第二章教学计划（第1次课）

教学内容：

1.随机变量及其分布函数；

2.离散型随机变量及其分布。

教学目的及目标：

1.理解随机变量、分布函数、分布律的概念；

2.能对实际问题建立适当的随机变量，会求其分布函数；

3.能熟练求离散型随机变量的分布律，熟练掌握三种重要的离散型分布;

4. 熟练掌握分布函数、分布律的性质及二者间的关系,并能熟练解决有关问题。

教学重点：

1.随机变量、分布函数、分布律的概念和性质;

2.分布函数与分布律的关系;

3.三种重要的离散型分布，泊松定理。

教学难点：随机变量、分布函数的概念。

第二章 随机变量及其分布

§2.1　随机变量及其分布函数

一、随机变量

1、概念的引入

(1) 有些试验结果本身就是数，即随机事件与实数之间存在着直接而客观的联系。因此，我们可以通过引入样本点的函数将这种联系明确地表示出来。

例如，在“掷骰子”试验中，可令

$$X = X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = \text{掷得1点}; \\ 2, & \omega = \text{掷得2点}; \\ \cdots\cdots & \\ 6, & \omega = \text{掷得6点}. \end{cases}$$

（2）有些试验，试验的直接结果本身与数值无关。但是，如果我们关心的是试验的某些量化结果，那么试验结果也与实数值相联系。因此，我们同样可以引进样本点的函数来表示这种联系。

例如：“抛硬币”试验。它有两种可能结果：“出现H”或“出现T”。如果我们我们关心的是正面向上的次数，那么就可以引入

$$X = X(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = T \\ 1 & \omega = H \end{cases}$$

来表示我们关心的试验结果。

又如：在**n重Bernoulli**试验中，设每次试验结果为事件**A** 或 $\overline{A}$，**P(A)=p**。

如果我们关心的是这**n**次试验中事件**A**出现的次数，则可引入

$$Y=Y(\omega)=\begin{cases}0, & \text{若}A\text{在这}n\text{次试验中发生0次；}\\ 1 & \text{若}A\text{在这}n\text{次试验中}A\text{发生1次；}\\ \cdots\cdots & \\ n, & \text{若}A\text{在这}n\text{次试验中}A\text{发生}n\text{次.}\end{cases}$$

上述X,Y,Z就是所谓的 随 机 变 量

它们的共同特点：

①都是样本点的单值实函数；

②取值都随机——在试验之前只知道它可能取值的范围，而不能预先肯定它将取哪个值，但取一个或一些可能值的概率是一定的。

③对于任意实数x，形如“$X\le x$”的表达式都是随机事件。

一般地，我们有

定义2.1：设X(ω)是定义在概率空间(Ω, F, P)上的单值实函数, 如果

(i)对于每个样本点$\omega\in\Omega$,有一个实数X= **X(ω)** 与之对应;

(ii)$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $\{X\le x\}=\{\omega|X(\omega)\le x\}\in F$,

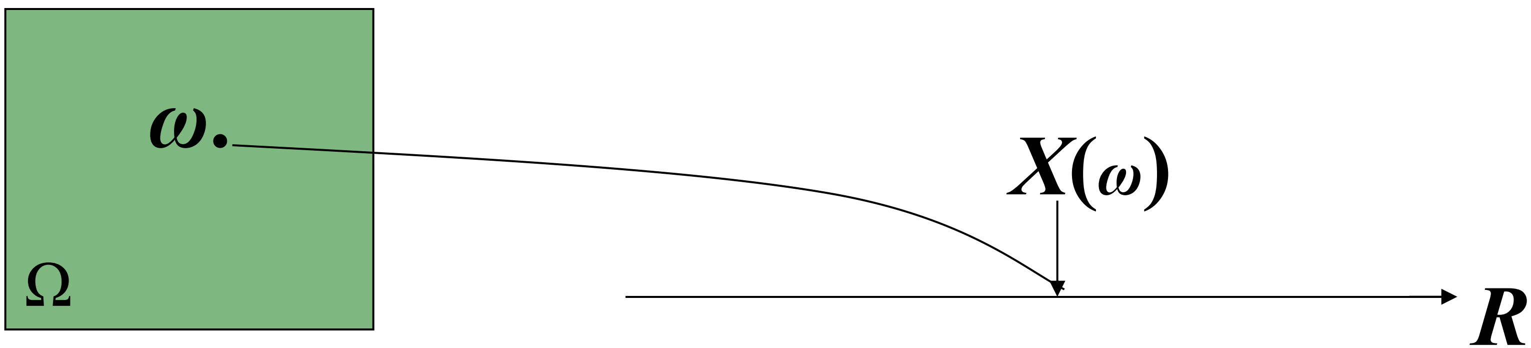
则称X(ω)为随机变量 (**random variable**)，简记为 *r.v.* .

