第十一章 波动光学

第二部分:衍射

§11.5 光的衍射

§11.6 单缝衍射

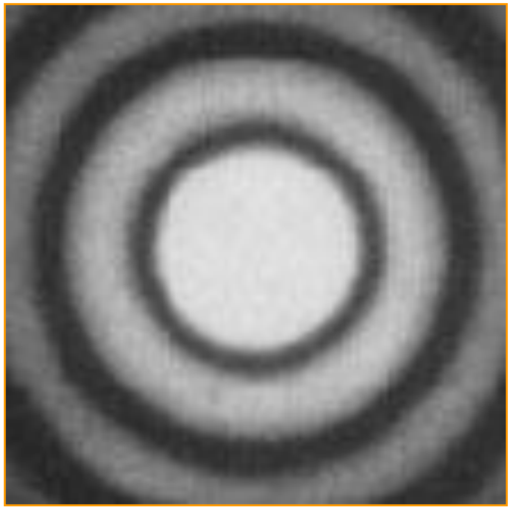
§11.7 圆孔衍射 光学仪器的分辨本领

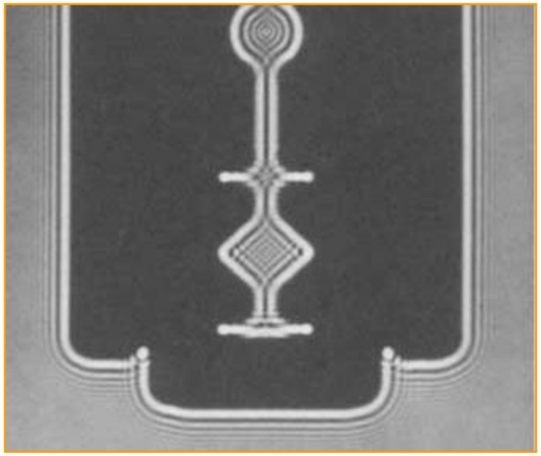
§11.8 光栅衍射

§11-5 光的衍射

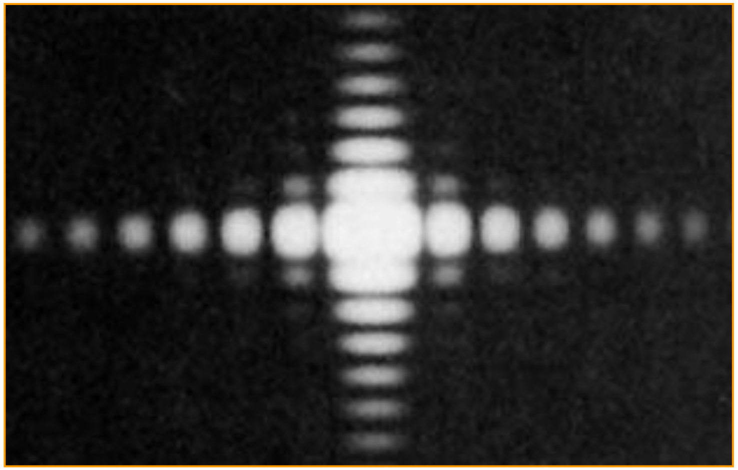
一、衍射现象

(圆孔衍射)

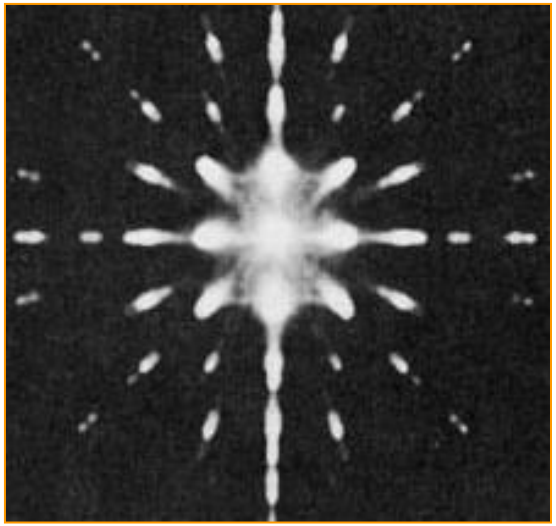




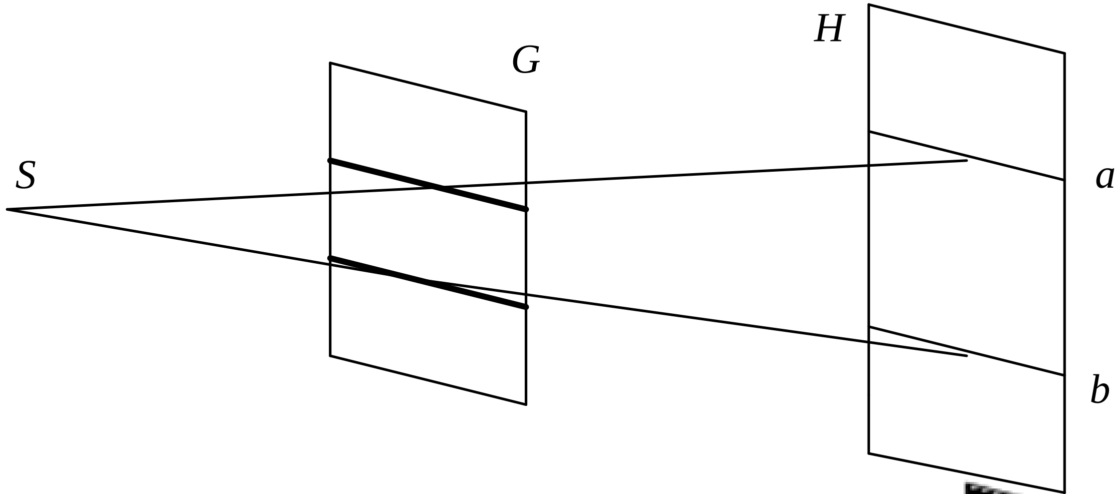
(剃须刀边缘衍射)



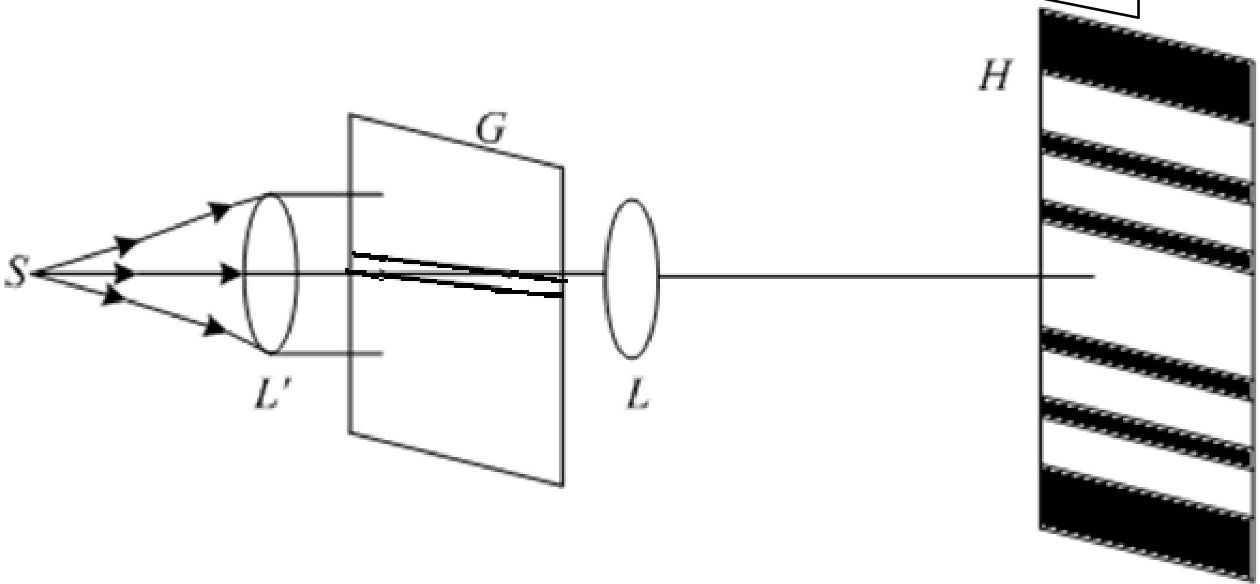
(矩孔衍射)



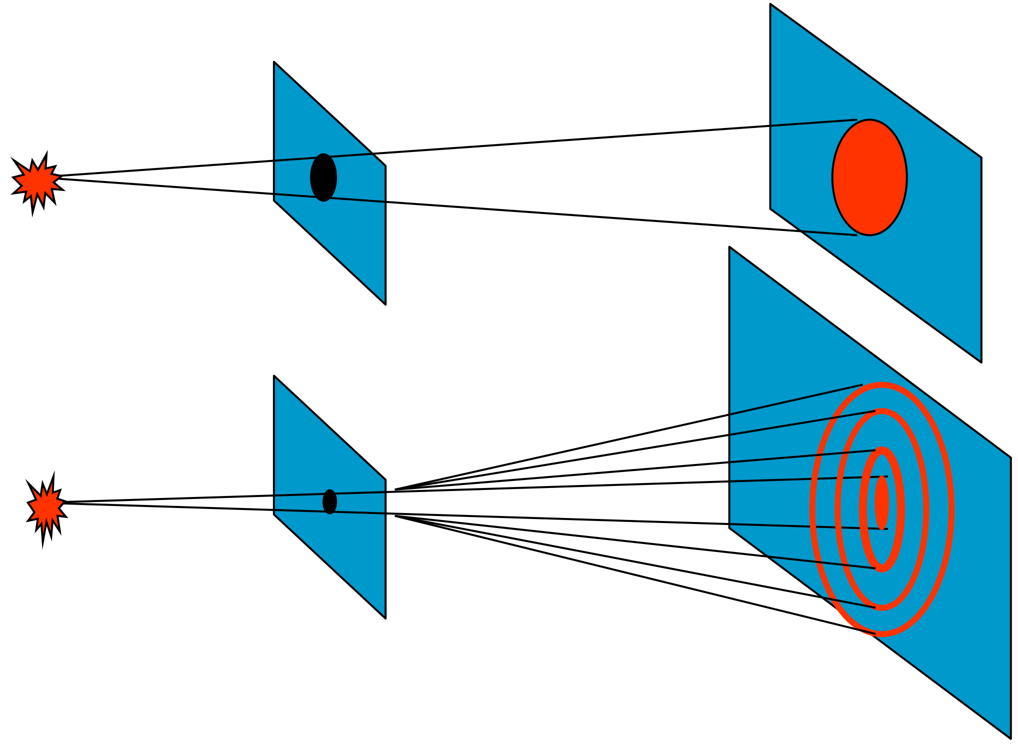
(矩形网络衍射)



S
G
H
a
b



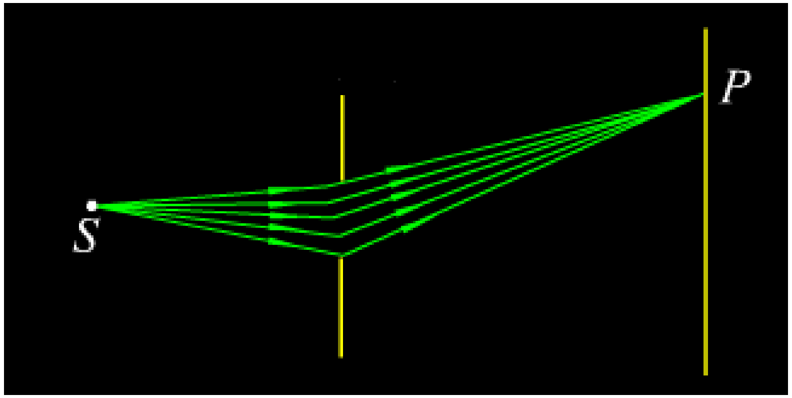
S
L′
G
L
H



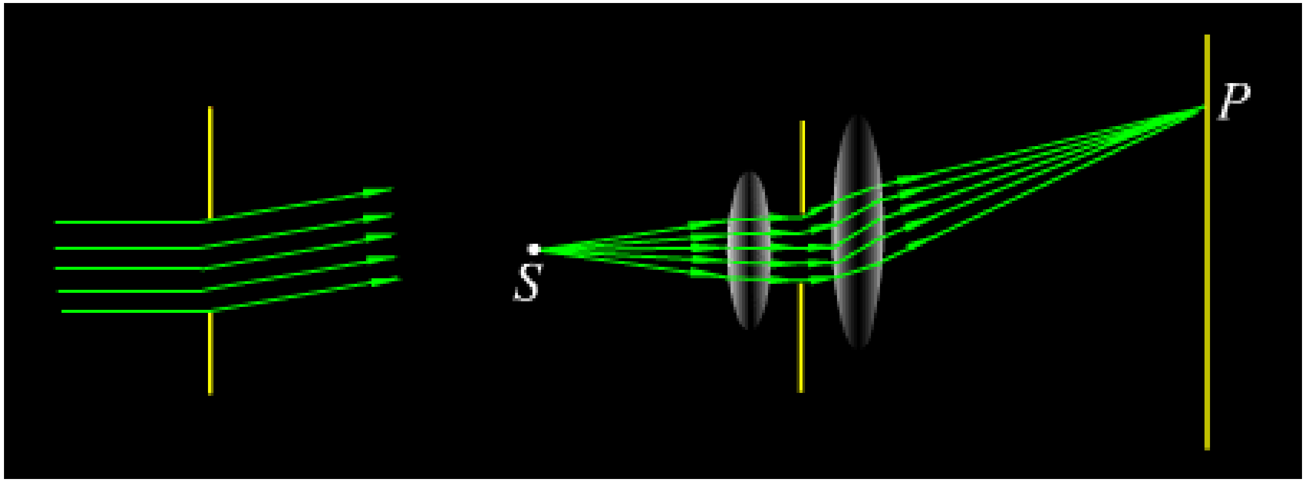
衍射

光在传播过程中，在障碍物受限方向上，光强重新分布形成明暗条纹的现象.

