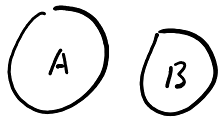
复习课

2022年12月12日　9:35



1. 设A，B为两个随机事件，$P(A)=a$，$P(B)=0.3$，$P(\bar{A}\cup B)=0.7$"，若事件A"与B互不相容，则$a=$ 0.3. 若事件A与B相互独立，则$a=$ 3/7.

$$P(\bar A\cup B)=P(\bar A)+P(B)-P(\bar A B)=1-P(A)+P(B)-[P(B)-\underbrace{P(AB)}_{0}]=1-P(A)=1-a=0.7$$

$$P(\bar A\cup B)=P(\bar A)+P(B)-P(\bar A)P(B)=1-a+0.3-(1-a)\times 0.3=0.7$$

$$0.7\times(1-a)=0.4 \qquad 1-a=\frac{4}{7} \qquad a=\frac{3}{7}$$

2. 已知连续型随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$, 则$E(X)=$ 1, $D(X)=$ $\frac{1}{2}$.

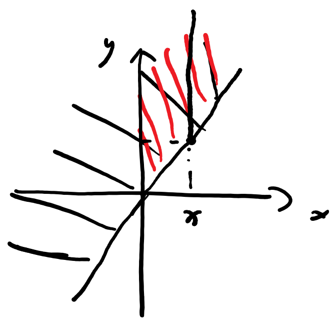
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot\frac{1}{2}}} \qquad \sigma^2=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \mu=1. \quad \sigma^2=\frac{1}{2}$$

3. 设随机变量X,Y相互独立，且分别服从数学期望为1和$\frac{1}{4}$的指数分布，则$P\{X<Y\}=$ $\iint_{x<y} f(x,y)\,dxdy$ ________.　(X,Y)

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0. & x\le 0\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\\ 0. & y\le 0\end{cases}$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-x}e^{-4y}, & x>0,\ y>0\\ 0. & \end{cases}$$



$$P\{X<Y\}=\iint_{x<y} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}4e^{-x}e^{-4y}\,dy$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-x}(-e^{-4y})\Big|_x^{+\infty}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}[0-(-e^{-4x})]\,dx=\int_0^{+\infty}e^{-5x}\,dx$$

$$=-\frac{1}{5}e^{-5x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{5}$$

4. 设$X\sim b(2,p)$，$Y\sim b(3,p)$，已知$P\{X\ge 1\}=\frac{5}{9}$，则$P\{Y\ge 1\}=$ ______.

$$P\{X\ge 1\}=1-P\{X=0\}=1-C_2^0p^0(1-p)^2=1-(1-p)^2=\frac{5}{9}\Rightarrow(1-p)^2=\frac{4}{9}\Rightarrow 1-p=\frac{2}{3}\Rightarrow p=\frac{1}{3}$$

$$Y\sim b(3,\tfrac{1}{3}). \quad P\{Y\ge 1\}=1-P\{Y=0\}=1-C_3^0\left(\tfrac{1}{3}\right)^0\left(\tfrac{2}{3}\right)^3=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

5. 设随机变量$X\sim U(0,1)$, $Y=e^X$, 则Y的概率密度函数$f_Y(y)=$ $f_X(\ln y)\cdot|(\ln y)'|$

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}=P\{X\le \ln y\}=\int_{-\infty}^{\ln y} f(x)\,dx=\begin{cases}0, \\ \int_0^{\ln y}1\,dx=\ln y, \\ 1.\end{cases}$$

$\ln y<0 \Leftrightarrow y<1$

$0\le \ln y<1 \Leftrightarrow 1\le y<e$

$\ln y\ge 1 \Leftrightarrow y\ge e$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 1\le y<e\\ 0, & 其他\end{cases}$$

6. 将一枚均匀的硬币重复掷n次，以X和Y分别表示正面向上和反面向上的次数，则X和Y的相关系数$\rho_{XY}=$__________.

$X+Y=n.$ $Y=-X+n$ $\rho_{XY}=-1$

7. 有一批建筑房屋用的木柱，其中80%的长度不小于3cm，现在这批木柱中随机地取出100根，问其中至少有30根短于3cm的概率是 ______ .（用标准正态分布的分布函数表示）

A

$p=0.2.$ X: 100根中小于3cm的根数

$X\sim b(100,0.2)$

$$P\{X\ge 30\}=P\left\{\frac{X-100\times 0.2}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}}\ge \frac{30-20}{\sqrt{16}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{X-20}{\sqrt{16}}\ge 2.5\right\}\approx 1-\Phi(2.5)$$

8. 设$\{W(t),t\ge 0\}$是参数为σ^2的维纳过程, $W(0)=0$，$R\sim N(0,(\sqrt{2})^2)$, 且R与$W(t)$相互独立，令$X(t)=W(e^{-t})+R, t\ge 0$, 则$C_X(2,3)=$ ___.