通常用大写字母*X,Y,Z*或希腊字母ζ,η等表示随机变量，用小写字母*x,y,z*等表示随机变量的所取值.

随机变量的分布：对一个随机变量的统计规律性的完整描述。

2、引入随机变量的意义

随机变量实际上就是定义域为事件域，值域为实数集或其子集的一种实值函数.



思考: 这种实值函数与在高等数学中大家接触到的函数一样吗？它的引进有何意义？

(i)随机变量（函数）与通常的函数概念本质是一致的——集合之间的单值对应关系；

(ii)随机变量与普通函数的明显区别：

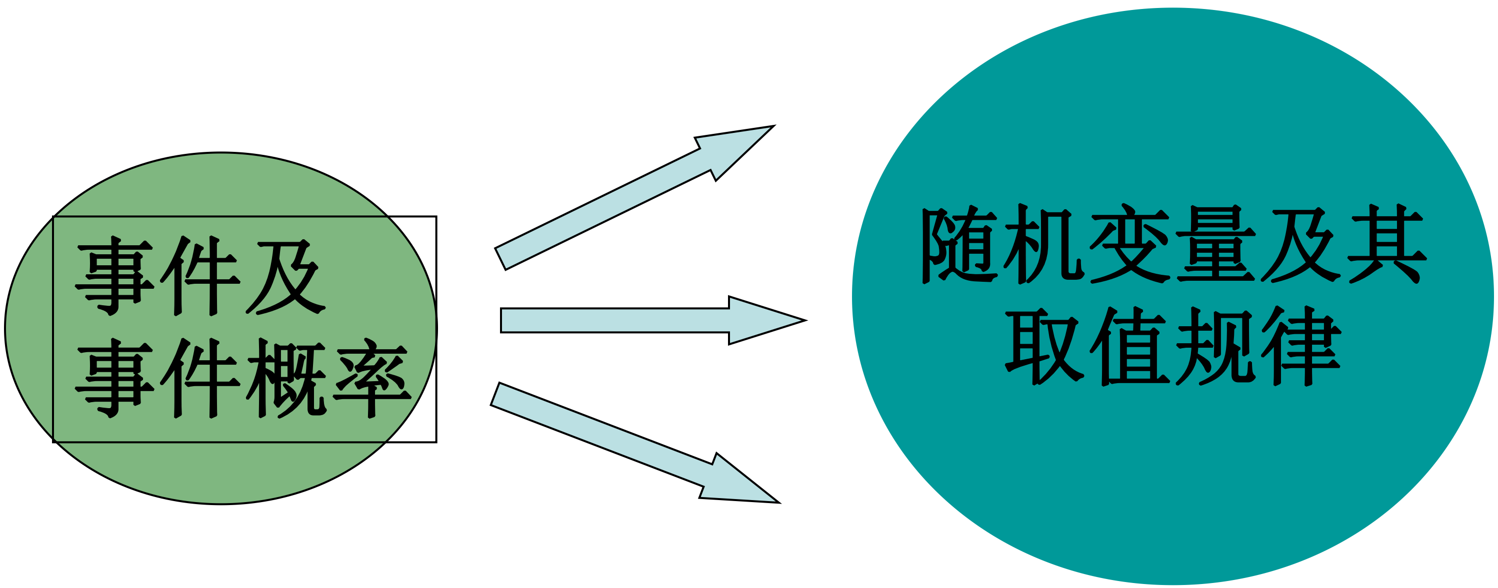
定义域——自变量不同；

函数值的随机性及其概率分布的确定性。

(iii)随机变量的引入，使概率论可以借助分析的方法和结论研究随机现象的独特问题。

随机变量是包括随机事件但含义更广的概念。实际上，对随机事件和随机变量的研究分别相当于用静态的和动态的观点观点来考查随机现象——随机事件和随机变量的区别类似于常量与变量的区别.

随机变量概念的产生是概率论发展史上的重大事件. 引入随机变量后，对随机现象统计规律的研究，就由对事件及事件概率的研究转变为对随机变量及其取值规律的研究.



对于随机试验，要求能够定义适当的随机变量表示试验结果。

（*）例3: 考虑“测试灯泡寿命”这一试验。试验结果本身是用数字描述的，令X表示灯泡的寿命（以小时计），则X是随机变量，定义域为样本空间 $\Omega=\{t|t\geq 0\}$，值域为$R_X=[0，+\infty)$。

