重积分的应用

定积分应用的元素法也可推广到二重积分,使用该方法需满足以下条件:

1. 所要计算的某个量U对于闭区域D具有可加性(即:当闭区域D分成许多小闭区域$d\sigma$时，所求量U相应地分成许多部分量ΔU,且$U=\sum \Delta U$.

2. 在D内任取一个直径充分小的小闭区域$d\sigma$时，相应的部分量ΔU可近似地表示为$f(x,y)d\sigma$，其中$(x,y)\in d\sigma$，称$f(x,y)d\sigma$为所求量ΔU的元素，并记作dU.

3. 所求量U可表示成积分形式$U=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$.

一、立体体积

(1) 曲顶柱体的顶为连续曲面 $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, 则其体积为

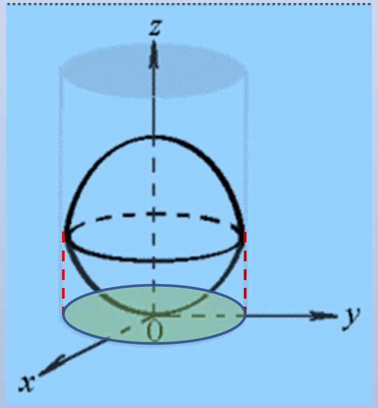
$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ;$$

(2) 占有空间有界域 Ω 的立体的体积为 $V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

例1. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解：所围成的立体在 xOy 坐标面上投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2\}$，

立体的体积



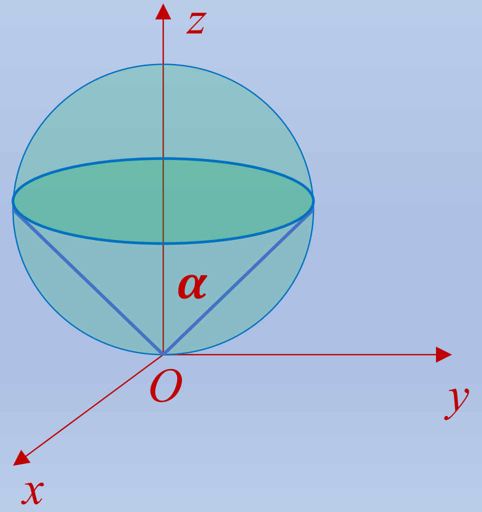
$$V=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\left(6-2x^2-y^2\right)-\left(x^2+2y^2\right)\right]d\sigma$$

$$=3\iint\limits_{D_{xy}}\left(2-x^2-y^2\right)d\sigma=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-\rho^2\right)\cdot\rho d\rho=6\pi\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=6\pi.$$

例 2.求半径为 a 的球面与半顶角为α 的内接锥面所围成的立体的体积.

解： $$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi dr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}\frac{r^3}{3}\bigg|_0^{2a\cos\varphi}\cdot\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{16\pi}{3}a^3\int_0^{\alpha}(\cos\varphi)^3\cdot\sin\varphi d\varphi=\frac{16\pi}{3}a^3\left(-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right)\bigg|_0^{\alpha}=\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha).$$

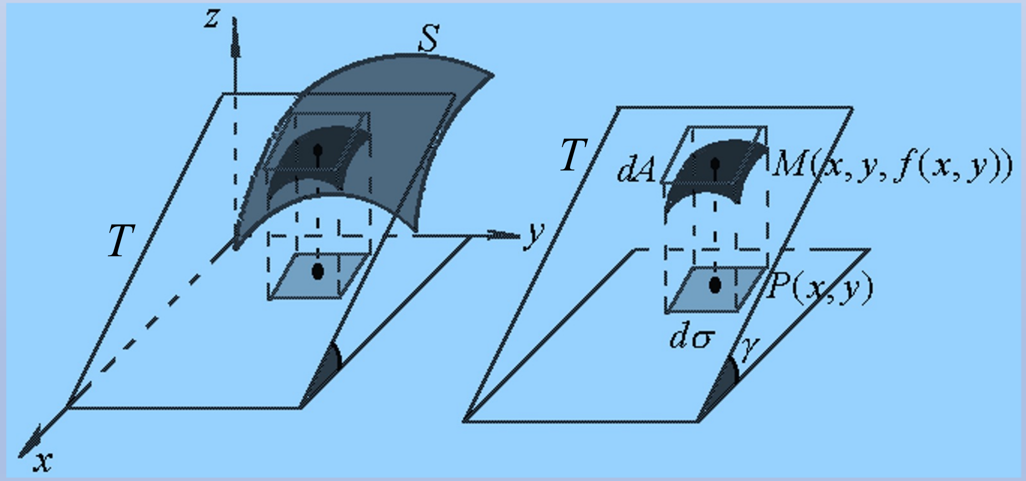


二、曲面的面积

设曲面 S 由方程 $z=f(x,y)$ 给出，D_{xy} 为曲面 S 在 xoy 面上的投影区域,函数 $f(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有连续偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$，现计算曲面的面积 A.

