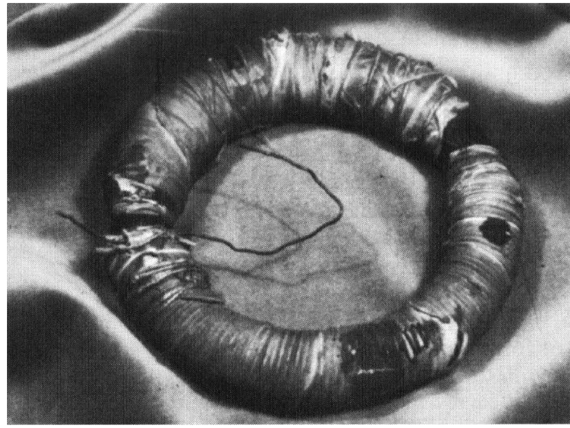
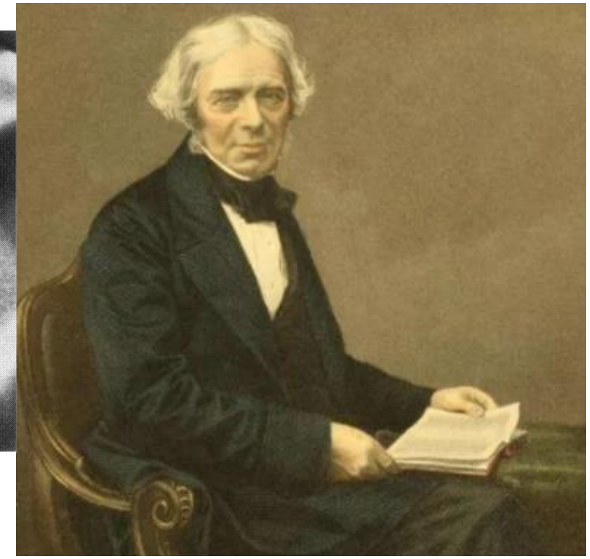
第八章 电磁感应