二、衍射的分类



近场衍射，也叫菲涅耳衍射

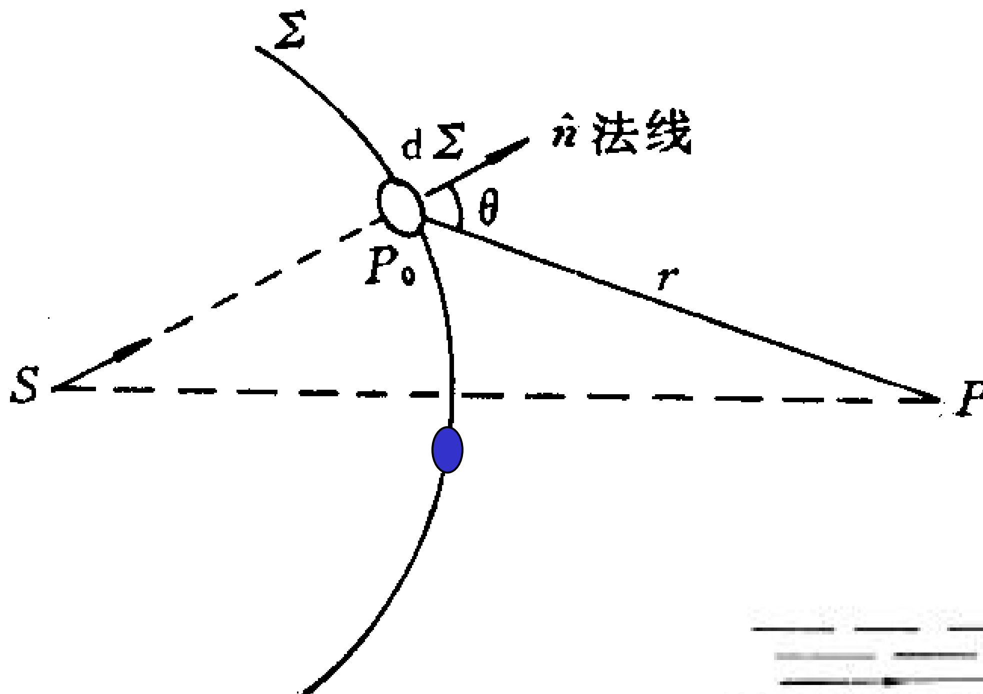


远场衍射，也叫夫琅和费衍射

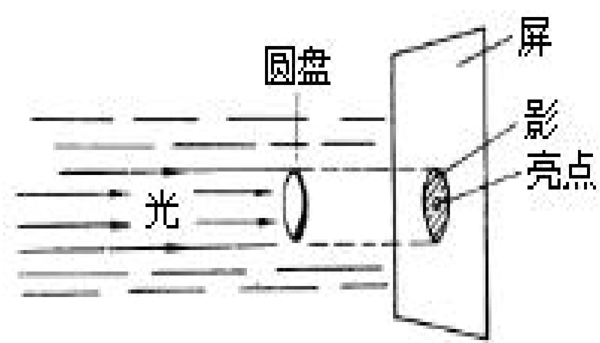
三、 惠更斯—菲涅耳原理

1、内容

波面上的的任何一点都是子波的波源，
各子波在空间某点的相干叠加，就决定了该点波的强度。

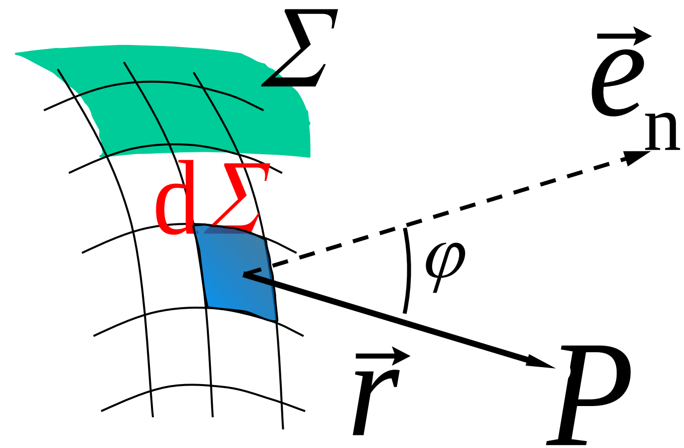


1819 年物理学征文奖



2、菲涅耳衍射积分公式

设初相为零，面积为∑的波面，其上面元d∑在*P*点引起的振动为

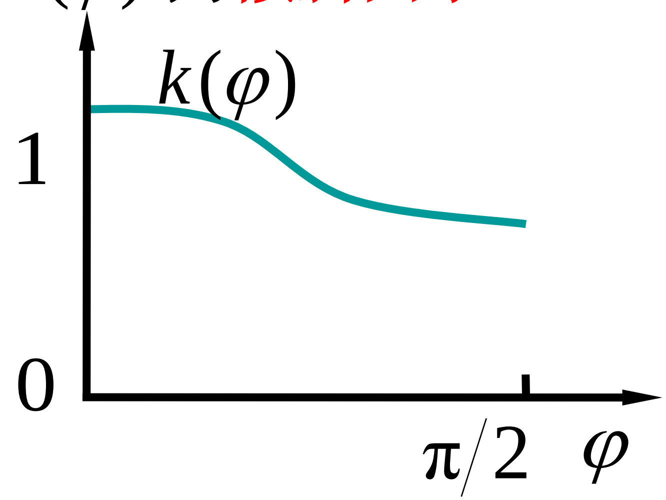


$$\mathrm{d}E \propto k(\varphi) \cdot \frac{\mathrm{d}\Sigma}{r} \cos(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})$$

$$\mathrm{d}E = F \cdot k(\varphi) \frac{\mathrm{d}\Sigma}{r} \cos(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})$$

F **取决于波面上d∑处的波强度，** $k(\varphi)$ 为倾斜因子.

$$\begin{cases} \varphi = 0, k = k_{\max} = 1 \\ \varphi \uparrow \Rightarrow k(\varphi) \downarrow \\ \varphi \geq \frac{\pi}{2}, \quad k = 0 \end{cases}$$



t某时刻，P点处的合振动就等于波面$\sum$上所有$\mathrm{d}\sum$发出的次波在P点引起光振动的叠加，即

$$E(P)=\int_{\Sigma} Fk(\varphi)\frac{\cos(\omega t-\frac{2\pi r}{\lambda})}{r}\mathrm{d}\Sigma$$

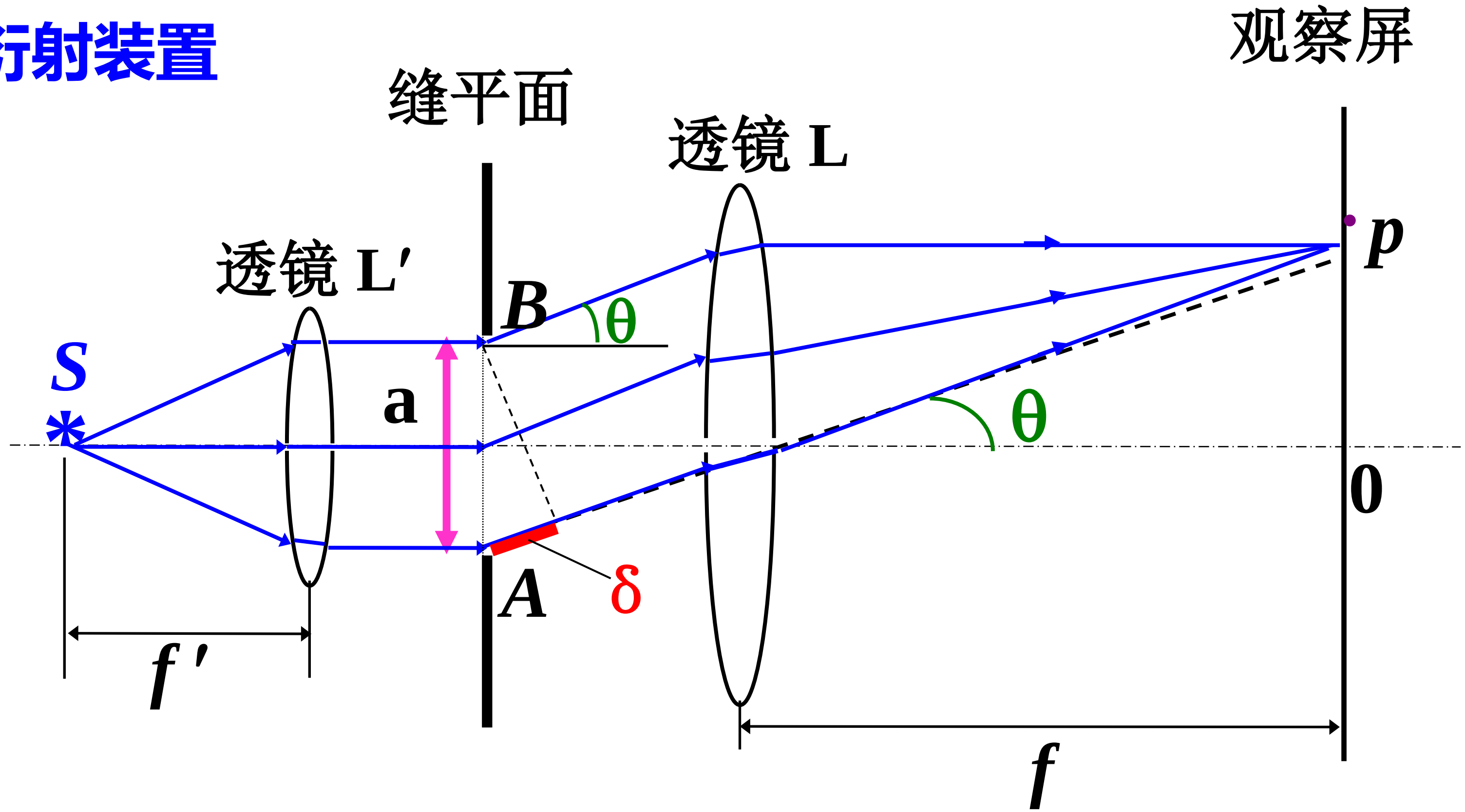
- 说明

(1)对于一般衍射问题，用积分计算相当复杂，实际中常用半波带法和振幅矢量法分析.

(2)惠更斯—菲涅耳原理在惠更斯原理的基础上给出了次波源在传播过程中的振幅变化及位相关系.