在闭区域 D_{xy} 上任取一直径很小的闭区域 $d\sigma$ （它的面积也记作 $d\sigma$ ），在 $d\sigma$ 内取一点 $P(x,y)$，对应着曲面 S 上一点 $M(x,y,f(x,y))$，曲面 S 在点 M 处的切平面设为 T.

以小区域 $d\sigma$ 的边界为准线作母线平行于 z 轴的柱面，该柱面在曲面 S 上截下一小片曲面, 在切平面上截下一小片平面由于 $d\sigma$ 的直径很小, 那一小片平面面积近似地等于那一小片曲面面积.



曲面S在点M处的法线向量(指向朝上)为

$$\vec{n}=\{-f_x(x,y),-f_y(x,y),1\}$$

它与z轴正向所成夹角γ的方向余弦为

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$$

而 $$dA=\frac{d\sigma}{|\cos\gamma|}$$

所以 $$dA=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\cdot d\sigma$$

这就是曲面S的面积元素

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,d\sigma$$

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

类似地，若曲面的方程为 $x=g(y,z)$ 或 $y=h(z,x)$，可分别将曲面投影到 yoz 面或 zox 面，设所得到的投影区域分别为 D_{yz} 或 D_{zx} 类似地有

$$A=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz \quad \text{或} \quad A=\iint_{D_{zx}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,dzdx.$$

例 3 计算双曲抛物面 $z=xy$ 被柱面 $x^2+y^2=R^2$ 所截出的面积 A .

解： 所求曲面面积

$$A=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho d\rho$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R=\frac{2\pi}{3}\left[\left(1+R^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right].$$

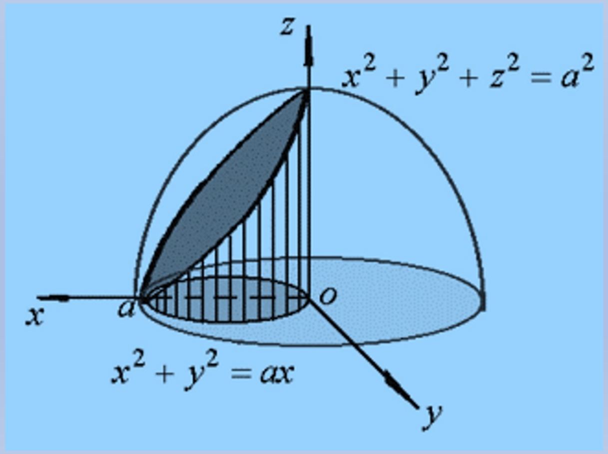
例 4 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在柱面 $x^2+y^2=ax$（$a>0$）内部的面积.

解 所求曲面在 xoy 面的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le ax\}$

曲面方程应取为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，则

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

据曲面的对称性, 有



$$A=2\iint_{D_{xy}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho$$

$$=2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-\sqrt{a^2-\rho^2})\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta=2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a-a|\sin\theta|)d\theta=2a^2(\pi-2)$$

三、质心

平面上的质点系的质心

设在 xoy 平面上有 n 个质点，它们分别位于点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 处，质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$. 由力学知道，该质点系的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

有一平面薄片,占有 xoy 面上的闭区域 D,在点 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$,假定 $\rho(x,y)$ 在 D 上连续,如何确定该薄片的质心坐标 $(\bar{x},\bar{y})$.

在闭区域 D 上任取一直径很小的闭区域 $d\sigma$,(x,y) 是这小闭区域内的一点,由于 $d\sigma$ 的直径很小,且 $\rho(x,y)$ 在 D 上连续,所以薄片中相应于 $d\sigma$ 的部分的质量近似等于 $\rho(x,y)d\sigma$,于是静矩元素 dM_x,dM_y 为 $dM_x = y\rho(x,y)d\sigma,\ \ dM_y = x\rho(x,y)d\sigma$

$$M_x = \iint_D y\rho(x,y)d\sigma \ ,\quad M_y = \iint_D x\rho(x,y)d\sigma$$

又平面薄片的总质量为 $m = \iint_D \rho(x,y)d\sigma$.