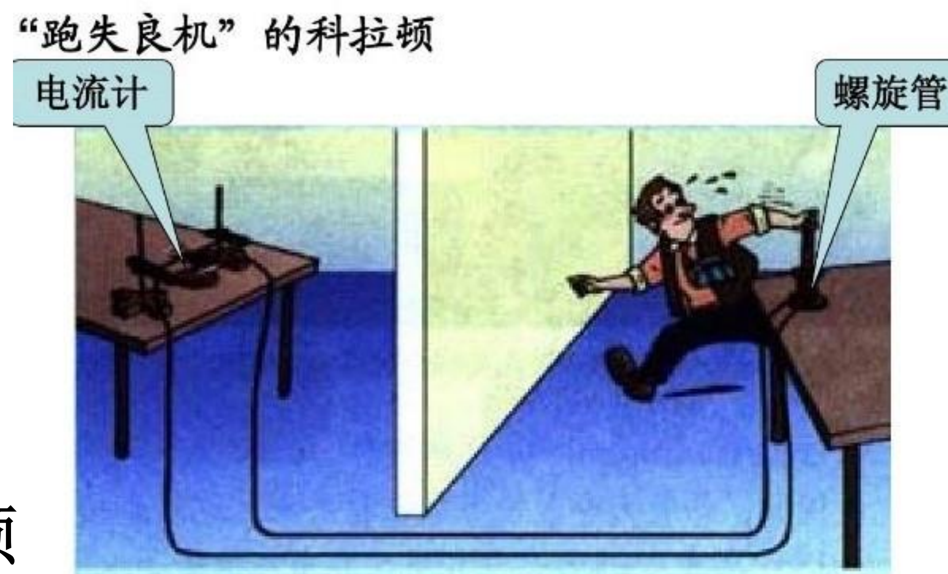
§8.1 法拉第电磁感应定律





1831年8月29日

拥有天才般直觉的法拉第



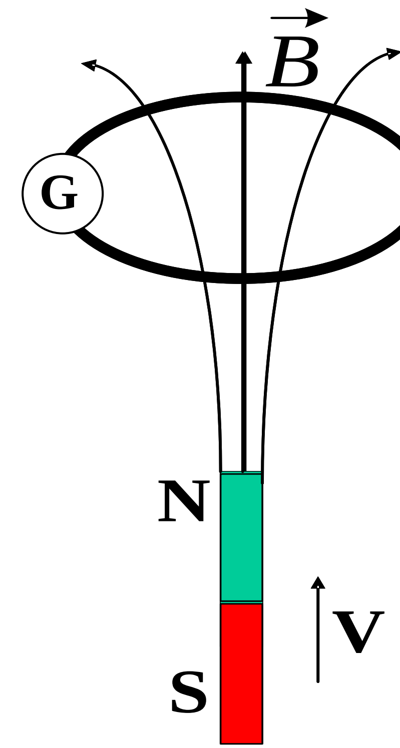
跑来跑去的科拉顿

§8.1 法拉第电磁感应定律

一、电磁感应现象

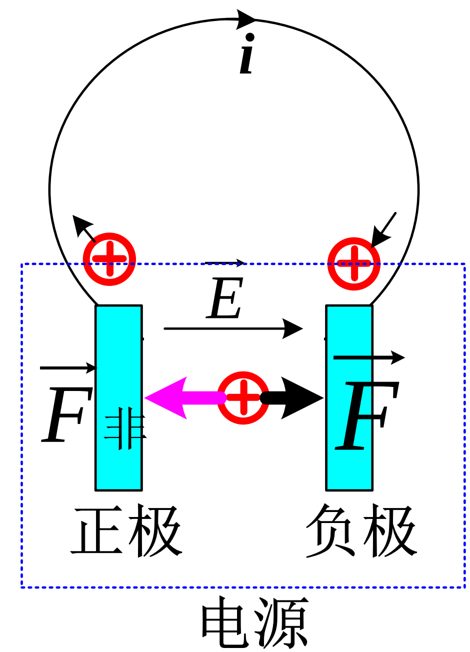
楞次定律

闭合回路中感应电流的方向，
总是使它所激发的磁场来阻止
引起感应电流的磁通量的变化。



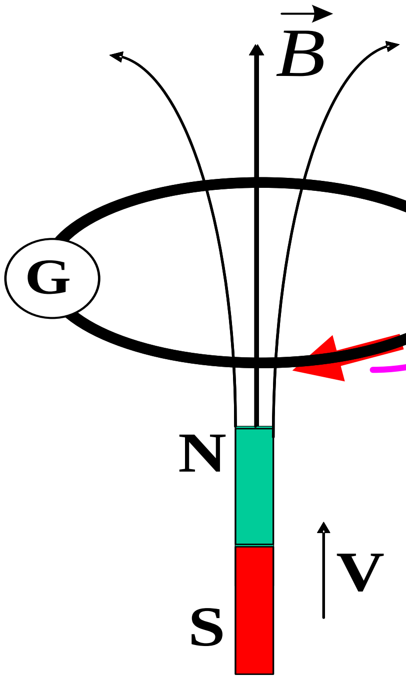
$\mathcal{E}$ 感应电动势：
回路中由于磁通量的变化而引起的驱动 感应电流的电动势

$$\varepsilon \sim \frac{d\phi_m}{dt} \Rightarrow \varepsilon = \frac{d\phi_m}{dt}\ ?$$



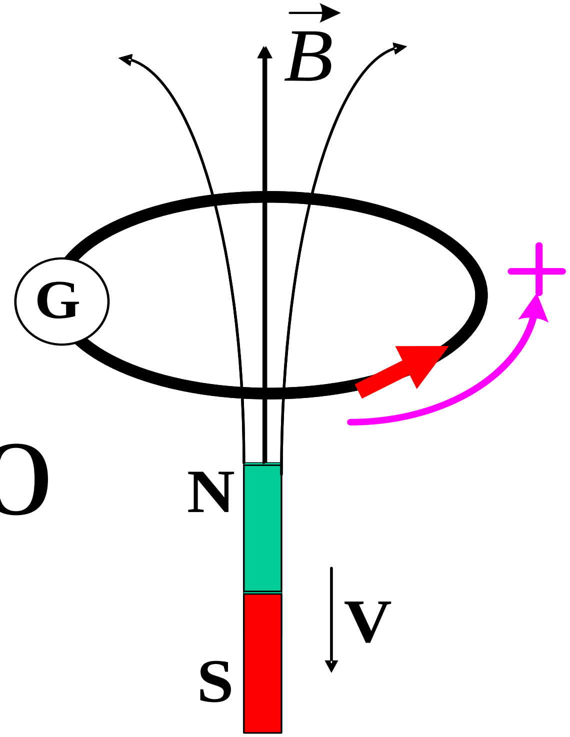
二、法拉第电磁感应定律

1、法拉第电磁感应定律



$$\frac{d\phi_m}{dt} > 0$$

$$\varepsilon < 0$$



$$\frac{d\phi_m}{dt} < 0$$

$$\varepsilon > 0$$

$$\varepsilon \overset{?}{=} \frac{d\phi_m}{dt} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt}}$$

2、磁链

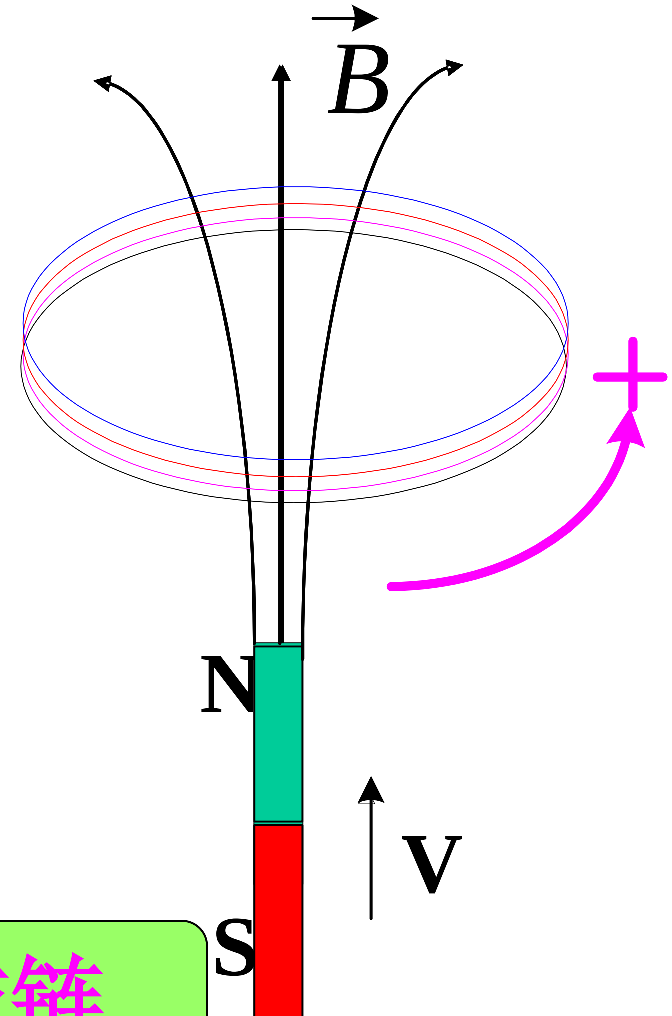
若线圈回路有N匝，通过每匝的磁通量为 $\phi_1, \phi_2 \cdots \phi_N$

则总感应电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_1}{dt} - \frac{d\phi_2}{dt} - \cdots - \frac{d\phi_N}{dt}$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(\sum_i \phi_i\right) = -\frac{d\psi}{dt}$$

