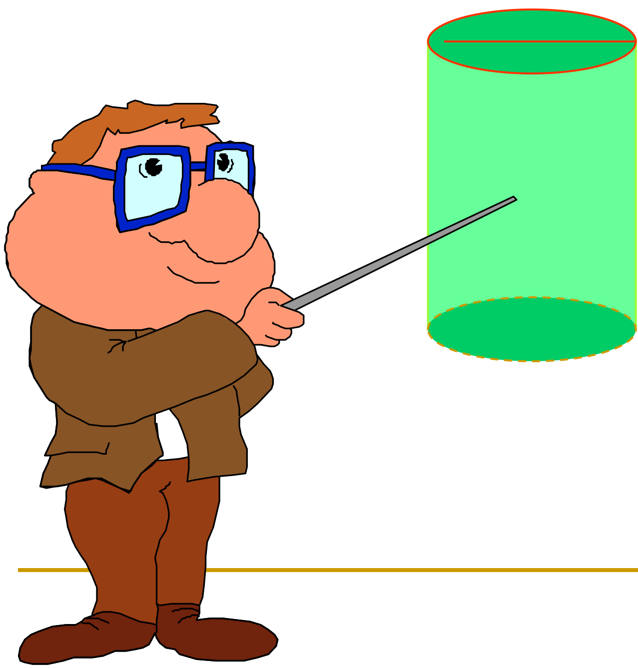
在实际中，人们常常需要考虑随机变量的函数.

不难理解，若X是随机变量，则$Y=g(X)$ (设g是连续函数）也是随机变量。

事实上，若X是定义在样本空间Ω={ω}上的随机变量，那么Y=Y(ω)=g(X(ω))，由此可见Y亦是定义在Ω上的随机变量，它是经过g(.)与X(.)复合而成的。

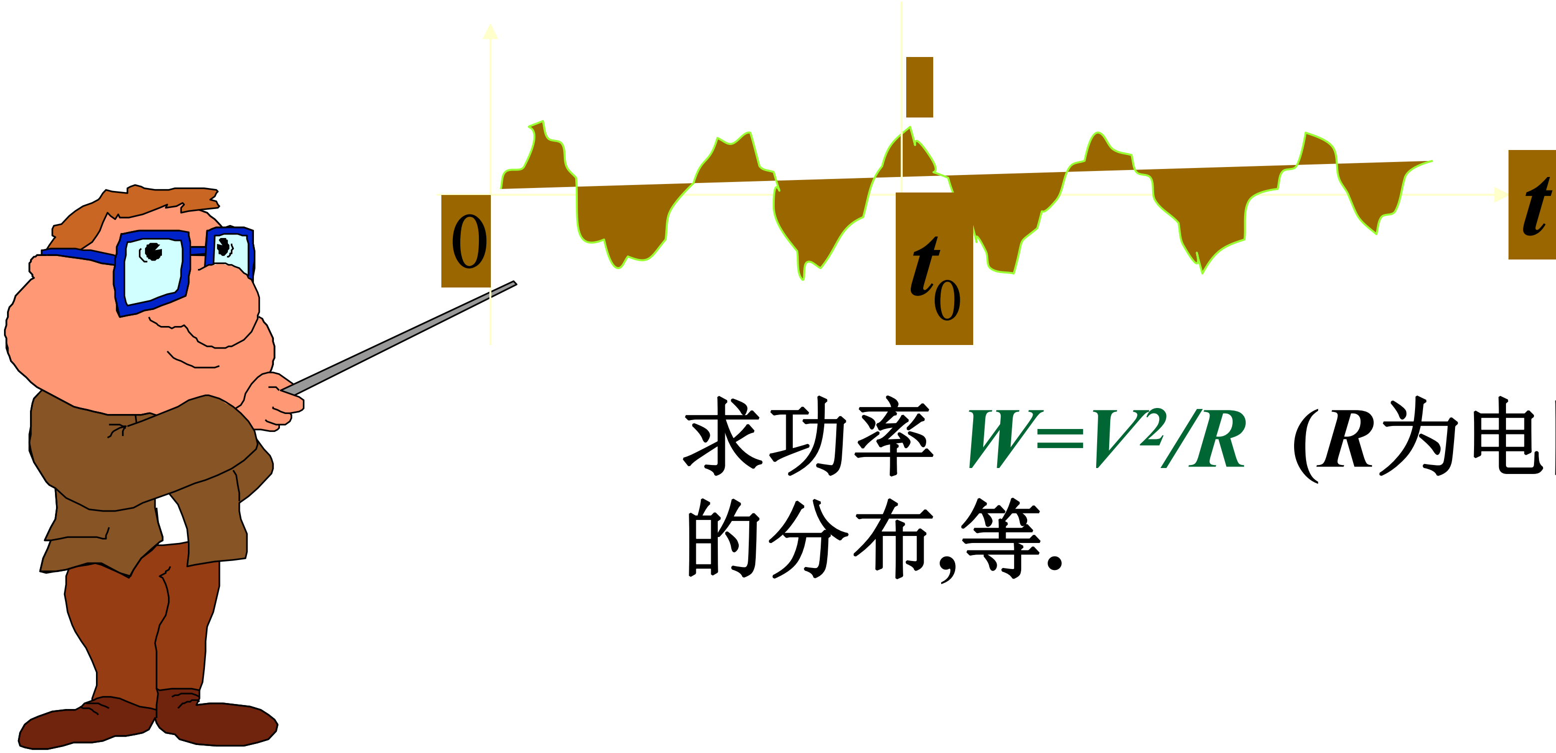
在实际中，常常需要人们由某个（些）随机变量的分布导出它的某个（些）函数（依然是随机变量）的分布.

