第九章 机械振动

第九章 机械振动

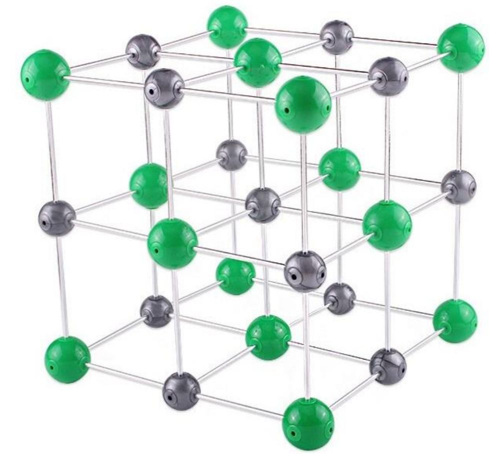
§9.1 简谐振动 振幅 周期 频率 相位

§9.2 旋转矢量

§9.4 简谐运动的能量

§9.5 简谐振动的合成 拍现象

§9.1-9.4　简谐振动



举例：

力学：机械振动，指位移x随时间t的往复变化；

电学：电磁振动，指电场、磁场等电磁量随时间t的往复变化；

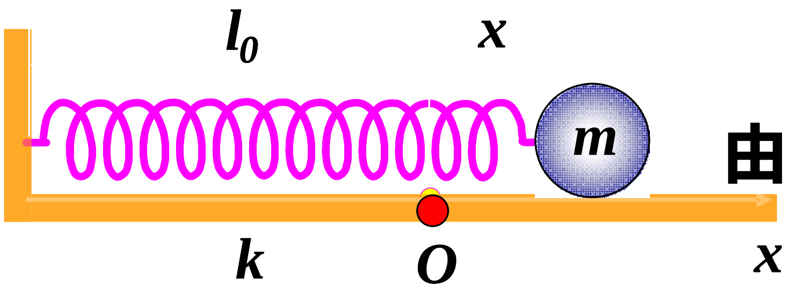
晶体学：微观振动，如晶格点阵上原子的振动。

广义振动：任一物理量(如位移、电流等)在某一数值附近往复变化

受力
- **受迫振动**
- **自由振动**
  - **阻尼自由振动**
  - **无阻尼自由振动**
    - **非谐振动**
    - **简谐振动**

一、动力学方程

举例：弹簧振子



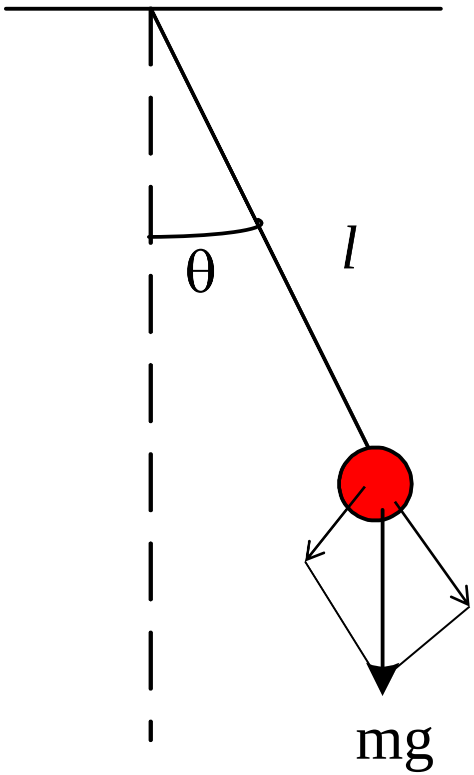
根据胡克定律 $f = -kx$

由牛顿第二定律，弹簧振子所受的力为

$$f = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

则有 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx \;\Rightarrow\; \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$

令 $\dfrac{k}{m} = \omega^2$，**则** $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$



举例：单摆 小球沿切线方向的运动学方程为:
(规定逆时针转时角位移为正)

$$mg\sin\theta = -m\frac{d\upsilon}{dt}$$

由 $\upsilon = l\dfrac{d\theta}{dt}$ 上式可以写成 $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\sin\theta = 0$

当θ较小时，由如下近似: $\sin\theta = \theta - \dfrac{1}{6}\theta^3 + \cdots \approx \theta$

于是运动方程可以写成: $\dfrac{d^2\theta}{d^2t} + \dfrac{g}{l}\theta = 0$

令 $g/l = \omega^2$ 则有: $\dfrac{d^2\theta}{d^2t} + \omega^2\theta = 0$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \qquad \frac{d^2\theta}{d^2t}+\omega^2\theta=0$$

二阶常系数微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

……**简谐振动的动力学方程**

凡是满足此方程形式的均为简谐振动---**判断方法之一**

固有角频率

弹簧振子 $\sqrt{\frac{k}{m}}=\omega$ 单摆 $\sqrt{\frac{g}{l}}=\omega$

二、运动学方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$ ……动力学方程

物理上，选用 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ ……运动学方程

凡是满足位移随时间作余弦变化的均为简谐振动---**判断方法之二**

速度 $$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)=\omega A\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_{\max}=|\omega A|$$

加速度 $$a=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)=A\omega^2\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

$$a_{\max}=\left|-A\omega^2\right|$$

位移与加速度之间的关系

$$\boxed{a=-\omega^2x}$$

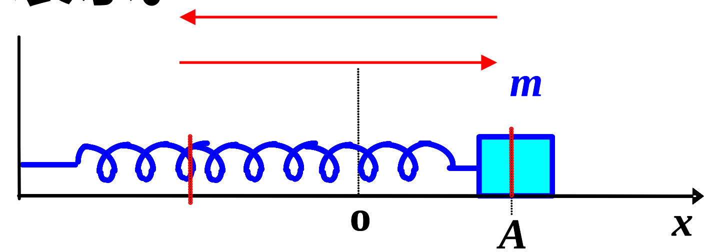
三、描述简谐振动的物理量

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

1、周期、频率、角频率

周期：完全振动一次所需要的时间，用T表示。

$$A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos[\omega(t + T) + \varphi]$$



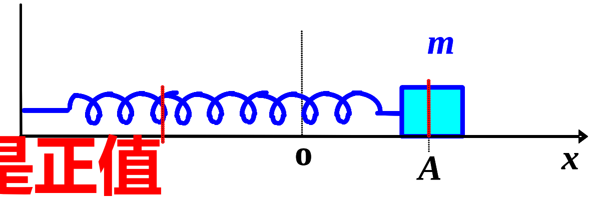
$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi\nu$$

弹簧振子 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 单摆 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

2、振幅 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$



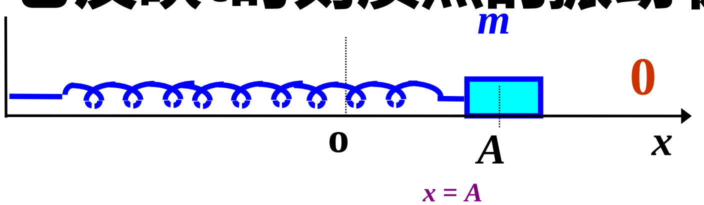
振幅：质点离开平衡位置的最大距离，A永远是正值

3、相位 $\omega t + \varphi$

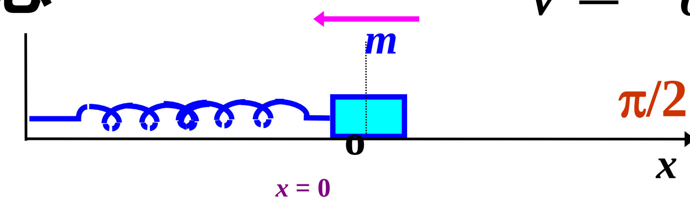
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