磁链



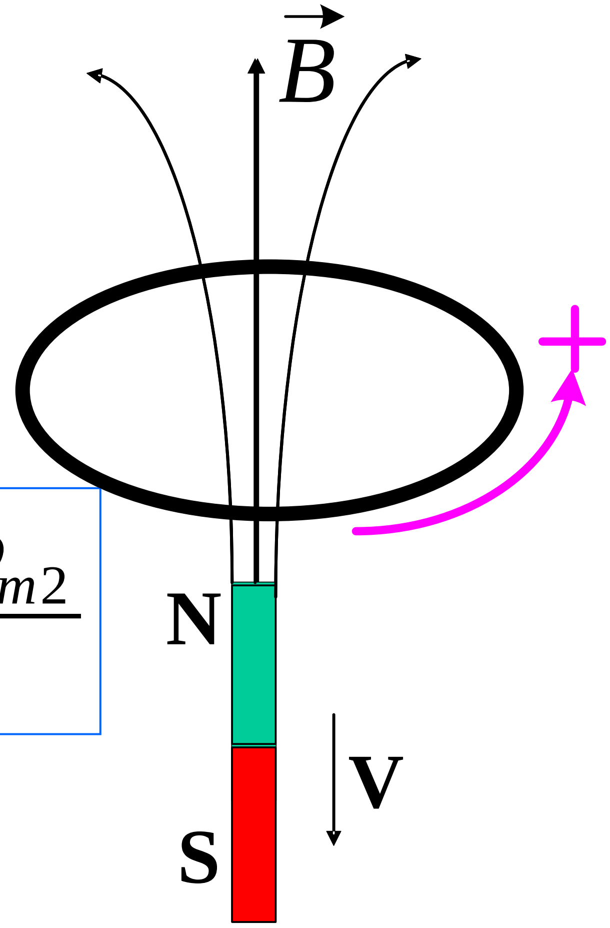
若通过每匝的磁通量相同，则

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d}{dt}(N\phi_m) = -\frac{d\psi}{dt}}$$

3、感应电流

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\phi_m}{dt}$$ **方向与ε相同**



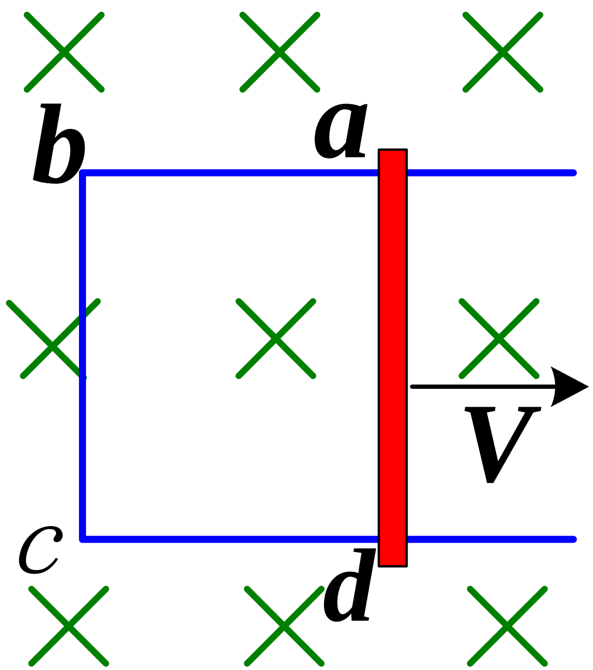
感应电量

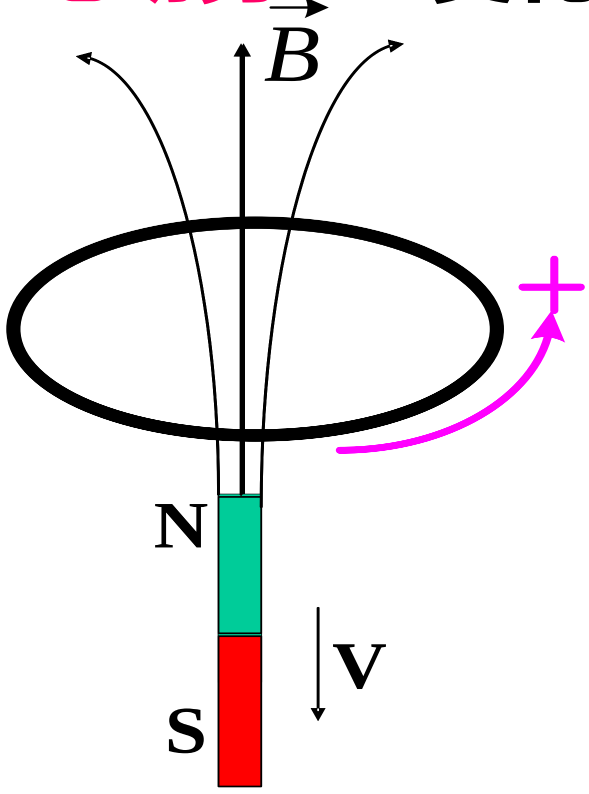
$$q_i = \int_{t_1}^{t_2} I dt = \boxed{-\frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2} d\phi_m = \frac{\phi_{m1} - \phi_{m2}}{R}}$$

§8.2 动生电动势-感生电动势

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} \qquad \phi_m = \vec{B} \bullet \vec{S}$$