例如，已知圆轴截面直径 d 的分布，



求截面面积 $A=\dfrac{\pi d^{2}}{4}$ 的分布.

已知$t=t_0$ 时刻噪声电压 V的分布，



求功率 $W=V^2/R$ （R为电阻）的分布,等.

一般地，我们有问题：

设随机变量X的分布已知，如何求$Y=g(X)$ (设g是连续函数）的分布？

这个问题无论在实践中还是在理论上都是重要的.

一、离散型随机变量函数的分布

设X是离散型随机变量，则Y=g(X)一般也是离散型随机变量。

此时，只需由X分布律求得Y的分布律即可。

例1： 设离散型随机变量X的分布律为

X	-1	0	1	2	3
P	2/10	1/10	1/10	3/10	3/10

求$Y_1=X-1$和$Y_2= -2X^2$的分布律。

解: 由X的分布律可得下表

P	2/10	1/10	1/10	3/10	3/10
X	-1	0	1	2	3
X-1	-2	-1	0	1	2
$-2X^2$	-2	0	-2	-8	-18

解：由X的分布律可得下表

P	2/10	1/10	1/10	3/10	3/10
X	-1	0	1	2	3
X-1	-2	-1	0	1	2
$-2X^2$	-2	0	-2	-8	-18

故$Y_1=X-1$的分布律为

Y_1	-2	-1	0	1	2
P	2/10	1/10	1/10	3/10	3/10

$Y_2= -2X^2$的分布律为

Y_2	-18	-8	-2	0
P	3/10	3/10	3/10	1/10

一般地，我们先由X的取值x_k，$k=1$，2，…求出Y的取值$y_k=g(x_k)$，$k=1$，2…

①如果诸y_k都不相同，则由$\{Y=y_k\}=P\{X=x_k\}$可得Y的分布律；

②如果诸y_k中有某些取值相同，则把相应的X的取值的概率相加。

二、连续型随机变量函数的分布

设X为连续型随机变量，具有概率密度$f_X(x)$，求**Y=g(X)**（g连续）的概率密度。

1．一般方法——分布函数法

可先求出**Y**的分布函数$F_Y(y)$：

因为$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$，则

$$F_Y(y)=\int_{g(x)\le y} f_X(x)dx$$

再由$F_Y(y)$进一步求出Y的概率密度

$$f_Y(y)=F_Y'(y)$$

例2 设 X 具有概率密度 $f_X(x)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解： 设 Y 和 X 的分布函数分别为 $F_Y(y)$ 和 $F_X(x)$，

注意到 $Y=X^2\geq 0$，故当 $y\leq 0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)$

$$=P(-\sqrt{y}\leq X\leq \sqrt{y})$$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

所以

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right], & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$$

若 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad -\infty < x < \infty$

则 $Y=X^2$ 的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

这是自由度为1的 χ^2 分布。

练:设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2} & 0<x<\pi\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求Y=sin$X$的概率密度.

