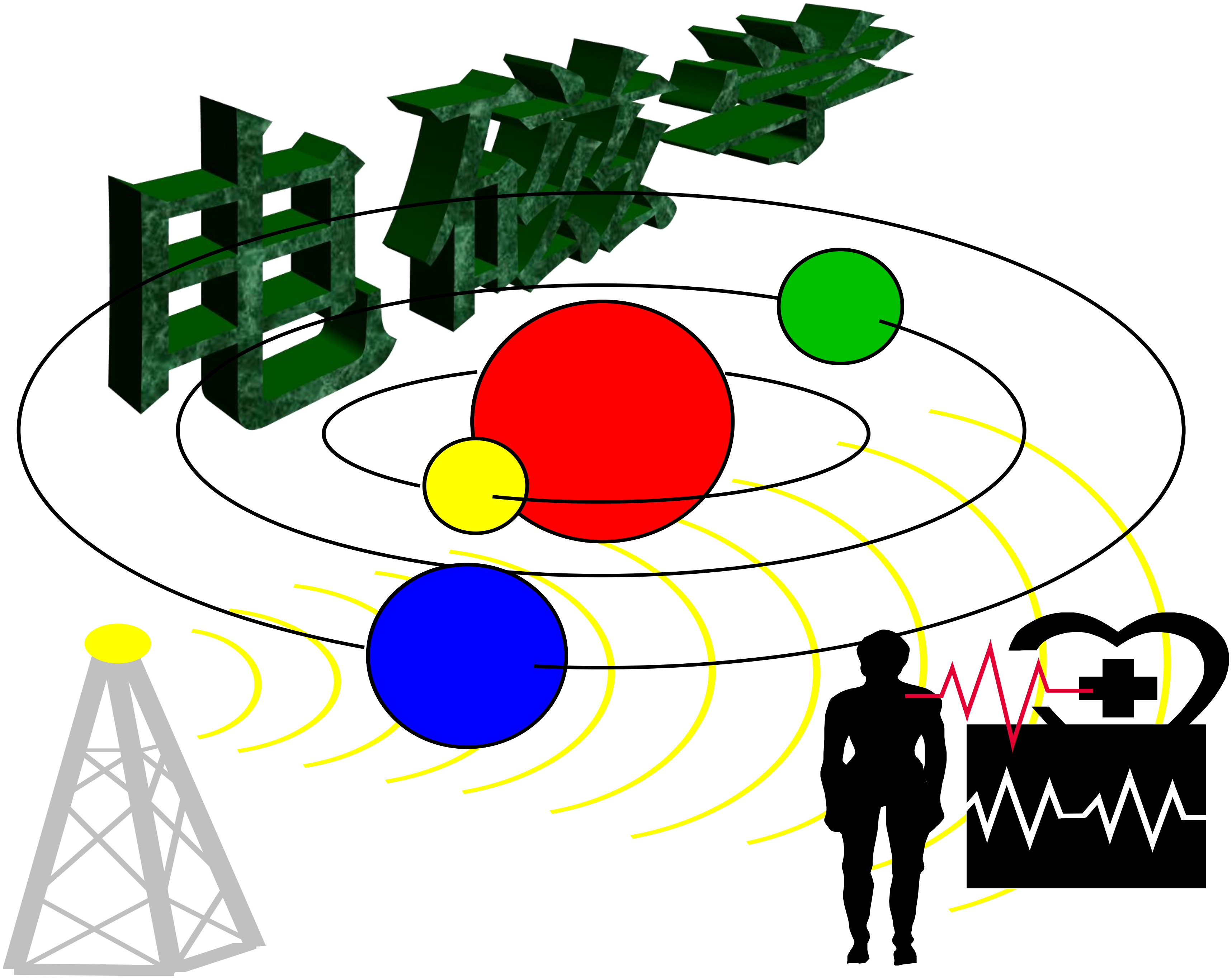

电磁学

主要内容：

一.静电场及基本性质

二.稳恒电流的电场、磁场及基本性质

三.电磁感应现象及规律

四.Maxwell 电磁场方程组

# 第五章 真空中的静电场

§5.1 电荷 库仑定律

§5.2 真空中的静电场 电场强度

§5.3 电场强度通量 高斯定理

§5.5-5.6 静电场的环路定理 电势

§5.7 等势面 电场强度与电势的微分关系

# §5.1电荷　库仑定律


## 一、电荷

**认识电荷**

**自然界只存在两种电荷：正电荷和负电荷**

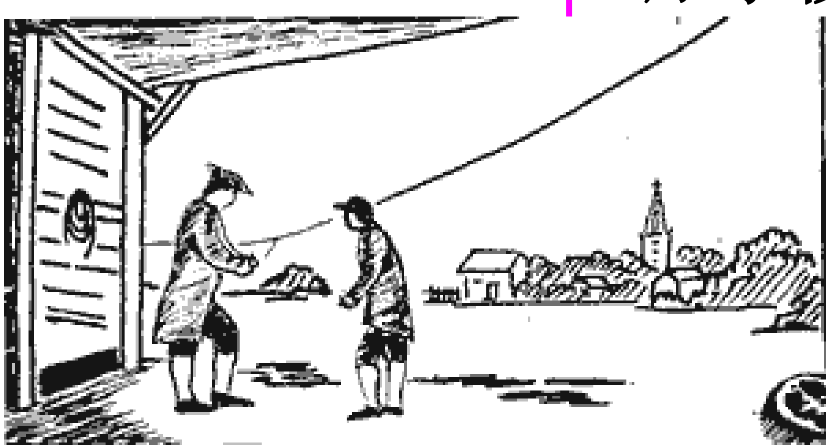
**1750年　美国物理学家 富兰克林首次命名**

**1897年　英国物理学家　汤姆孙发现电子**

$$e = 1.602 \times 10^{-19}\,C$$

电量的单位　库仑

分子
原子
- 电子
- 原子核
  - 质子
  - 中子



## 电荷守恒定律

在一个和外界没有电荷交换的系统内，正负电荷的代数和在任何物理过程中保持不变。

$$ {}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \to {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}H $$

