第2次课

教学内容：

1. 条件分布
2. 随机变量的独立性

教学目的及目标：

掌握条件分布及独立随机变量的概念,并能熟练解决有关问题；

教学重点：

随机变量的独立性

教学难点：

条件分布

§ 3.3 条件分布

在第一章中，我们介绍了条件概率的概念 .

在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率

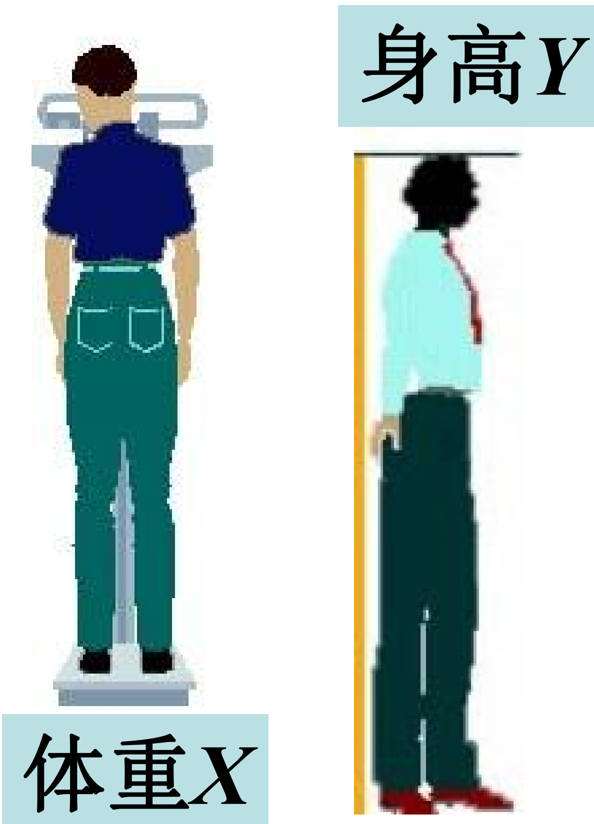
$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

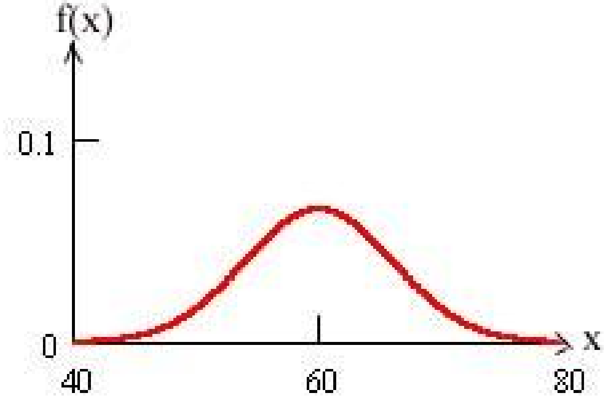
推广到随机变量

设有两个$r.v\ X,Y$， 在给定Y取某个或某些值的条件下，求X的概率分布.

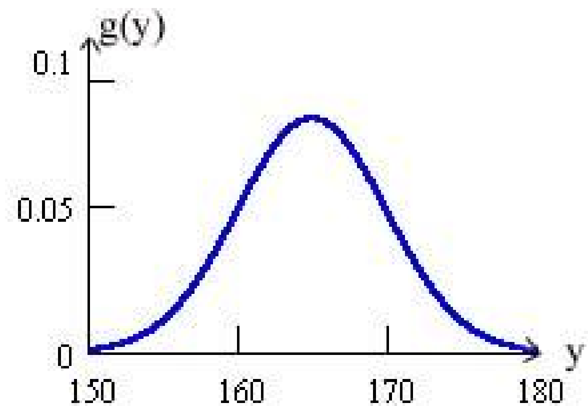
这个分布就是所谓的条件分布.

例如，考虑某大学的全体学生，从其中随机抽取一个学生，分别以X和Y表示其体重和身高．则X和Y都是随机变量，它们都有一定的概率分布.