$\{X<500\}$：“任取出的灯泡的寿命小于500小时”；

事件“任取的灯泡的寿命大于500小时且不超过1000小时”：$\{500<X\leq 1000\}$。

(*)

例4：考察将一枚硬币抛掷两次这一试验，样本空间为Ω=｛HH，HT，TH，TT｝，令X表示正面出现的次数，则X是一随机变量，且有｛X＝1｝＝｛HT，TH｝，Rx=｛0，1，2｝

例5：从一批产品中任取n件，令X表示取出的n件产品中的次品数，则X为一随机变量，Rx＝｛0，1，…，n｝

例6：假设我们关心某地区居民的身高情况，用X（单位cm）表示随机抽出的一个人的身高，则X是随机变量，事件“随机抽出一个人的身高不超过170cm”可表示为｛X≤170｝。

(*)

例7：某射手向一目标射击，其弹着点的横坐标X是一随机变量，纵坐标Y也是随机变量。

例8:一批产品共100件，其中95件合格，5件不合格。从中有放回地一件一件地取产品，直到取出一件合格品为止时所取出的产品件数X是一随机变量。$R_x=\{1,2,...\}$

例9：一个月某交通路口的事故数X，是随机变量。

例10：用天平称量某物体的重量的误差X，是随机变量。

3、随机变量的分类

通常研究两种类型的随机变量.

（1）离散型随机变量

所有取值可以逐个一一列举

如“取到次品的个数”，“收到的呼叫数”等.

全部可能取值不仅无穷多，而且还不能一一列举，而是充满一个区间.

（2）连续型随机变量

例如，“电视机的寿命”，实际中常遇到的“测量误差”等.