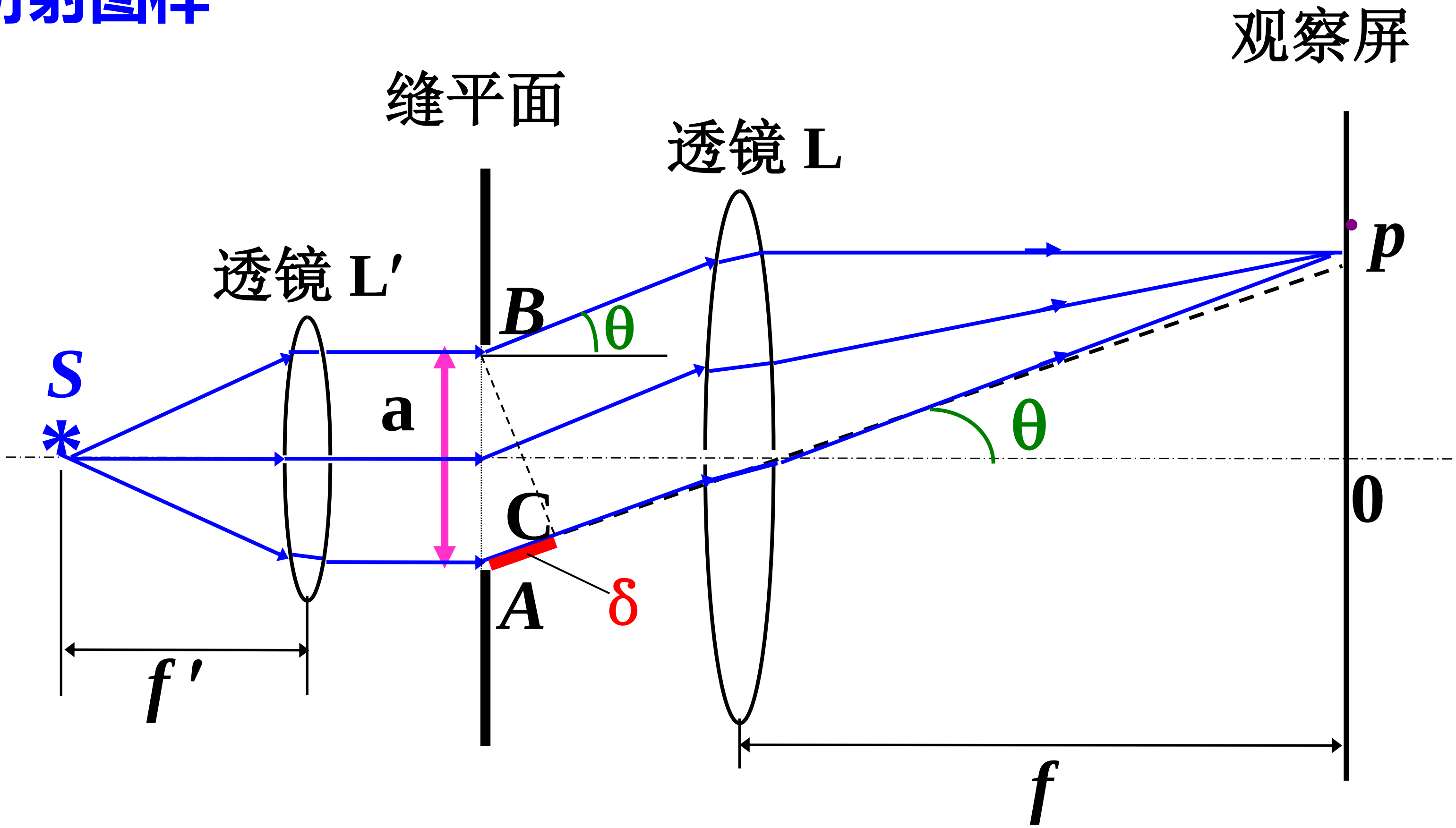
§11-6 单缝的夫琅禾费衍射

一、衍射装置

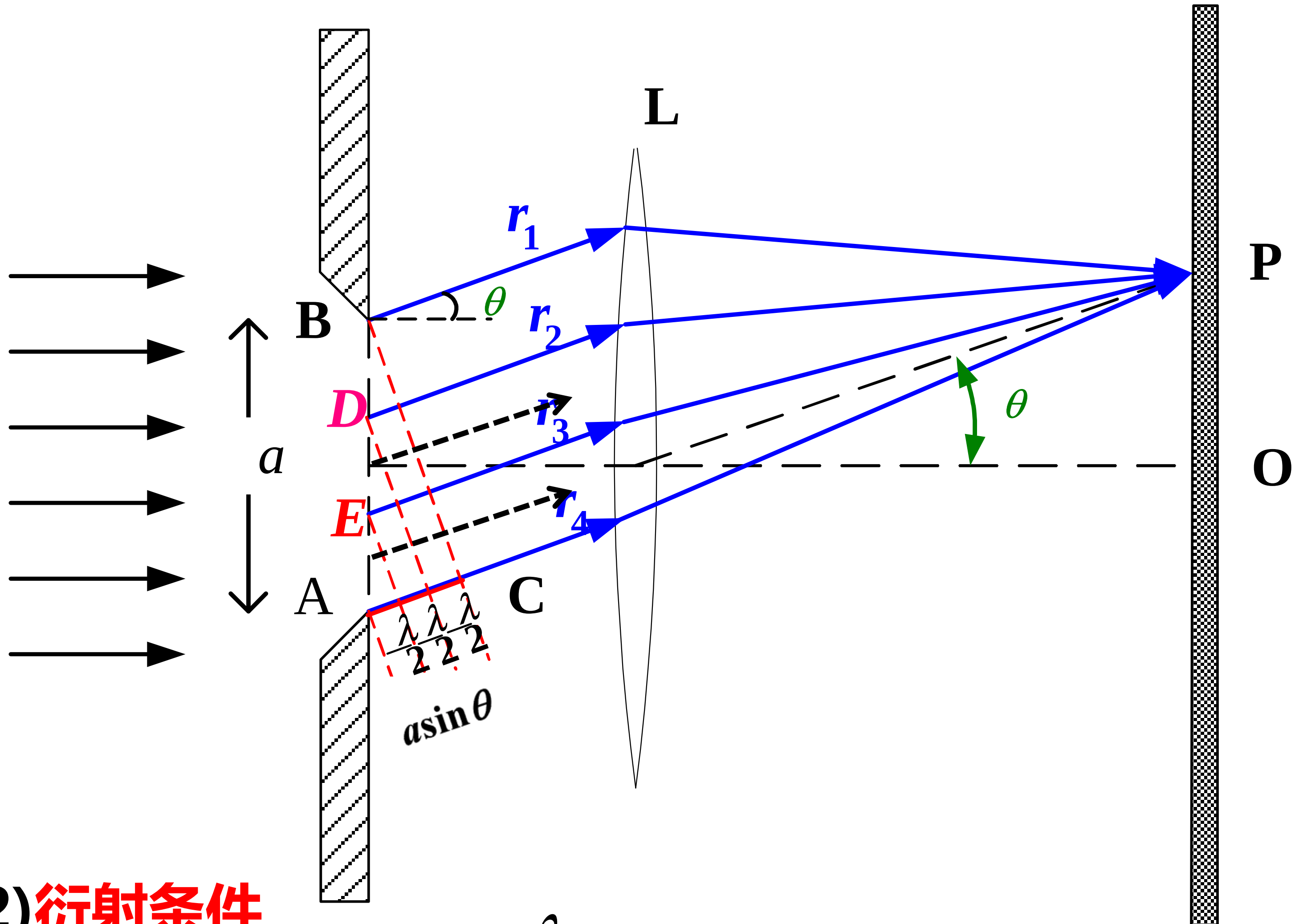


S: 单色光源　　θ: 衍射角　　$\overline{AB} = a$(缝宽)

二、半波带法
分析衍射图样



(1)$A \rightarrow P$和$B \rightarrow P$的光程差(最大光程差) $\delta = a\sin\theta$



中央明纹

$$\theta = 0,$$

$$\delta = 0$$

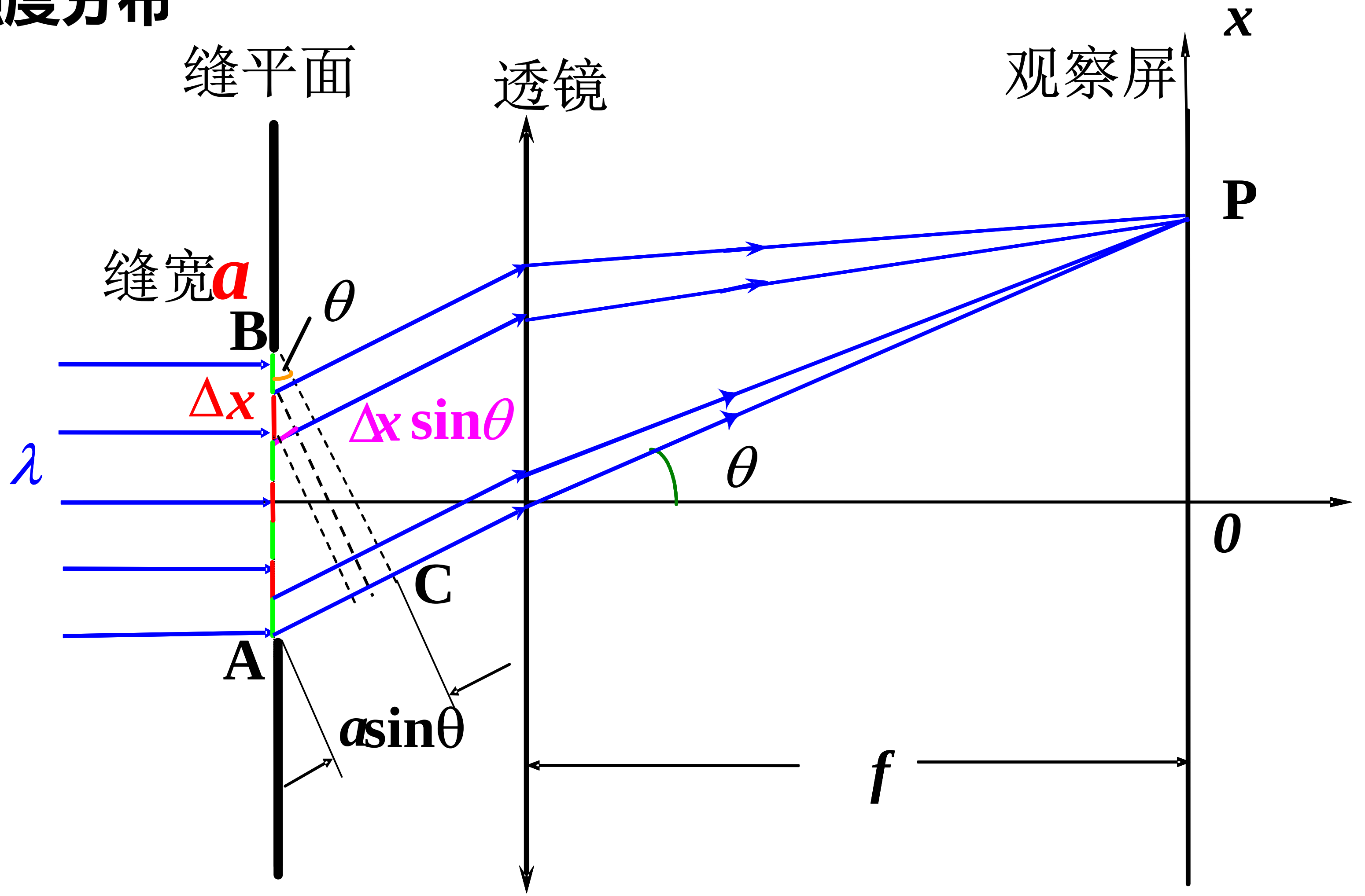
(2)**衍射条件**

$$a\sin\theta = \pm 2k\frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$ **暗纹**

$$a\sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$ **明纹**

三、振幅矢量法求光强

1、强度分布



振幅矢量法

将AB分成N条等宽度的条带，则每个条带的宽度为

$$\Delta x = \frac{a}{N}$$

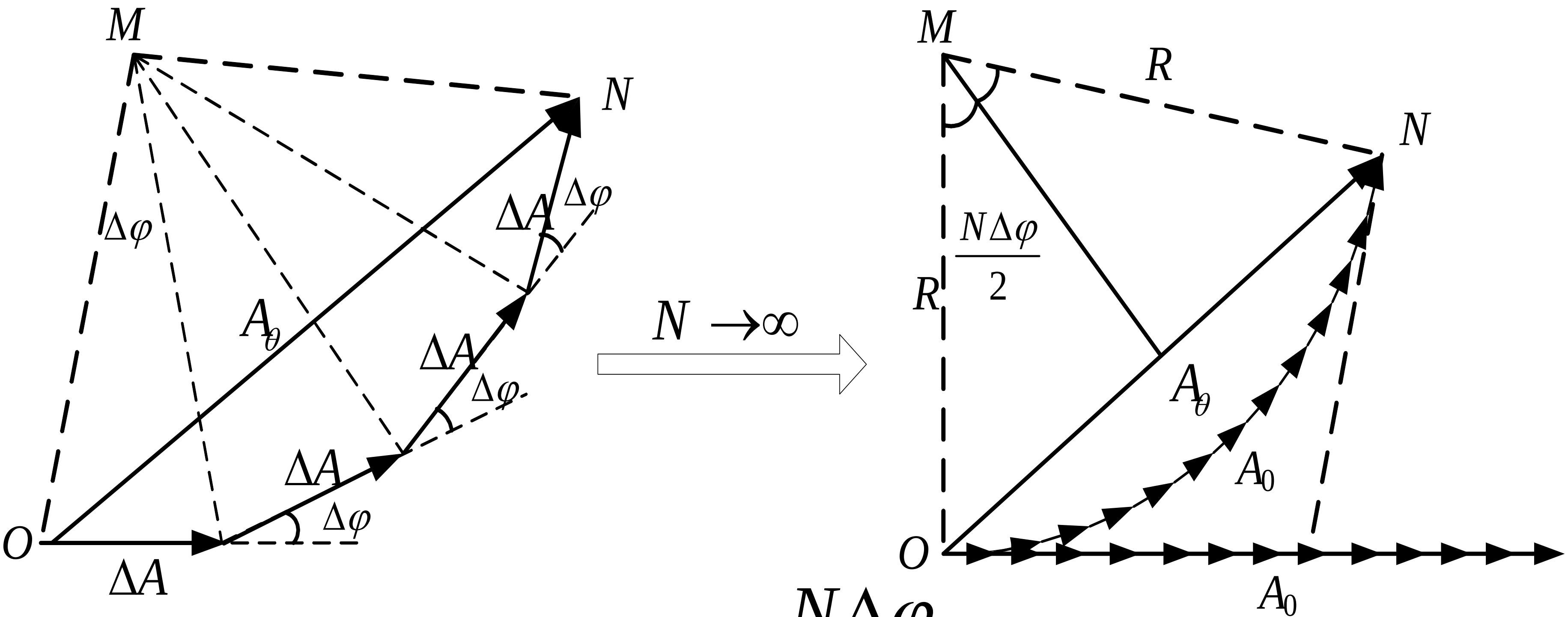
每一条带到P点的振幅近似相等，设为ΔA，则相邻两条带到P点的光程差为

$$\delta = \Delta x \sin\theta = \frac{a\sin\theta}{N}$$

相应的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{a\sin\theta}{N}$$

则P点的合振幅为N个长度均为ΔA，相位差依次差Δφ的矢量的和A_θ



则P点的合振幅 $A_\theta = 2R\sin\dfrac{N\Delta\varphi}{2} = 2R\sin\alpha$

当Δφ=0时，合振幅为 $A_0 = N\Delta A = N\Delta\varphi \bullet R = 2R\alpha$

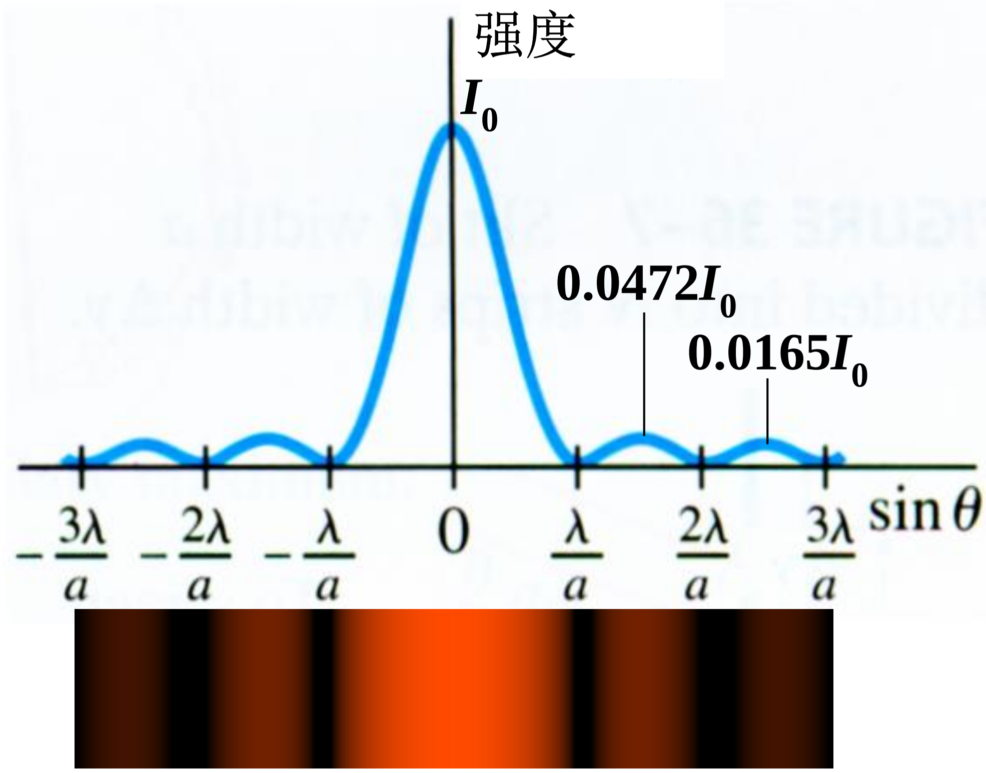
则

$$\frac{A_\theta}{A_0} = \frac{2R\sin\alpha}{2R\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

