例 5 判定级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$；(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\right)$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{1}{n}\right)$

解: (1)这是一个正项级数，当$n\to\infty$时，

$$u_n=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{2n^2},$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot u_n=\frac{1}{2}$，根据极限形式的比较审敛法知级数收敛；

（2）当$n\to\infty$时，

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\cdot u_n=1$，

根据极限形式的比较审敛法知级数收敛；

（3）当$n\to\infty$时，

$$u_n=e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{1}{n}=\left[1+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-\left[1-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{3}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{3}{2}\frac{1}{n^2}$$，

所以$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot u_n=\frac{3}{2}$，根据极限形式的比较审敛法知级数收敛.

定理4(比值审敛法, 达朗贝尔(D'Alembert)判别法)

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ， $u_n>0$， 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

则 (1)当$\rho<1$时级数收敛;

(2)当$\rho>1$ (或 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$)时级数发散;

(3)当$\rho=1$时级数可能收敛也可能发散.

证明：（1）当$\rho<1$时，取$\varepsilon>0$，使得$\rho+\varepsilon=q<1$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，

$\exists N\in N^{+}$，当$n>N$时，$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=q\Rightarrow u_{n+1}<qu_n$，从而

$u_{N+2}<qu_{N+1}$，$u_{N+3}<qu_{N+2}<q^2u_{N+1}$，$\cdots$

一般地，$u_{N+1+n}<q^n u_{N+1}\,(n=1,2,3,\ldots)$，因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n u_{N+1}$，根据比较审

敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{N+1+n}$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

（2）当$\rho>1$(或$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$)时，$\exists\ N\in N^+$，当$n>N$时，$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1\Rightarrow u_{n+1}>u_n$，

即当$n>N$时$u_n\ge u_{N+1}>0$，可得$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

（3）例如，对于p级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p=1$.

注意：对于情形(2)，可以推出$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散！

例4. 判别级数的敛散性

（1） $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}+\cdots$

（2） $\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\cdots+\frac{n!}{10^n}+\cdots$

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\cdot n!}{n^n}\quad a>0$

（4） $\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\cdots+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}+\cdots$

解：

(1) $u_n = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (n-1)}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0 < 1$， 级数收敛

(2) $u_n = \dfrac{n\,!}{10^n}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{10} = +\infty$， 级数发散

(3) $u_n=\dfrac{a^n\cdot n!}{n^n}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\dfrac{a}{e}$， 当$0<a<e$时，级数收敛；

当$a>e$时，级数发散；当$a=e$时，$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}>1$，

故$u_n\ge u_1=e\,(n=1,2,\ldots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\ne 0$，级数发散.

(4) $u_n=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$，令$a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$，易知$\{a_n\}$单增且$a_n<2$，

由单调有界收敛准则，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，

由$a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}\Rightarrow a_n^2=2+a_{n-1}$两边取极限有$a^2=2+a$，解得

$a=2$（$a=-1$舍去），所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$；

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{a_{n+2}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{2}$，故级数收敛.

例 5 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{4}$的收敛性

解：这是一个正项级数，$0\le u_n=\frac{n}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{4}\le\frac{n}{3^n}=v_n$， $\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{3}<1$，因此

由比值审敛法可知$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，再根据比较审敛法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{4}$收敛.

例 6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}=0$

证：考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$，$u_n=\dfrac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$，$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\dfrac{(2n+1)!!}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}}{\dfrac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}}=\dfrac{2n+1}{3(n+1)}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3(n+1)}=\frac{2}{3}<1,$$

由比值审敛法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$ 收敛;根据级数收敛的必要条件得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}=0.$$

定理5(根值审敛法, 柯西判别法)

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数, 如果它的一般项$u_n$的$n$次根的极限等于$\rho$,即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$$

则 (1)当$\rho<1$时级数收敛;

(2)当$\rho>1$ (或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$)时级数发散;

(3)当$\rho=1$时级数可能收敛也可能发散.

证明:（1）当$\rho<1$ 时，取$\varepsilon>0$，使$\rho+\varepsilon=q<1$，由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，$\exists N\in N^{+}$，

当$n>N$时，$\left|\sqrt[n]{u_n}-\rho\right|<\varepsilon\Rightarrow\sqrt[n]{u_n}<\rho+\varepsilon=q\Rightarrow u_n<q^n$；$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$收敛，

由比较审敛法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

（2）当$\rho>1$(或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$)时，$\exists N\in N^{+}$，当$n>N$时，$\sqrt[n]{u_n}>1\Rightarrow u_n>1$，

可得$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

（3）例如，对于p级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p=1$

注意：对于情形(2)，可以推出$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散！

例5. 判别级数的敛散性

(1) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a+\frac{1}{n}\right)^n \quad a>0$

解：

（1）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，根据根值审敛法可知级数收敛；

（2）$u_n=\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}=\dfrac{1}{2}$，根据根值审敛法，级数收敛；

注意：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$不存在，不能使用比值审敛法！

（3）$u_n=\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^n$， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\dfrac{1}{n}\right)=a$，

当$0<a<1$时，级数收敛；

当$a>1$时，级数发散；

当$a=1$时， $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$， $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=e\neq 0$，级数发散.

可以证明以下结论

定理 如果$u_n > 0 \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$且$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$， ρ有限或$+\infty$，

则$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$.反之不成立.

此结论说明了比值法与根值法之间的联系：
若能使用比值法判定级数的收敛性，则可以使用根值法来判定！但反过来不然.

定理6 (积分审敛法) 设有单调减少非负函数 $f(x)\ (x \geq 1)$,

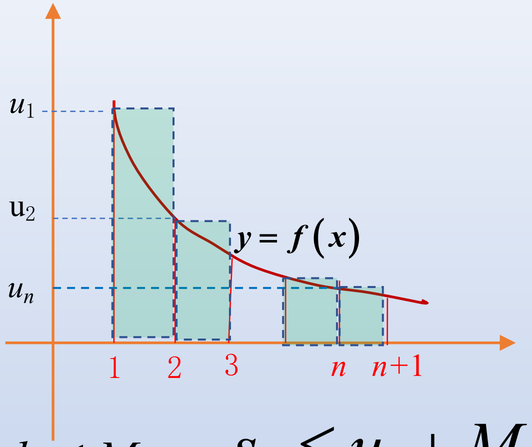
如果 $u_n = f(n)\ (n = 1, 2, \cdots)$,那么正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与反常积分

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 有相同的敛散性.

例如 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 与 p-积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ 的敛散性相同,

当 $p \leq 1$ 时, 两者都发散; 当 $p > 1$ 时, 两者都收敛.

证明： 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 s_n，则



$$\int_1^{n+1} f(x)dx < s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n < u_1 + \int_1^n f(x)dx,$$

若 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则存在常数 M，使得 $\int_1^n f(x)dx \le M$，$s_n \le u_1 + M$，

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

若 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散，由 $s_n > \int_1^{n+1} f(x)dx \to +\infty\ (n\to\infty)$ 可知，$\{s_n\}$ 无上界，

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例6 试证正项级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$当$p>1$时收敛；当$p\le 1$时发散.

证： 根据积分审敛法，正项级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$与反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx$同时收敛或发散

若$p=1$，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln|\ln x|\Big|_2^{+\infty}=+\infty$，故反常积分发散；

若$p\ne 1$，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx=\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_2^{+\infty}$，当$p>1$时收敛；当$p<1$时发散.

所以级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$当$p>1$时收敛；当$p\le 1$时发散.