薄片的质心坐标为

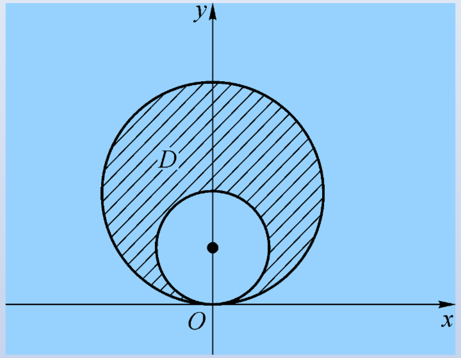
$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma}\quad,\quad \bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma}$$

特别地, 如果薄片是均匀的, 即面密度为常量, 则

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_D x d\sigma\,,\ \bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D y d\sigma\quad (\ A=\iint\limits_D d\sigma \text{ 为闭区域}D\text{的面积}\ )$$

这时薄片的质心称为该平面薄片所占平面图形的形心。

例 5 求位于两圆 $\rho=2\sin\theta$ 和 $\rho=4\sin\theta$ 之间均匀薄片的质心.



解：薄片的面积 $A=\pi\cdot 2^2-\pi\cdot 1^2=3\pi$，

由对称性质 $\iint\limits_D x d\sigma=0$，而

$$\iint\limits_D y d\sigma=\int_0^{\pi} d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho=\frac{56}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\theta d\theta=\frac{56}{3}\cdot 2\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=7\pi.$$

$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_D x d\sigma=0$，$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D y d\sigma=\frac{7\pi}{3\pi}=\frac{7}{3}$，所求质心 $\left(\bar{x},\bar{y}\right)=\left(0,\frac{7}{3}\right)$.

例 6 一个半径为 1 的半圆形平面薄片，其上各点处的密度为该点到圆心的距离，求此薄片的质心.

解 $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$， $m=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 r^2dr=\dfrac{\pi}{3}$

$$\iint\limits_D x\rho(x,y)d\sigma=\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\sqrt{x^2+y^2}\,dx=0$$

$$\iint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 r^3\sin\theta dr=\frac{1}{2}$$

质心 $(0,\dfrac{3}{2\pi})$.

空间物体的质心

设占有空间有界闭区域Ω的物体，在点(x,y,z)处的密度为$\rho(x,y,z)$（假定$\rho(x,y,z)$在Ω上连续），则物体的质心坐标是

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z)dv \qquad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega} y\rho(x,y,z)dv \qquad \bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)dv$$

其中$M=\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)dv$

当ρ为常数，$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega} xdv \quad \bar{y}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega} ydv \quad \bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega} zdv$

四、转动惯量

1. 平面质点系对坐标轴的转动惯量

设平面上有 n 个质点，它们分别位于点

$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 处，质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$。

设质点系对于 x 轴以及对于 y 轴的转动惯量依次为

$$I_x=\sum_{i=1}^{n} y_i^2 m_i \quad , \quad I_y=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i$$

2. 平面薄片对于坐标轴的转动惯量

设有一薄片，占有 xoy 面上的闭区域 D，在点 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$，假定 $\rho(x,y)$ 在 D 上连续。现要求该薄片对于 x 轴、y 轴的转动惯量 I_x，I_y。

与平面薄片对坐标轴的力矩相类似，转动惯量元素为

$$dI_x = y^2\rho(x,y)d\sigma, \quad dI_y = x^2\rho(x,y)d\sigma$$

以这些元素为被积表达式，在闭区域 D 上积分，便得

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma, \quad I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma$$

同理 $I_o = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)d\sigma$

例 7. 求由半径为 a 的均匀半圆薄片(面密度为常数 ρ)对于其直径边的转动惯量。

解

$$I_x = \iint_D \mu y^2 d\sigma = \mu \int_0^\pi d\theta \int_0^a \rho^3 \sin^2\theta d\rho = \frac{1}{4}\mu a^4 \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} M a^2$$

其中 $M = \frac{1}{2}\pi a^2 \mu$ 为半圆薄片的质量。

3. 空间物体的转动惯量

设占有空间有界闭区域Ω的物体，在点(x,y,z)处的密度为$\rho(x,y,z)$（假定$\rho(x,y,z)$在Ω上连续），则物体的转动惯量

$$I_x=\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv,\quad I_y=\iiint_{\Omega}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)dv,$$

$$I_z=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv,\quad I_o=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv。$$

例 8. 求密度为ρ的均匀球体对于过球心的一条轴的转动惯量.

解 $$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho dv=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^{a}r^4dr=\rho\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}a^5=\frac{2}{5}a^2M$$

其中$M=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$为球体的质量.