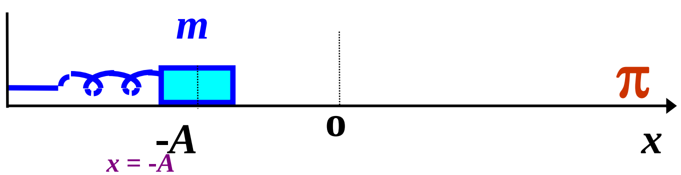
它反映t时刻质点的振动状态



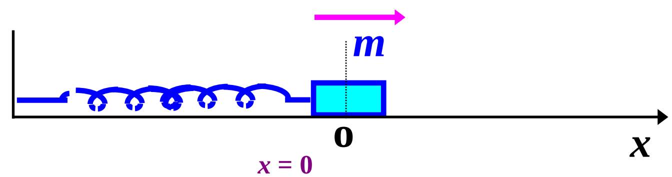
0



π/2

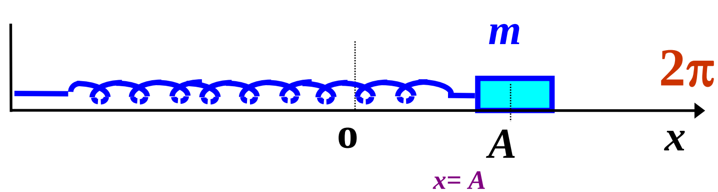


π



3π/2 或

-π/2



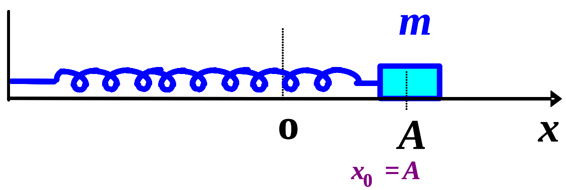
2π

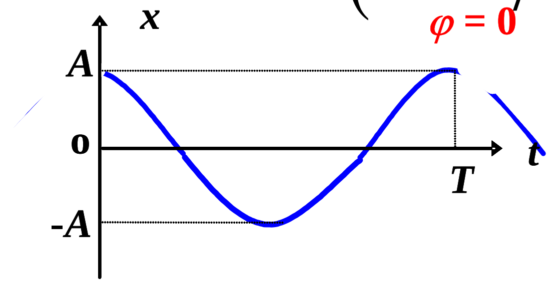
4、初相(t=0时的相位) φ

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

t=0，$\varphi=0$

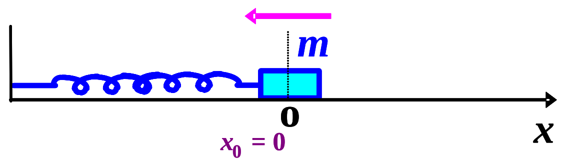
初始位置 $x = A$

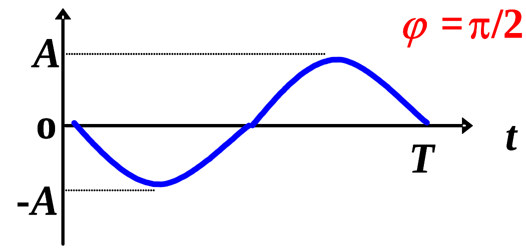




t=0，$\varphi=\pi/2$

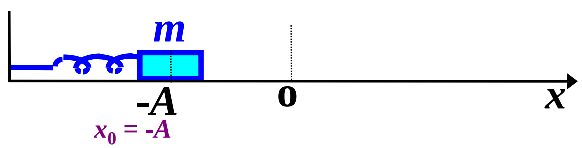
初始位置 $x = 0$

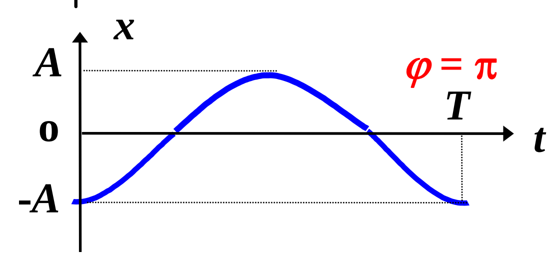




t=0，$\varphi=\pi$

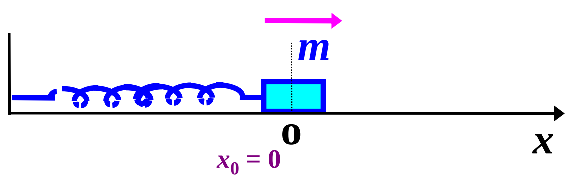
初始位置 $x = -A$

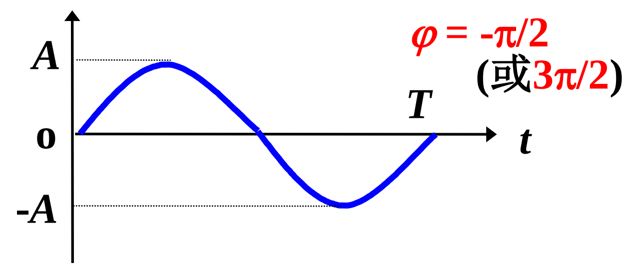




t=0，$\varphi=3\pi/2$

初始位置 $x = 0$





例题1、质点作简谐振动A=4cm，ν=0.5Hz，t=1s时x= -2cm，且向X正方向运动，写出振动表达式。

解：设振动表达式为 $x = A\cos\left(\omega t + \varphi\right)$

已知 $\omega = 2\pi\nu = \pi$ **则** $x = 0.04\cos\left(\pi t + \varphi\right)$

由已知，有 $-0.02 = 0.04\cos\left(\pi + \varphi\right)$

$$\cos\left(\pi + \varphi\right) = -\frac{1}{2}$$ **则** $\varphi = \pm\pi/3$

此时向x正方向运动，故 V>0，因此 $\sin\left(\pi + \varphi\right) < 0$

即 $\sin\left(\varphi\right) > 0$

故选择 $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

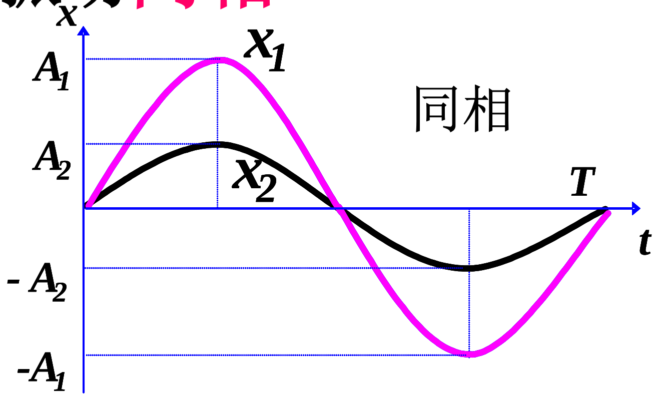
则 $x = 0.04\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$

5、相位差 $x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ $x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

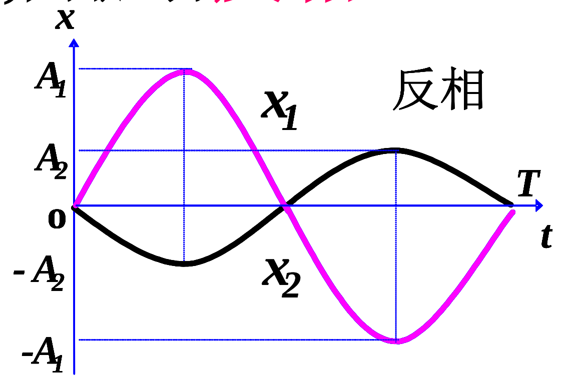
其相位差为： $\Delta\varphi = (\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1) = \varphi_2-\varphi_1$

➢ 同相和反相

当$\Delta\varphi = \pm 2k\pi$ (k =0,1,2,…)时，两振动**同相**



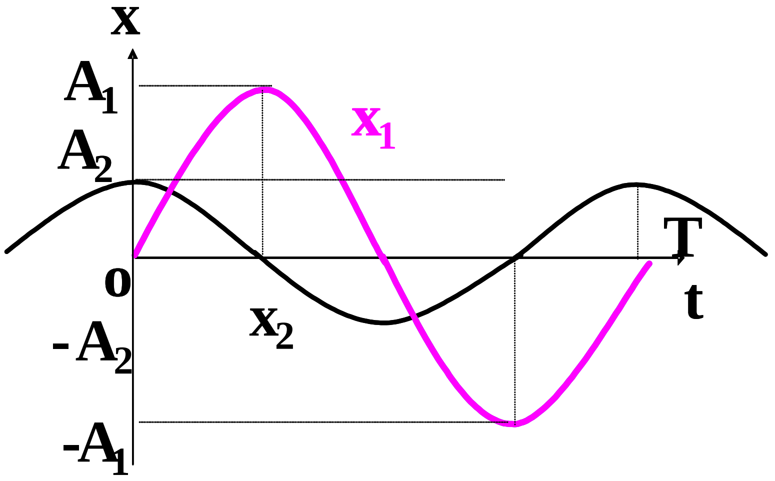
当$\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$ (k =0,1,2,…)时,两振动**反相**



- 超前和落后

若$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$，则 x_2比x_1较早达到正最大，称x_2比x_1超前(或x_1比x_2落后)。

领先、落后以小于π的相位角来判断！！！

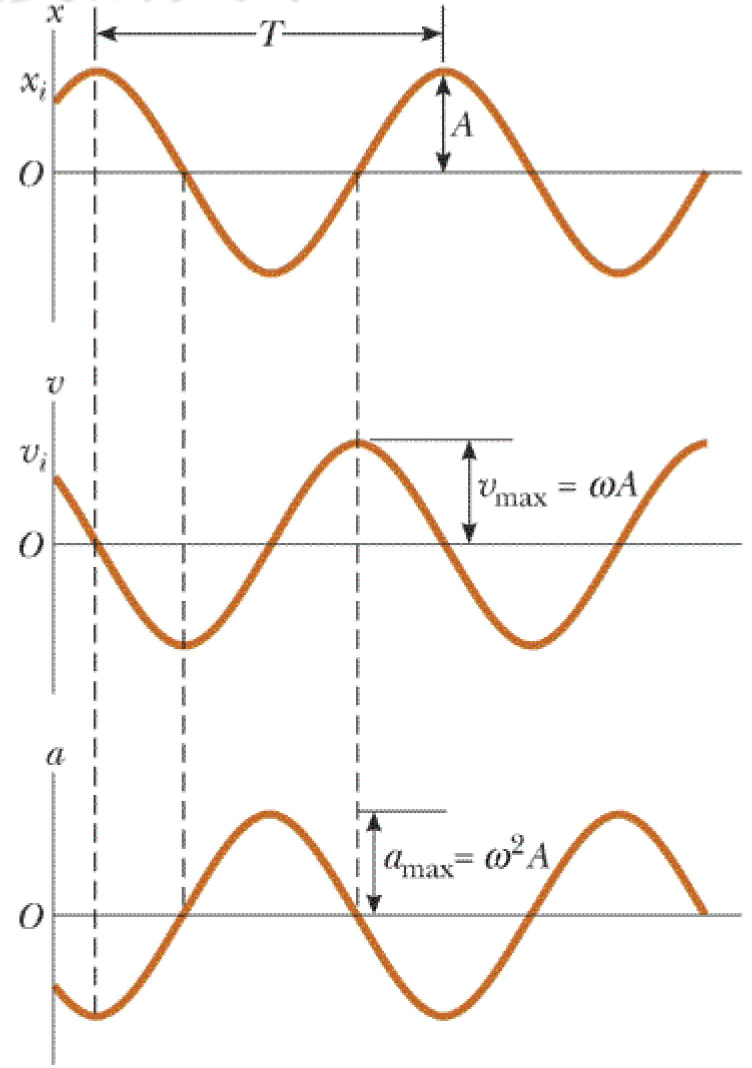


位移、速度与加速度的关系

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi) = \omega A\cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = \omega^2 A(\omega t + \phi + \pi)$$