体重X
的分布



身高Y
的分布

现在若限制$1.7<Y<1.8$(米), 在这个条件下去求X的条件分布，这就意味着要从该校的学生中把身高在1.7米和1.8米之间的那些人都挑出来，然后在挑出的学生中求其体重的分布.

容易想象，这个分布与不加这个条件时的分布会很不一样.

例如，在条件分布中体重取大值的概率会显著增加 .

一、离

类似定义在$X=x_i$条件下
随机变量Y的条件概率函数.

实际　　　　　　　　　　　　　　　　　念在
另一种形

定义1　设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的 j，若$P(Y=y_j)>0$，则称

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},\quad i=1,2,\ldots$$

作为条件的那个$r.v$,认为取值是给定的，在此条件下求另一$r.v$的概率分布.

为在$Y=y_j$条　　　　　　　　　　　　　　　数.

条件分布是一种概率分布，它具有概率分布的一切性质. 正如条件概率是一种概率，具有概率的一切性质.

例如：$P(X=x_i \mid Y=y_j)\geq 0,\quad i=1,2,\ldots$

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(Y=y_j \mid X=x_i)=1$$

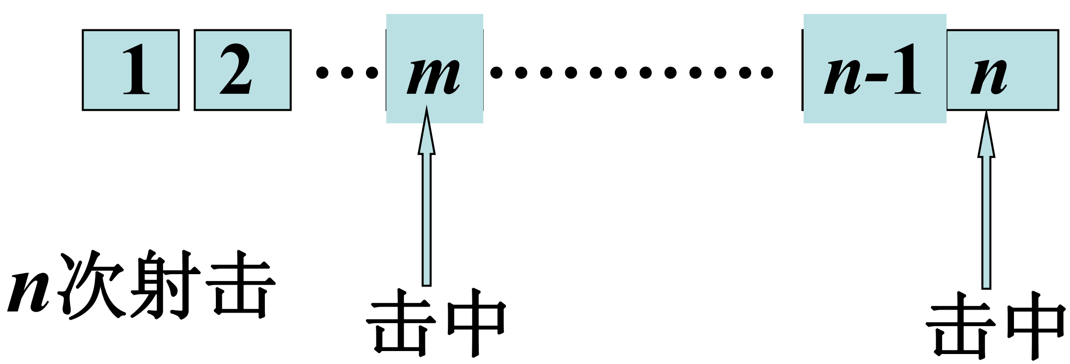
(1) $P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}\geq 0,\quad P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}\geq 0,$

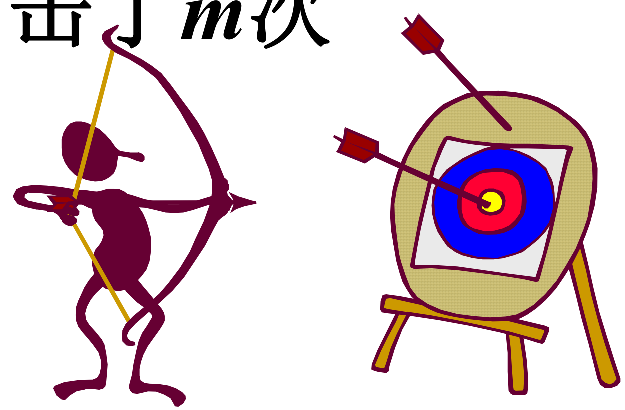
(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}=\frac{1}{p_{i\bullet}}\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=1$

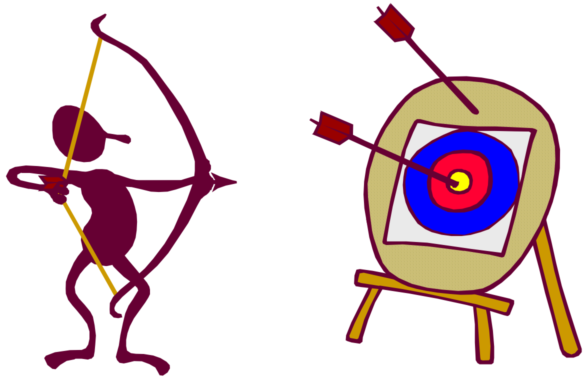
例1 一射手进行射击，击中目标的概率为 p，$(0<p<1)$，射击进行到击中目标两次为止. 以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数，以 Y 表示总共进行的射击次数. 试求 X 和 Y 的联合分布及条件分布.