二、随机变量的分布函数

对于随机变量，我们关心的往往是它的取值落在某个区间的概率。因此，我们希望能够对随机变量的取值落在任何一个区间的概率给出描述。

易见： 若X是一个$r.v$，则对于任意实数**a≤b**有

$$P\{a<X\leq b\}=P\{X\leq b\}-P\{X\leq a\}$$

这意味着要计算**X**落在（**a,b]**内的概率，只需要计算形如**P{X≤*x*}**的概率即可。

事实上，如果给出所有形如**P{X≤*x*}**的概率即可算出**X**落在任意区间上的概率。

记**F(*x*)=P{X≤*x*}**，当*x*取遍一切实数值时，**F(*x*)**便成为定义在实数集**R**上的函数。

一旦知道了这个函数，我们便可以得到相应随机变量**X**落在任意区间上的概率。

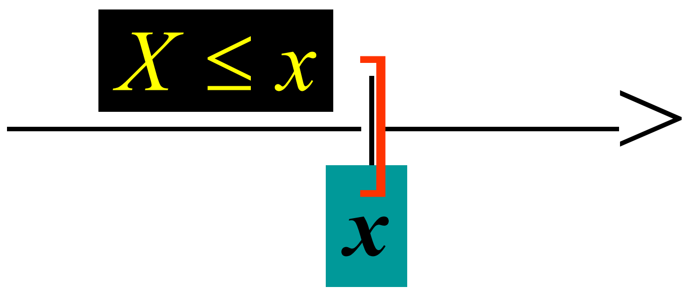
为此，我们引入下面的定义：

1、定义：设 X 是一个 *r.v*，x为任意实数，称函数

$$F(x) = P(X \le x), -\infty < x < +\infty$$

为 X 的分布函数(**distribution function**, 简记为**d.f.**)。

X 的分布函数是$F(x)$记作 $X \sim F(x)$，或 $F_X(x)$。



如果将 X 看作数轴上随机点的坐标，

那么分布函数 $F(x)$ 的值就表示 X落在区间

$(-\infty, x]$ 的概率.

$$F(x)=P(X\le x), -\infty<x<+\infty$$

分布函数完整地描述了r.v.的统计规律，i.e.，只要知道了随机变量*X*的分布函数，就可以计算它取任何值的概率.

如，对任意实数 $x_1<x_2$，随机点落在区间（x_1，x_2] 的概率为：

$$P\{x_1<X\le x_2\}=P\{X\le x_2\}-P\{X\le x_1\}$$

$$=F(x_2)-F(x_1)$$

Back

2、分布函数的性质

(1) 单调不减：，若 $x_1<x_2$, 则$F(x_1)\le F(x_2)$；

(2) 渐近线： $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$

(3) 右连续：即对于任意实数x_0，有

$$F(x_0+)=\lim_{x\to x_0+}F(x)=F(x_0)$$

性质(1)--(3)是判别一个函数是否能成为某个*r.v*的分布函数的充分必要条件.

例3 设有函数 $F(x)$

$$F(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le \pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

试说明$F(x)$能否是某个$r.v$ 的分布函数.

解： 注意到函数 $F(x)$在 $[\pi/2,\pi]$上下降，不满足性质(1)，故$F(x)$不能是分布函数.

或者 $$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$$

不满足性质(2)， 可见$F(x)$也不能是$r.v$ 的分布函数.

练：设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-\lambda x}, x>0 \\ 0, x\le 0 \end{cases}$$

其中，$\lambda>0$ **为参数。**

求A,B的值，并计算P(-1<X≤1)的概率。

（1，-1，1- $e^{-\lambda}$ **）**

事实上，（1）$P\{a<X\leq b\}=F(b)-F(a)$.

(因为$\{a<X\leq b\}=\{X\leq b\}-\{X\leq a\}$,且

$\{X\leq a\}\subset\{X\leq b\}$)

（2）$P\{X=b\}=F(b)-F(b-0)$.（由（1）连续性证明）

（3）$P\{X<b\}=F(b-0)$.

($\{X<b\}=\{X\leq b\}-\{X=b\},\{X\leq b\}\supset\{X=b\}$,再由

（2））

（4）$P\{X>b\}=1-F(b)$. ($\{X>b\}=\overline{\{X\leq b\}}$)

（5）$P\{X\geq b\}=1-F(b-0)$. (因为$\{X\geq b\}=\overline{\{X<b\}}$)

（6）$P\{a<X<b\}=F(b-0)-F(a)$.

$$F(x) = P(X \le x), -\infty < x < +\infty$$

分布函数是一个普通的函数，正是通过它，我们可以用数学分析的工具来研究 随机变量.