## 电荷量子化

$$ Q = Ne \qquad e = 1.602\times 10^{-19}C $$

1913年，密立根用油滴法首先从实验上证明微小粒子带电量的变化不连续。

宏观讨论时，认为电荷连续分布在带电体上

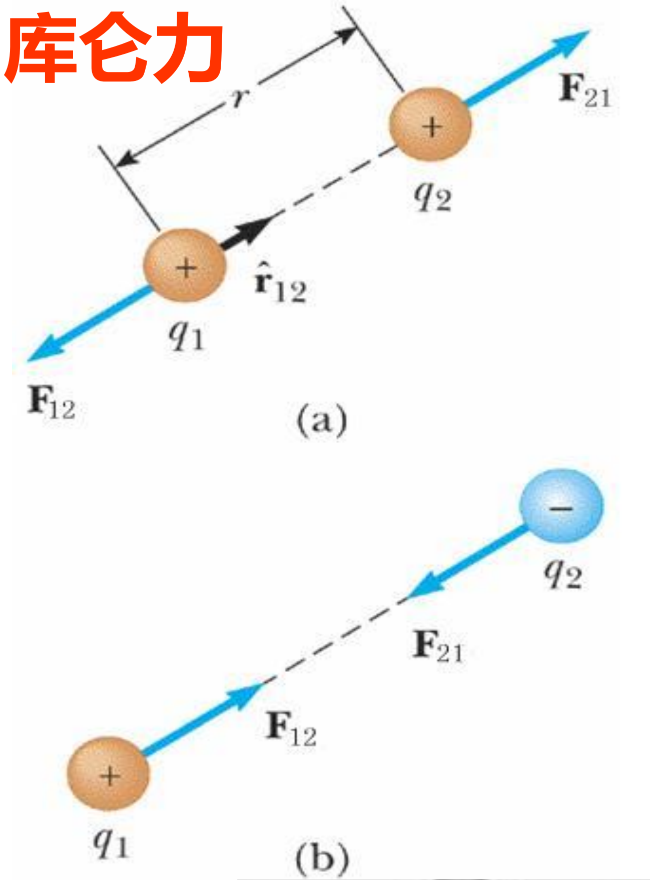
## 电荷电量具有相对论不变性

电荷的电量与它的运动速度和加速度无关。

# 二 库仑定律 1785年，库仑通过扭称实验得到。

**点电荷—理想模型**

**库仑力**




**无大小和形状，只有电量**

**若 带电体的线度<<带电体间的距离，**

**则 带电体可看成点电荷。**

$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}_{12}$$

**同号相斥，异号相吸**

$k = 8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}$ **库仑常数**

$\varepsilon_0 = 8.8542\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$ **真空介电常数**

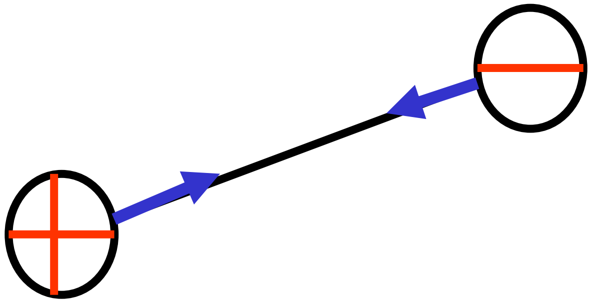
$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}}$$ —— **真空中库仑定律**

- **讨论**

**(1) 库仑定律是物理学中著名的平方反比定律之一；**

**(2) 库仑定律适用于真空中的点电荷；**

**(3) 库仑力满足牛顿第三定律。**



# 比较库仑力和万有引力

$$\boxed{\vec{F}=k\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}} \qquad \vec{F}=-\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

**以氢原子为例：质子与电子之间距离5.3×10⁻¹¹m.**

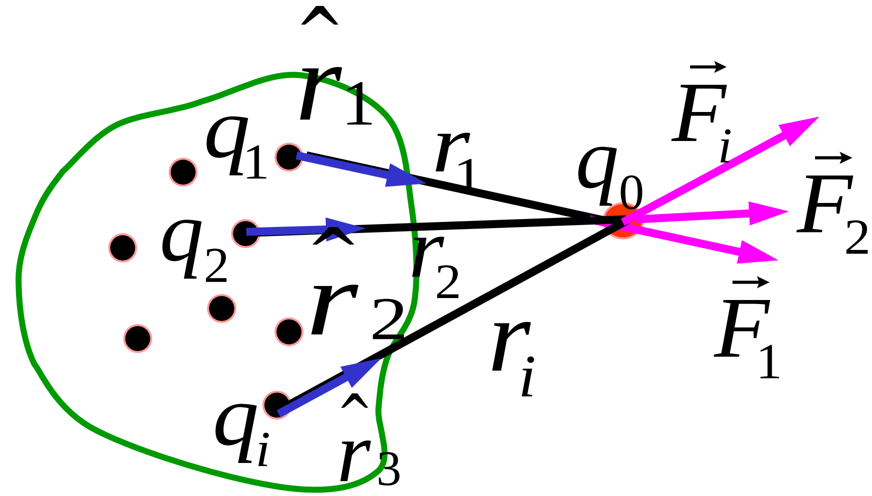
$$F=k\frac{e^2}{r^2}=(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{(5.3\times10^{-11}\,\mathrm{m})^2}=8.2\times10^{-8}\,\mathrm{N}$$

$$F_g=G\frac{m_em_p}{r^2}$$

$$=(6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2})\frac{(9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg})(1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg})}{(5.3\times10^{-11}\,\mathrm{m})^2}=3.6\times10^{-47}\,\mathrm{N}$$