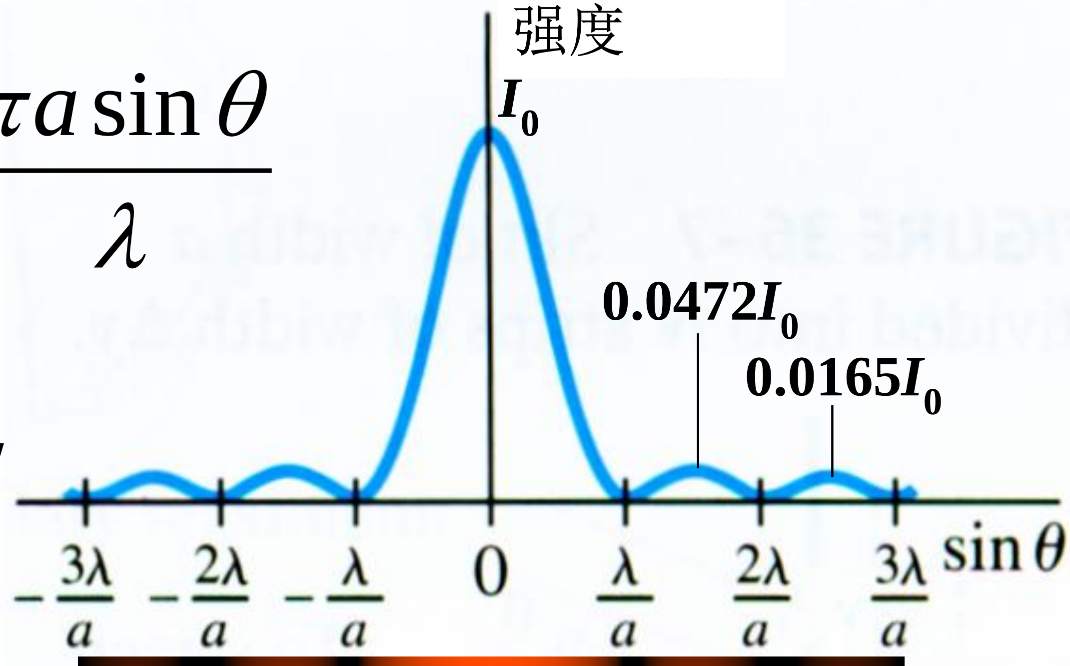
$$\frac{A_\theta}{A_0}=\frac{2R\sin\alpha}{2R\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$ **其中** $$\alpha=\frac{N\Delta\varphi}{2}=\frac{N}{2}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{a\sin\theta}{N}=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

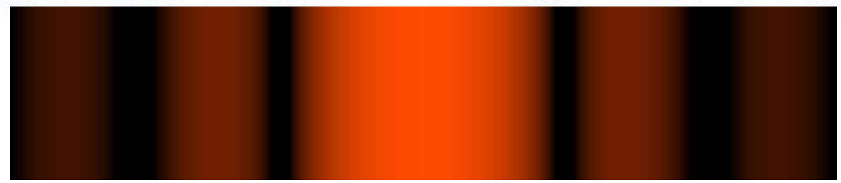
衍射光强为

$$\frac{I}{I_0}=\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$



$$\frac{I}{I_0}=\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \qquad \alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$





(1)主极大

θ=0，α=0，光强最大，称为主极大
即中央明纹中心光强。

(2)极小

α=*kπ*，k=±1，±2…
光强最小，即暗纹。

$$a\sin\theta=\pm k\lambda \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

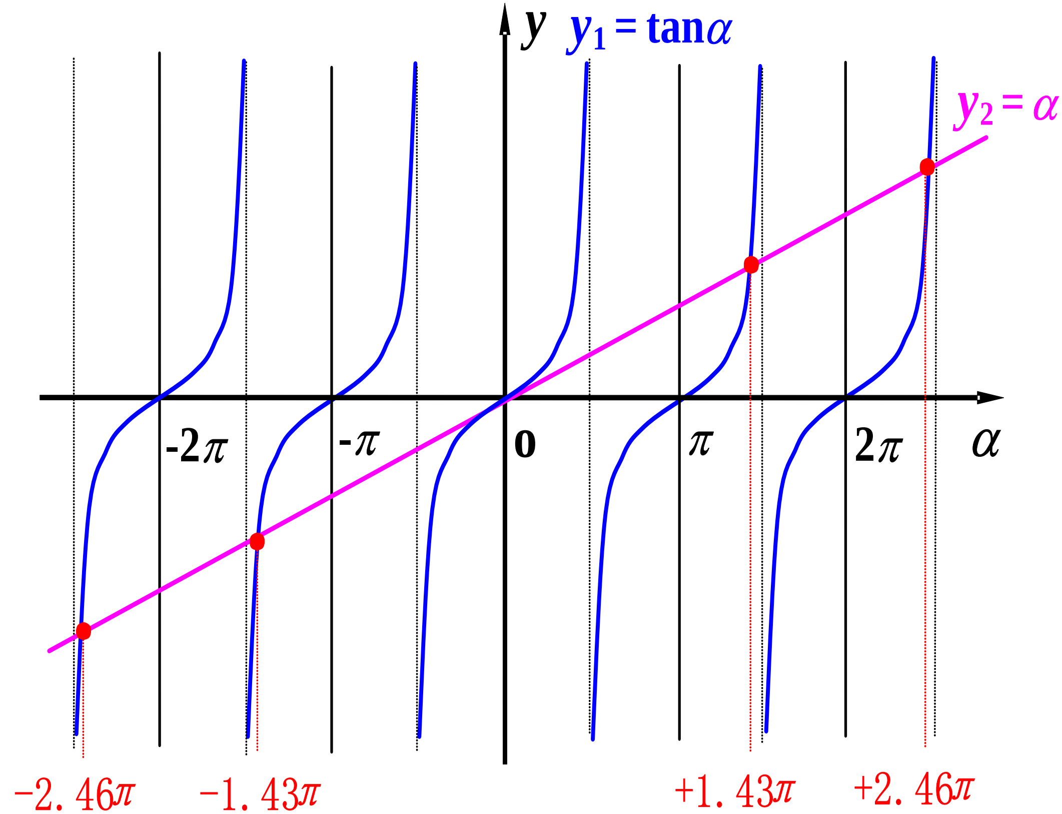
与半波带法所得结果一致

(3)次极大

$$\frac{dI}{d\alpha}=0$$ **得超越方程**

$$\tan\alpha=\alpha$$

$$\alpha=\pm1.43\pi,\pm2.46\pi,\pm3.47\pi,\cdots$$

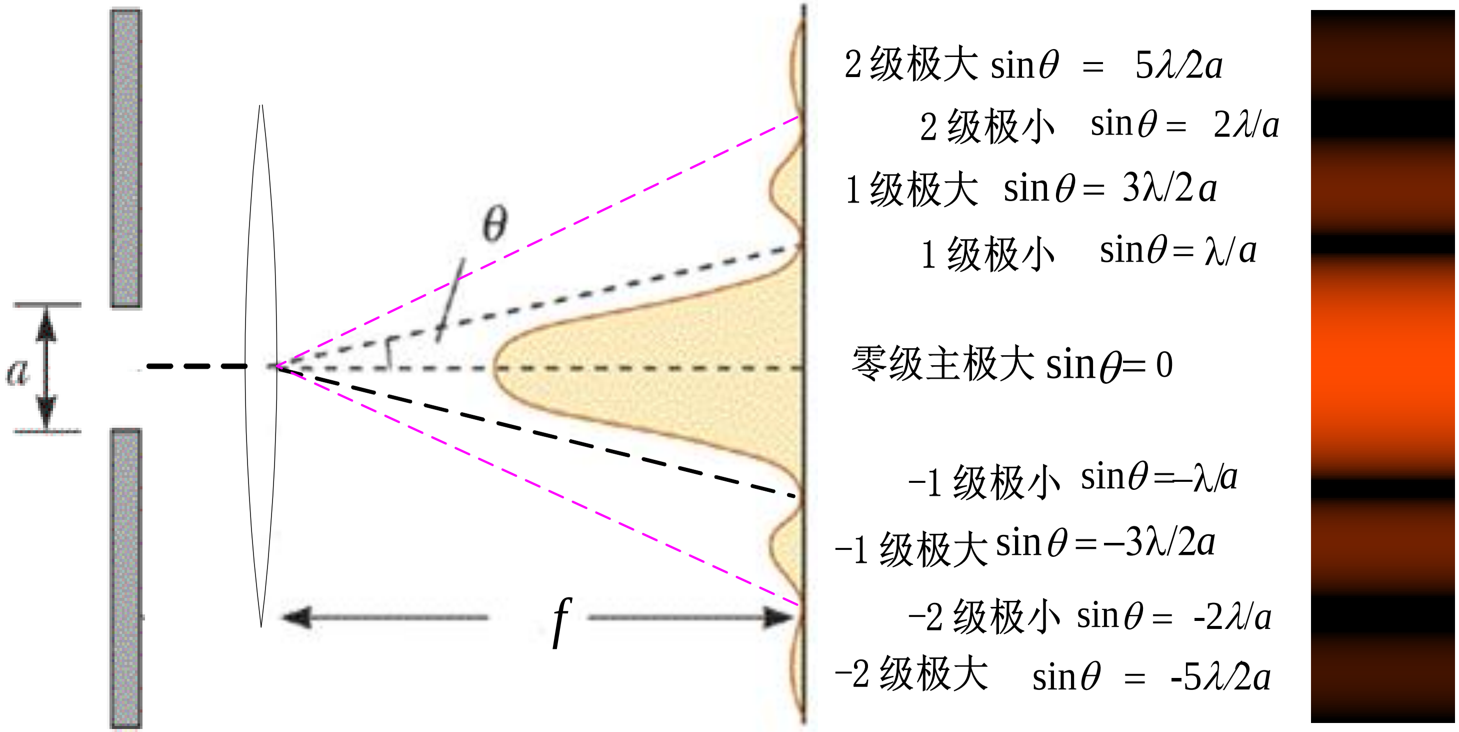


相应得到

$$a\sin\theta=\pm1.43\lambda,\pm2.46\lambda,\pm3.47\lambda,\cdots$$

比较半波带法

$$a\sin\theta=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}\quad(k=1,2,3,\cdots)$$