离散型随机变量分布函数计算举例

例1　将一枚均匀的硬币抛三次，记X为正面向上出现的次数，求X的分布函数。

解：显然，X=0，1，2，3。且

$$P(X=0)=1/8,\ P(X=1)=3/8$$
$$P(X=2)=3/8,\ P(X=3)=1/8$$

所以，$x<0$时，$F(x)=P(X\le x)=0,$

$0\le x<1$时，$F(x)=P(X\le x)=1/8,$

$1\le x<2$时，$F(x)=P(X\le x)=4/8,$

$2 \le x < 3$时，$F(x)=P(X \le x)=7/8$

$3 \le x$ 时，$F(x)=P(X \le x)=1$

于是得

$$F(x)=\begin{cases} 0, x<0; \\ 1/8, 0 \le x < 1; \\ 1/2, 1 \le x < 2; \\ 7/8, 2 \le x < 3; \\ 1, x \ge 3 \end{cases}$$

$F(x)$的基本性质

连续型 r.v 分布函数举例

例2　在区间 $[a,b]$ 上任意投掷一个质点，以 X 表示这个质点的坐标. 设这个质点落在 $[a,b]$ 中任意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比，试求 X 的分布函数.

解：　设 $F(x)$ 为 X 的分布函数，

当 $x < a$ 时，$F(x) = P(X \le x) = 0$

当 $x \ge b$ 时，$F(x) = P(X \le x)$

$=P(a \le X \le b)=1$

当 $a \le x < b$ 时，

$F(x)= P(X \le x)=P(a \le X \le x)=(x-a)/(b-a)$

$$F(x)=\begin{cases}0, x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x<b,\\ 1, x\ge b.\end{cases}$$

这就是在区间 [a ,b]上服从均匀分布的随机变量的分布函数.

显然，$F(x)$是R上的连续函数。

一般地，任何连续型随机变量的分布函数$F(x)$都是R上的连续函数。

因此，$P(X=a)=0$, a为任一指定值.

即连续型$r.v$取任一指定值的概率为0. 由此,

1) 对连续型 $r.v$ X,有

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b)$$

$$= P(a \le X < b)$$

$$= P(a < X < b)$$

（*） 由$P(X=a)=0$ 可推知

$$P(X \in R-\{a\})=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx-P(X=a)=1$$

而 $\{X=a\}$ 并非不可能事件

$\{X \in R-\{a\}\}$ 并非必然事件

可见， 由$P(A)=0$, 不能推出 $A=\phi$

由$P(B)=1$, 不能推出 $B=S$

称A为几乎不可能事件，B为几乎必然事件.

小结：

1.随机变量是概率论中最重要的概念之一，用随机变量描述随机现象是近代概率中最重要的方法。

2. 分布函数完整的描述了随机变量。

分布函数是在$(-\infty,+\infty)$上值域为 $[0，1]$的普通函数，它具有良好的分析性质(四条)，反之，若任意一个实值函数满足以上四条性质，则该函数一定是一个分布函数。

分布函数是研究随机变量的重要工具。

注1．分布函数性质的证明：

（1）F(x)为不减函数：当$x_1 < x_2$时，有F(x_1)≤F(x_2)。

（2） $0 \le F(x) \le 1$, 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

（3）F(x)右连续，即对$\forall x$:F(x)=F(x+0).

证：(1) $\because \forall x_1 < x_2, \{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$.

$\therefore P\{X \le x_1\} \le P\{X \le x_2\}$,即$F(x_1) \le F(x_2)$

(2) 由定义可知：0≤F(x)≤1, 后两式与性质(3)都可用概率连续性证明。只证(3):即要证$\forall x_0$, $F(x_0+0)=F(x_0)$,

即证：$F(x_0+0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} F(x) = F(x_0)$.

因为F(x)不减，取定一数列$x_n \downarrow x_0$, (例如$x_0+1/n \downarrow x_0$)则有：

$$\lim_{x \to x_0+0} F(x) = \lim_{n \to \infty} F(x_n).$$

记：$A=\{X \le x_0\}, A_n=\{X \le x_n\}, n=1,2,\ldots\ldots$

则：$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots\ldots$且 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

由P的连续性：

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(A) = F(x_0)$$

即：$F(x_0)=F(x_0+0)$,而x_0是任意的。