## 三.静电力叠加原理

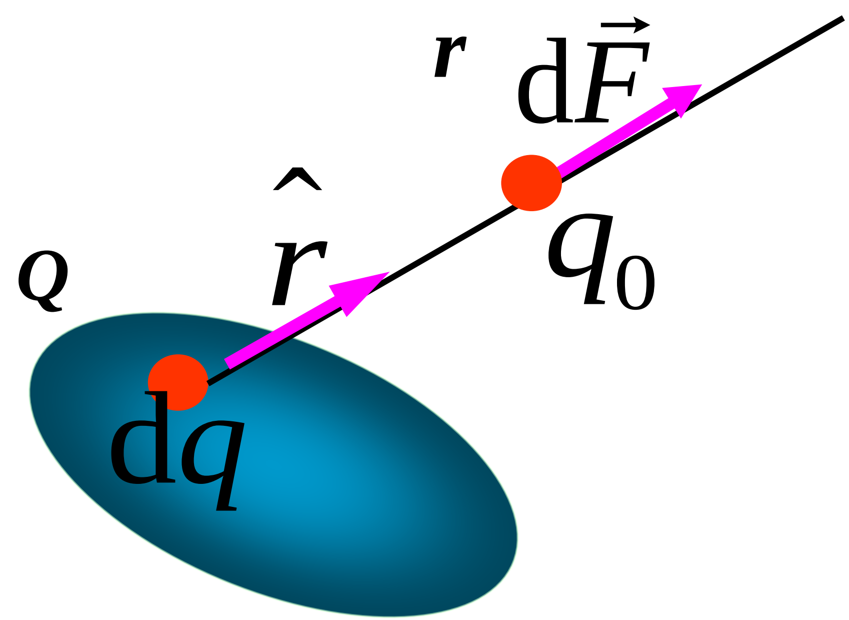
**n个电荷对 $q_0$ 电荷的作用力**




$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

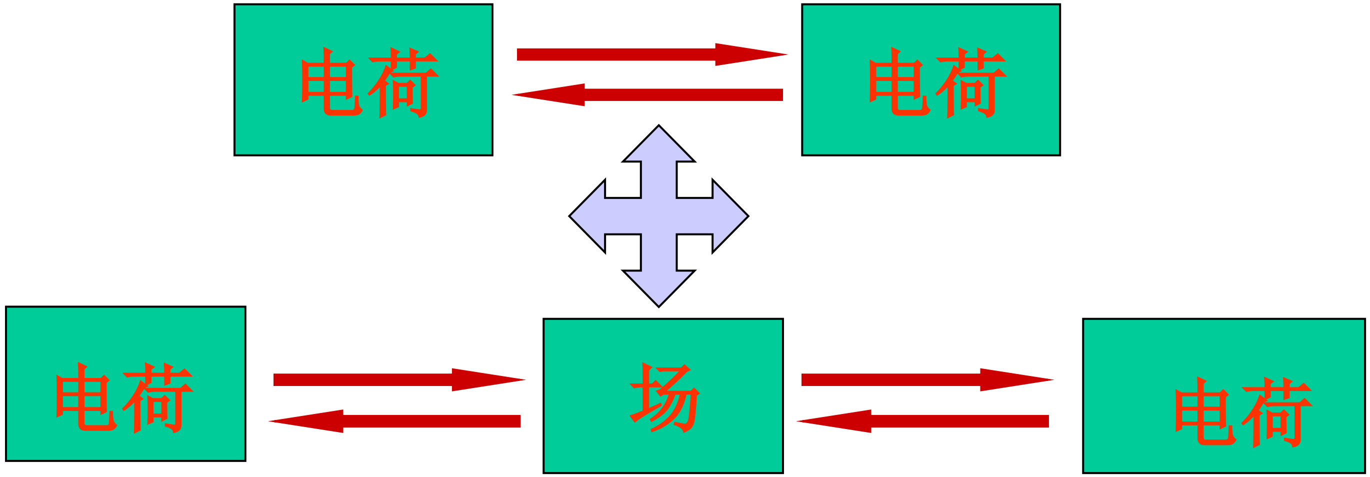
**对电荷连续分布的带电体**




$$d\vec{F} = \frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\vec{F} = \int_Q \frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

# 一.静电场　　§5.2 真空中的静电场 电场强度




**电场的特点:**

b. 电场对放其内的任何电荷都有作用力，称**电场力**

c、电场内的电荷移动时，电场力对其**做功**

研究范围：**静电场**

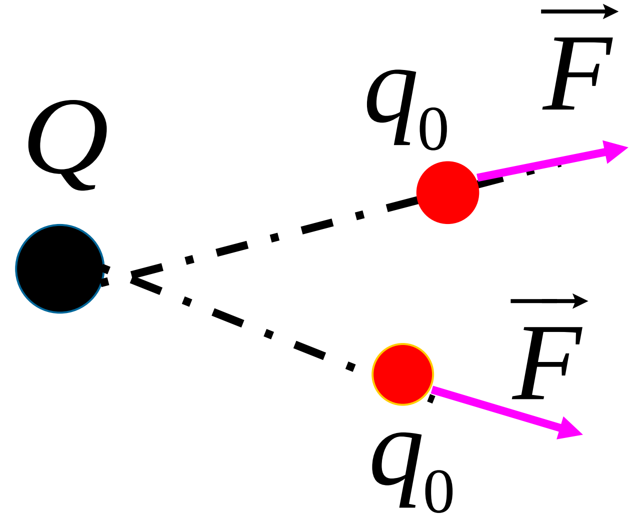
相对于观察者静止且电量不随时间变化的电荷产生的电场

## 二.电场强度 (electric field strength)

场源电荷$Q$—— 产生电场的电荷

检验电荷$q_0$ $\begin{cases} \text{带电量足够小} \\ \text{点电荷} \end{cases}$

试验表明: $\vec{F}/q_0$ 与场源电荷、位置有关;与试验电荷无关




**电场强度定义**

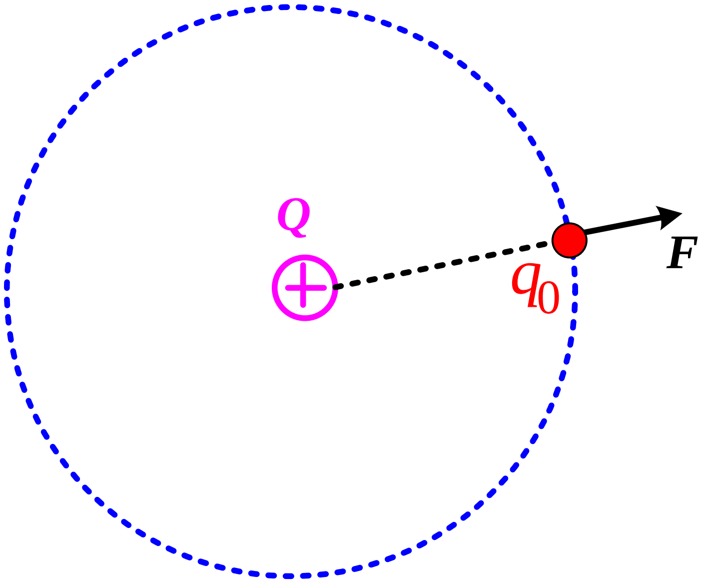
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}}$$

