

2019-2020 学年第一学期

《高等数学 A》(上) 期末考试试题 (A1)

考试注意事项: 学生必须将答题内容做在答题纸上, 做在试题纸上一律无效

一. 填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x} =$  \_\_\_\_\_.

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x^3} - 1}{\ln(1+x) \arctan x^2} =$  \_\_\_\_\_.

3. 设  $f(x)$  在  $x=0$  处可导, 且  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2020}{n}$ , 则  $f'(0) =$  \_\_\_\_\_.

4. 设  $y = \frac{x^3}{1+x}$ , 当正整数  $n \geq 3$  时,  $y^{(n)} =$  \_\_\_\_\_.

5. 函数  $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$  的马克劳林公式中,  $x^5$  的系数为 \_\_\_\_\_.

6. 设函数  $F(x) = \int_0^{x^2} \ln(1+t) dt$  是  $x^n$  的同阶无穷小量, 则  $n =$  \_\_\_\_\_.

7.  $\int \frac{dx}{x(x^n+10)} =$  \_\_\_\_\_.

8.  $\int_{-1}^1 [x^2 \sin x^5 + \ln(2+x)] dx =$  \_\_\_\_\_.

9.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} =$  \_\_\_\_\_.

10. 微分方程  $xy'' + 3y' = 0$  的通解为 \_\_\_\_\_.

二(10 分) 设函数  $f(x)$  在  $x=1$  的某邻域内连续, 且有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f(x+1)+1+3\sin^2 x]}{\sqrt{1-x^2}-1} = -4$$

(1) 求  $f(1)$  及  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2}$ ;

(2) 求  $f'(1)$ , 若又设  $f''(1)$  存在, 求  $f''(1)$ .

三 (8 分). 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内具有一阶连续导数, 且  $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0$ , 若  $af(x) + bf(2x) - f(0)$  在  $x \rightarrow 0$  时是比  $x$  高阶的无穷小量, 试求  $a, b$  的值.

四 (10 分) 证明不等式  $\frac{2x}{x+2} < \ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{x+1}}$  当  $x \in (0, +\infty)$  时

成立.

五 (12 分). 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx; \quad (2) \int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx.$$

六 (12 分). 已知曲线  $y = a\sqrt{x}$  ( $a > 0$ ) 与曲线  $y = \ln \sqrt{x}$  在点  $(x_0, y_0)$  处有公共切线, 求

(1) 常数  $a$  及切点  $(x_0, y_0)$ ;

(2) 两曲线与  $x$  轴围成的平面图形  $D$  的面积;

(3) 平面图形  $D$  绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体的体积.

七 (12 分). 求微分方程  $y'' - 2y' = e^{2x} + 4x$  的通解.

八 (6 分). 设  $0 \leq a < x < b, f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 证

明:  $\exists \xi, \eta \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta)$ .