解：依题意，$\{Y=n\}$ 表示在第 n 次射击时击中目标，且在前 n-1次射击中有一次击中目标.

$\{X=m\}$表示首次击中目标时射击了 m 次







n次射击

1 2 … m ………… n-1 n

击中　　击中

每次击中目标的概率为 p

$P(X=m,Y=n)=?$

不论$m(m<n)$是多少，

$P(X=m,Y=n)$都应等于

$$P(X=m,Y=n)=p^2(1-p)^{n-2}$$

由此得X和Y的联合概率函数为

$$P(X=m,Y=n)=p^2(1-p)^{n-2}$$

$n=2,3,\ldots;\ m=1,2,\ldots,n-1$

为求条件分布，先求边缘分布.

X的边缘概率函数是：

$$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P(X=m,Y=n)$$

$$=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}=p^2\sum_{n=m+1}^{\infty}(1-p)^{n-2}$$

$$=p^2\frac{(1-p)^{m+1-2}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1}$$

$m=1,2,\ldots$

Y的边缘概率函数是：

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P(X=m,Y=n)$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}$$

$$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

$n=2,3,\ldots$

于是可求得：

当n=2,3, …时，

$$P(X=m\mid Y=n)$$

$$=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}$$

联合分布

边缘分布

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$$

$$=\frac{1}{n-1},\qquad m=1,2,\ldots,n-1$$

当m=1,2, …时，

$$P(Y=n \mid X=m)$$

$$=\frac{P\{X=m, Y=n\}}{P\{X=m\}}$$

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}}$$

$$=p(1-p)^{n-m-1}, \qquad n=m+1, m+2, \ldots$$

二、连续型*r.v*的条件分布

1. 条件分布函数

在讨论二维连续型随机变量(X,Y)的条件分布时，注意到对于任意实数x,y，$P\{X=x\}=0$ 及 $P\{Y=y\}=0$，因此不能简单地按条件概率的定义公式直接引入条件分布函数.但我们可以用极限的方法来处理该问题.

设(X,Y)的概率密度为$f(x, y)$，若对给定实数x，当$\varepsilon > 0$充分小时，恒有$P\{x-\varepsilon < X \leq x+\varepsilon\} > 0,$

则对于任意实数y，有

$$P\{Y \leq y \mid x-\varepsilon < X \leq x+\varepsilon\} = \frac{P\{Y \leq y, x-\varepsilon < X \leq x+\varepsilon\}}{P\{x-\varepsilon < X \leq x+\varepsilon\}}$$

当$\varepsilon \to 0^{+}$时，如果$P\{Y \leq y \mid x-\varepsilon < X \leq x+\varepsilon\}$的极限存在，则称此极限为在$X=x$的条件下，$Y$的条件分布函数，记为

$$P\{Y \leq y \mid X = x\}$$

或

$$F_{Y|X}(y \mid x), -\infty < y < +\infty.$$

类似地，$Y=y$的条件下，X的条件分布函数

$$F_{X|Y}(x\,|\,y)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}P\{X\le x\,|\,y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{X\le x,\ \mathrm{y}-\varepsilon<Y\le x+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}}$$

其中$-\infty<x<+\infty$.

注意：

在条件分布函数 $F_{Y|X}(y|x)$ 的表示式中，***x***与***y***的含义不同：***y***是条件分布函数中的自变量，而***x***是给定***X=x***条件下的参数，因此 $F_{Y|X}(y|x)$ 是一个分布函数族. $F_{X|Y}(x|y)$ 中***x***为自变量，***y***是参数.