# 三.电场强度的计算

## 1.点电荷电场强度

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$

$$\boxed{\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 Q}{r^2}\hat{r}}$$




$$\boxed{\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}}$$

**注意:**

**a. 球对称**

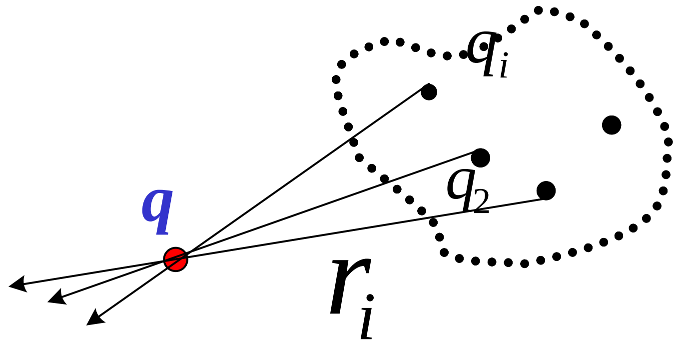
**b.从源电荷指向场点**

**c. 场强方向是正电荷受力方向**

**负电荷的电场?**

## 2.场强叠加原理

**带电体由 n 个点电荷组成**




由库仑力叠加原理 →

$$\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

由场强定义 →

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}{q}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\vec{F}_i}{q}$$

整理后得

$$\vec{E}=\sum_{i}\vec{E}_i=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{r}_i$$

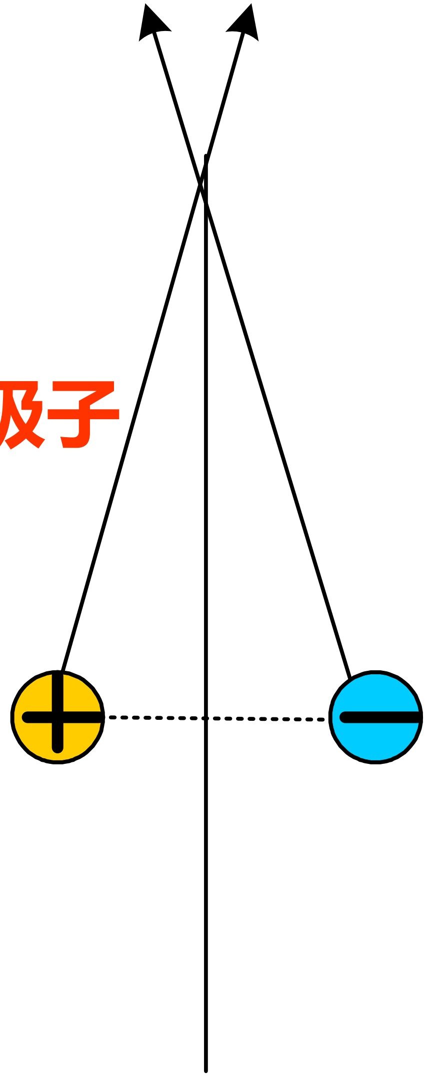
**电场中某点的场强等于每个电荷*单独*在该点产生的场强的矢量和。**

## 3.电偶极子

**相隔距离d的等量异号的点电荷，**

**若d比讨论的场点距离小的多，则称电偶极子**

$$\vec{P} = q\vec{d}$$ 电偶极矩



# 例1 电偶极子中垂线上任一点的电场强度

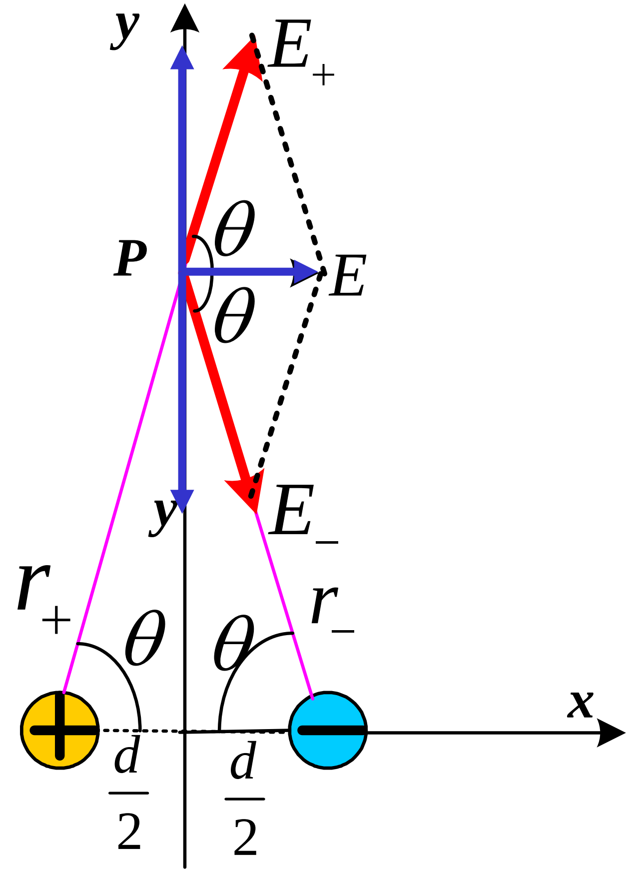
解: $\vec{E} = \vec{E}_{+} + \vec{E}_{-}$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+^2}\hat{r}_+ + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-^2}\hat{r}_-$$

$$E = E_+\cos\theta + E_-\cos\theta$$

$$= 2E_+\cos\theta$$

$$= 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y^2+(d/2)^2}\frac{(d/2)}{\sqrt{y^2+(d/2)^2}}$$



