解答:

1. 已知 $f(x+y, x-y)=x^2-y^2+\varphi(x+y)$, 且 $f(x, 0)=x$, 求出 $f(x, y)$ 的表达式.

解: 令 $u=x+y, v=x-y$, 则 $f(u, v)=uv+\varphi(u)$,

$$f(x, y)=xy+\varphi(x),\quad f(x, 0)=\varphi(x)=x,$$

所以 $f(x, y)=x(y+1)$.

2. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_x(x,y), f_y(x,y)$，并讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的可微性.

解：当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$f_x(x,y)=y\dfrac{2x\left(x^2+y^2\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$，

$$f_y(x,y)=x^2\frac{\left(x^2+y^2\right)-y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^4-x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

当 $x^2+y^2=0$ 时

$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$；

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases},\quad f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}.$$

因为$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-\left[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y\right]}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta x^2\Delta y}{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\neq 0$

（事实上，此极限不存在），所以$f(x,y)$在点$(0,0)$不可微.

3.设 $z=f(x,xy,\frac{x}{y})$,f 有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2'+\frac{1}{y}f_3'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf_{12}''-\frac{x}{y^2}f_{13}''+f_2'+y\left(xf_{22}''-\frac{x}{y^2}f_{23}''\right)-\frac{1}{y^2}f_3'+\frac{1}{y}\left(xf_{32}''-\frac{x}{y^2}f_{33}''\right)$$

$$=f_2'-\frac{1}{y^2}f_3'+xf_{12}''-\frac{x}{y^2}f_{13}''+xyf_{22}''-\frac{x}{y^3}f_{33}''.$$

4.设 $F(\frac{z}{x},\frac{z}{y})=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$,其中 $F(u,v)$ 具有一阶连续偏导,证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.(用三种方法计算)

解法 1（公式法）令 $G(x,y,z)=F(\frac{z}{x},\frac{z}{y})$，则

$G_x=-\frac{z}{x^2}F_1'$， $G_y=-\frac{z}{y^2}F_2'$， $G_z=\frac{1}{x}F_1'+\frac{1}{y}F_2'$， 由隐函数求导公式，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x}{G_z}=\frac{\frac{z}{x^2}F_1'}{\frac{1}{x}F_1'+\frac{1}{y}F_2'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y}{G_z}=\frac{\frac{z}{y^2}F_2'}{\frac{1}{x}F_1'+\frac{1}{y}F_2'},$$

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

解法 2（直接求导法）对方程 $F(\frac{z}{x},\frac{z}{y})=0$ 两边分别关于 x,y 求导：

$$F_1'\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}+F_1'\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{y}=0,\quad F_1'\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{x^2}+F_1'\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2}=0$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{z}{x^2}F_1'}{\frac{1}{x}F_1'+\frac{1}{y}F_2'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{z}{y^2}F_2'}{\frac{1}{x}F_1'+\frac{1}{y}F_2'},$$

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

解法 3（取全微分法） 对方程 $F(\frac{z}{x},\frac{z}{y})=0$ 两边取全微分得

$$F_1'd\left(\frac{z}{x}\right)+F_2'd\left(\frac{z}{y}\right)=0 \Rightarrow F_1'\frac{xdz-zdx}{x^2}+F_2'\frac{ydz-zdy}{y^2}=0$$

$$dz=\frac{\frac{z}{x^2}F_1'}{\frac{1}{x}F_1'+\frac{1}{y}F_2'}dx+\frac{\frac{z}{y^2}F_2'}{\frac{1}{x}F_1'+\frac{1}{y}F_2'}dy$$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{z}{x^2}F_1'}{\frac{1}{x}F_1'+\frac{1}{y}F_2'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{z}{y^2}F_2'}{\frac{1}{x}F_1'+\frac{1}{y}F_2'}$，

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

5. 求函数$u=x^2yz^2$在$(1,-1,-1)$处沿曲面$x^2+2y^2+2z^2=5$在该点的法向量$\vec{n}$(方向朝上)的方向导数.

解：令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+2z^2-5$， 则$F_x=2x,\ F_y=4y,\ F_z=4z$，

曲面$x^2+2y^2+2z^2=5$在点$(1,-1,-1)$的法向量(方向朝上)

$\vec{n}=\{-2,4,4\}$， 其单位向量$e_n=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，方向余弦

$$\cos\alpha=-\frac{1}{3},\cos\beta=\frac{2}{3},\cos\gamma=\frac{2}{3};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,-1,-1)}=\left.2xyz^2\right|_{(1,-1,-1)}=-2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,-1,-1)}=\left.x^2z^2\right|_{(1,-1,-1)}=1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,-1,-1)}=\left.2x^2yz\right|_{(1,-1,-1)}=2,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{(1,-1,-1)}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,-1,-1)}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,-1,-1)}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,-1,-1)}\cos\gamma=-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}.$$

6. 求函数$z=3x^2y-y^2$在点$P(2,3)$沿曲线$y=x^2-1$朝x增大切方向的方向导数.

