北京邮电大学 2020 ——2021 学年第一学期

《线性代数》期末考试试题（A）卷

参考答案

一、　填空（30 分，每空 3 分）

1．已知 $\alpha=(1,5,3)$，$\beta=(1,\frac{1}{5},\frac{1}{3})$，设 $A=\alpha^T\beta$，其中 α^T 为 α 的转置，则 $A^n=$ $\underline{3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{3}\\ 5 & 1 & \frac{5}{3}\\ 3 & \frac{3}{5} & 1\end{pmatrix}}$

2．设 A 为三阶矩阵，$|A|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B，则 $|BA^*|=$__-27____

3．过已知点 $M_0(2,3,-5)$ 且垂直于平面 $2x+7y-2z+5=0$ 的直线的标准（点向式）方程 $\underline{\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{7}=\frac{z+5}{-2}}$.

4．设 4 阶方阵 $A=(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，$B=(\gamma,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，其中 $\alpha,\gamma,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 均为 4 维列向量，且已知行列式 $|A|=4$，$|B|=1$，则 $|A+B|=$_40___

5．设 A 是 5×4 矩阵，$r(A)=2$，$X_1=(1,2,0,1)^T$，$X_2=(2,1,1,3)^T$ 是

方程组 $AX=b$ 的解， $X_3=(1,0,1,0)^T$ 是对应齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个解，则 $AX=b$ 的通解为 $\underline{k_1(1,0,1,0)^T+k_2(1,-1,1,2)^T+(1,2,0,1)^T\text{，}k_1,k_2\text{为任意常数}}$

6．设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2-A-5E=0$，则 $(A+E)^{-1}=\underline{\frac{1}{3}(A-2E)}$

7．已知 n 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2=A$，且 A 的秩 $r(A)=r$，则 $|A-3E|=\underline{(-1)^n2^r3^{n-r}}$

8．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&-2\\0&-2&k\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 k 的取值范围是 $\underline{k>8}$.

9．若 4 阶矩阵 B 与 A 相似，且 A 的特征值为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，则 $|B^{-1}-E|=$ $\underline{24}$.

10. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&-1&2&5\\3&4&-3&-2\\4&3&-1&3\end{pmatrix}$ 的等价标准形是 $\underline{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}}$

二、（12 分）设 $\alpha_1=(-1,-1,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,2,1,-1)^T$，$\alpha_3=(1,3,2,1)^T$，$\alpha_4=(2,6,4,1)^T$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，并将向量组中其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解：

$$\begin{pmatrix}-1&1&1&2\\-1&2&3&6\\0&1&2&4\\0&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1&2\\0&1&2&4\\0&1&2&4\\0&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1&2\\0&1&-1&-1\\0&1&2&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1&2\\0&1&-1&-1\\0&0&3&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1/3\\0&1&0&2/3\\0&0&1&5/3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是极大线性无关组；

且$\alpha_4=\dfrac{1}{3}\alpha_1+\dfrac{2}{3}\alpha_2+\dfrac{5}{3}\alpha_3$.

三、（12 分）已知$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\0&0&0&2\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$，$[(\frac{1}{2}A)^*]^{-1}BA^{-1}=2AB+12E$，求$B$.

解：$|A|=2$，$(\dfrac{1}{2}A)^*(\dfrac{1}{2}A)=|\dfrac{1}{2}A|E=\dfrac{1}{8}E$

所以，$[(\dfrac{1}{2}A)^*]^{-1}=4A$

由已知，得$4ABA^{-1}=2AB+12E$，于是

$$2AB=ABA+6A,$$

得到 $2B=BA+6E$

有$B(2E-A)=6E$，

$$B=6(2E-A)^{-1}=6\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&2&-2\\0&0&1&2\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0&0\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4&0&0\\-2&-2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

四、（14 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$，（1）求 A 的特征值和特征向量；（2）求正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角矩阵.

解（1）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7)=0$

得 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-7$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时， $2E-A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

线性方程组 $(2E-A)X=0$ 的同解方程组为 $x_1+2x_2-2x_3=0$，其基础解系为

$$\alpha_1=(-2,1,0)^T,\alpha_2=(2,0,1)^T$$

所以 A 的属于特征值 2 的特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，其中 k_1,k_2 是不全为零的常数.

当 $\lambda_3=-7$ 时，

$$-7E-A=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

线性方程组 $(-7E-A)X=0$ 的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\ x_2=-x_3\end{cases}$，

其基础解系为 $\alpha_3=(-1,-2,2)^T$

所以A的属于特征值-7的特征向量为$k_3\alpha_3$，其中k_3是非零的常数.

（2）将α_1,α_2正交化，得$\beta_1=(-2,1,0)^T,\beta_2=(2,4,5)^T$，再将$\beta_1,\beta_2,\alpha_3$单位化，可得

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^T,\eta_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)^T,\eta_3=\frac{1}{3}(-1,-2,2)^T$$

令$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，Q为正交矩阵，且有$Q^TAQ=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-7\end{pmatrix}$.

五、（14分）求k，使方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+3x_2+5x_3+x_4=3\\x_1-x_2-3x_3+5x_4=3\\x_1-5x_2-11x_3+12x_4=k\end{cases}$有解, 并求其通解.

解：$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&3&5&1&3\\1&-1&-3&5&3\\1&-5&-11&12&k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&1&2&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&k-6\end{pmatrix}$

k=6时，方程组有解

同解方程组为$\begin{cases}x_1=-1+x_3\\x_2=1-2x_3\\x_4=1\end{cases}$

特解为$\eta=(-1,1,0,1)^T$

导出组的基础解系为$\xi=(1,-2,1,0)^T$

通解为$X=\eta+k\xi$，k为任意常数.

六（12 分）、已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s(s\ge 1)$线性无关，讨论向量组$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3,...,\alpha_s+\alpha_1$的线性相关性.

解：设$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+...+k_s(\alpha_s+\alpha_1)=0$ （1）

$$(k_1+k_s)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+...+(k_{s-1}+k_s)\alpha_s=0$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$线性无关，所以

$$\begin{cases} k_1+k_s=0 \\ k_1+k_2=0 \\ \cdots\cdots \\ k_{s-1}+k_s=0 \end{cases}$$

又 $$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{s-1}$$

因为当 s 为奇数时，$D=2\ne 0$，方程（1）只零解，向量组线性无关；

当 s 为偶数时，$D=0$，方程（1）有非零解，向量组线性相关.

七、（6 分）设$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，$\alpha,\beta$为 3 维列向量，$\alpha^T$为$\alpha$的转置，$\beta^T$为$\beta$的转置，证明：（1）$r(A)\le 2$；（2）若$\alpha,\beta$线性相关，则$r(A)<2$.

证明：（1）$r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=r(\alpha)+r(\beta)\le 2$

（2）由于α,β线性相关，不妨设$\alpha=k\beta$，于是

$r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r[(1+k^2)\beta\beta^T]=r(\beta\beta^T)=r(\beta)\le 1<2$.