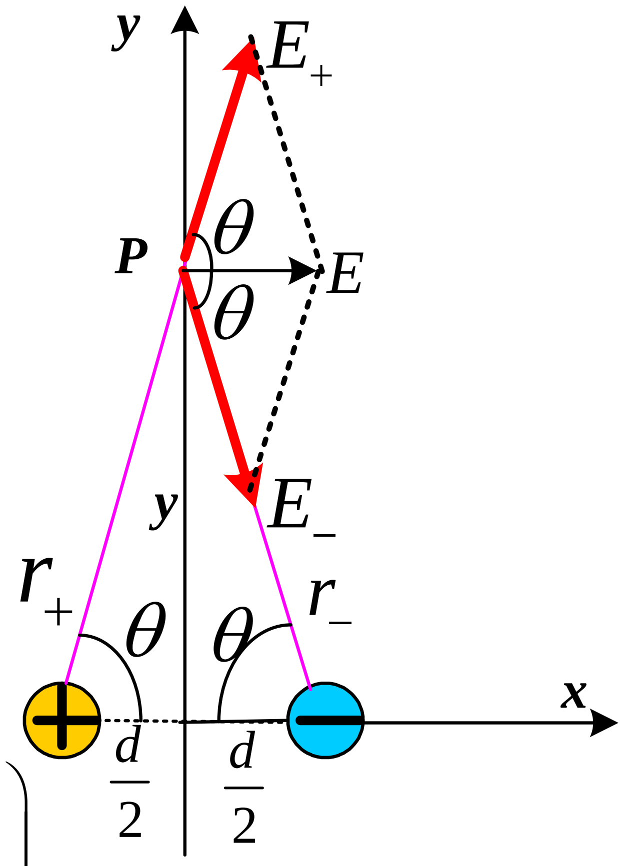
$$E = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y^2+(d/2)^2}\frac{(d/2)}{\sqrt{y^2+(d/2)^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{\left[y^2+(d/2)^2\right]^{3/2}}$$

$y >> d/2$

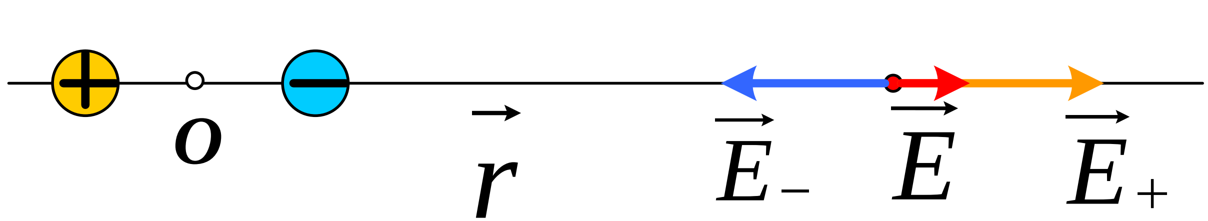
$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{y^3} \propto \frac{p}{y^3}}$$

$$\frac{1}{\left[\left(y^2+d/2\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{y^3}\left(1+\left(\frac{d}{2y}\right)^2\right)^{-3/2} \approx \frac{1}{y^2}\left(1-\frac{3}{2}\left(\frac{d}{2y}\right)^2\right)$$



# 例2 电偶极子延长线上任一点的电场强度

解：$\vec{E} = \vec{E}_{+} + \vec{E}_{-}$




$$E = E_{+} - E_{-}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\right] \xrightarrow{r \gg l} E = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{r^3}$$

$$\frac{1}{(r-d/2)^2} = \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{d}{2r}\right)^{-2} \approx \frac{1}{r^2}\left(1+\frac{d}{r}\right)$$

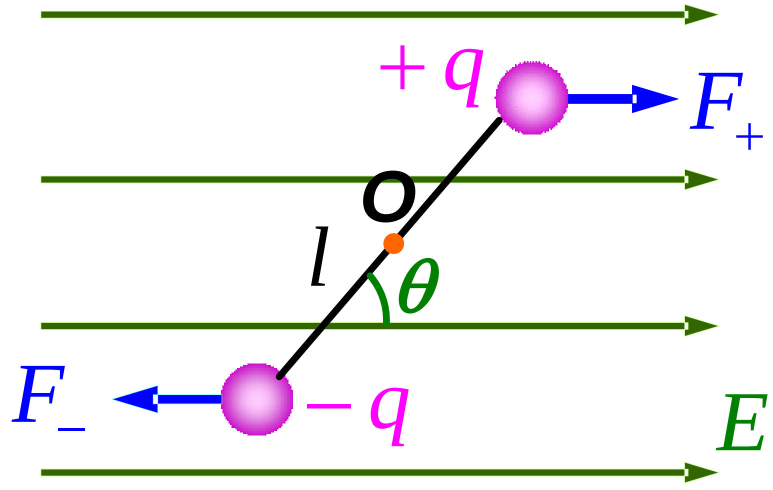
# 例3 电偶极子在均匀电场中所受的力矩

$$\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \overrightarrow{F} \qquad \vec{E} = \frac{\overrightarrow{F}}{q_o}$$

$$M = \frac{l}{2} F_+ \sin\theta + \frac{l}{2} F_- \sin\theta$$

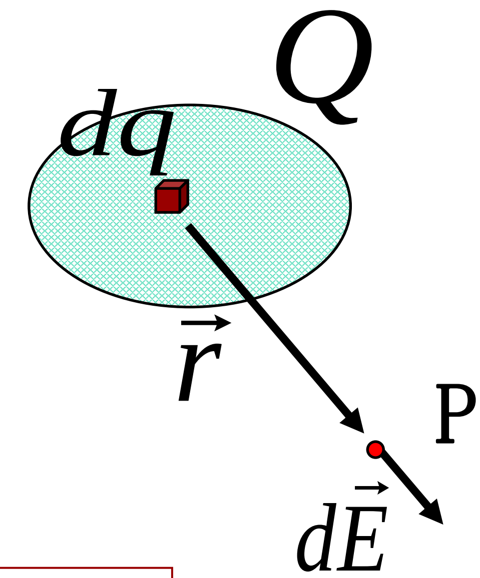
$$= qlE\sin\theta = pE\sin\theta$$

$$\boxed{\overrightarrow{M} = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}}$$