解：注意到, 当 $0<x<\pi$ 时 $0<y\le 1$

故　当$y\le 0$时, $F_Y(y)=0,$

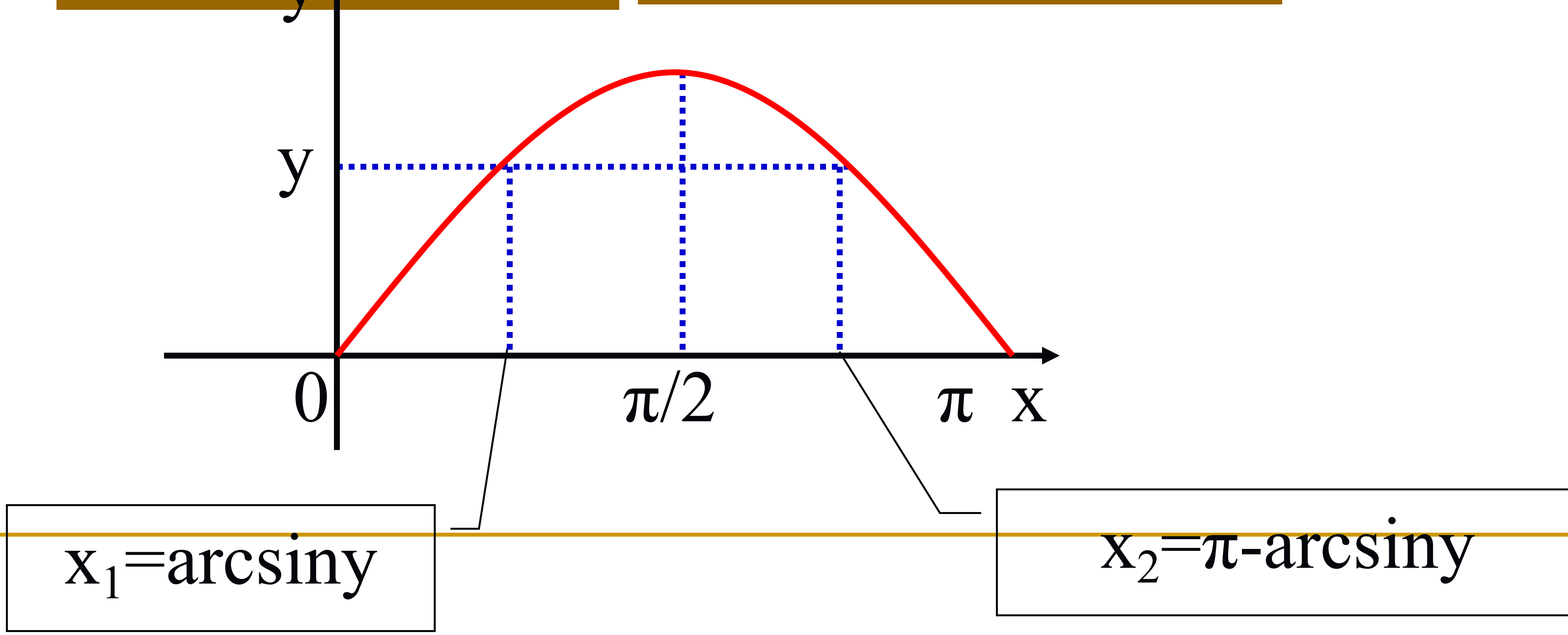
当$y\ge 1$时, $F_Y(y)=1$

解：当$0<y<1$时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sin X\le y)$$

$$=P(0\le X\le \arcsin y)+P(\pi-\arcsin y\le X\le \pi)$$

$$=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx$$



解： 当$0<y<1$时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sin X\le y)$$

$=P(0\le X\le \arcsin y)+P(\pi-\arcsin y\le X\le \pi)$

$$=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx$$

$$=\left(\frac{\arcsin y}{\pi}\right)^2+1-\left(\frac{\pi-\arcsin y}{\pi}\right)^2$$

求导得：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

例3 已知随机变量X的分布函数$F(x)$是严格单调的连续函数，证明$Y=F(X)$服从[0,1]上的均匀分布.

证明：设Y的分布函数是$G(y)$,

由于 $0 \le Y \le 1$

于是 对$y<0$，$G(y)=0$； 对$y>1$, $G(y)=1$;

又由于X的分布函数F是严格递增的连续函数，故其反函数 F^{-1} 存在且严格递增.

于是对$0\le y\le 1$，　$G(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)$

$$=P(X\le F^{-1}(y))$$

$$=F(F^{-1}(y))=y$$

所以Y的分布函数为

$$G(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\le y\le 1\\ 1, & y>1\end{cases}$$

求导得Y的密度函数

$$g(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

即 Y服从[0，1]上的均匀分布.