结论：

（1）速度超前位移π/2 的相位

（2）加速度超前位移π 相位

6、由初始条件求振幅和相位

若已知初始时振动的位移和速度，即

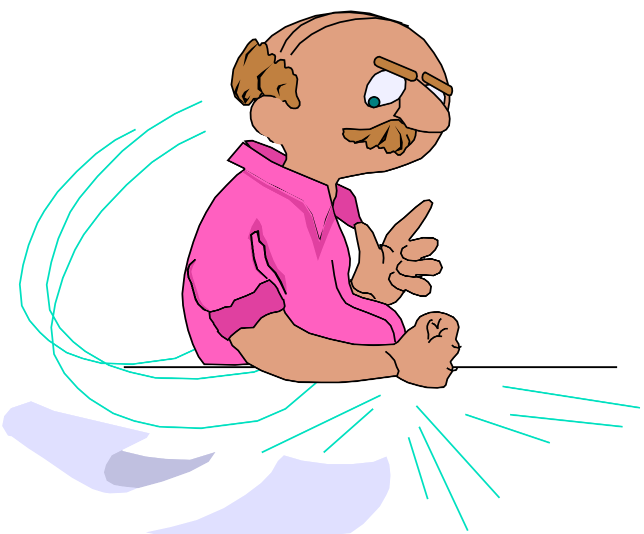
设 $t=0$时，振动位移：$x = x_0$

振动速度：$v = v_0$

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi) \\ \upsilon = -\omega A\sin(\omega t+\varphi) \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ \upsilon_0 = -\omega A\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{\upsilon_0}{-\omega} = A\sin\varphi$$

$$A = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{\upsilon_0}{\omega x_0}\right)$$



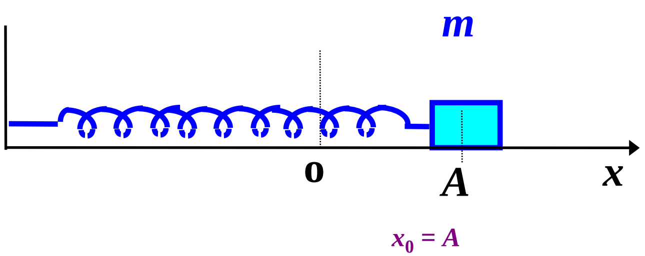
四、简谐振动的表示方法

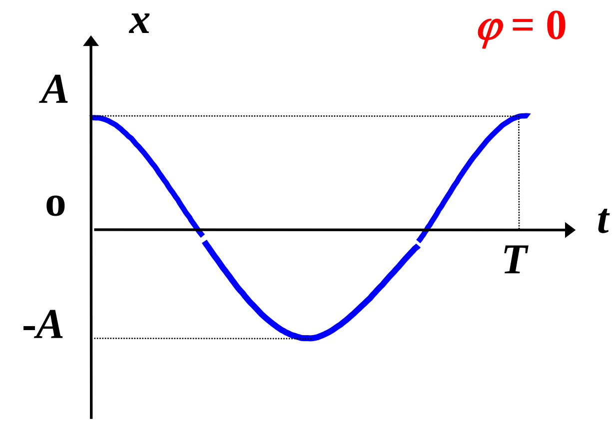
（1）振动表达式 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ ⟺ A, ω, φ