2. 条件概率密度

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，如果$f(x,y)$在(x,y)处连续，且X的边缘概率密度$f_X(x)$在x处连续，并且$f_X(x)>0$，则

$$F_{Y|X}(y\,|\,x)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}P\{Y\le y\,|\,x-\varepsilon<X\le x+\varepsilon\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{Y\le y,\ x-\varepsilon<X\le x+\varepsilon\}}{P\{x-\varepsilon<X\le x+\varepsilon\}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(u,v)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v}{\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_X(u)\,\mathrm{d}u}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{y} f(x,v)\,\mathrm{d}v}{f_X(x)}=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,v)}{f_X(x)}\mathrm{d}v \qquad -\infty<y<+\infty$$

因此，由连续型随机变量的定义可知：

在$X=x$的条件下，Y仍然是一个连续型随机变量，

且其概率密度为$\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$.

定义　设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，如果$f(x,y)$在(x,y)处连续，　X的概率密度$f_X(x)$在x处连续，而且$f_X(x)>0$，则称$\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$为在$X=x$的条件下，Y的条件概率密度，记为$f_{Y|X}(y\mid x)$，其中$-\infty<y<+\infty$；称$\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在$Y=y$的条件下，X的条件概率密度，记为$f_{X|Y}(x\mid y)$，其中$-\infty<x<+\infty$.

在条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 的表示式中，***x*** 与***y***的含义不同：***x***是条件概率密度中的自变量，而***y***是给定的参数，因此，$f_{X|Y}(x|y)$ 是一个概率密度族. $f_{Y|X}(y|x)$ 中***y*** 是条件概率密度中的自变量，***x***是给定的参数。

*对条件概率密度含义的进一步理解：

以 $f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为例

将上式左边乘以 dx，右边乘以 $(dx\,dy)/dy$

即得

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)dx=\frac{f(x,y)dxdy}{f_Y(y)dy}$$

$$\approx\frac{P\{x\le X<x+dx,y\le Y\le y+dy\}}{P\{y\le Y\le y+dy\}}$$

$$=P\{x\le X\le x+dx\,|\,y\le Y<y+dy\}$$

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)dx$$

$$\approx P\{x \le X \le x+dx \,|\, y \le Y < y+dy\}$$

换句话说，对很小的dx和 dy, $f_{X|Y}(x\,|\,y)dx$

表示已知 Y取值于y和$y+dy$之间的条件下，X取值于x和$x+dx$之间的条件概率.

例2 设(X,Y)服从单位圆上的均匀分布，概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求$f_{Y|X}(y|x)$

解：易知X的边缘密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

X作为已知变量

所以，当$|x|<1$时，$f_{Y|X}(y|x)$有意义，且

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\\ 0, & y\text{ 取其它值}\end{cases}$$

这里是y的取值范围

X已知下Y的条件密度

前面，我们已经知道，二维正态分布的两个边缘密度仍是正态分布.

可以证明，对二维正态分布，已知 $X=x$下，Y 的条件分布，或者已知 $Y=y$下，X的条件分布都仍是正态分布.

留作练习（或自学本节课件最后一例）.

注意：运用条件概率密度，我们可以在已知某一随机变量值的条件下，定义与另一随机变量有关的事件的条件概率.

即：若(X,Y)是连续型$r.v$，则对任一集合A，

$$P(X \in A \mid Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x \mid y)dx$$

例3 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, & 0<x<\infty, 0<y<\infty\\ 0\quad, & \text{其它}\end{cases}$$

求 $P(X>1|Y=y)$

解: $P(X>1|Y=y)=\int_1^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx$

因此需先求 $f_{X|Y}(x|y)$

由于 $$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^{\infty}\dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}dx, & 0<y<+\infty\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-y}, & 0<y<+\infty\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

所以当y>0时,

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-x/y}}{y},\quad x>0$$

故当y>0时,$P(X>1|Y=y)$ $$=\int_1^{\infty}\frac{e^{-x/y}}{y}dx$$

$$=-e^{-x/y}\Big|_1^{\infty}=e^{-1/y}$$

练　设数X在区间(0,1)均匀分布，当观察到$X=x(0<x<1)$时，数Y在区间$(x,1)$上随机地取值.求Y的概率密度.