## 4.连续带电体的场强

**电荷元产生的场强** $d\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r^2}\hat{r}$



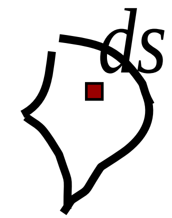

**由场强叠加定理**

$$\vec{E}=\int d\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

**微元的选择**

**电荷密度**

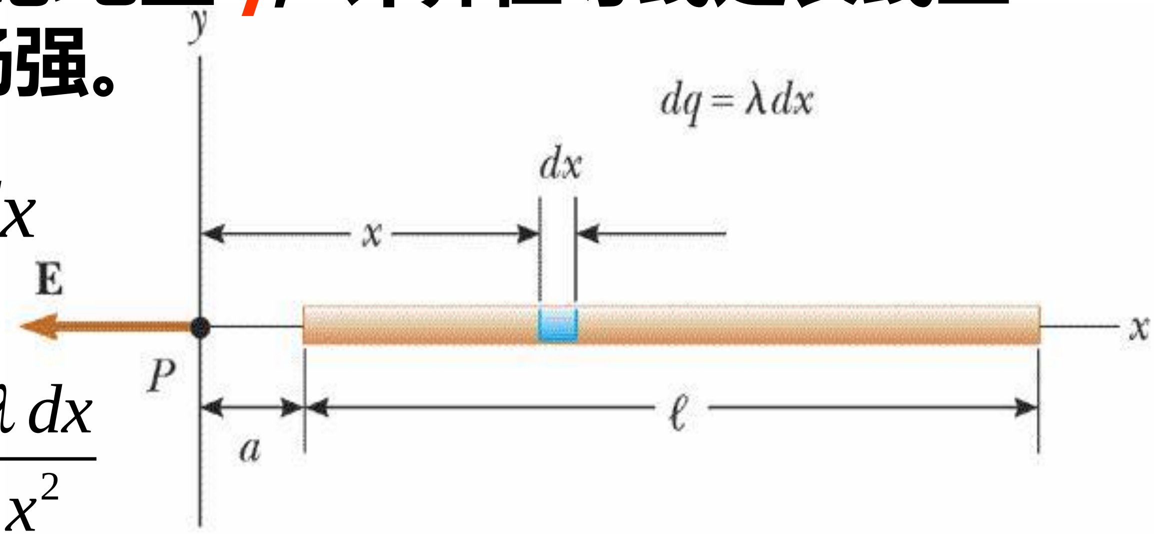
- a. 体电荷密度 $\rho=\dfrac{dq}{dV}$
- b. 面电荷密度 $\sigma=\dfrac{dq}{ds}$
- c. 线电荷密度 $\lambda=\dfrac{dq}{dl}$





**“对称性分析”**

例1 长度为$l$的导线，总电量$q$，计算在导线延长线上距离为$a$ 的P点处的场强。




解：电荷元带电量

$$dq = \lambda\, dx = \frac{Q}{l}\, dx$$

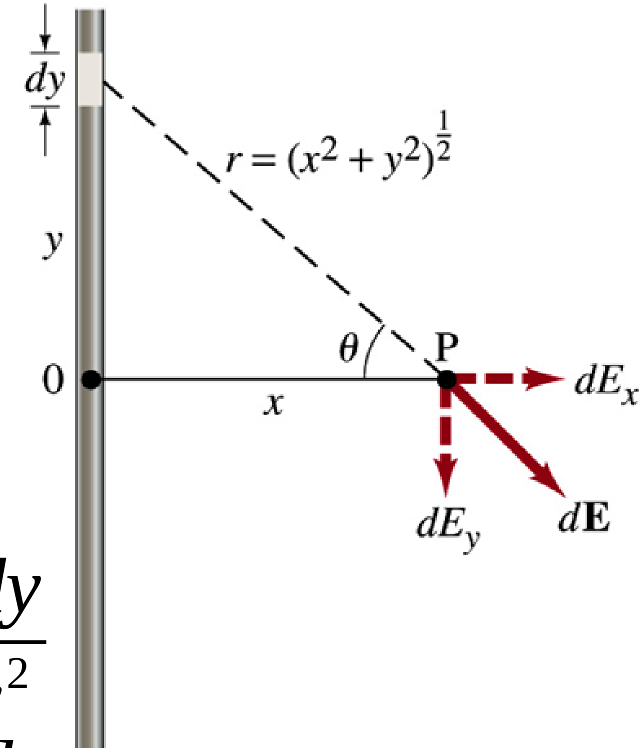
则电荷元在P点的场强

$$dE = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{x^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{x^2}$$

$$E = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{a+l}\frac{dx}{x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x}\right]_a^{a+l} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a(a+l)}$$

例2 长为*l*的直导线，带电均匀总电量*Q*，计算在其中垂线上P点处的场强。




解：电荷元带电量 $dQ=\lambda dy$

则电荷元在P点的场强

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{(x^2+y^2)}$$

$$dE_x=dE\cos\theta,\quad dE_y=dE\sin\theta$$

代入

$$E_x=\int dE\cos\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\cos\theta dy}{x^2+y^2}$$

$$E_y=\int dE\sin\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\sin\theta dy}{x^2+y^2}$$

由图知

$$y=x\tan\theta \qquad dy=x\,d\theta/\cos^2\theta$$

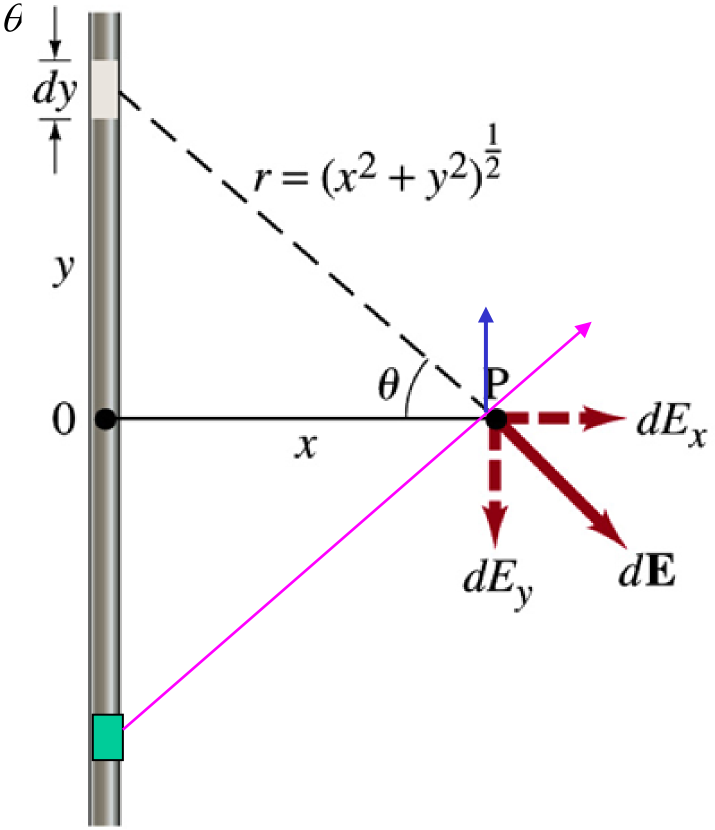
代入，得

$$(x^2+y^2)=x^2/\cos^2\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\sin\theta)\Big|_{-\theta_0}^{\theta_0} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(2\sin\theta_0)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(-\cos\theta)\Big|_{-\theta_0}^{\theta_0} = 0$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(2\sin\theta_0)$$



