重积分习题课

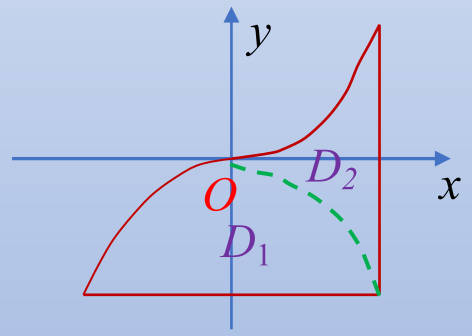
1.计算 $I=\iint\limits_D\left[x^2+x\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)f(x^2+y^2)\right]dxdy$，其中 D 由直线 $y=x^3$，$y=-1$，$x=1$ 所围成，其中 $f(u)$ 为连续函数.

解：用 $y=-x^3$ 将积分区域 D 分成两部分 D_1 和 D_2，根据对称性质，

$$\iint\limits_{D_1}x\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)f(x^2+y^2)dxdy=0,\ \iint\limits_{D_2}x\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)f(x^2+y^2)dxdy=0,$$

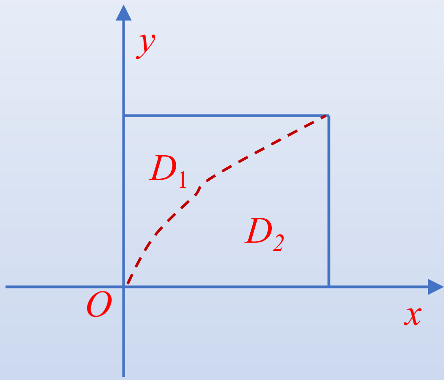
所以 $\iint\limits_D x\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)f(x^2+y^2)dxdy=0$；

$$I=\iint\limits_D x^2dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{x^3}x^2dy=\int_{-1}^{1}x^2\left(x^3+1\right)dx=0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$



重积分习题课

2. 计算 $\iint\limits_D |x-y^2|\,dxdy$， 其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.



解：用 $y^2=x$ 将积分区域 D 分成两部分 D_1 和 D_2,

$$\iint\limits_D |y^2-x|\,dxdy=\iint\limits_{D_1}(y^2-x)\,dxdy+\iint\limits_{D_2}(x-y^2)\,dxdy$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{y^2}(y^2-x)\,dx+\int_0^1 dy\int_{y^2}^1(x-y^2)\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{y^4}{2}dy+\int_0^1\left[\frac{1-y^4}{2}-y^2(1-y^2)\right]dy=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\int_0^1(1-2y^2+y^4)\,dy$$

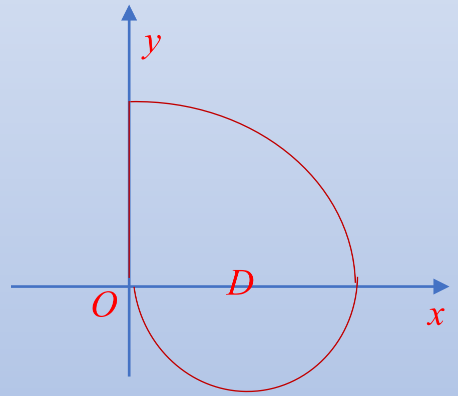
$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{11}{30}.$$

重积分习题课

3.计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$， 其中 D 由 $y=\sqrt{4-x^2}$，$y=-\sqrt{2x-x^2}$ 及 $x=0$ 所围成的闭区域.

解: $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho\cdot\rho d\rho + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2} \rho\cdot\rho d\rho$

$$= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^3\theta d\theta + \frac{4}{3}\pi = \frac{16}{9} + \frac{4}{3}\pi .$$



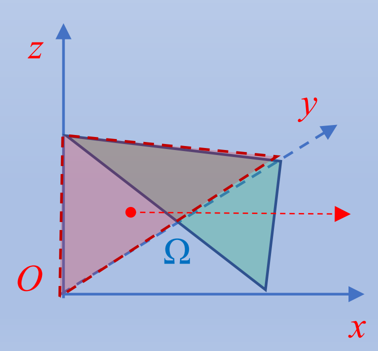
重积分习题课

4.计算 $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dz\int_0^{1-x-z} (1-y)\, e^{-(1-y-z)^2}\, dy$.