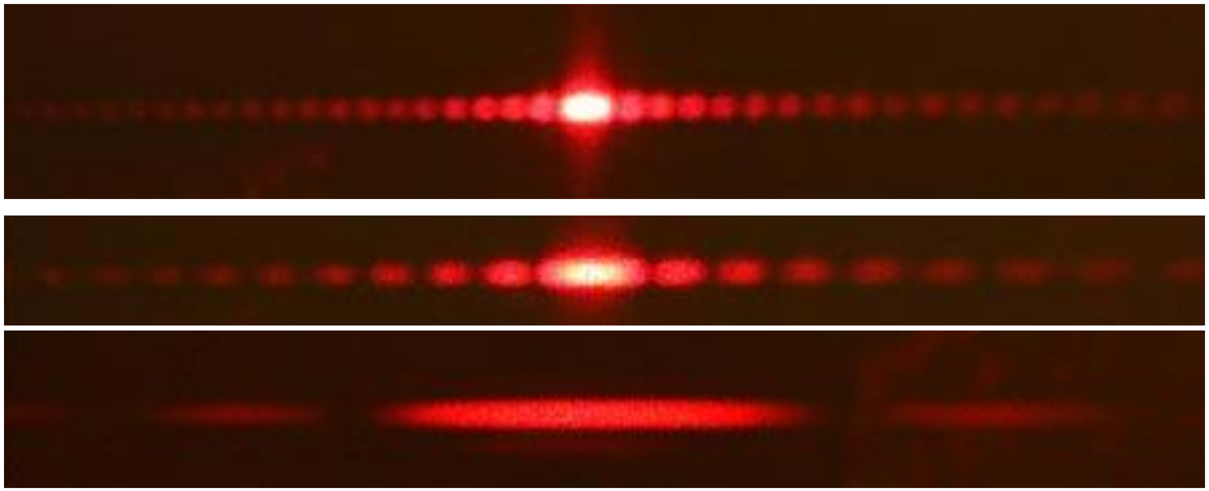


条纹特点:(1)中央处为中央明纹，整体为明暗相间的直条纹。

中央明纹的半角宽度： $\sin\theta = \dfrac{\lambda}{a} \approx \theta$

中央明纹的线宽度： $\Delta x = 2f\tan\theta \approx 2f\sin\theta = 2f\dfrac{\lambda}{a}$

中央明纹的线宽度：$\Delta x = 2f\tan\theta \approx 2f\sin\theta = 2f\dfrac{\lambda}{a}$

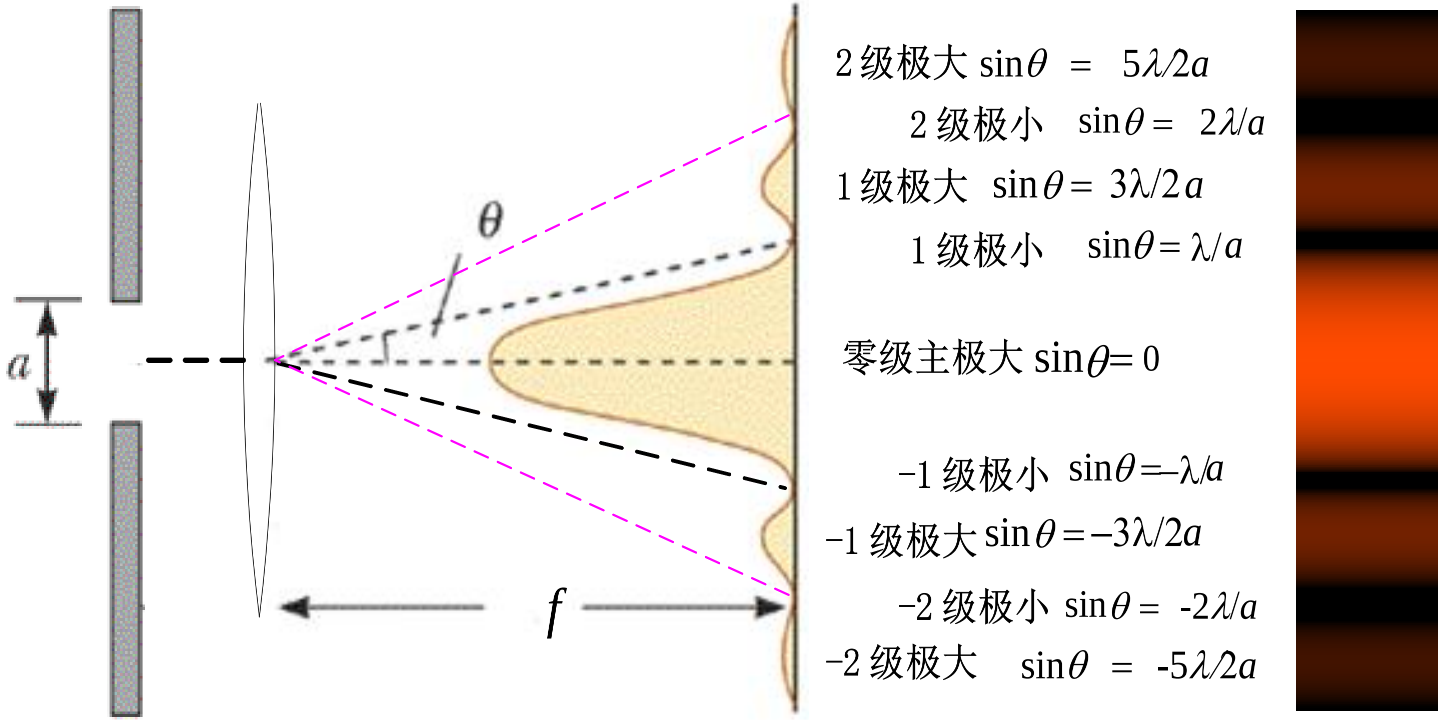


0.16 mm

0.08 mm

0.02 mm

$\lambda / a \to 0$ **波动光学退化到几何光学.**



(2)对次级明纹

角宽度：$\Delta\theta = \dfrac{\lambda}{a}$ **线宽度**：$\Delta x = f\dfrac{\lambda}{a}$

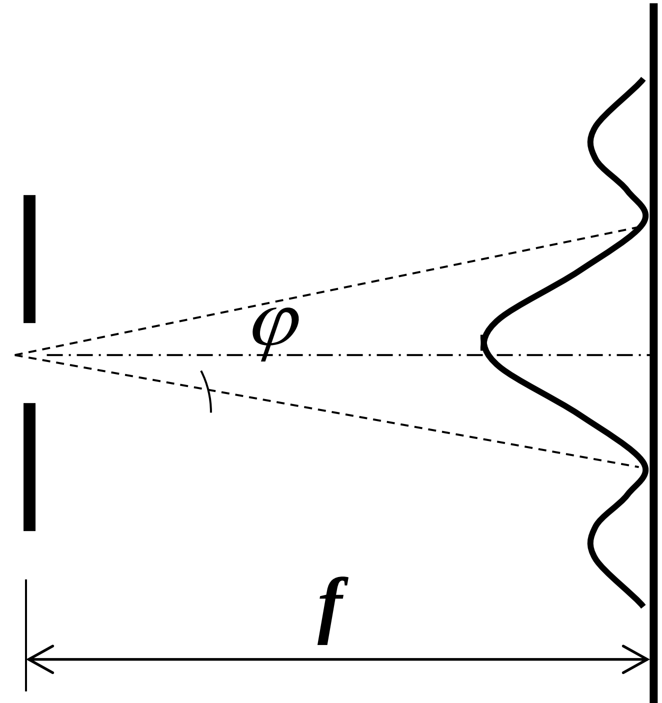
(3)缝向上或向下平移，不会使图样改变；但若光源向上平移，则中央明条纹向下移动

四、干涉与衍射的区别

干涉指有限多分立光束的相干叠加；

衍射是无穷多子波发出的光波的相干叠加；

例. 波长为**546 nm**的平行光垂直照射在 ***b* = 0.437 mm** 的单缝上，缝后有焦距为**40 cm**的凸透镜，求透镜焦平面上出现的衍射中央明纹的宽度。



解：

$$a\sin\theta=\lambda$$

$$\theta\approx\sin\theta=\frac{\lambda}{a}$$

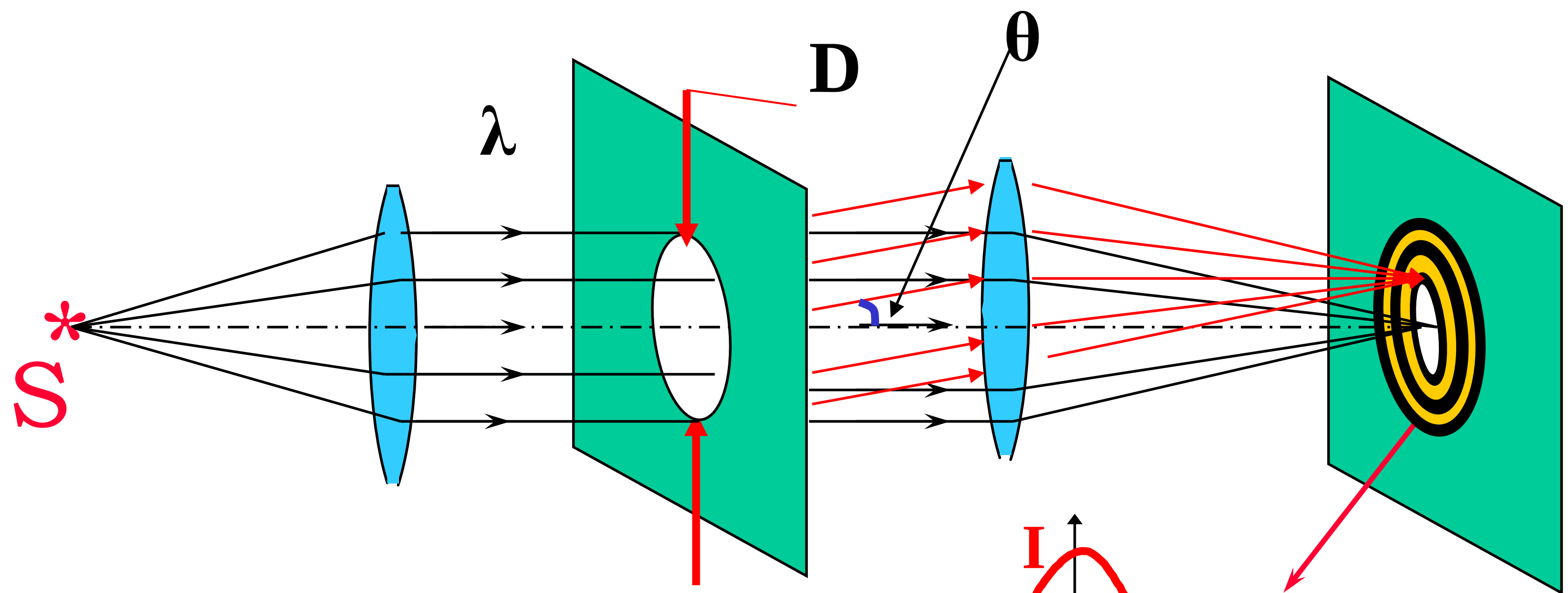
$$L=2x=2f\cdot\tan\theta$$

$$\approx 2f\theta=\frac{2\lambda f}{a}$$

$$=\frac{2\times 5.460\times 10^{-7}\times 0.40}{0.437\times 10^{-3}}=1.0\times 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

§11-7 夫琅和费圆孔衍射 光学仪器的分辨本领

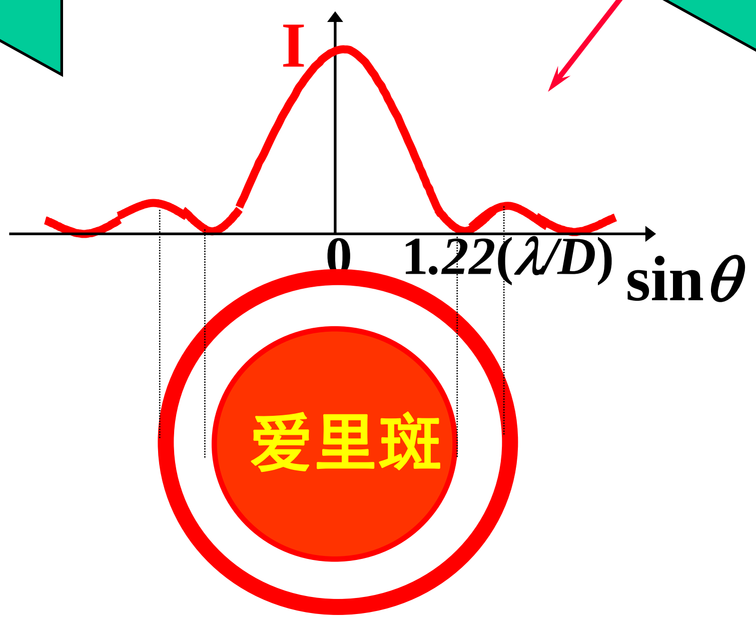
一、夫琅和费圆孔衍射



第一级暗环的衍射角满足：

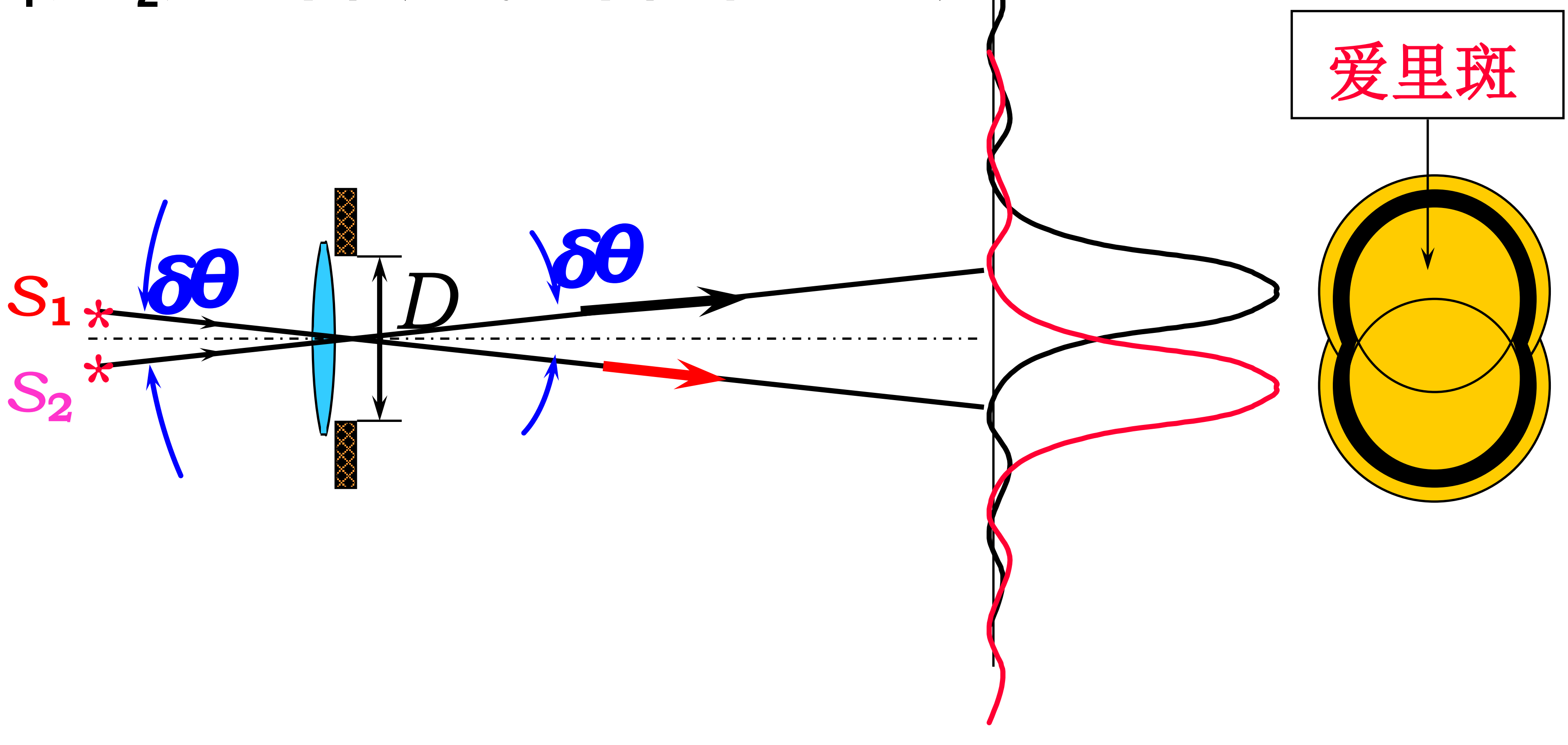
$$D \cdot \sin\theta_1 \approx 1.22\lambda$$