动生电动势：S变化 **感生电动势：B变化**

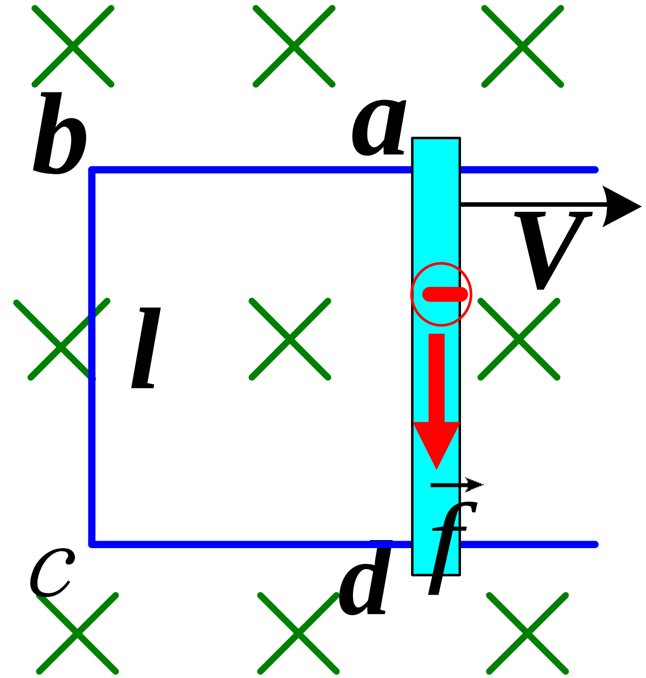




一. 动生电动势

(1) 动生电动势

电子的洛仑兹力为 $\vec{f} = -e\vec{v} \times \vec{B}$



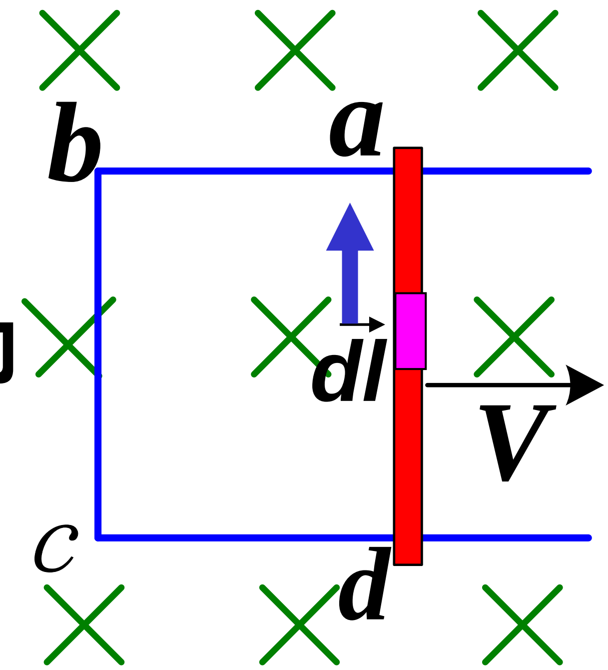
非静电力 - 洛仑兹力的分力

$$\vec{E}_{非} = \frac{-e\vec{v} \times \vec{B}}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$$

则 *da* 上动生电动势为

$$\varepsilon = \int_d^a \vec{E}_{非} \bullet d\vec{l} = \int_d^a \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \bullet d\vec{l}$$

$$\varepsilon = \int_d^a \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \bullet d\vec{l}$$



求动生电动势的一般步骤：

(1)规定积分路线的方向，即$d\vec{l}$方向

(2)任取 dl 线元，考察该处$\vec{v} \times \vec{B}$方向

以及 $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ 的正负

(3)利用$\varepsilon = \int_d^a \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \bullet d\vec{l}$

$\varepsilon > 0$ **则电动势的方向与积分路线方向相同**

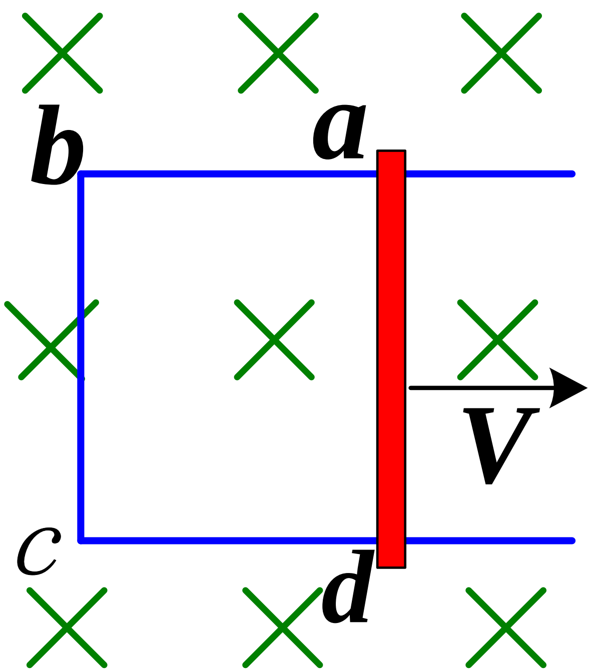
$\varepsilon < 0$ **则电动势的方向与积分路线方向相反**

讨论

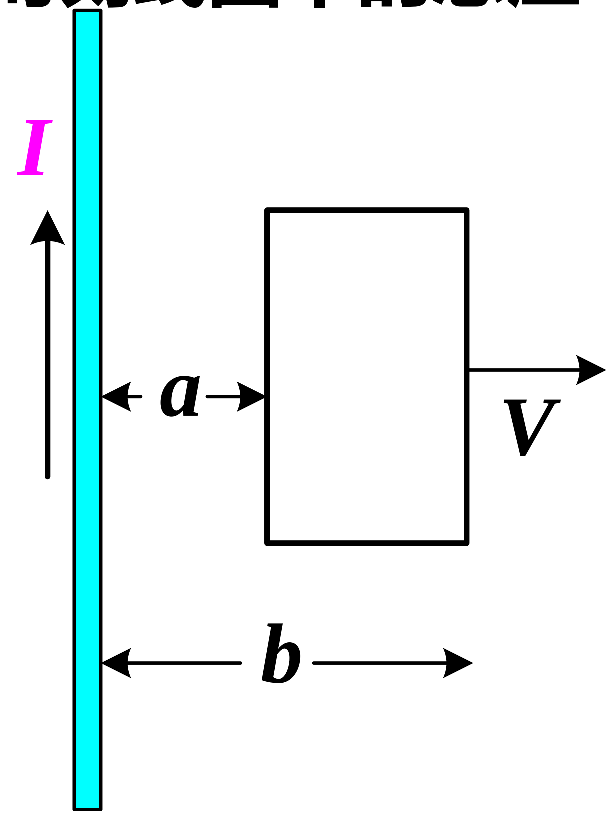
求动生电动势-两种方法

a. $\varepsilon_i = -\dfrac{d\psi}{dt}$ 适用于一切产生电动势的回路

b. $\varepsilon_i = \int_{(ba)} \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l}$ 适用于切割磁力线的导体