解: $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dz\int_0^{1-x-z} (1-y)\, e^{-(1-y-z)^2}\, dy = \int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz\int_0^{1-y-z} (1-y)\, e^{-(1-y-z)^2}\, dx$

$$= \int_0^1 dy\int_0^{1-y} (1-y)(1-y-z)\, e^{-(1-y-z)^2}\, dz = \int_0^1 (1-y)\frac{1}{2}\, e^{-(1-y-z)^2}\Big|_0^{1-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)\left[1-e^{-(1-y)^2}\right]dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-(1-y)^2}\Big|_0^1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)\right] = \frac{1}{4e}.$$



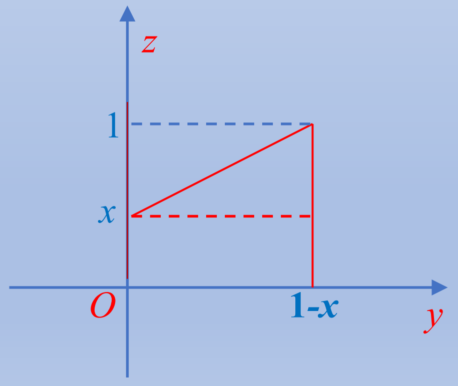
重积分习题课

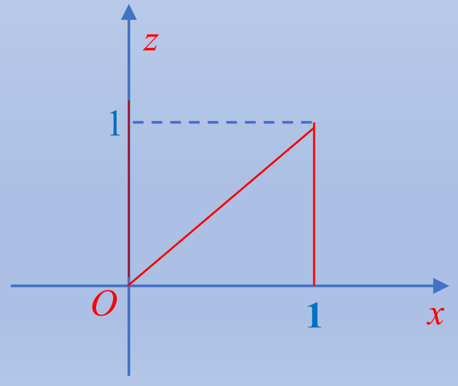
5.将 $\mathrm{I}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$ 变为次序 $y\to x\to z$ 的三次积分.

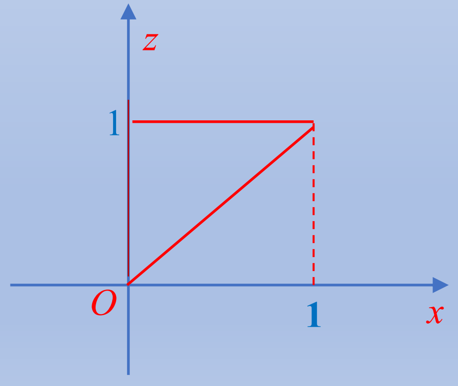
解：$\mathrm{I}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{x} dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy+\int_0^1 dx\int_x^{1} dz\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy$$

$$=\int_0^1 dz\int_z^{1} dx\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy+\int_0^1 dz\int_0^{z} dx\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy .$$





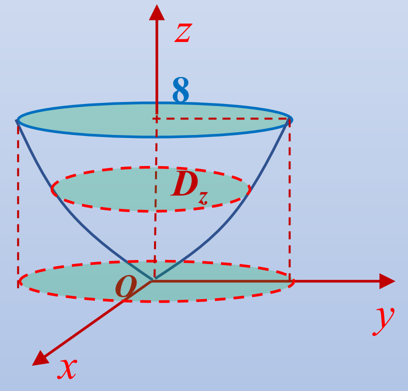


重积分习题课

6.计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围闭区域.

解：$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv = \int_0^8 dz \iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}(x^2+y^2)dxdy = \int_0^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^2 \cdot \rho d\rho$

$$= 2\pi \int_0^8 z^2 dz = 2\pi \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^8 = \frac{1024}{3}\pi .$$

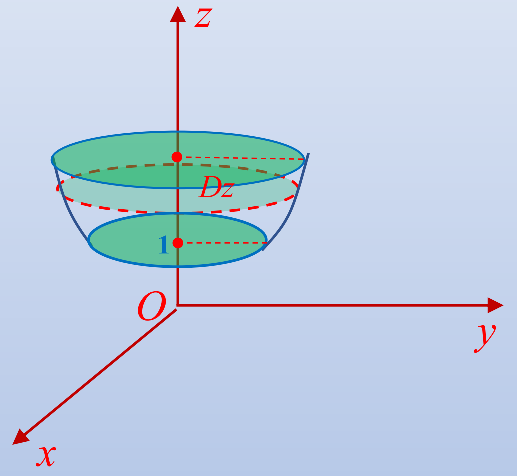


重积分习题课

7.计算 $\iiint\limits_{\Omega} e^{z^2} dv$，其中 Ω 由 $z = x^2 + y^2, z = 1$ 及 $z = 2$ 所围区域.