（2）振动曲线

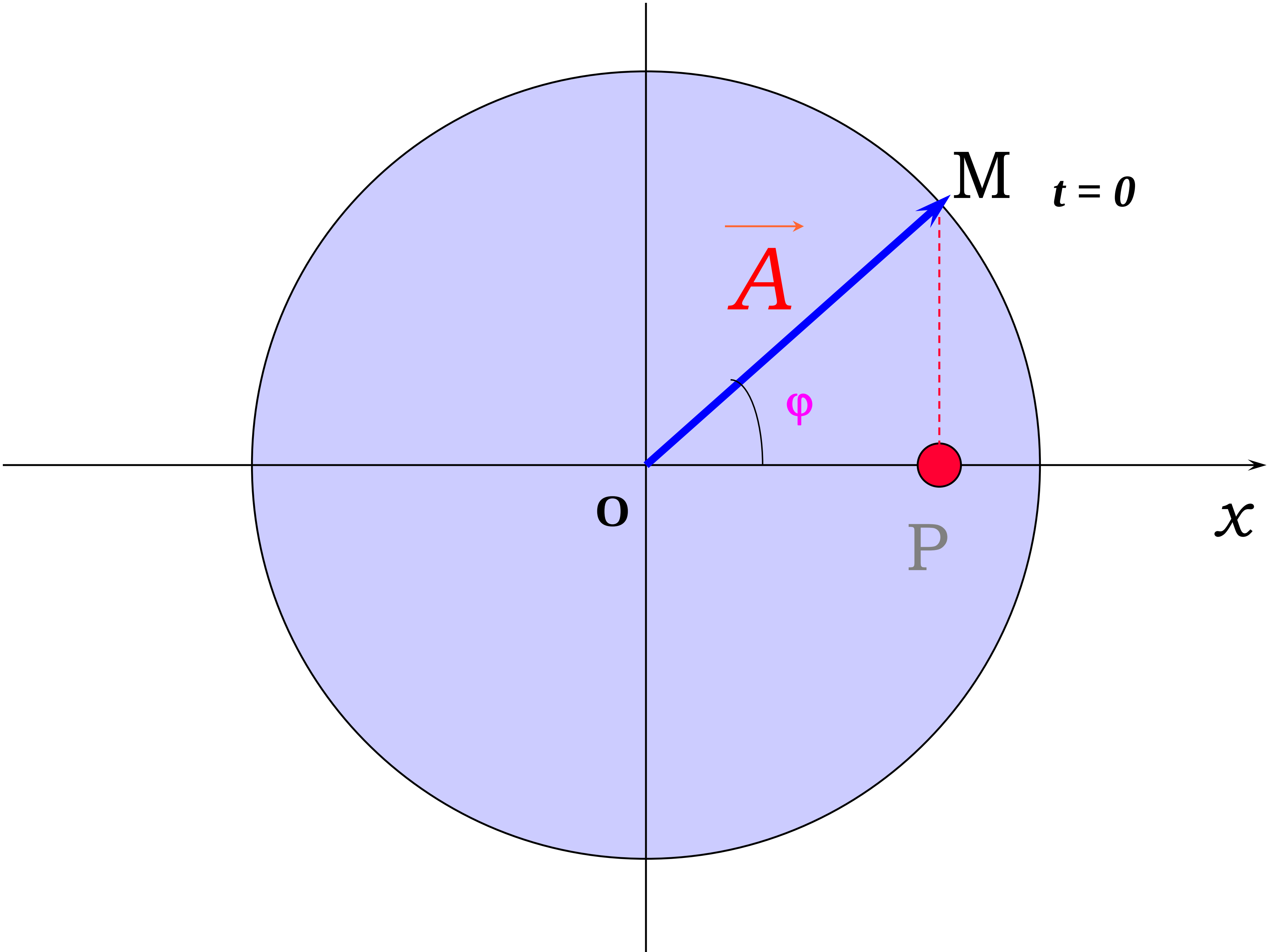
t=0， φ =0

初始位置 $x = A$

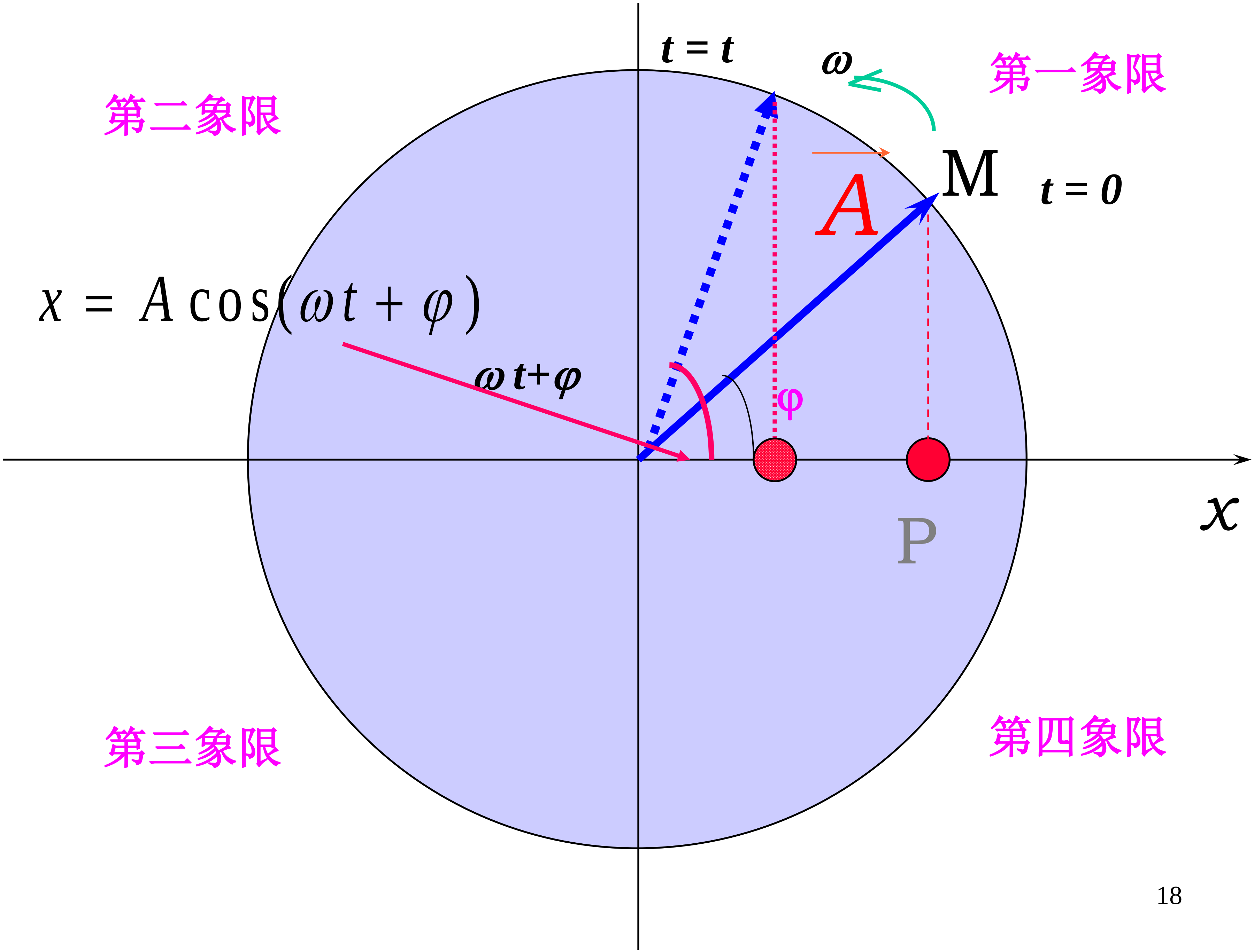




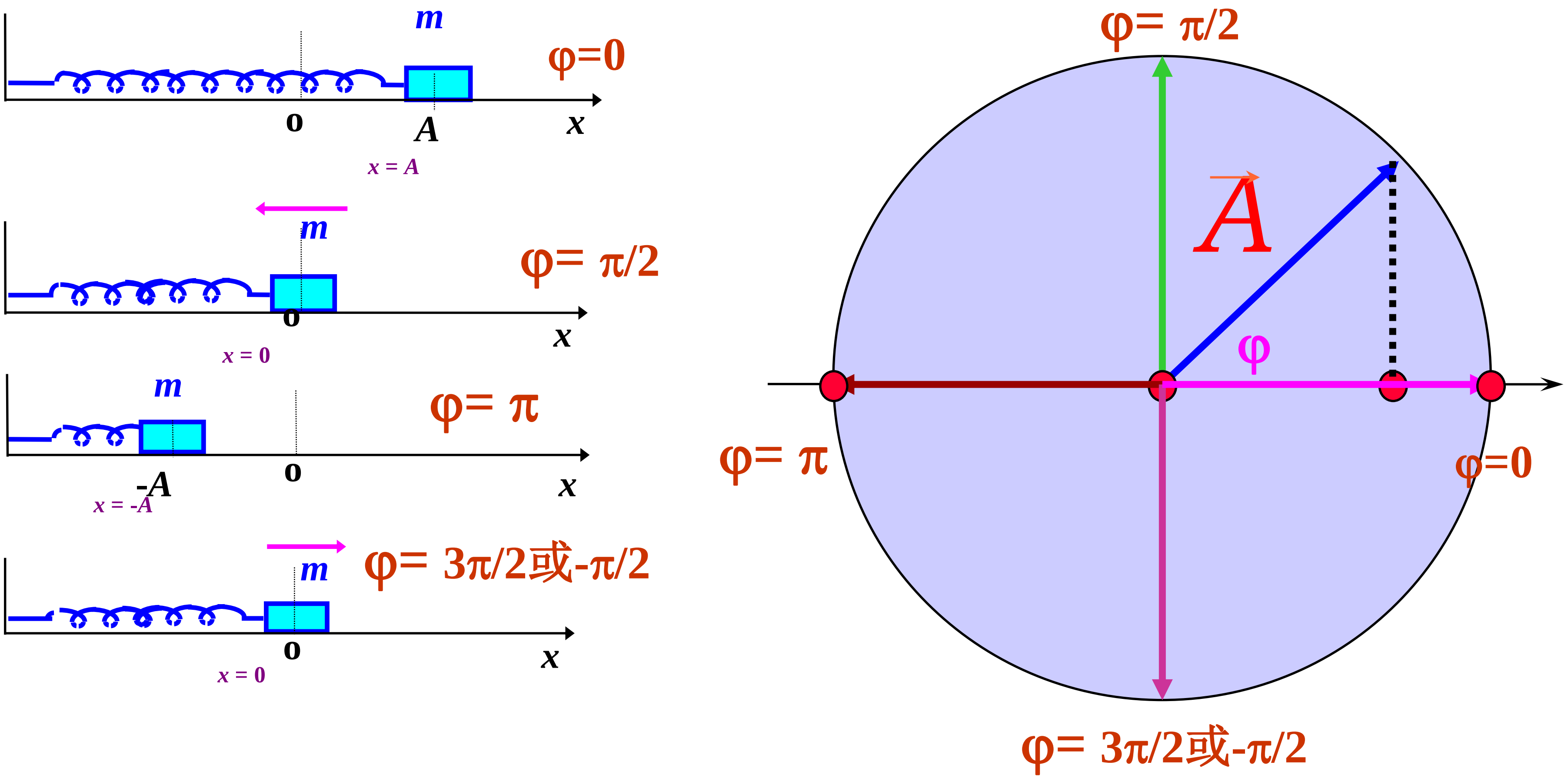
（3）旋转矢量法


M
t = 0
$\vec{A}$
φ
O
P
x

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

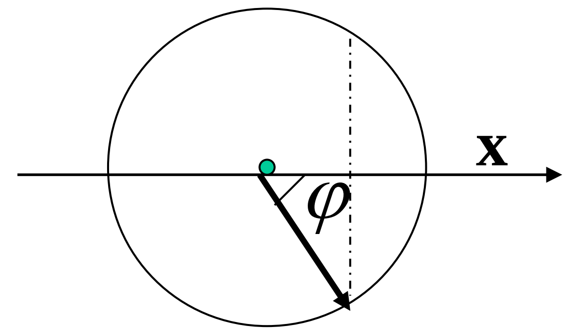


简谐振动与旋转矢量的一一对应关系



例题1、质点作简谐振动A=24cm，T=4s，t=0s时位移为+12cm，且向X正方向运动，写出振动表达式。

解：设振动表达式为 $x = A\cos\left(\omega t + \varphi\right)$



已知 $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$

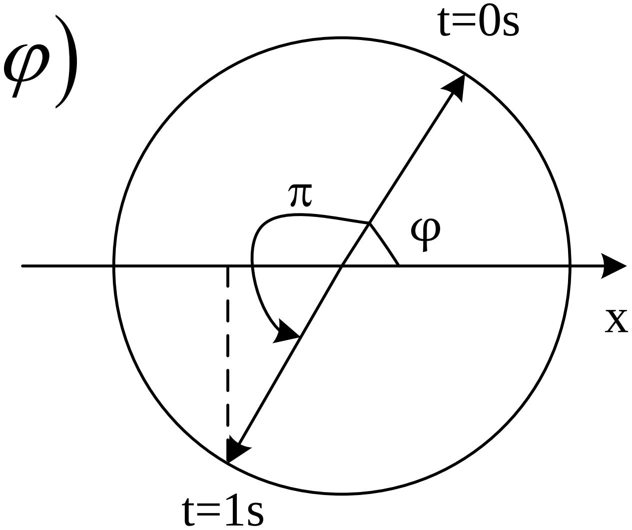
则 $x = 0.24\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t + \varphi\right)$

由旋转矢量法得到初相位 $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$

$$x = 0.24\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

例题2、质点作简谐振动A=4cm，ν=0.5Hz，t=1s时x= -2cm，且X正方向运动，写出振动表达式。

解：设振动表达式为 $x = A\cos\left(\omega t+\varphi\right)$



已知 $\omega = 2\pi\nu = \pi$

则 $x = 0.04\cos\left(\pi t+\varphi\right)$

画半径为0.04m的圆，选出x = -0.02m的位置，
此时的矢量在第二或第三象限，考虑振子向x轴
正方向运动，因此矢量在第三象限。由于T = 2s，故从
T = 0到t = 1s矢量旋转了π，故t = 0的位置得到初相也得到

则 $x = 0.04\cos\left(\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$

五、简谐振动的能量　　以弹簧振子为例，平衡位置处势能为零

1 动能　$E_k=\frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad =\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

$$=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_{k\max}=\frac{1}{2}kA^2,E_{k\min}=0$$

2 势能

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_{P\max}=\frac{1}{2}kA^2,E_{P\min}=0$$

3 机械能 $E = E_k + E_p$

$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}kA^2$$

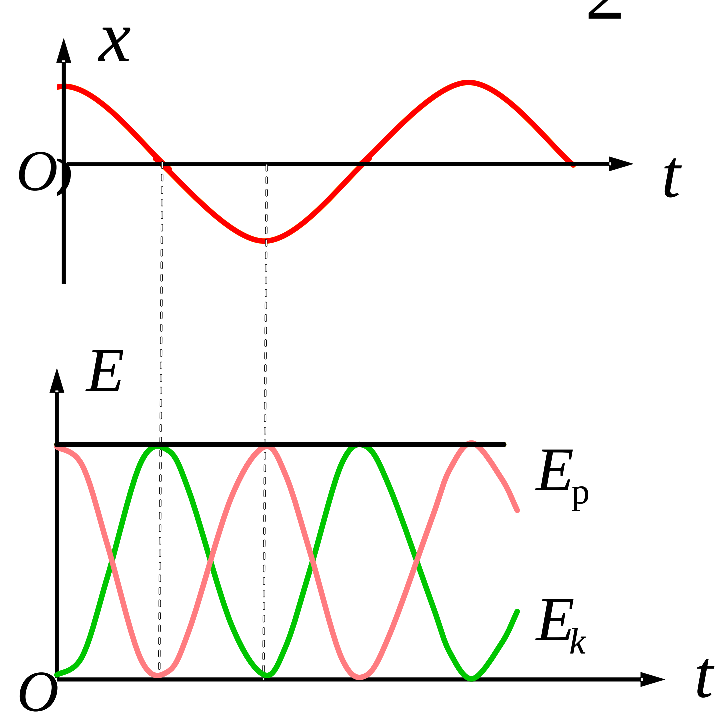
注意：（1）振子在振动过程中，动能和势能分别随时间变化，但**任一时刻总机械能保持不变**。