$$\theta_1 \approx 1.22\frac{\lambda}{D}$$



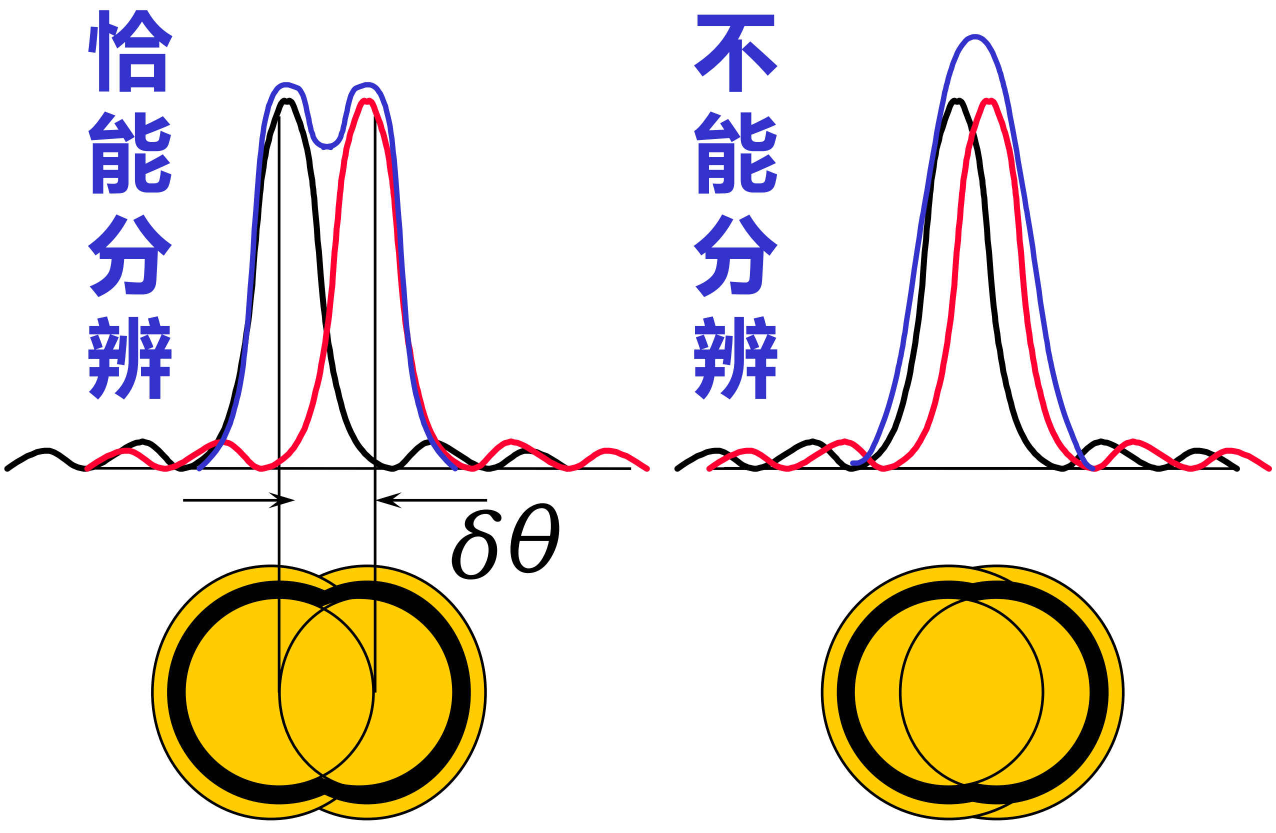
二、光学仪器的分辨本领

S_1、S_2是两个物点或一个物体上的两点



三、瑞利判据

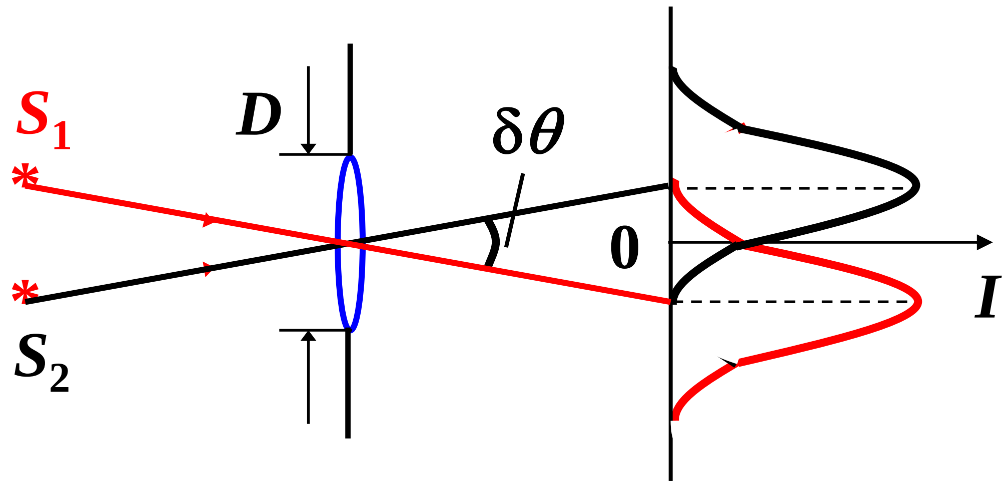
如果一个点光源的衍射图象的**中央主极大**刚好与另一个点光源的衍射图象**第一极小值**相重合，认为这两个点光源恰好能为这一光学仪器所分辨.



在恰能分辨时，两个点光源在透镜前所张的角度，称为最小分辨角 $\boldsymbol{\delta\theta}$

最小分辨角为:

$$\delta\theta = \theta \approx 1.22\frac{\lambda}{D}$$



分辨本领

$$R \equiv \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda} \qquad \left.\begin{matrix} D\uparrow \\ \lambda\downarrow \end{matrix}\right\} \rightarrow R\uparrow$$

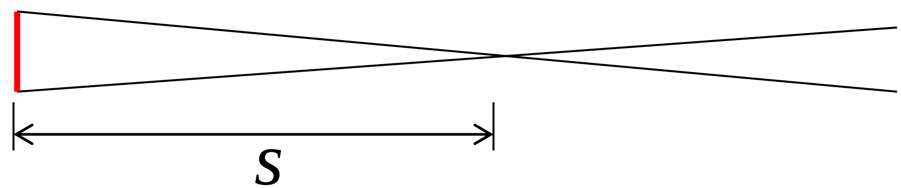
望远镜: λ不可选择，可 $\uparrow D \rightarrow \uparrow R$

显微镜: D不会很大，可 $\downarrow \lambda \rightarrow \uparrow R$

例　在通常亮度下，人眼的瞳孔直径为3 mm，问：人眼分辨限角为多少？（λ = 550 nm ）。如果窗纱上两根细丝之间的距离为2.0 mm，问：人在多远恰能分辨。

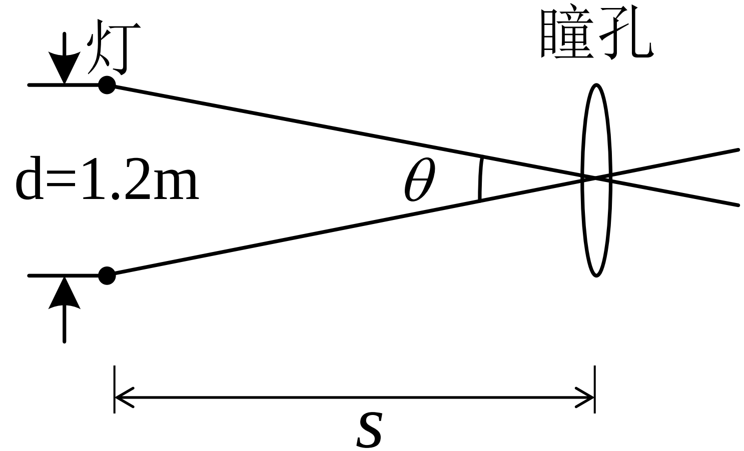
解： $$\delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22\times\frac{5500\times10^{-10}}{3\times10^{-3}} = 2.2\times10^{-4}\,\text{rad}(1')$$

$$\delta\theta = \frac{l}{s}$$



$$s = \frac{l}{\delta\theta} = \frac{2.0\times10^{-3}}{2.2\times10^{-4}} = 9.1\,\mathbf{m}$$

例　在迎面驶来的汽车上，两盏前灯相距120cm，试问人在离汽车多远的地方，眼睛恰能分辨这两盏灯？设夜间人眼瞳孔直径为5mm，入射光波为550nm



解： $\delta\theta = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$

设人到汽车的最远距离为s，则由

$$d = s\cdot\delta\theta$$

$$s = \frac{d}{\delta\theta} = \frac{dD}{1.22\lambda} = 9.1\mathbf{m}$$

例题:

帕洛玛的海耳望远镜，口径为200英尺的（5.1米），以550纳米作为天体发光的波长，试计算

（1）望远镜的最小分辨角;

（2）人眼的瞳孔大约4.00mm，人眼的最小分辨角是多少?

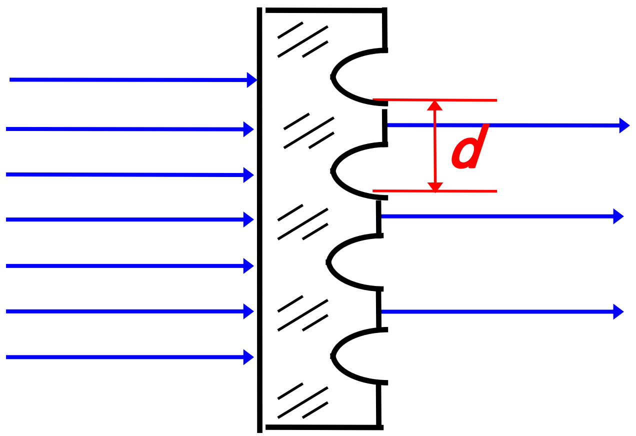
（3）月球到地球的距离为3.844×108m，分别计算望远镜和人眼能够在月球表面分辨相距多远的物体。

§11.8 光栅衍射

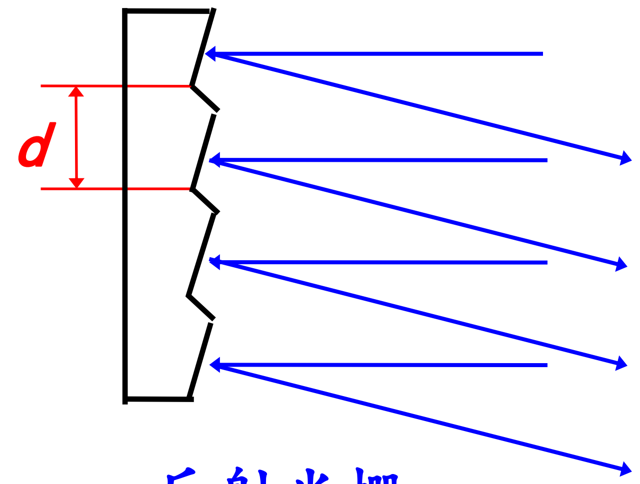
一、光栅与光栅常数

光栅—大量等宽等间距的平行狭缝(或反射面) 构成的光学元件。

①种类:



