2017-2018 学年第二学期

《高等数学》A（下）期末考试试题

考试注意事项：学生必须将答题内容做在答题纸上，做在试题纸上均无效

一. 填空题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{n^p}$ 收敛，则 p 的取值范围是____________.

2. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径是 3，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间是_______________.

3. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 是可导函数，且 $\varphi'\neq -1$，则 $dz=$________________.

4. 曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $M_0(1,1,-2)$ 处的法平面方程为__________.

5. 设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，满足 $f(1,2)=1, f_x'(1,2)=2, f_y'(1,2)=3$，$\varphi(x)=f(x,2f(x,2x))$，则 $\varphi'(1)=$______________.

6. 设 D 是由 $y=x, x=0, y=1$ 所围区域，则 $\iint_D \arctan y\,dxdy=$_________.

7. 设 $f(x,y,z)=x^3+y^3+xye^z$，则 $\mathbf{div}(\mathbf{grad}f)|_{(1,1,1)}=$____________.

8. 设曲线积分 $\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关，若是 φ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$，则 $\varphi(x)=$________________.

9. 设 $S: x^2+y^2+y^2=R^2 (R>0)$，则 $\iint_S (x+2y-z)^2dS=$____________.

10. 设 S 表示半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧，则曲面积分 $I=\iint\limits_S(1-xy-z)dxdy=$______________.

二（8 分）. 设 $z=f(x+y,xy)+y\varphi(xy)$，其中 f,φ 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

三（8 分）. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D|y-x^2|dxdy$, 其中积分区域 D 为正方形 $-1\le x\le 1, 0\le y\le 2$.

四（8 分）. 试求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{9^n}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

五（8 分）. 计算曲线积分 $I=\oint\limits_L\dfrac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$, 其中(1) L 为圆周 $x^2+y^2-2y=0$ 的正向; (2) L 为椭圆 $4x^2+y^2-8x=0$ 的正向.

六（8 分）. 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上取 $A(1,0,0), B(0,1,0), C\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, 圆弧 $\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CA}$ 围成的位于第一卦限内的球面块记为 S，计算 $I=\iint\limits_S(x^2+z^2)dS$.

七（10 分）在半径为 R 的上半球 $x^2+y^2+z^2\le R^2 (0\le z\le R)$ 内嵌入有最大体积的母线平行于 z 轴的圆柱，求这圆柱的半径和高.

八（10 分）. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S\dfrac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 S 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的下侧，$a>0$ 为常数.