（2）由起始能量求振幅

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}$$

（3）写出E表达式，证明 $\dfrac{dE}{dt} = 0$

- - - **简谐振动判断方法之三**



例 当简谐振动的位移为振幅的一半时，其动能和势能各占总能量的多少？ 物体在什么位置时其动能和势能各占总能量的一半？

解： $$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2$$

当 $x = A/2$ 时： $$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}E$$

$$E_k = E - E_p = \frac{3}{4}E$$

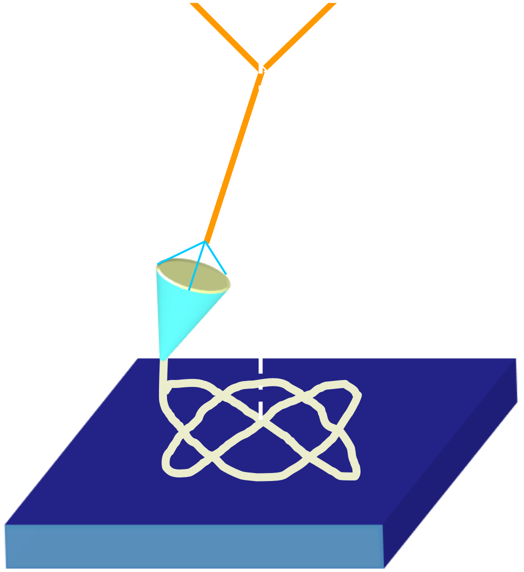
$$\frac{1}{2}kx_0^{\ 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}kA^2 \qquad x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}A = \pm 0.707A$$

§ 12.4 谐振动的合成

1. 同方向同频率谐振动的合成

2. 同方向不同频率谐振动的合成　拍

3. 相互垂直谐振动的合成



一、同方向同频率的简谐振动的合成

1、解析法 $x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$

$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

合振动：

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$= \underbrace{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)}_{A\cos\varphi}\cos\omega t - \underbrace{(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)}_{A\sin\varphi}\sin\omega t$$

$$\boxed{x = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t = A\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \qquad \tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

➢ 结论：合振动 x 仍是简谐振动

2、旋转矢量法 $x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$

$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

合振动：

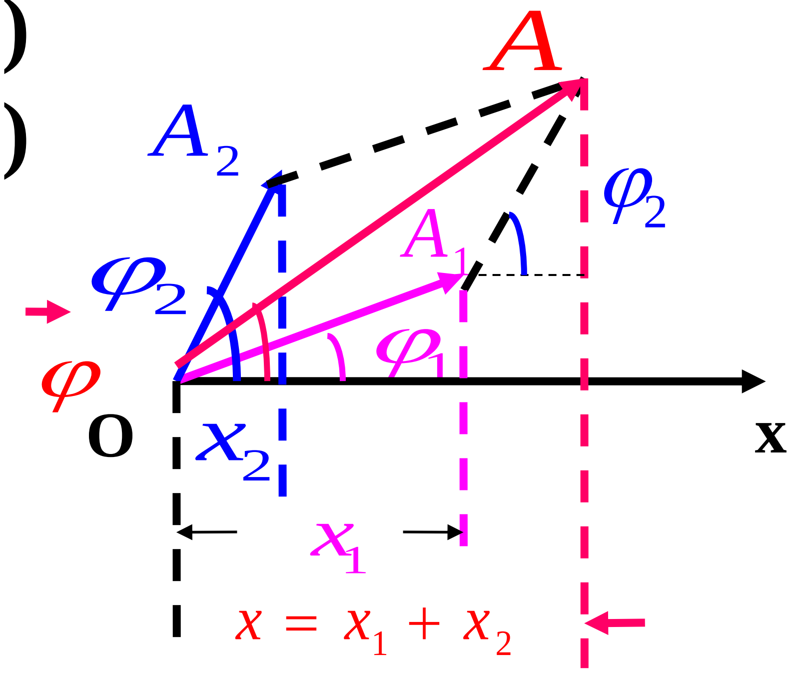
$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A_x = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2$$

$$A_y = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$



➢ 结论：与解析法求得的结果一致，方法直观、简捷.

讨论

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

(1)若两分振动同相

$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi$ $(k=0,1,2,\ldots)$

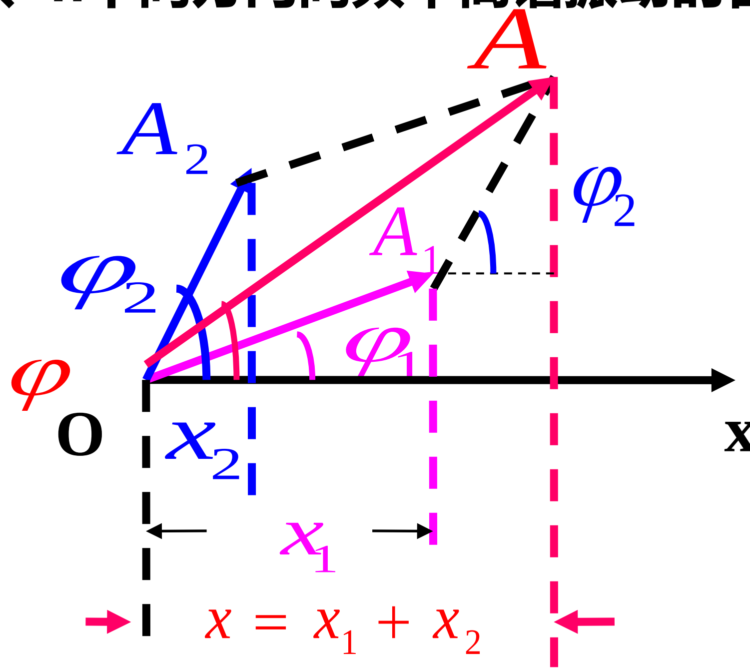
则$A=A_1+A_2$，两分振动相互加强

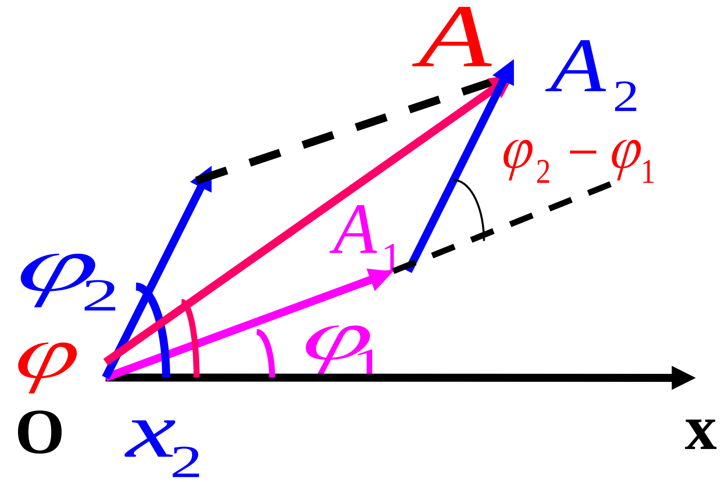
(2)若两分振动反相 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2k+1)\pi$ $(k=0,1,2,\ldots)$,

则$A=|A_1-A_2|$，两分振动相互减弱

如 $A_1=A_2$，则 $A=0$，表示质点静止

3、n个同方向同频率简谐振动的合成





$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

设有 ***n*** 个同方向、同频率、振幅 ***a*** 相同、初相差依次为一常量ε的谐振动，它们的振动分别为

$$x_1 = a\cos\omega t$$

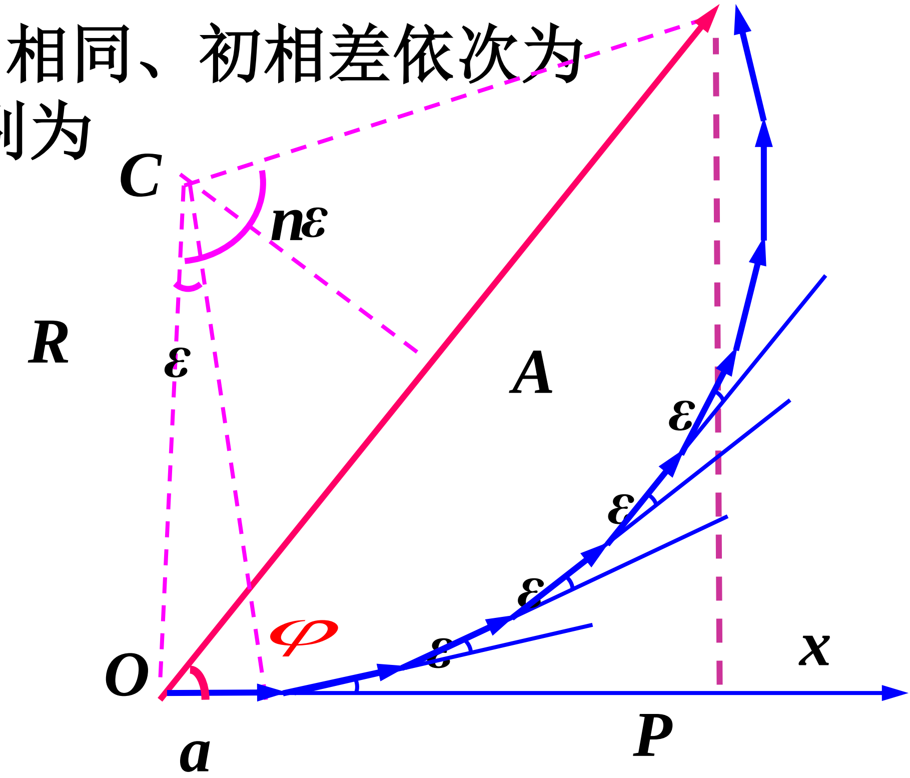
$$x_2 = a\cos(\omega t+\varepsilon)$$

$$x_3 = a\cos(\omega t+2\varepsilon)$$

…… ……

$$x_n = a\cos[(\omega t+(n-1)\varepsilon]$$

求合振动的振动方程.