例1：一长直导线通入电流I，距其a处有一矩形线圈，长度为L_1，宽度为L_2，在$t=0$时，线圈以速度V水平向右做匀速直线运动，如图。求t时刻线圈中的感应电动势。



方法一：假定下到上为正方向，取线元 $d\vec{l}$

$$\varepsilon=\int_d^a\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\bullet d\vec{l}$$

左边: $\left|\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\right|=vB=v\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(a+vt)}$

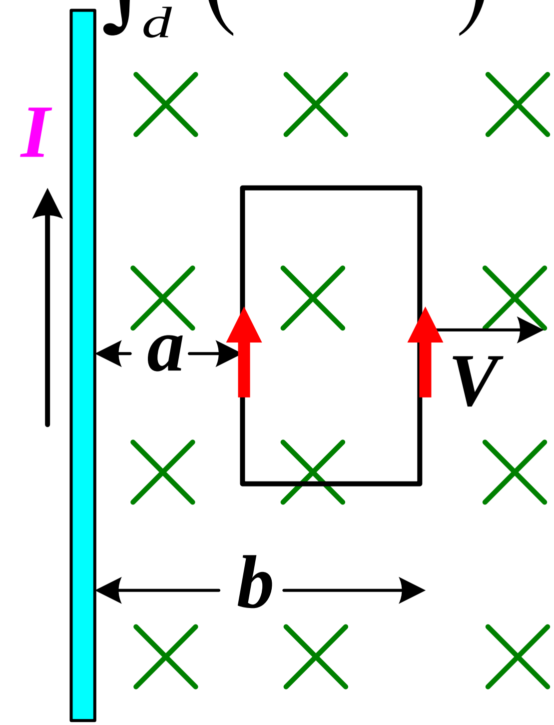
$$\varepsilon_{左}=\int_{下}^{上}v\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+vt)}dl$$

$$=v\frac{\mu_0 IL_1}{2\pi(a+vt)}$$

右边: $\left|\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\right|=vB=v\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(b+vt)}$

$$\varepsilon_{右}=\int_{下}^{上}v\frac{\mu_0 I}{2\pi(b+vt)}dl$$

$$=v\frac{\mu_0 IL_1}{2\pi(b+vt)}$$



$$\varepsilon=\varepsilon_{左}-\varepsilon_{右}$$

方法二: $\varepsilon = -\dfrac{d\phi_m}{dt}$ $\phi_m = \vec{B}\bullet\vec{S}$

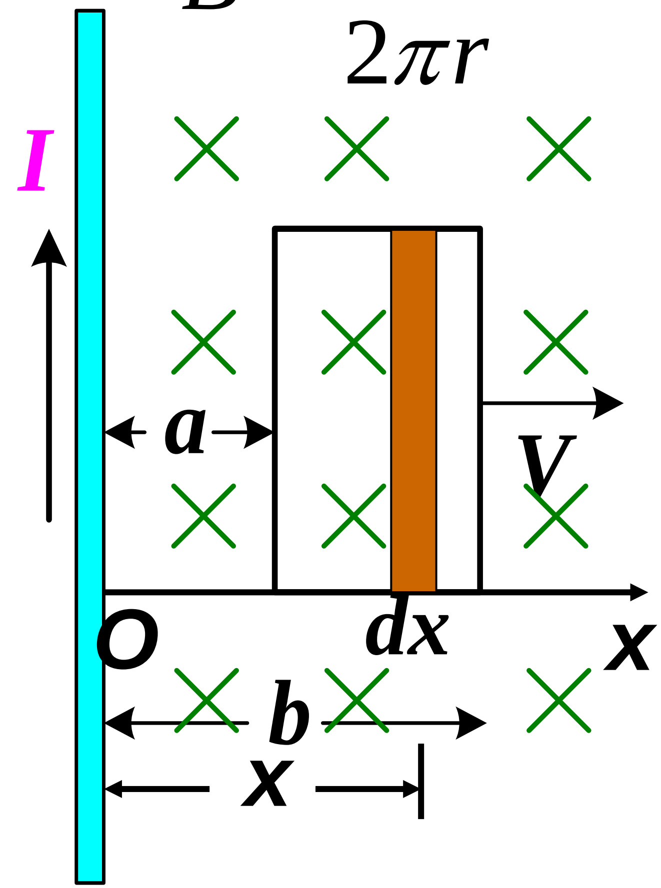
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

解：如图取平行于电流的一长条面积元，其上

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

通过面积元的磁通量为

$$d\phi_m = \vec{B}\bullet d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} L_1 dx$$