解：曲线$y=x^2-1$上在点$P(2,3)$处朝x增大切方向

$\vec{l}=(1,2x)\big|_{(2,3)}=(1,4)$，其单位切向量$e_l=\dfrac{1}{\sqrt{17}}(1,4)$，方向余弦

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{17}},\cos\beta=\dfrac{4}{\sqrt{17}}$

$$\frac{\partial z}{\partial l}\bigg|_P=\left[6xy\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+(3x^2-2y)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\right]\bigg|_{(2,3)}=\frac{60}{\sqrt{17}}.$$

7. 设函数 $f(x,y)=1+xy-x-y$, D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=4$ 所围的有界闭区域, 求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值与最小值.

解：$\begin{cases} f_x=y-1=0 \\ f_y=x-1=0 \end{cases}$ 在 D 内有驻点 $(1,1)$, $f(1,1)=0$.

$\varphi(x)=f(x,x^2)=1-x-x^2+x^3,(-2\le x\le 2)$ $\varphi'(x)=-1-2x+3x^2=(3x+1)(x-1)$

$\varphi(-\frac{1}{3})=\frac{32}{27}$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(-2)=-9$, $\varphi(2)=3$,

$f(x,y)$ 在 $y=x^2(-2\le x\le 2)$ 上最小值-9, 最大值 3;

$f(x,4)=3x-3(-2\le x\le 2)$ 最小值-9, 最大值 3,

$f(x,y)$ 在 D 上的最大值 3，最小值-9.

8. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 之间的最短距离

解：旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 上任一点 (x,y,z) 到平面 $x+y-2z=2$ 的距离

$$d=\frac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{6}},$$

要求 d 的最小值.作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda)=(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$$

$$\text{令}\begin{cases} L_x=2(x+y-2z-2)-2\lambda x=0 \\ L_y=2(x+y-2z-2)-2\lambda y=0 \\ L_z=-4(x+y-2z-2)+\lambda=0 \\ L_\lambda=z-x^2-y^2=0 \end{cases}$$

解得 $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{8}$, $\quad d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right|=\frac{7}{4\sqrt{6}}$.

解法 2.先求旋转抛物面$z=x^2+y^2$上的一点(x_0,y_0,z_0)，使得在(x_0,y_0,z_0)处的切平面与平面$x+y-2z=2$平行，旋转抛物面$z=x^2+y^2$上点(x_0,y_0,z_0)处法向量$\vec{n}=(2x_0,2y_0,-1)//(1,1,-2)$. 于是$\frac{2x_0}{1}=\frac{2y_0}{1}=\frac{-1}{-2}$，可得$(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$；

所求最短距离该点到平面$x+y-2z=2$的距离

$$d=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right|=\frac{7}{4\sqrt{6}}.$$

9.在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使得函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿方向 $\vec{l}=(1,-1,0)$ 的方向导数最大.

解法 1：$e_l=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$，$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{2}(x-y)$，要求在 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上的点使 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{2}(x-y)$ 最大.

作 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda)=x-y+\lambda\left(2x^2+2y^2+z^2-1\right)$,

令 $\begin{cases} L_x=1+4\lambda x=0 \\ L_y=-1+4\lambda y=0 \\ L_z=2\lambda z=0 \\ L_\lambda=2x^2+2y^2+z^2-1=0 \end{cases}$ 解得可能极值点 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)}=\sqrt{2},\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)}=-\sqrt{2},$ 所求点为 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$.

解法 2. 依题意，要在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点 (x,y,z)，使得 $grad f(x,y,z)=(2x,2y,2z)$ 与 $\vec{l}=(1,-1,0)$ 同向，从而 $x=-y$，$z=0$，代入 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 解得所求点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$（舍去）．

10. 已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$ ，曲线 C： $x^2+xy+y^2=3$ ，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

解：$gradf(x,y)=\{1+y,1+x\}$，$f(x,y)$ 最大方向导数为 $\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$，其中 x,y 满足 $x^2+xy+y^2=3$，即求函数 $z=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$ 在条件 $x^2+xy+y^2-3=0$ 下的最大值。

作拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+xy+y^2-3)$$

令$\begin{cases} L_x = 2(x+1) + \lambda(2x+y) = 0 \\ L_y = 2(y+1) + \lambda(x+2y) = 0 \\ L_\lambda = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$，前两个方程相减得$(x-y)(\lambda+2)=0$，当$x=y$时，解得可能极值点$(1,1),(-1,-1)$；当$\lambda=-2$时，解得可能极值点$(2,-1)$，$(-1,2)$；

$z(1,1)=2,\ z(-1,-1)=0,\ z(2,-1)=z(-1,2)=3$，所以$f(x,y)$在 C 上最大方向导数为 3.