本例的结论在计算机模拟中有重要的应用.

例如，想得到具有密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$\lambda>0$

参数为 λ 的指数分布

的随机数. 应如何做呢?

由于 当$x\geq 0$时，$F(x)=1-e^{-\lambda x}$

是严格单调的连续函数 .

根据前面的结论， $Y=F(X)$服从[0,1]上的均匀分布.

于是得到产生指数分布的随机数的方法如下:

均匀随机数 u_i

↓

给指数分布参数λ

↓

令 $x_i = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-u_i)$

↓

指数随机数 → x_i

定理 设 X 是一个取值于区间 $[a,b]$，概率密度为 $f(x)$ 的连续型 r.v，$y=g(x)$ 处处可导，且对任意实数 x，恒有 $g'(x)>0$ 或恒有 $g'(x)<0$，则 $Y=g(X)$ 是一个连续型 r.v，它的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f[g^{-1}(y)]\left|\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中，$\alpha=\min\limits_{a\le x\le b} g(x)$，$\beta=\max\limits_{a\le x\le b} g(x)$，

此定理的证明与前面的解题思路类似.

证：我们只证$g'(x)>0$的情况。此时$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$严格单调增加，它的反函数$g^{-1}(y)$存在，且在$(\alpha，\beta)$严格单调增加，可导，现在先来求Y的分布函数$F_Y(y)$。

因为$Y=g(X)$在（α， β）取值，故当$y\le\alpha$时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0;$$

当$y\ge\beta$时，　$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=1$;

当$\alpha<y<\beta$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$

$$=P\{X\le g^{-1}(y)\}$$

$$=\int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx$$

于是得Y的概率密度

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left[g^{-1}(y)\right]\left[g^{-1}(y)\right]' & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

若g′(x)<0, 同理可证

$$f_Y(y)=\begin{cases} -f_X\left[g^{-1}(y)\right]\left[g^{-1}(y)\right]' & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

合并两式，即得证。

若f(x)在有限区间[a，b]以外等于零，则只需假设在[a，b]上恒有g′(x)>0（或恒有g′(x)<0），此时

$$\alpha=\min\{g(a),g(b)\},\beta=\max\{g(a),g(b)\}$$

例4: 设随机变量$X \sim N(\mu，\sigma^2)$,试证明X的线性函数$Y=aX+b(a\neq 0)$也服从正态分布。

证明：X的概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty<x<+\infty$$

现在$y=g(x)=ax+b$，由这一式子解得

$$x=h(y)=(y-b)/a$$

由定理得$Y=aX+b$的概度密度为

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X(\frac{y-b}{b}) \qquad -\infty<y<+\infty$$

即 $f_Y(y)=\dfrac{1}{|a|}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$

$$=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}} \qquad -\infty<y<+\infty$$

所以 $Y=ax+b\sim N(a\mu+b\,,(a\sigma)^2\,)$

特别，在上例中取 $a=1/\sigma$, $b=-\mu/\sigma$ 得

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

小结： 求随机变量函数的分布的方法：

1. 设离散型随机变量X的分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i，\ i=1,2,\ldots,n,\ldots$$

又$y=f(x)$是x的连续函数，则$Y=f(X)$是随机变量，其分布律为

$$P\{Y=f(x_i)\}=p_i，\ i=1,2,\ldots,n,\ldots$$

若某些$f(x_i)$相等，将它们作适当并项即可。

小结：求随机变量函数的分布的方法：

对于连续型随机变量，在求$Y=g(X)$的分布时，关键的一步是把事件$\{g(X)\le y\}$转化为X在一定范围内取值的形式，从而可以利用X的分布来求$P\{g(X)\le y\}$.

2. 具体地，设连续型随机变量X的密度函数为$\varphi_X(x)$, $y=f(x)$连续, 求$Y= f(X)$的密度函数的方法有三种：

（1）分布函数法；

（2）若$y=f(x)$严格单调，其反函数有连续导函数，则可用公式法；

（3）若y=f(x)在不相重叠的区间$I_1,I_2,\ldots$上逐段严格单调，其反函数分别为$g_1(y), g_2(y), \ldots$,且$g'_1(y), g'_2(y), \ldots$,均为连续函数，则Y= f(X)是连续型随机变量，其密度函数为

$$\varphi_Y(y)=\varphi_X\left[g_1(y)\right]\left|g_1'(y)\right|+\varphi_X\left[g_2(y)\right]\left|g_2'(y)\right|+\cdots$$