通过线圈的磁通量为

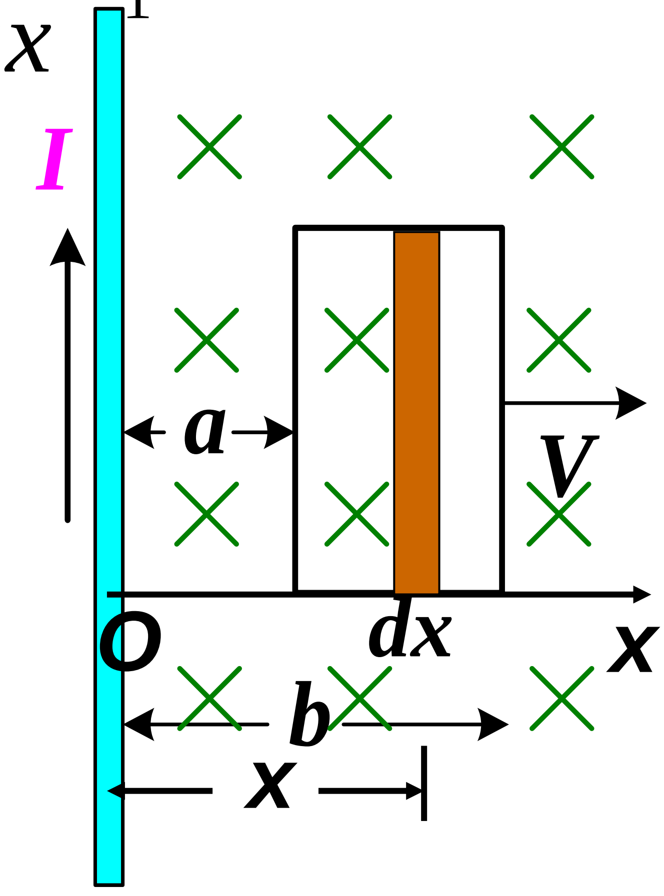
$$\phi_m=\int d\phi_m=\int \vec{B}\bullet d\vec{S}=\int_{a+vt}^{b+vt}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}L_1 dx$$

$$=\frac{\mu_0 I L_1}{2\pi}\ln\frac{b+vt}{a+vt}$$

则

$$\varepsilon=-\frac{d\phi_m}{dt}$$

$$=-\frac{\mu_0 I L_1}{2\pi}\left(\frac{v}{b+vt}-\frac{v}{a+vt}\right)$$



(2) 动生电动势的解释

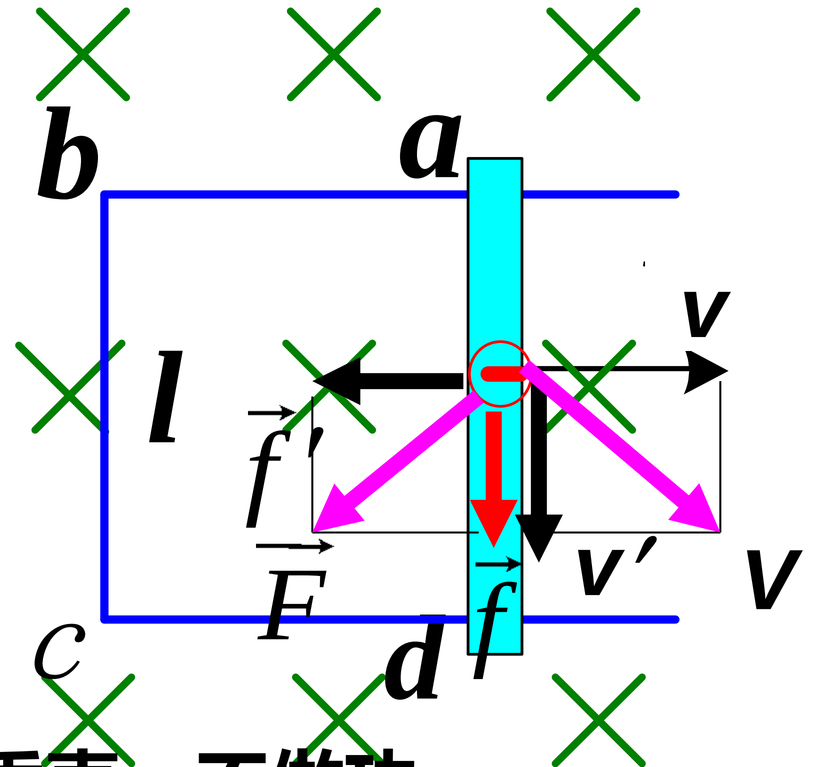
非静电力 - 洛仑兹力的分力

$$\vec{f} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

宏观上起电源中非静电力的作用，沿导线的积分表现为动生电动势；

$$\vec{f}\,' = -e\vec{v}' \times \vec{B}$$

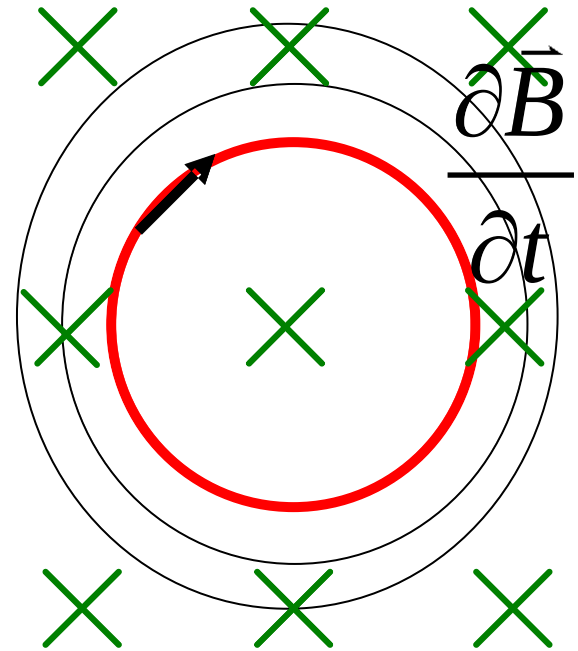
宏观上表现为导体受到的安培力；



总的洛仑兹力与电荷的合速度垂直，不做功

二、感生电动势 感生电场

(1)感生电动势 感生电场



$$W=\int \vec{F}_{非} \bullet d\vec{l}=\int q\vec{E}_{非} \bullet d\vec{l}$$

$$\varepsilon=\oint \vec{E}_{非} \bullet d\vec{l}$$

电场 $\left\{\begin{array}{l}\text{静电场：遵循库仑定律}\\ \text{感生电场：变化磁场产生的电场}\end{array}\right.$