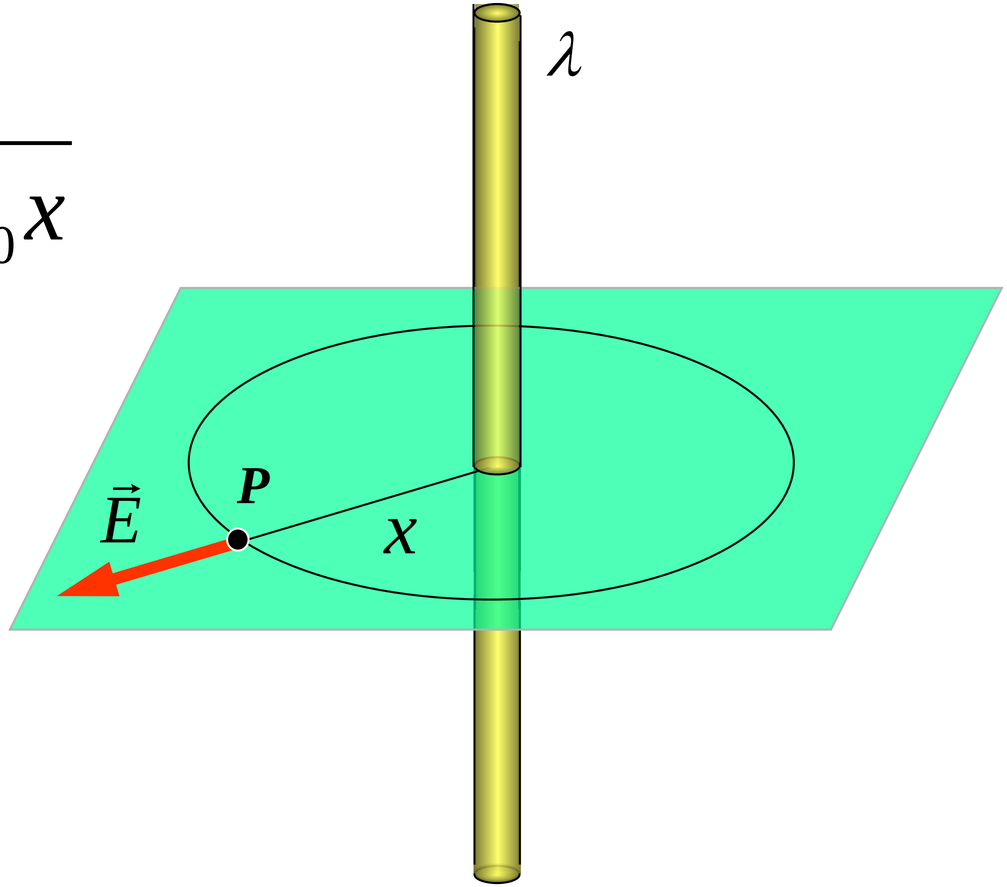

**若导线无限长**

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

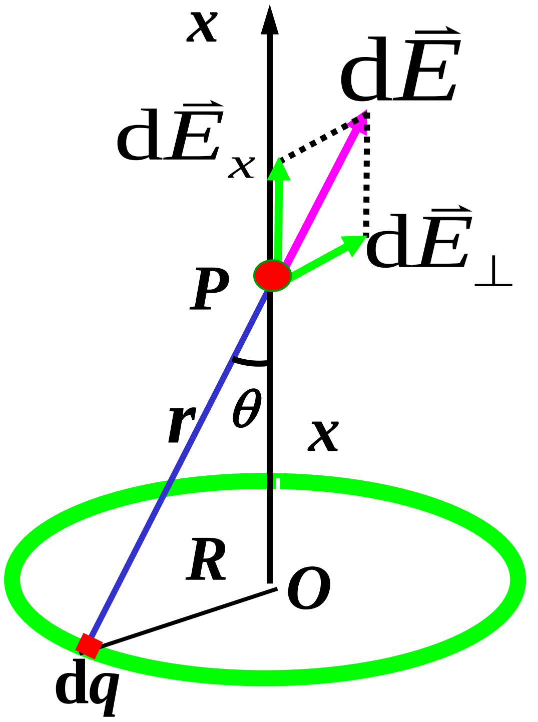
## “无限长” 均匀带电直线

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$



# 例3 均匀带电圆环轴线上的场强

解：在圆环上任取电荷元 $dq$




$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$dE_x = dE\cos\theta$ **由对称性分析知**

$dE_y = dE\sin\theta$ **沿y 轴的场强为0**

$$E = E_x = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

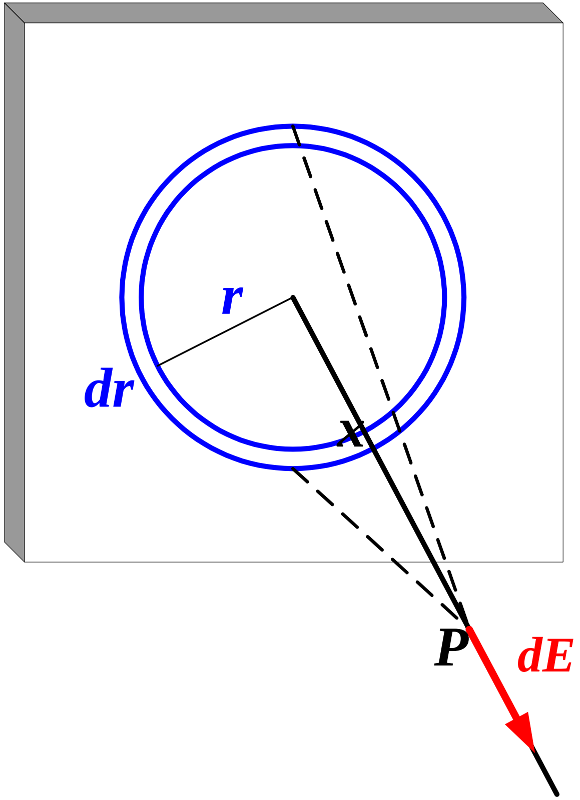
$$= \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int dq$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\boxed{E = \frac{xQ}{4\pi\,\varepsilon_0\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}}$$