解 $x = \sum x_n = A\cos(\omega t+\varphi)$

$$A = 2R\sin\frac{n\varepsilon}{2}$$

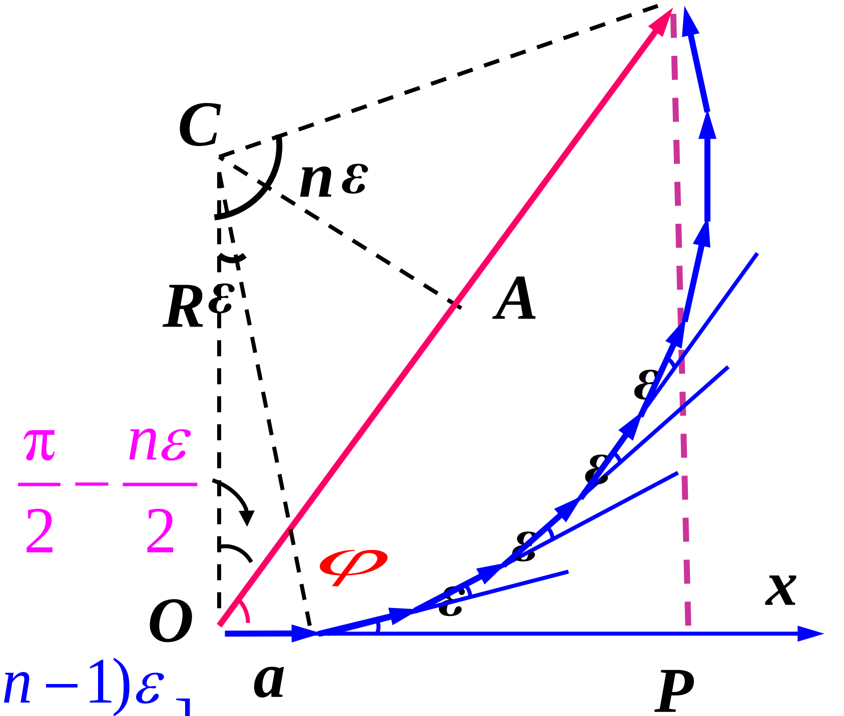
$$a = 2R\sin\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow A = a\frac{\sin n\varepsilon/2}{\sin\varepsilon/2}$$

$$x = \sum x_n = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = a\frac{\sin n\varepsilon/2}{\sin \varepsilon/2}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}(\pi - \varepsilon) - \frac{1}{2}(\pi - n\varepsilon) = \frac{n-1}{2}\varepsilon$$

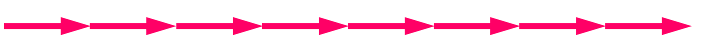


故

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = a\frac{\sin\frac{n\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\cos[\omega t + \frac{(n-1)\varepsilon}{2}]$$

➢ **讨论：**

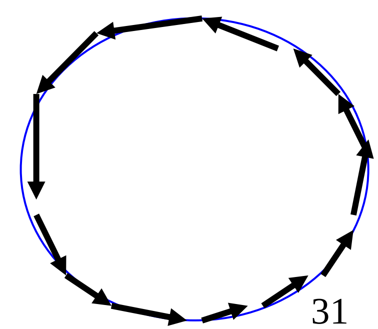
(1) 各分振动初相相同，即 ε=2kπ



$$A = na$$

(2) 各分振动初相差为 $\varepsilon = \frac{2k'\pi}{n}$，$k' \neq nk$

$$A = a\frac{\sin k'\pi}{\sin\frac{k'\pi}{n}} = 0$$



二、同方向不同频率的简谐振动的合成，拍

分振动：$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega_1 t \\ x_2 = A\cos\omega_2 t \end{cases}$

合振动： $x = x_1 + x_2 = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t$

$$= 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t \cdot \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})t$$

当 $\omega_2 \cong \omega_1$ 时， $\omega_2 - \omega_1 << \omega_2 + \omega_1$， 令 $x = A(t)\cos\overline{\omega}t$

其中 $\boxed{A(t) = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)}$ $\boxed{\cos\overline{\omega}t = \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t)}$

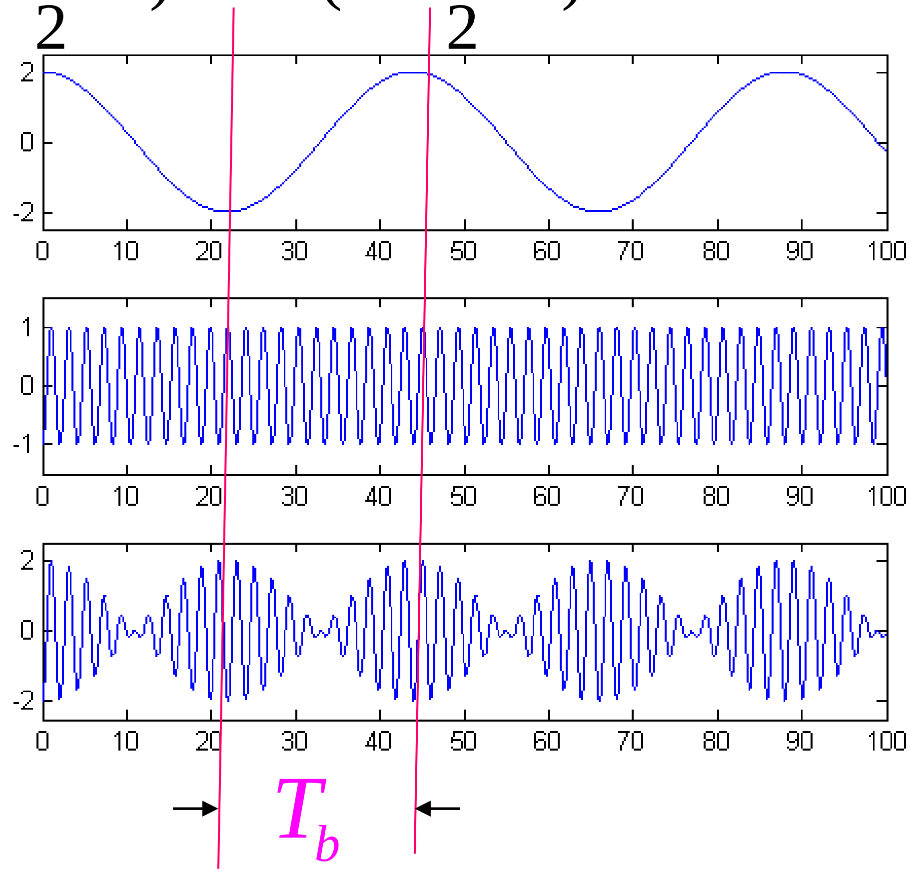
随 t 缓变　　　　随 t 快变

- 结论：合振动 x 可看作是振幅缓变的简谐振动。

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t \cdot \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})t$$

$$2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t$$

$$\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})t$$



拍：合振动的振幅时强时弱的现象

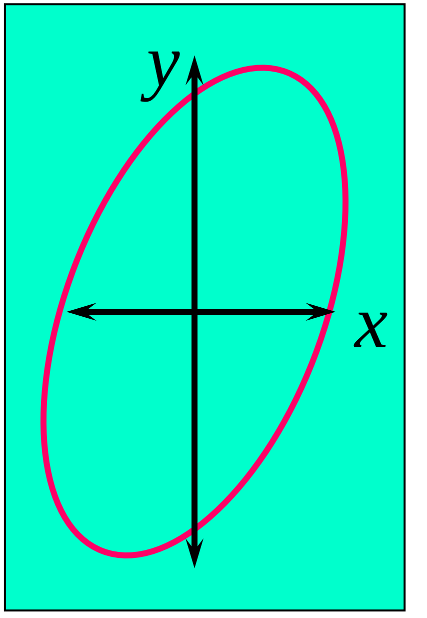
拍频 $\nu_{拍} = \dfrac{1}{T_b} =$

$$2 \cdot \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \frac{1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1$$

三、相互垂直的简谐振动的合成

1、同频率相互垂直的简谐振动合成

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$



$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t \cos\varphi_1 - \sin\omega t \sin\varphi_1$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos\omega t \cos\varphi_2 - \sin\omega t \sin\varphi_2$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

结论：两相互垂直同频率简谐运动的合成其振动轨迹为一椭圆(又称“椭圆振动”)。椭圆轨迹的形状取决于振幅和相位差。

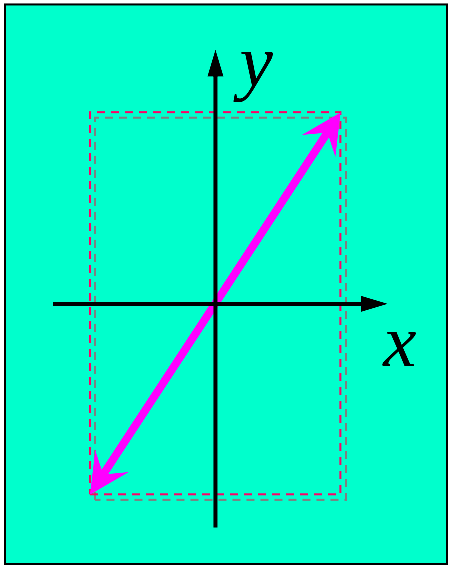
讨论:

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

(1) $\varphi_2-\varphi_1=0$ (或 $2k\pi$)时

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}=0 \qquad \left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

$$y=\frac{A_2}{A_1}x \qquad \text{斜率 } \frac{A_2}{A_1}>0$$



轨迹离开平衡位置的位移为

$$S=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega t+\varphi_1)$$

结论:

质点作线振动

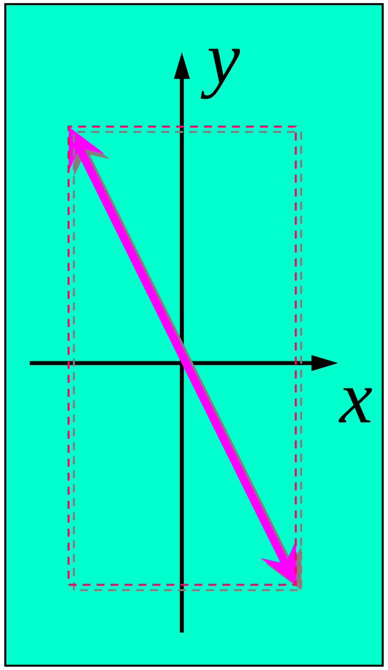
讨论:

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

(2) $\varphi_2-\varphi_1=\pi$或$(2k\pi+\pi)$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{2xy}{A_1A_2}=0 \qquad \left(\frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x$$ ，斜率：$-\frac{A_2}{A_1}<0$



轨迹离开平衡位置的位移为

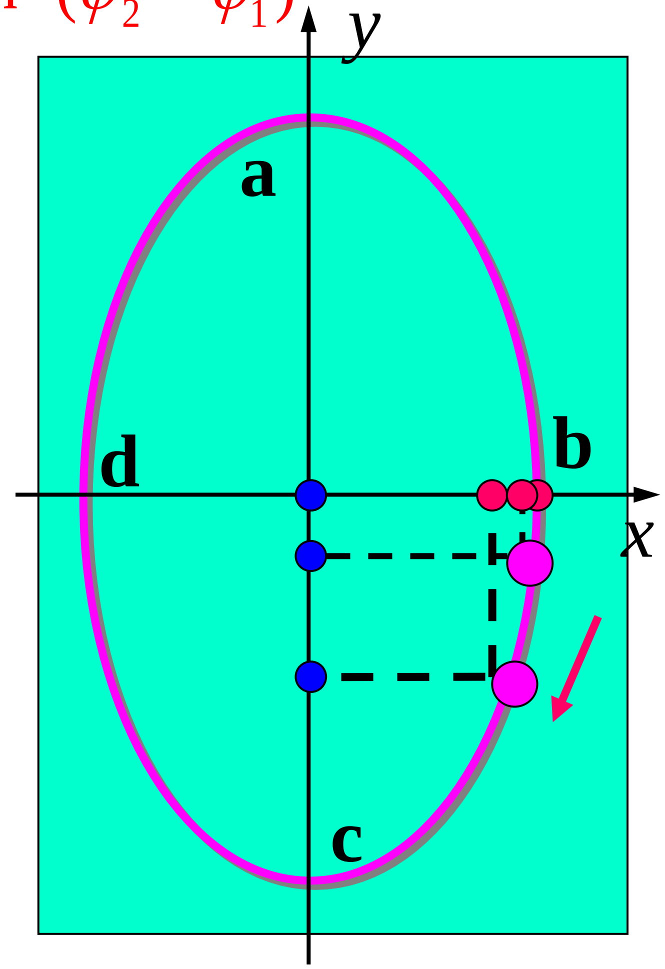
$$S=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega t+\varphi_1)$$

结论：质点作线振动

讨论: $\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$

$$(3) \qquad \varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}\left[\text{或}\ (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

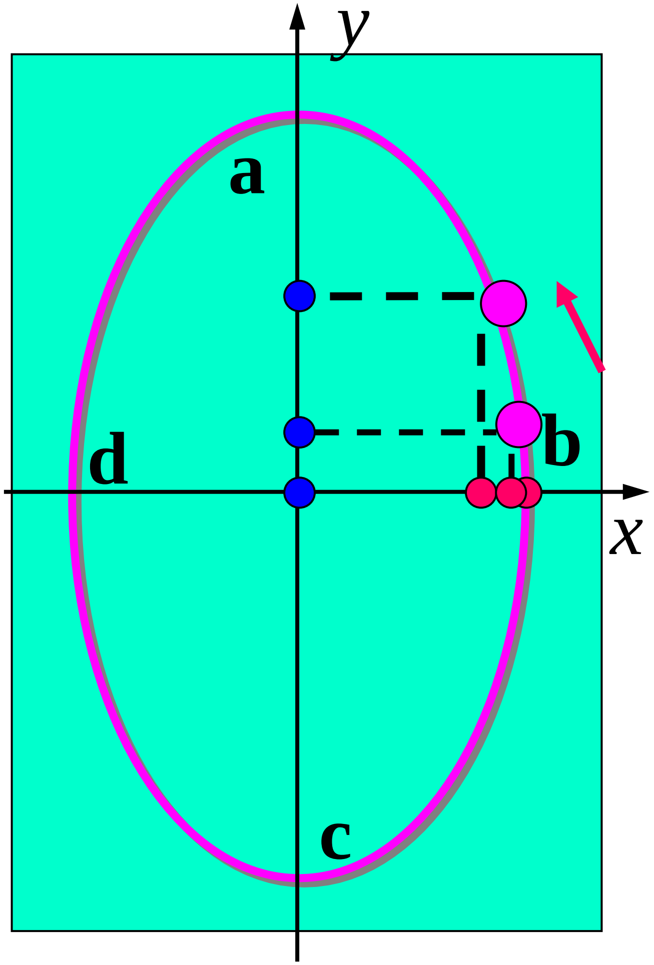


结论：质点振动轨迹为顺时针的椭圆

讨论: $$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

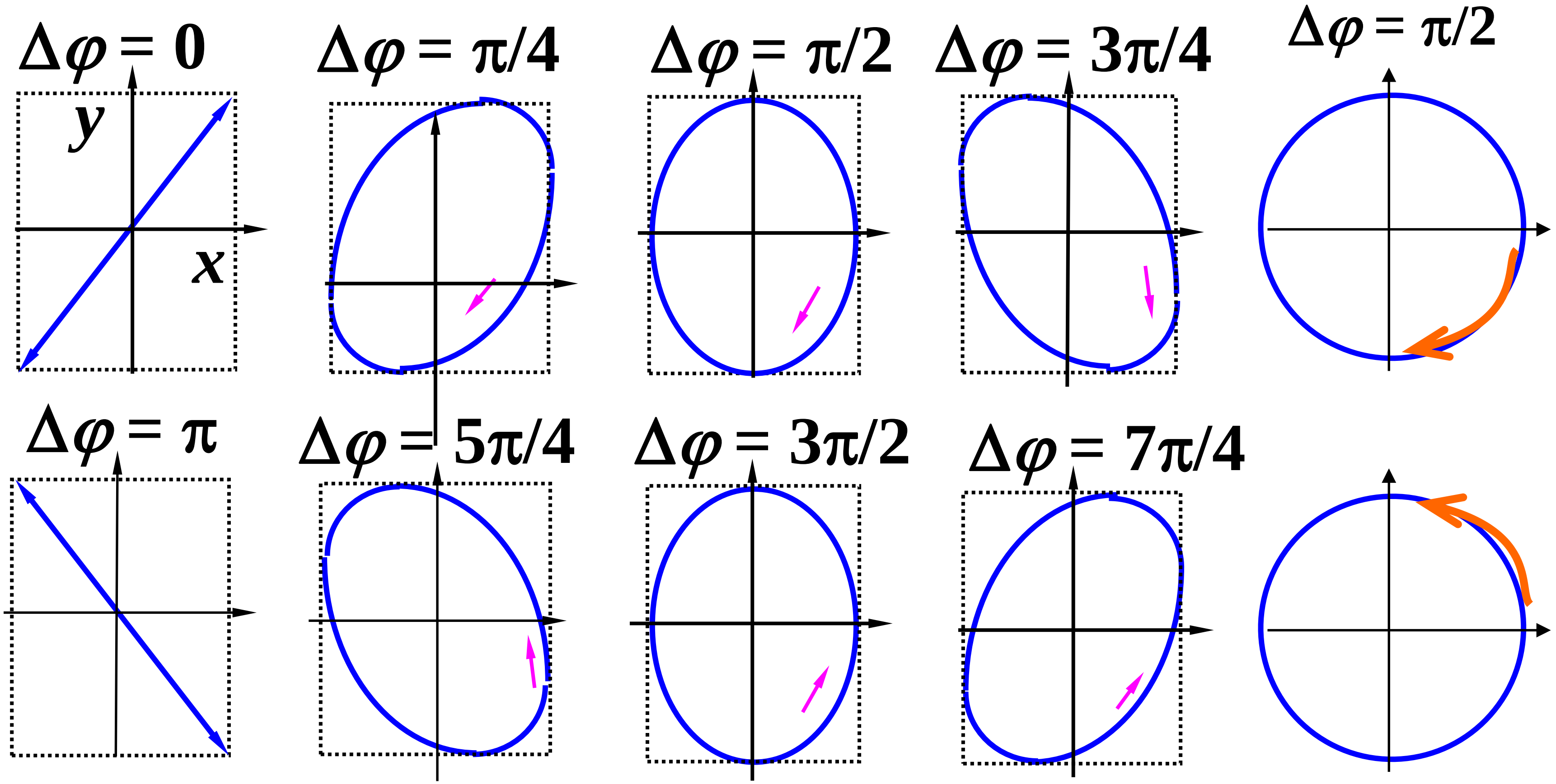
(4) $$\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$