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{S}=0$$

对任意矢量场A，若有 $\oint \vec{A} \bullet d\vec{S}$

稳恒磁场是**无源场**

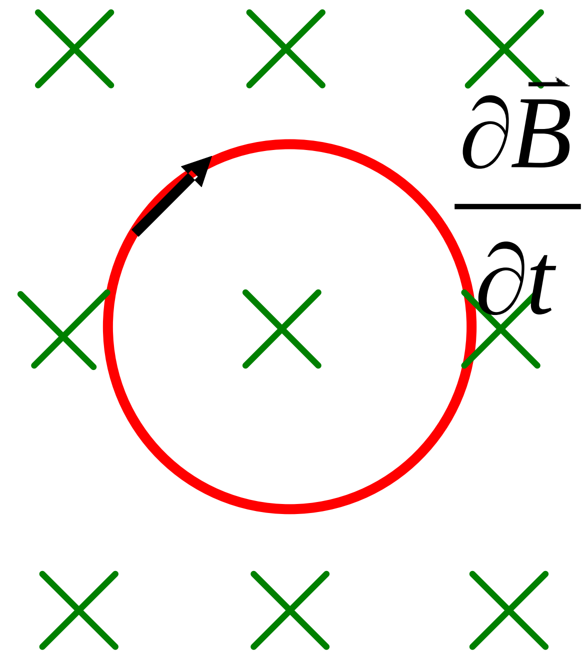
➢ A对任一闭合曲面的通量

➢ A沿任一闭合曲线的环流 $\oint \vec{A} \bullet d\vec{l}$

$$\oint \vec{E}_{感} \bullet d\vec{S}=0$$

感生电场是**无源场**

(2)感生电场的性质



$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

$$= -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_s \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

感生电场是
涡旋场、非保守场

$$\oint \vec{E}_{感} \bullet d\vec{S} = 0$$

感生电场是
无源场

静电场、感生电场、稳恒磁场的比较

静电场

$$\oint \vec{E}_{静} \bullet d\vec{S} = \frac{\sum_i q_{0i}}{\varepsilon_0}$$

有源场

$$\oint \vec{E}_{静} \cdot d\vec{l} = 0$$

无旋场

保守场

感生电场

$$\oint \vec{E}_{感} \bullet d\vec{S} = 0$$

无源场

$$\oint \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

涡旋场

非保守场

稳恒磁场

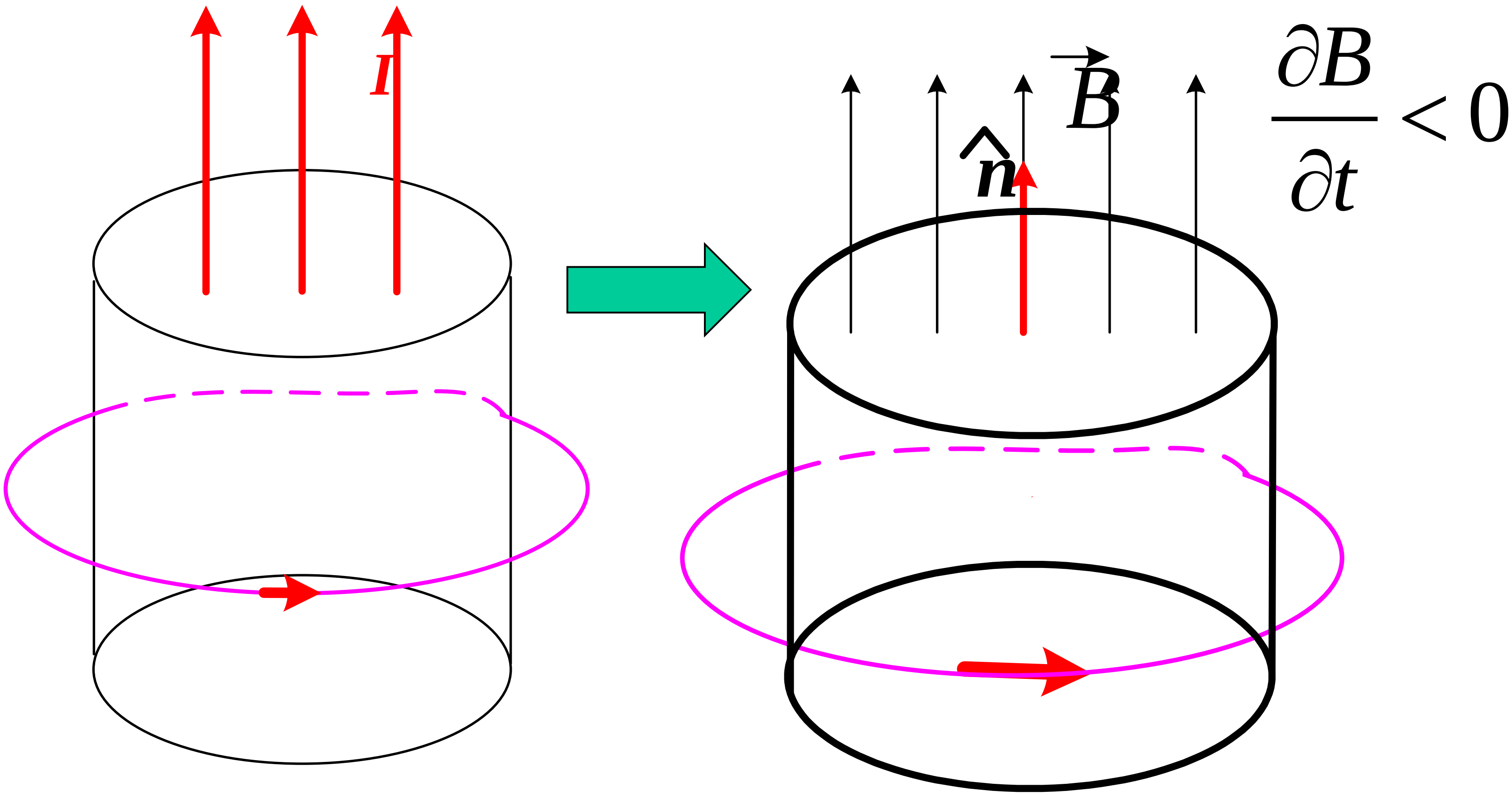
$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{S} = 0$$