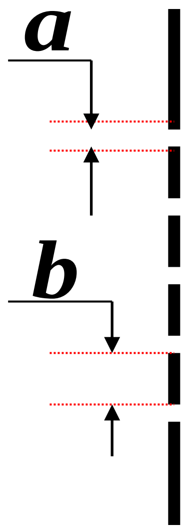
透射光栅



反射光栅

一维光栅、二维光栅、三维光栅

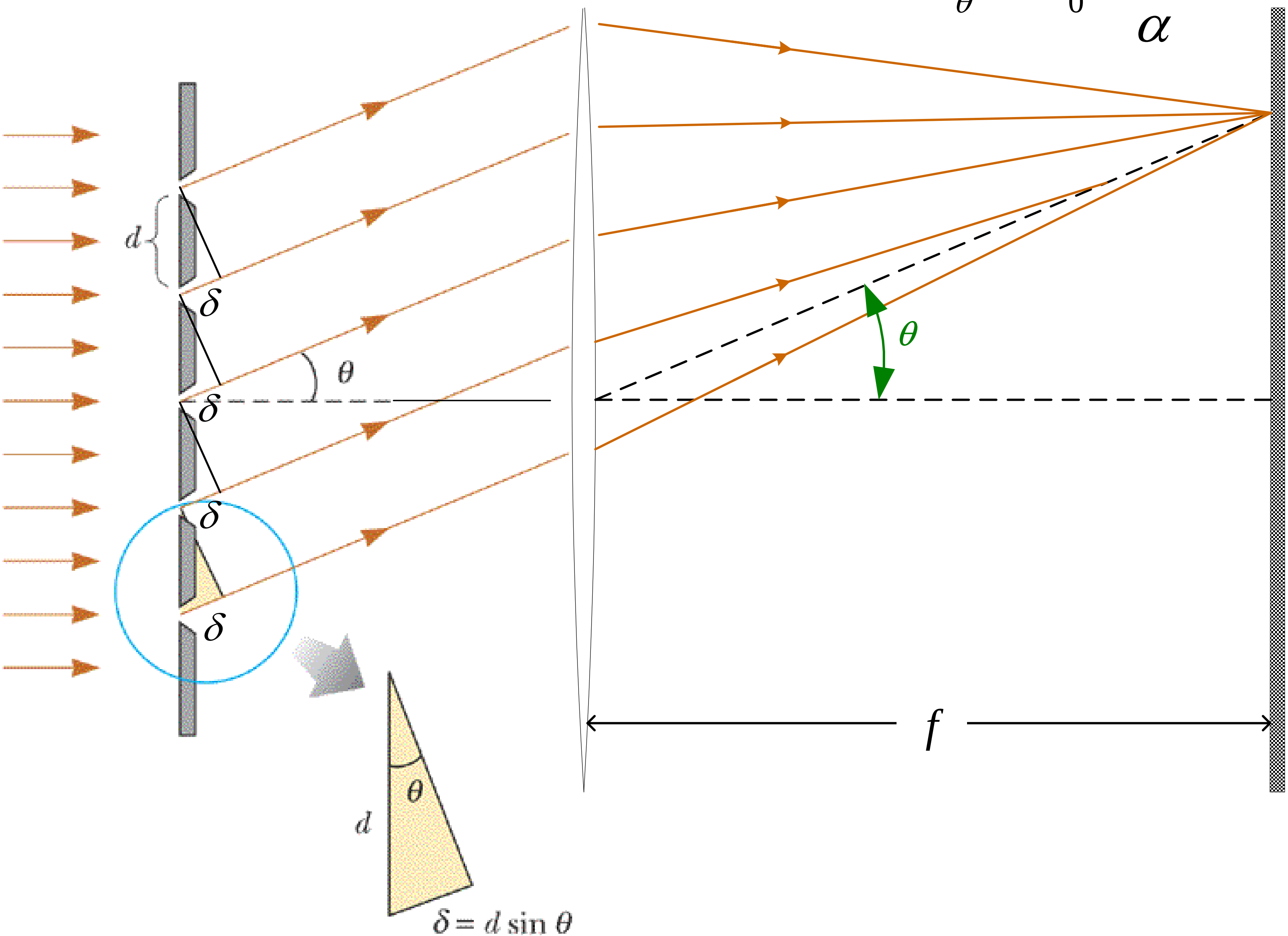
② 光栅常数



$d=a+b$ —— 光栅常数

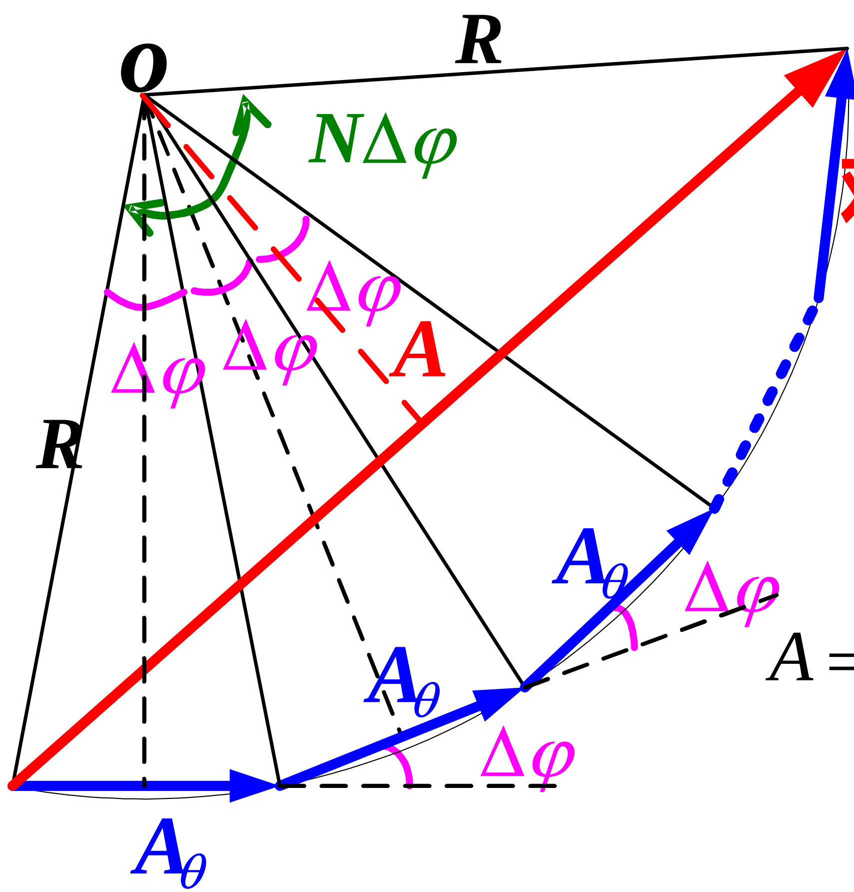
2、多缝衍射-光栅衍射

$$A_\theta = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$



多缝衍射振幅矢量法

对单缝衍射 $A_\theta = A_0 \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$



$$\delta = d\sin\theta \qquad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$$

对多缝衍射，则P点的合振幅为

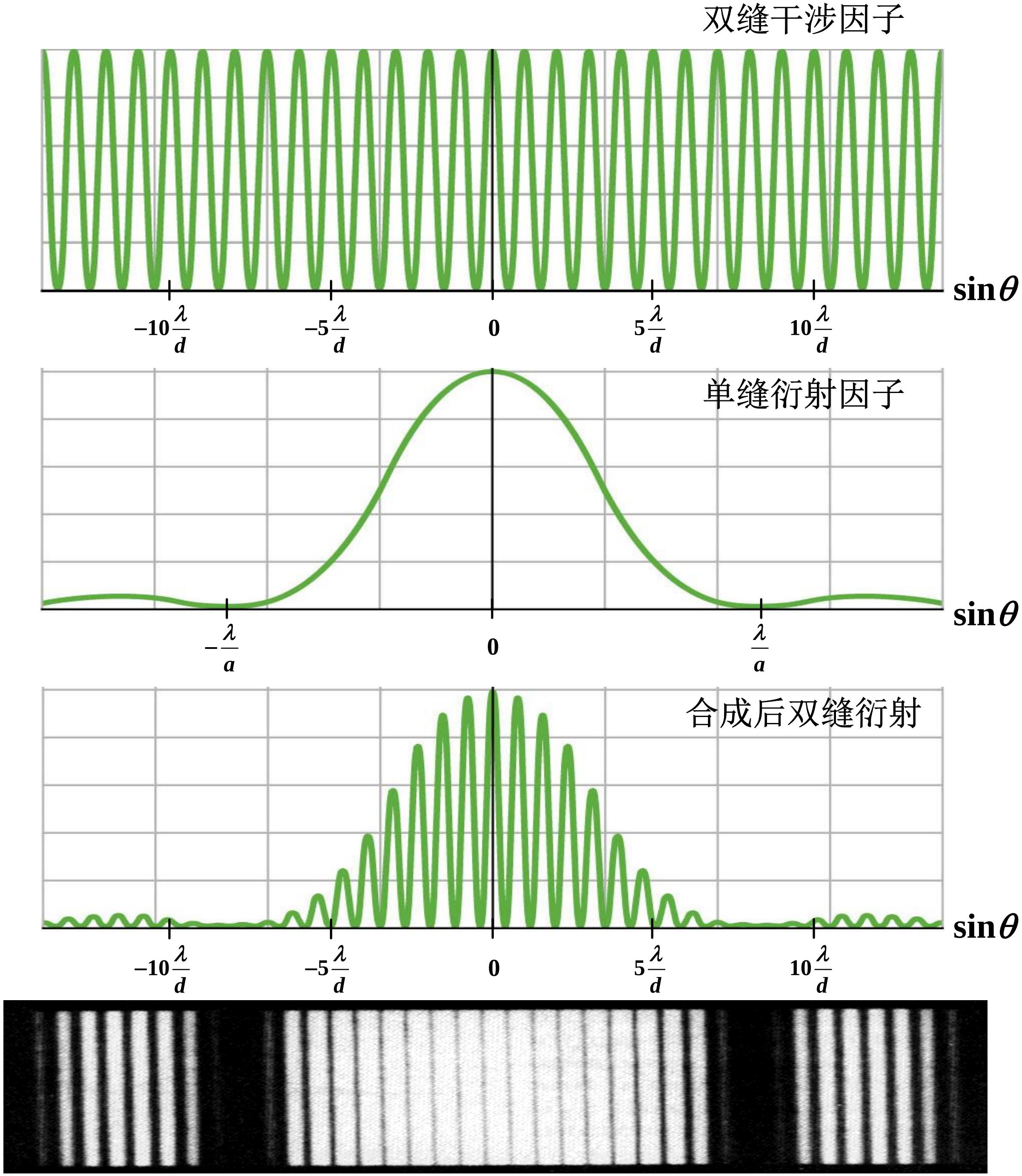
$$A = 2R\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}$$

而 $A_\theta = 2R\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}$

$$A = A_\theta \frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}} = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

多缝衍射光强分布公式：

$$I = I_0 \underbrace{\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}_{\text{衍射因子}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}\right)^2}_{\text{干涉因子}}$$


双缝干涉因子
$\sin\theta$
$-10\frac{\lambda}{d}$
$-5\frac{\lambda}{d}$
0
$5\frac{\lambda}{d}$
$10\frac{\lambda}{d}$
单缝衍射因子
$\sin\theta$
$-\frac{\lambda}{a}$
0
$\frac{\lambda}{a}$
合成后双缝衍射
$\sin\theta$
$-10\frac{\lambda}{d}$
$-5\frac{\lambda}{d}$
0
$5\frac{\lambda}{d}$
$10\frac{\lambda}{d}$

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}\right)^2 \quad I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

其中 $\alpha = \dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$ $\quad \beta = \dfrac{\Delta\varphi}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta = \dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$

(I)只考虑干涉因子

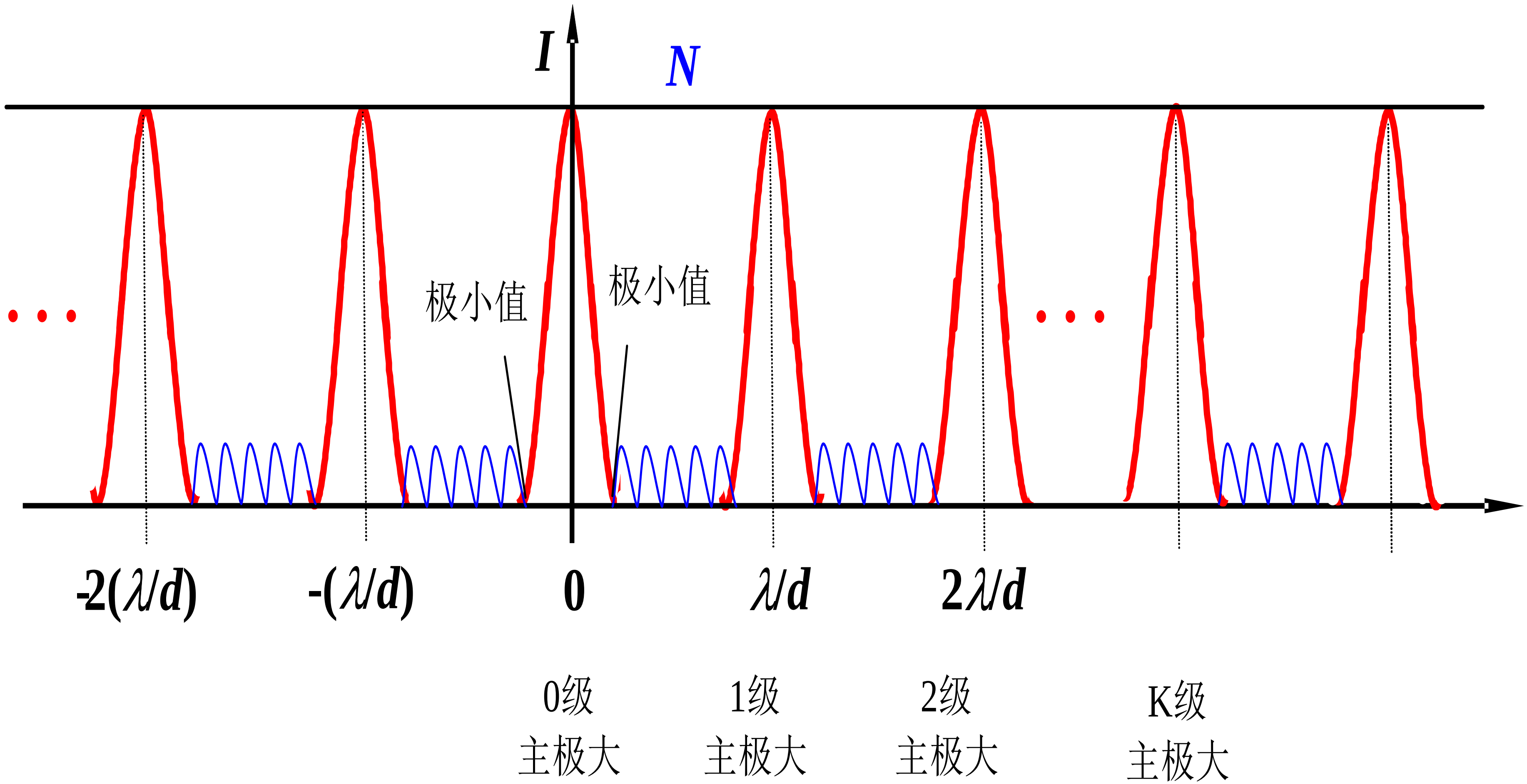
(1)主极大

$$\Delta\varphi = \pm 2k\pi \Rightarrow \beta = \pm k\pi \Rightarrow d\sin\theta = \pm k\lambda, k = 0,1\cdots$$

光栅方程

只决定主极大位置

则O点光强为 $I = I_0\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cdot N^2$



$$d\sin\theta = \pm k\lambda, k = 0,1\cdots$$

N缝的光栅:
主极大、极小、次级大

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta} \right)^2 \qquad \alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} \qquad \beta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$$

(2)极小位置

使光强为零，则 $\sin N\beta = 0, \sin\beta \neq 0$

则 $N\beta = k'\pi \Rightarrow \beta = \dfrac{k'}{N}\pi \Rightarrow d\sin\theta = \dfrac{k'}{N}\lambda$

注意取值范围：$k' = 1, 2 \cdots, N-1$

则，在相邻两个主极大之间有N-1个极小值

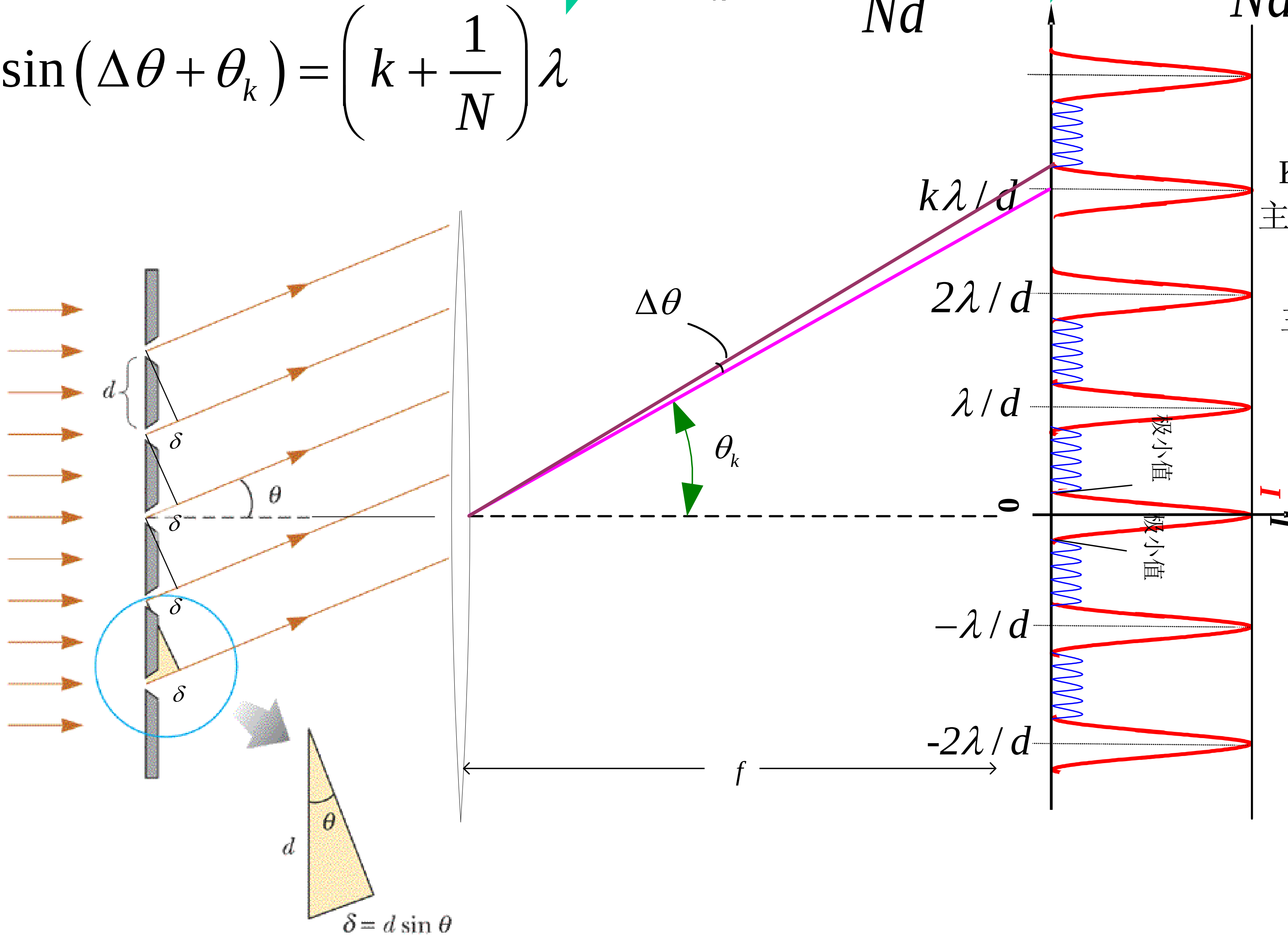
$$d\sin\theta = \left(k + \frac{k'}{N} \right)\lambda$$ **极小值方程**