解：$\iiint\limits_{\Omega} e^{z^2} dv = \int_1^2 dz \iint\limits_{x^2+y^2 \le z} e^{z^2} dxdy$

$$= \int_1^2 e^{z^2} \cdot \pi \left(\sqrt{z}\right)^2 dz = \pi \cdot \frac{1}{2} e^{z^2} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}\left(e^4 - e\right).$$



重积分习题课

8. 将三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ 表示为柱面坐标及球面坐标的三次积分，其中 Ω 由 $z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$ $z\ge\sqrt{3(x^2+y^2)}$, $x\ge 0, y\ge 0$ 所确定.

解：积分区域 Ω 在柱面坐标下表示为：

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ \ 0\le\rho\le 1,\ \sqrt{3}\rho\le z\le\sqrt{4-\rho^2},$$

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\sqrt{3}\rho}^{\sqrt{4-\rho^2}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz\ ;$$

积分区域 Ω 在球面坐标下表示为：

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ \ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6},\ 0\le r\le 2,$$

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi d\varphi\int_0^2 f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)\cdot r^2dr\ .$$

重积分习题课

9.计算$\iiint\limits_{\Omega}(x^3+2y^2+z^2)dv$，其中$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0$.

解：由对称性，$\iiint\limits_{\Omega}x^3dv=0, \iiint\limits_{\Omega}x^2dv=\iiint\limits_{\Omega}y^2dv,$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^3+2y^2+z^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr=\frac{2}{5}\pi.$$

重积分习题课

10.设 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dv$,其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le t^2$, , $f(u)$ 为连续函数,

$f'(0)=1, f(0)=0$.求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^5}$.

解：$F(t)=\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^t f\left(r^2\right)\cdot r^2dr$

$$=4\pi\int_0^t r^2 f\left(r^2\right)dr\,,$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^5}=4\pi\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t r^2 f\left(r^2\right)dr}{t^5}=4\pi\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2 f\left(t^2\right)}{5t^4}$$

$$=\frac{4\pi}{5}\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(t^2\right)-f\left(0\right)}{t^2}=\frac{4\pi}{5}f'\left(0\right)=\frac{4\pi}{5}\,.$$

重积分习题课

11. 求球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 被平面 $z=\sqrt{3}$ 割去球冠后剩余部分的面积.

解：球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 被平面 $z=\sqrt{3}$ 割去球冠后剩余部分在 xOy 坐标面上投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4\}$,

$$z_x=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\quad z_y=-\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy;$$

所求面积 $A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\frac{2}{\sqrt{4-\rho^2}}\cdot\rho d\rho=4\pi\left(-\sqrt{4-\rho^2}\right)\Big|_1^2=4\sqrt{3}\pi.$$

重积分习题课

12.求曲面 $S_1: z=x^2+y^2+1$ 任一点的切平面与曲面 $S_2: z=x^2+y^2$ 所围立体的体积 V

解：曲面 $S_1: z=x^2+y^2+1$ 任一点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程

$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0$，注意到 $z_0=x_0^2+y_0^2+1$，于是有

$z=2x_0x+2y_0y-x_0^2-y_0^2+1$；

$S_1: z=x^2+y^2+1$ 上点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面与曲面 $S_2: z=x^2+y^2$ 所围立体

在 xOy 坐标面投影区域 $D_{xy}:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le 1$，所求立体体积

$$V=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\left(2x_0x+2y_0y-x_0^2-y_0^2+1\right)-\left(x^2+y^2\right)\right]dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[1-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2\right]dxdy$$，作变换 $x=x_0+\rho\cos\theta, y=y_0+\rho\sin\theta$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(1-\rho^2\right)\rho\cdot d\rho=2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$