解：依题意，X具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对于任意给定的值$x(0<x<1)$，在$X=x$的条件下，Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

已知边缘密度、条件密度，求联合密度

所以,当$0<x<y<1$时

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{1-x}$$

当x,y取其它值时,

$$f(x,y)=0$$

即

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

于是，Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^y \frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（*）例5　设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xy, & 0\le x\le 1,\ x\le y\le 3x, \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$$

试求 (1)条件概率密度$f_{X|Y}(x\mid y)$ 以及$f_{Y|X}(y\mid x)$

(2)求$P\{Y\ge 2\mid X\ge \frac{1}{2}\}$,

$P\{Y<1\mid X=\frac{1}{2}\}, P\{|X|\ge \frac{3}{4}\mid Y=\frac{3}{2}\}$

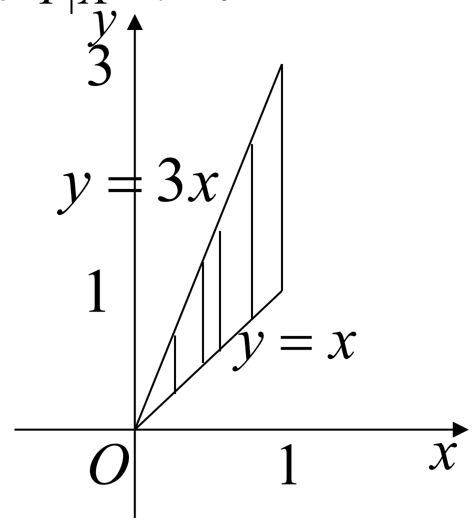


图1

解 (1) 由边缘概率密度的定义可知(积分区域见图1):

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y=\begin{cases}\displaystyle\int_{x}^{3x} xy\,\mathrm{d}\,y=4x^3, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x=\begin{cases}\displaystyle\int_{\frac{y}{3}}^{y} xy\,\mathrm{d}\,x=\frac{4}{9}y^3, & 0\le y\le 1,\\ \displaystyle\int_{\frac{y}{3}}^{1} xy\,\mathrm{d}\,x=\frac{y}{2}(1-\frac{y^2}{9}), & 1\le y\le 3,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

对于任意的$0<x\le 1$，$f_X(x)\neq 0$，因此 $f_{Y|X}(y\mid x)$存在.

由条件概率密度定义可知：当$0<x\le 1$时，

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{xy}{4x^3}=\dfrac{y}{4x^2}, & x\le y\le 3x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对于任意的$0<y<3$，$f_Y(y)\neq 0$，因此$f_{X|Y}(x\mid y)$存在.

由条件概率密度定义可知：当$0<y<1$时，

$$f_{X|Y}(x \mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{9x}{4y^2}, & \dfrac{y}{3}\le x\le y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当$1\le y<3$时，

$$f_{X|Y}(x \mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{18x}{9-y^2}, & \dfrac{y}{3}\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 由于$P\{X\ge\frac{1}{2}\}>0$，因此由条件概率的定义可知

$$P\{Y \geq 2 \mid X \geq \frac{1}{2}\} = \frac{P\{Y \geq 2, X \geq \frac{1}{2}\}}{P\{X \geq \frac{1}{2}\}}$$

$$= \frac{\int_{\frac{2}{3}}^{1} x \, \mathrm{d}x \int_{2}^{3x} y \, \mathrm{d}y}{\int_{\frac{1}{2}}^{1} 4x^3 \, \mathrm{d}x} = \frac{\frac{25}{72}}{\frac{15}{16}} = \frac{10}{27}$$

但对于 $P\{Y < 1 \mid X = \frac{1}{2}\}, P\{\mid X \mid \geq \frac{3}{4} \mid Y = \frac{3}{2}\}$，由于 $P\{X = \frac{1}{2}\}, P\{Y = \frac{3}{2}\}$均为0，因而其概率的计算只能用条件概率密度在某区间上的积分进行计算.

$$P\{Y<1\mid X=\frac{1}{2}\}=\int_{-\infty}^{1} f_{Y|X}(y\mid\frac{1}{2})\,\mathrm{d}\,y=\int_{\frac{1}{2}}^{1} y\,\mathrm{d}\,y=\frac{3}{8}$$

$$P\{|X|\geq\frac{3}{4}\mid Y=\frac{3}{2}\}=\int_{|x|\geq\frac{3}{4}} f_{X|Y}(x\mid\frac{3}{2})\,\mathrm{d}\,x=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{8}{3}x\,\mathrm{d}\,x=\frac{7}{12}.$$