若 $x \gg R$ $\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}}$ 点电荷

**例4 一无限大均匀带电平面，面密度σ，求与板垂直距离x处P点的场强。**




解：圆环的带电量 $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r\, dr$

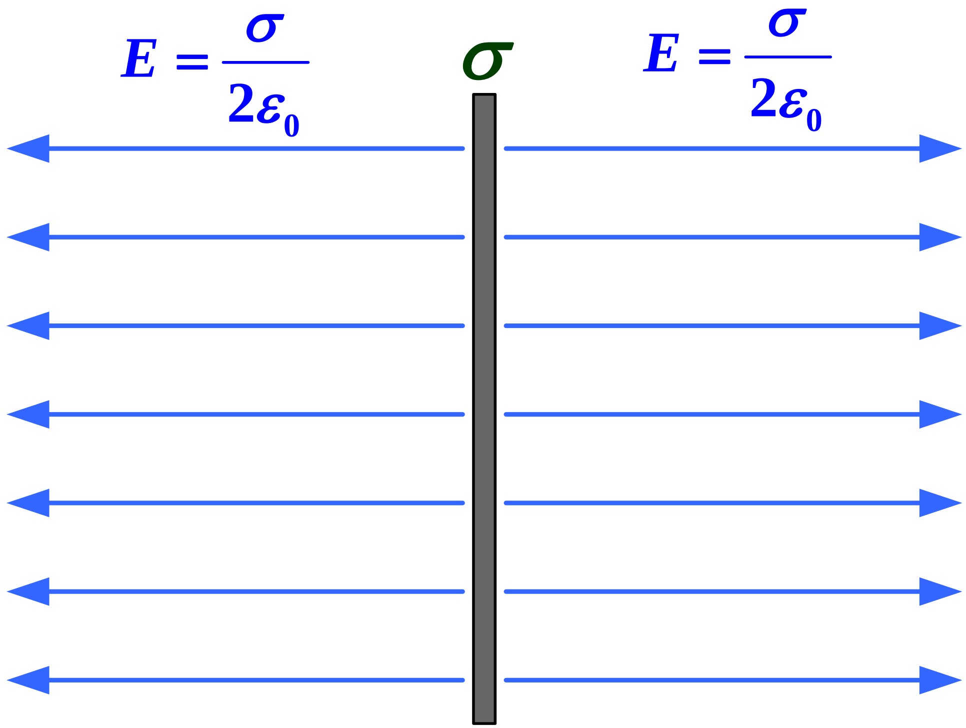
圆环在P点的场强 $dE = \dfrac{x}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2 + r^2\right)^{3/2}} dq$

$$E = \int_0^\infty \frac{\sigma x r dr}{2\varepsilon_0 \left(x^2 + r^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{x d\left(x^2 + r^2\right)}{\left(x^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left[-2\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}\right]_0^\infty = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

# “无限大” 均匀带电平面

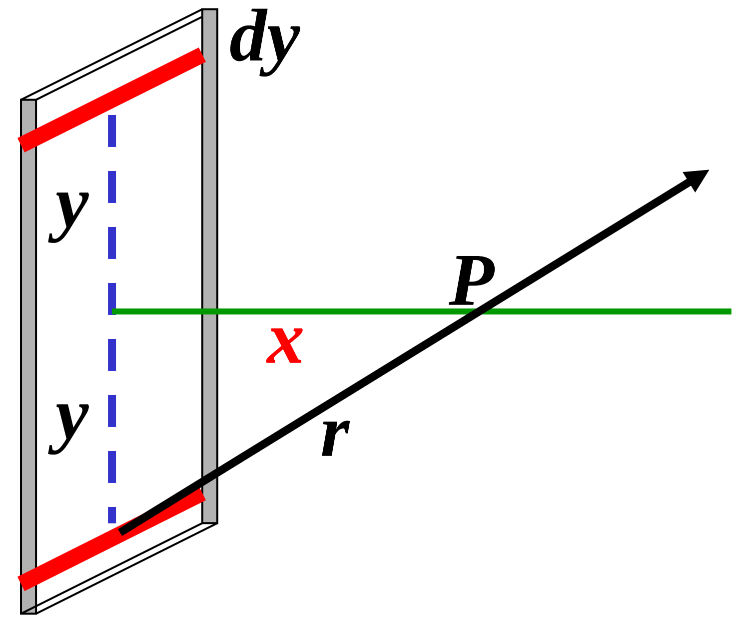
$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



解法二：长条的带电量

$$dq = \sigma\, dy\, dl = \lambda\, dl$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \sigma\, dy$$




$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

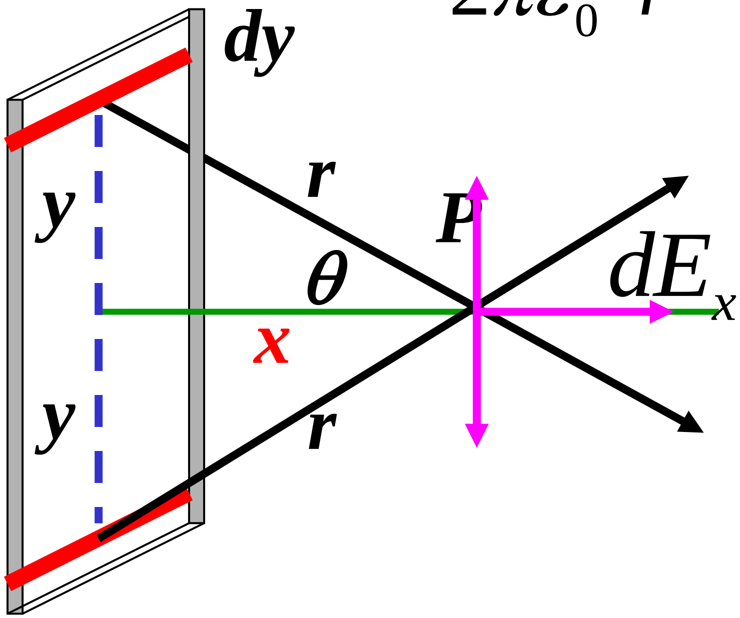
$$dq = \sigma\, dy\, dl = \lambda\, dl \quad \Rightarrow \quad \lambda = \sigma\, dy$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

$$dE = \frac{\sigma\, dy}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$y = x\tan\theta, \quad dy = x\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{x}$$




$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}d\theta$$

$$\boxed{E = E_x = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$