结论：质点振动轨迹为逆时针的椭圆

光矢量末端点的运动轨迹是椭圆或圆



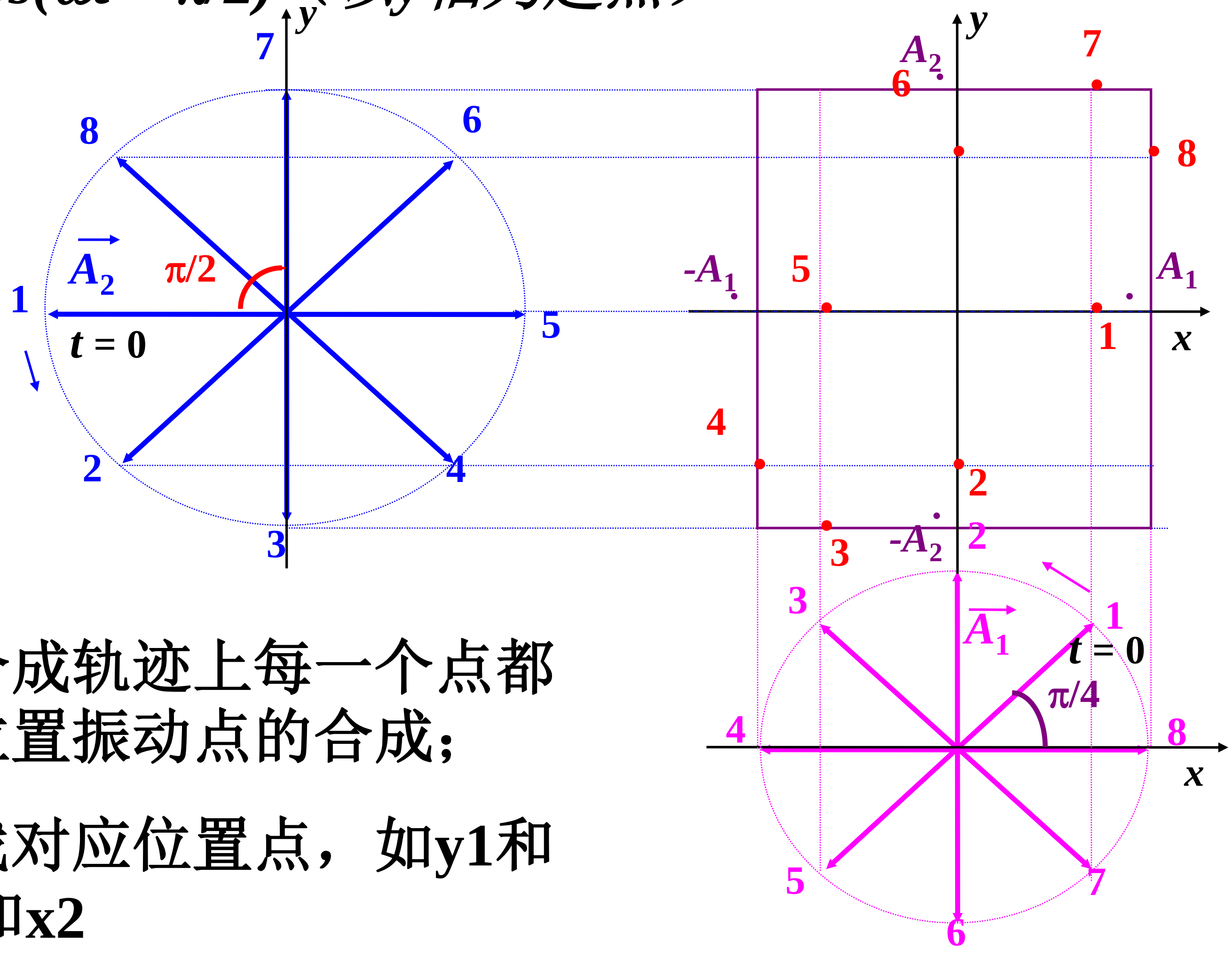
椭圆和圆偏振光可看成两束频率相同、振动方向相互垂直、相位差恒定的线偏振光的合成。

采用旋转矢量法画简谐振动的合成

窍门

$x = A_1\cos(\omega t + \pi/4)$（以x轴为起点）

$y = A_2\cos(\omega t + \pi/2)$（以y轴为起点）



依据：合成轨迹上每一个点都是对应位置振动点的合成；

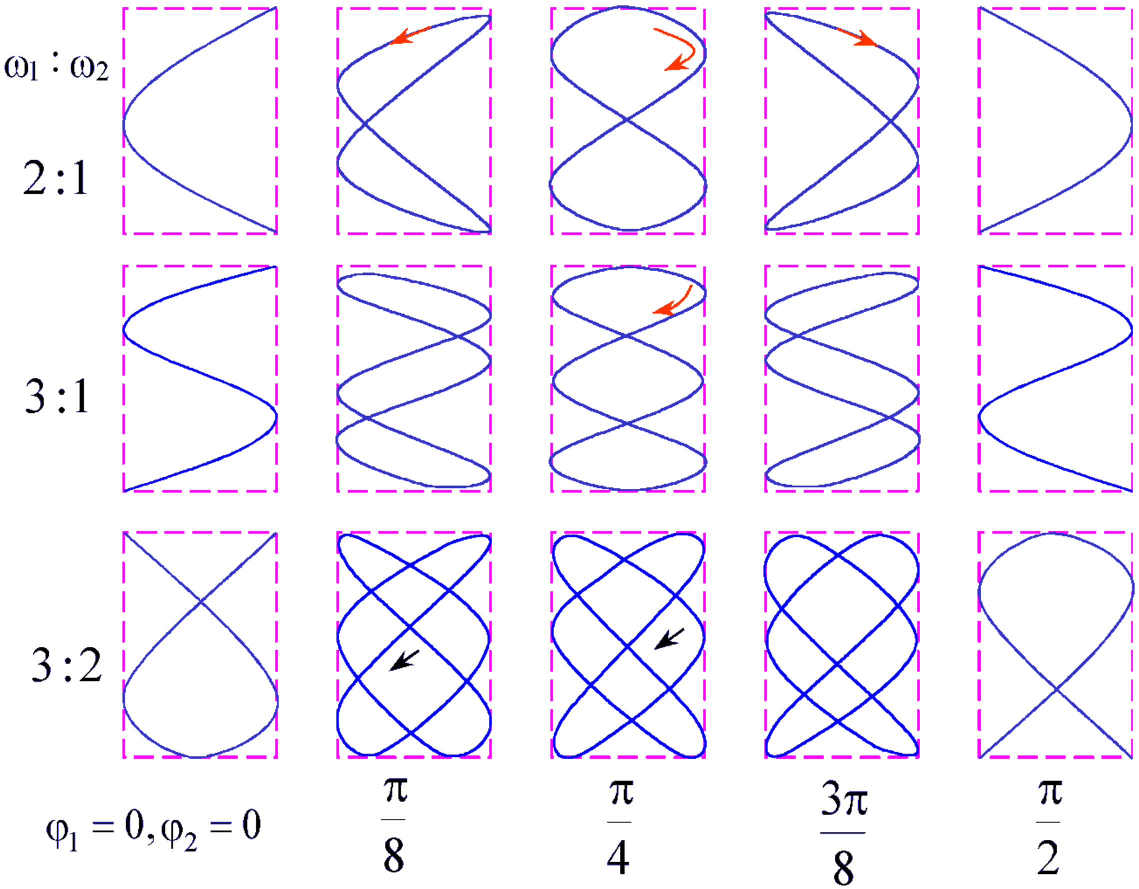
方法：找对应位置点，如y1和x1， y2和x2

2、不同频率相互垂直的简谐振动合成

$$x = A_1 \cos \omega_1 t \quad y = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta)$$

（1）ω_1、ω_2 之比为非整数时，合成运动为非周期运动，轨迹永不闭合；

（2） ω_1、ω_2 之比为整数时，**合成运动仍是周期运动,轨迹是稳定的闭合曲线(李萨如右图).**



本章小结

1. 简谐振动方程

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

2. 简谐振动的相位

$(\omega t + \varphi)$ 是 相位，决定 t 时刻简谐振动的运动状态.

3. 简谐振动的运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

4. 由初始条件振幅和初相位

$$A = \sqrt{x_0^{\ 2} + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}} \qquad \varphi = \arctan(-\frac{\upsilon_0}{\omega x_0})$$

5. 弹簧振子的能量

动能： $$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

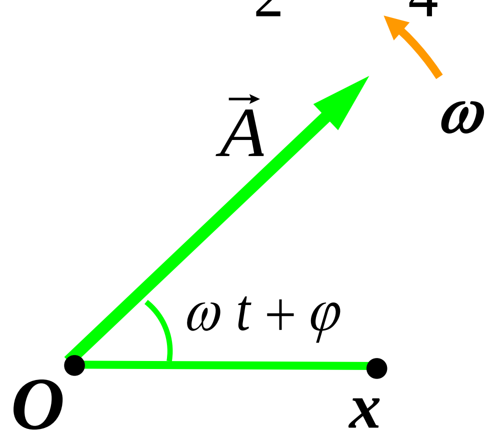
势能： $$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

总机械能： $$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

平均能量： $$\overline{E}_k = \overline{E}_p = \frac{1}{2}E = \frac{1}{4}kA^2$$

6. 谐振动的旋转矢量表示

$$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$$



7. 简谐谐振动的合成

(1) 同方向同频率谐振动的合成

合振动仍为简谐振动，和振动的振幅取决于两个分振动的振幅及相差，即

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

(2) 同方向不同频率谐振动的合成

当两个分振动的频率相差较小时，产生拍的现象，拍频为

$$v=\left|(\omega_2-\omega_1)/(2\pi)\right|=\left|v_2-v_1\right|$$

(3) 相互垂直的两个谐振动的合成

若两个分振动的频率相同，则合振动的轨迹一般为椭圆；若两个分振动的频率为简单整数比，则合振动的轨迹为李萨如图形.