思考：

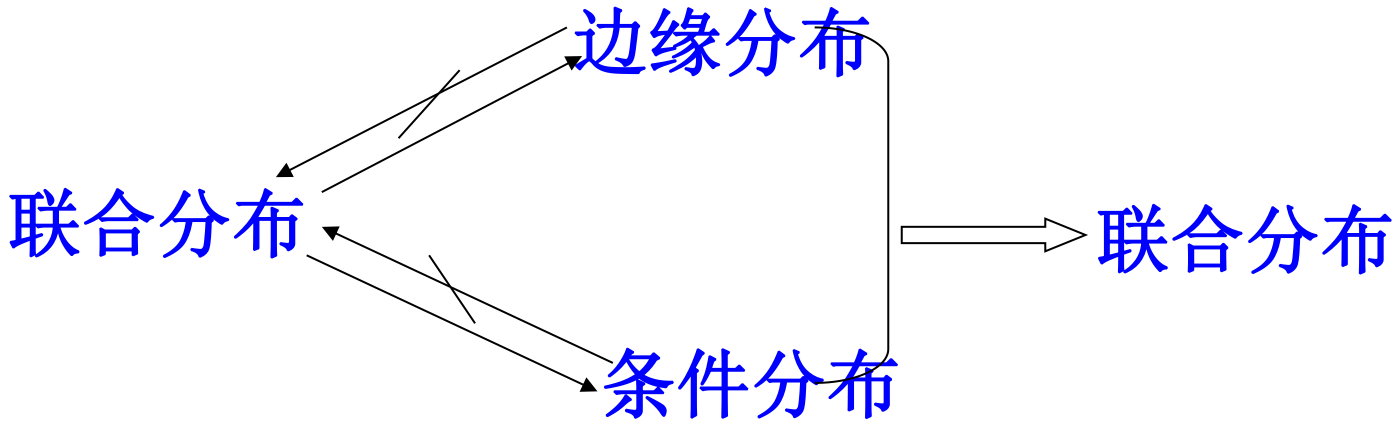
1边缘分布与联合分布、条件分布三者之间的关系？

2验证二维正态分布，已知 $X=x$下，Y 的条件分布，或者已知 $Y=y$下，X的条件分布都仍是正态分布.

1. 设(X,Y)为二维随机变量，条件分布与联合分布也有紧密关系，即联合分布唯一决定了条件分布，但条件分布决定不了联合分布.不过条件分布与边缘分布二者可以唯一确定联合分布，即

$$p_{ij} = P\{X = x_i \mid Y = y_j\} \cdot p_{\bullet j} = P\{Y = y_j \mid X = x_i\} \cdot p_{i\bullet}$$

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y \mid x) = f_Y(y) f_{X|Y}(x \mid y)$$



2.(*)例 设二维随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

试求条件概率密度 $f_{X|Y}(x\,|\,y)$ 以及 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$.

解 由于的(X,Y)边缘概率密度均为正态分布的

概率密度，即 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

则依据条件概率密度的定义可得：

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x-(\mu_1+\frac{\sigma_1\rho y-\sigma_1\rho\mu_2}{\sigma_2})\right]^2}\quad -\infty<x<+\infty$$

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[y-(\mu_2+\frac{\sigma_2\rho x-\sigma_2\rho\mu_1}{\sigma_1})\right]^2}\quad -\infty<y<+\infty$$

即二维正态分布的条件分布仍为正态分布，

在$Y=y$的条件下，X的条件分布和在$X=x$的条件下，Y的条件分布分别为

$$N(\mu_1+\frac{\sigma_1\rho y-\sigma_1\rho\mu_2}{\sigma_2},\sigma_1^2(1-\rho^2)),\quad N(\mu_2+\frac{\sigma_2\rho x-\sigma_2\rho\mu_1}{\sigma_1},\sigma_2^2(1-\rho^2))$$