(4)主极大的半角宽度

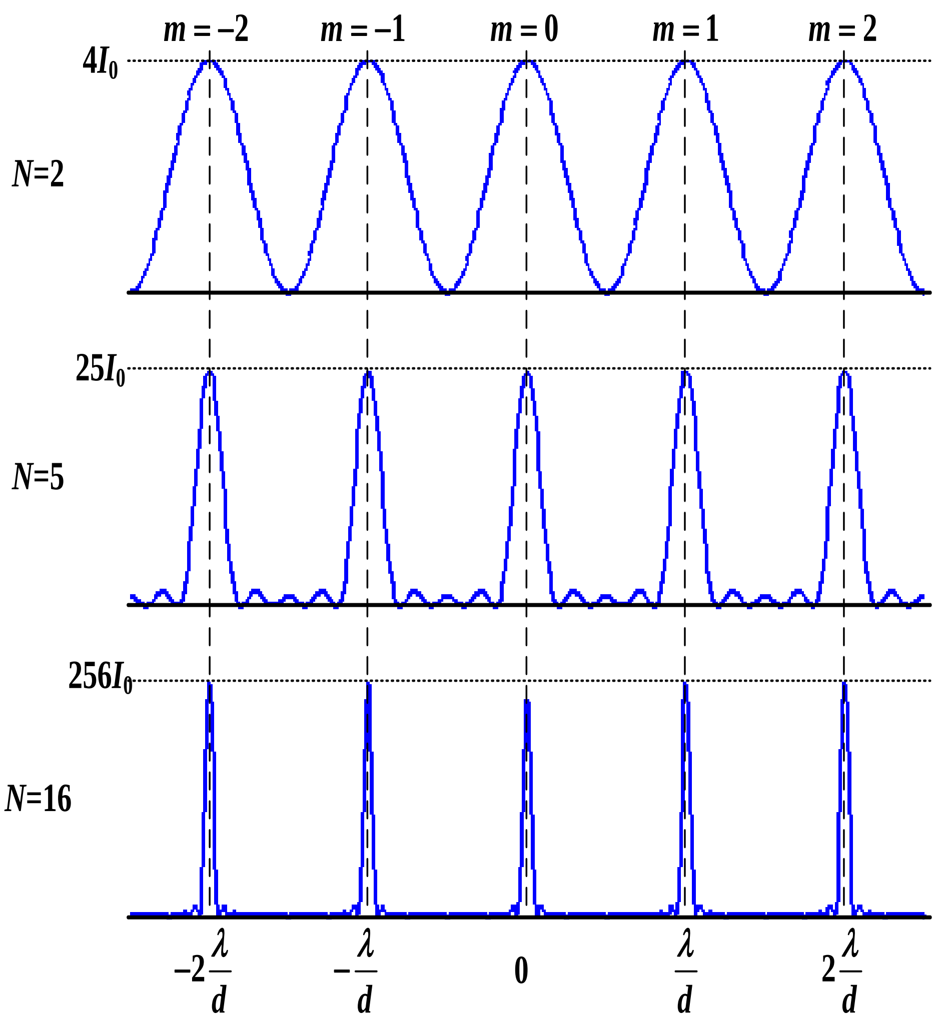
$$d\sin\theta_k = k\lambda$$

$$d\sin\left(\Delta\theta+\theta_k\right)=\left(k+\frac{1}{N}\right)\lambda$$

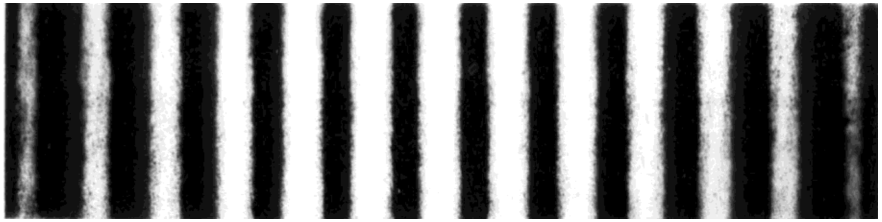
$$\cos\theta_k\Delta\theta=\frac{\lambda}{Nd} \quad \Delta\theta=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta_k}$$



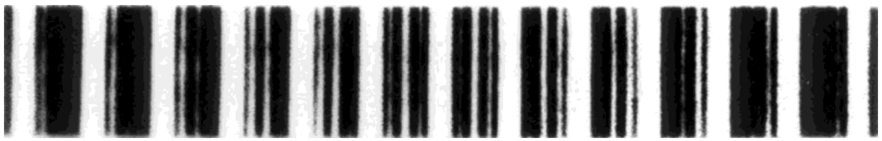
(5)光栅谱线



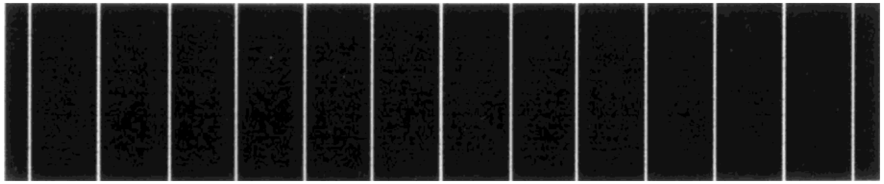
双缝的干涉条纹



五缝的干涉条纹



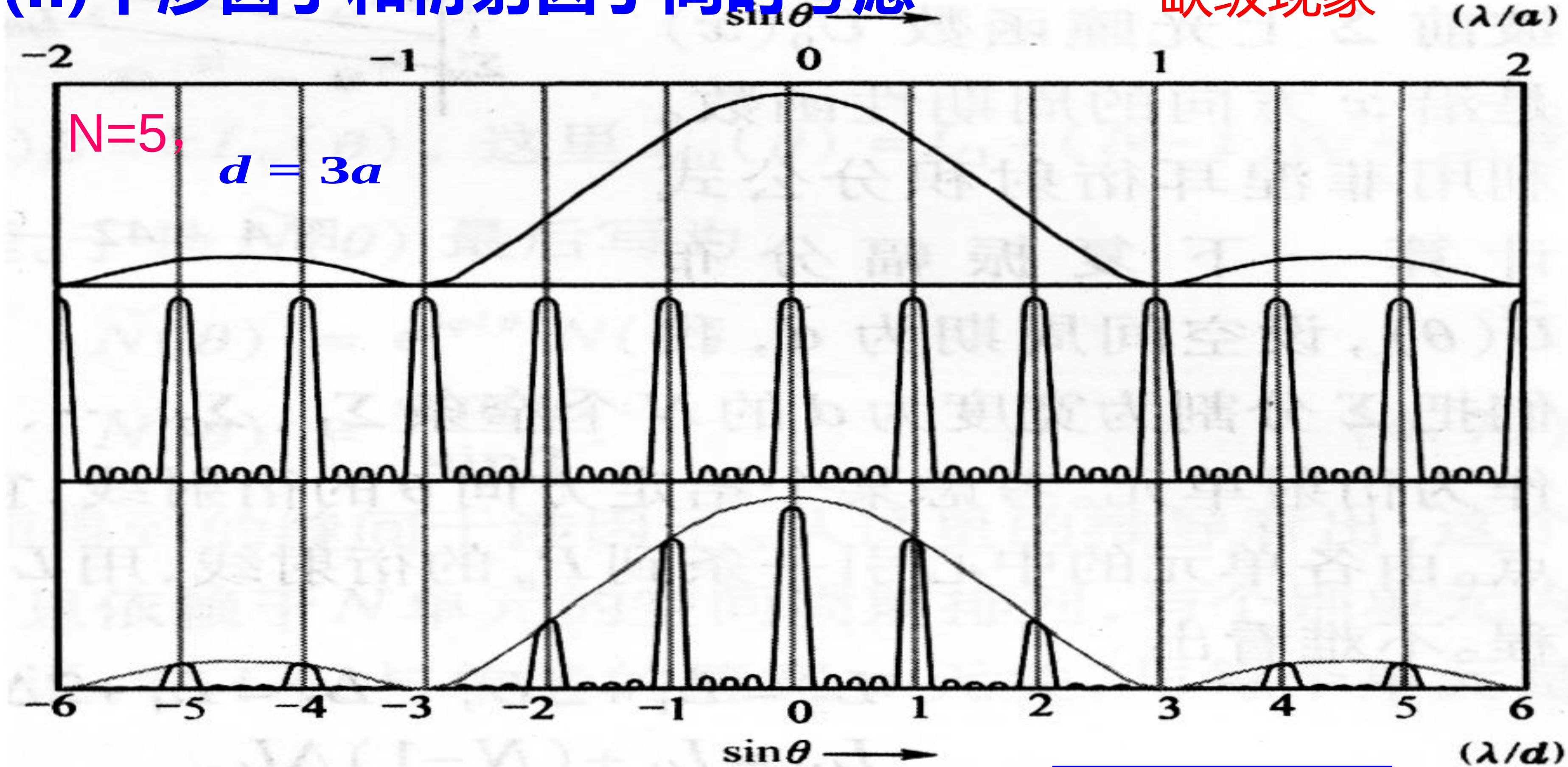
多缝的干涉条纹



不同缝数N下的缝间干涉因子

(II)干涉因子和衍射因子同时考虑

缺级现象



主极大明纹 $d\sin\theta=\pm k\lambda$

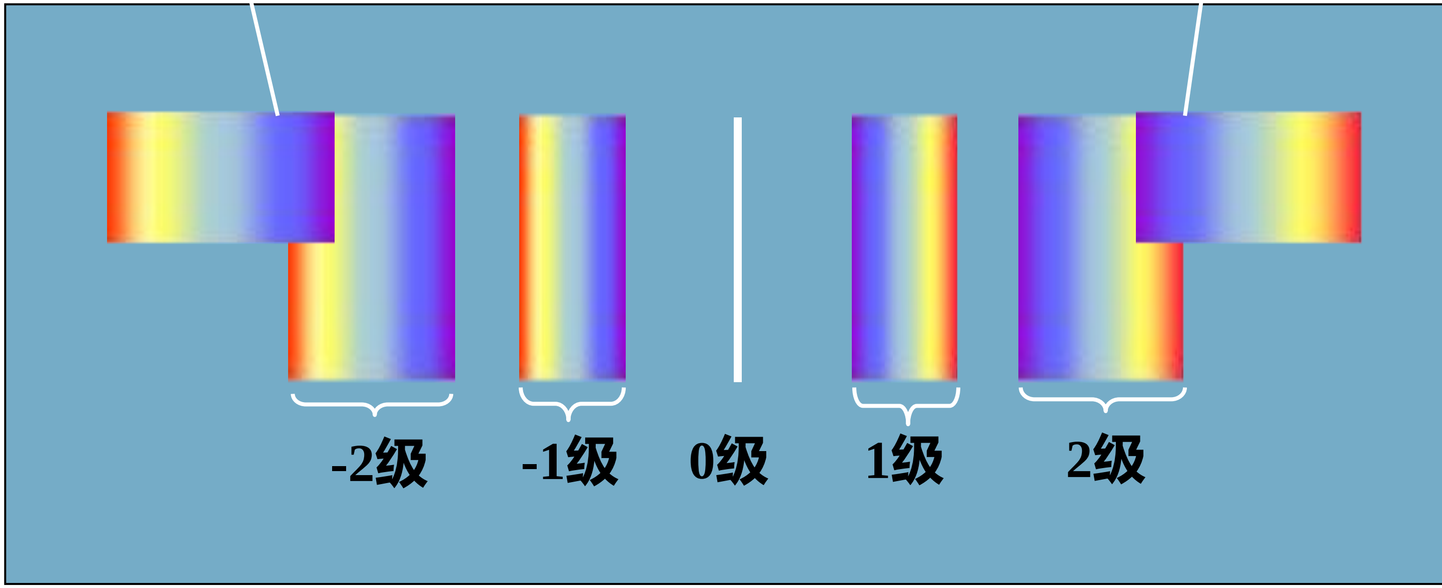
单缝衍射暗纹条件 $a\sin\theta=\pm n\lambda$

两式相比 $\dfrac{d}{a}=\dfrac{k}{n}$ ⇒ $k=\dfrac{d}{a}n,\quad n=1,2,3\cdots$

中央包络线内主极大个数

$2\dfrac{d}{a}-1$

3、光谱的色散



$$d\sin\theta = \pm k\lambda$$

白光光谱

入射光包含几种不同波长的光，经光栅衍射后除中央主极大重合外，彼此分开，该现象称为光栅色散.

定义光栅的分辨本领

$$\boxed{R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN}$$