$C_X(2,3)=R_X(2,3)-\mu_X(2)\mu_X(3)$ $\mu_X(t)\equiv 0$

$=E[X(2)X(3)]=E[(W(e^{-2})+R)(W(e^{-3})+R)]$

$=E[W(e^{-2})W(e^{-3})]+E[W(e^{-2})R]+\underbrace{E[R\,W(e^{-3})]}_{0}+E(R^2)$

$=\underbrace{R_W(e^{-2},e^{-3})}_{\sigma^2\min\{e^{-2},e^{-3}\}}+E[W(e^{-2})]\underbrace{E[R]}_{0}+0+\underbrace{D(R)}_{2}+(\underbrace{E(R)}_{0})^2$

$$\sigma^2 \min\{e^{-2}, e^{-3}\}$$

$$\sigma^2 e^{-3}$$

$$= \sigma^2 e^{-3} + 2$$

9. 设{$N(t)$, $t\geq 0$}是参数为$\lambda > 0$的泊松过程， $N(0) = 0$, 则$P\{N(1) =1, N(2) = 2, N(3) = 3\}$ =________.

$$P\{N(1)=1, N(2)=2, N(3)=3\}$$

$$= P\{\underbrace{N(1)-N(0)=1}_{\pi(\lambda)}\}P\{\underbrace{N(2)-N(1)=1}_{\pi(\lambda)}\}P\{\underbrace{N(3)-N(2)=1}_{\pi(\lambda)}\}$$

$$= \left(\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}\right)^3 = \lambda^3 e^{-3\lambda}$$

10. 设平稳过程$X(t)$的功率谱密度为$S_X(\omega) = \frac{32}{\omega^2+16}$, 则该过程的平均功率$Q$=_____.

$$S_X(\omega) = \frac{\overset{2\times A\times 4}{32}}{\omega^2+16} \leftrightarrow \underbrace{4e^{-4|\tau|}}_{R_X(\tau)}$$

$$Q = R_X(0) = 4$$

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{32}{\omega^2+16}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{32}{\omega^2+16}\,d\omega$$

$$= \frac{32}{\pi}\cdot\frac{4}{16}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{4}\right)^2}\,d\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

$$= \frac{8}{\pi}\arctan\frac{\omega}{4}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{8}{\pi}\times\frac{\pi}{2} = 4$$

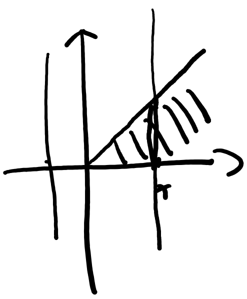
二. （12分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} ae^{-x}, 0 < y < x \\ 0, 其他. \end{cases}$$

(1) 求常数a；

(2) 求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$；

(3) 求条件概率$P\{X \leq 1|Y \leq 1\}$.



① $\iint_{R^2} f(x,y)\,dxdy = 1$

$$= \int_0^{+\infty}dx\int_0^x ae^{-x}\,dy$$

$$= a\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = a \Rightarrow a=1$$

② $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases}\int_0^x e^{-x}\,dx & x>0 \\ 0. & x\leq 0\end{cases} = \begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0. & x\leq 0\end{cases}$$

$f(x,y)$

当$x>0$时 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$

③ $P\{X\leq 1 \mid Y\leq 1\}=\frac{P\{X\leq 1, Y\leq 1\}}{P\{Y\leq 1\}}=\frac{\iint_{x\leq 1, y\leq 1} f(x,y)dx}{\int_{-\infty}^{1} f_Y(y)dy}=\frac{e-2}{e-1}$.

三. (12分) 已知随机变量$(X,Y)\sim N(1,0,3^2,4^2,-\frac{1}{2})$, $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

(1) 求Z的数学期望$E(Z)$和方差$D(Z)$;

(2) 求X与Z的相关系数ρ_{XZ}.

3

$E(X)=1$. $D(X)=3^2$. $E(Y)=0$. $D(Y)=4^2$. $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$

$E(Z)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)$

$D(Z)=D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=D(\frac{X}{3})+D(\frac{Y}{2})+2Cov(\frac{X}{3},\frac{Y}{2})$

$=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+\frac{1}{3}\underbrace{Cov(X,Y)}_{=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

$\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=0$

四．（12分）设齐次马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的状态空间为$E=\{1,2,3\}$，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

初始分布为$P(X_0=1)=P(X_0=2)=P(X_0=3)=\frac{1}{3}$，求

(1) $P(X_2=2)$；

(2) $P(X_2=2, X_3=1, X_5=1)$；

(3) $P(X_2=2, X_3=1, X_5=1|X_0=3)$.

$P^2=$

(1) $P\{X_2=2\}=\sum_{i=1}^{3} P\{X_0=i\}\, P_{i2}^{(2)}$

(2) $P\{X_2=2, X_3=1, X_5=1\}=P\{X_2=2\}\cdot P_{21}\cdot P_{11}^{(2)}$

(3) $P\{X_2=2.\ X_3=1,\ X_5=1\ |X_0=3\}=P_{32}^{(2)}\cdot P_{21}\, P_{11}^{(2)}$

五．(12分) 设有限马尔可夫链的状态空间为

$E=\{1,2,3,4\}$，

一步转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(1) 画出状态转移图；

(2) 对状态进行分类，并说明周期性；

(3) 对状态空间进行分解；

(4) 求其平稳分布。

六．（１2分）设$X(t) = X_0 + \cos(2\pi t + \Theta)$，$t \geq 0$,其中$X_0 \sim U(0,1)$，$\Theta \sim U(0,2\pi)$, X_0与Θ相互独立.

(1) 证明$X(t)$是平稳过程；

(2) 将$X(t)$输入到脉冲响应函数$h(t) = \delta(t) - e^{-t}$ $(t \geq 0)$（其傅里叶变换为$H(\omega) = \frac{i\omega}{1+i\omega}$）的线性系统，输出为$Y(t)$，求$X(t)$的功率谱密度$S_X(\omega)$，$Y(t)$的功率谱密度$S_Y(\omega)$和自相关函数$R_Y(\tau)$.

$$\mu_X(t) = \underset{0}{\underset{\parallel}{E(X_0)}} + E[\cos(2\pi t+\theta)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi t+\theta) f_\theta(\theta) d\theta = 0$$

$$R_X(t, t+\tau) =$$