无源场

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{oi}$$

涡旋场

非保守场

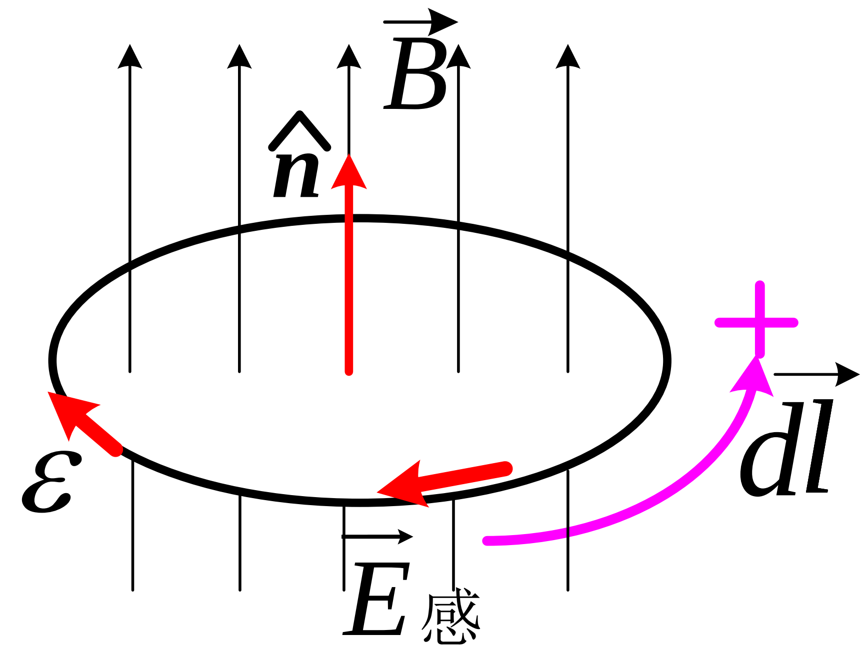


磁场为
绕着中心轴的圆环

感生电场为
绕着中心轴的圆环

(3) 感生电场的方向判断

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



线元面元方向：

选与B平行的方向为面积正方向；与B呈右手螺旋为线元正方向；

方向判断：楞次定律

若 $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} > 0$ **电动势、感生电场方向为顺时针方向**

若 $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} < 0$ **电动势、感生电场方向为逆时针方向**

(4) 感生电动势的计算

方法一：

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

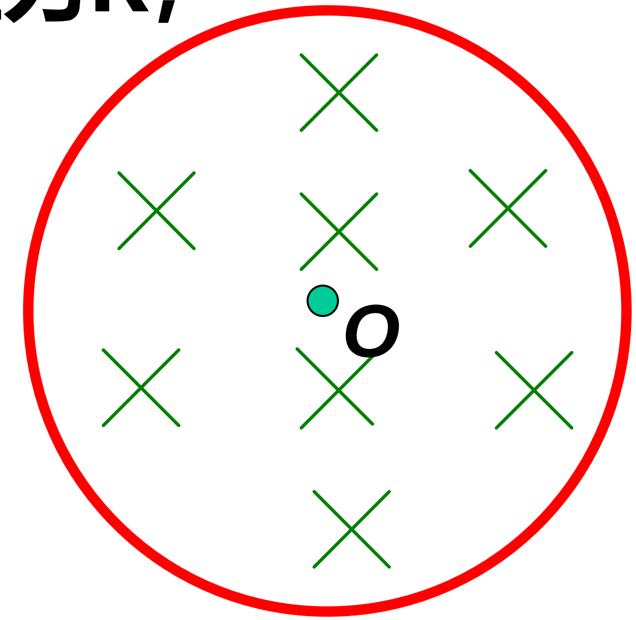
方法二：法拉第电磁感应定律 $\varepsilon = -\dfrac{d\phi_m}{dt}$

(1)求闭合线圈的感生电动势

(2)求一段导线的感生电动势。

例1 空间均匀的磁场限制在半径为R，$\vec{B}$ 的方向平行柱轴的圆柱内，

且有 $\frac{dB}{dt}=c$ 求：$E_{感生}$ 分布

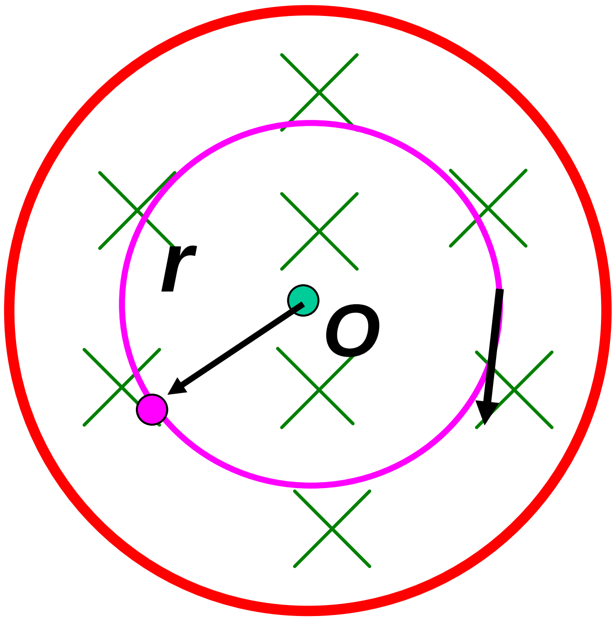


解:

$$\oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}_{感生} \cdot d\vec{l} = E_{感生} 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \pi r^2$$

$$\because r < R, \quad E_{感生} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$



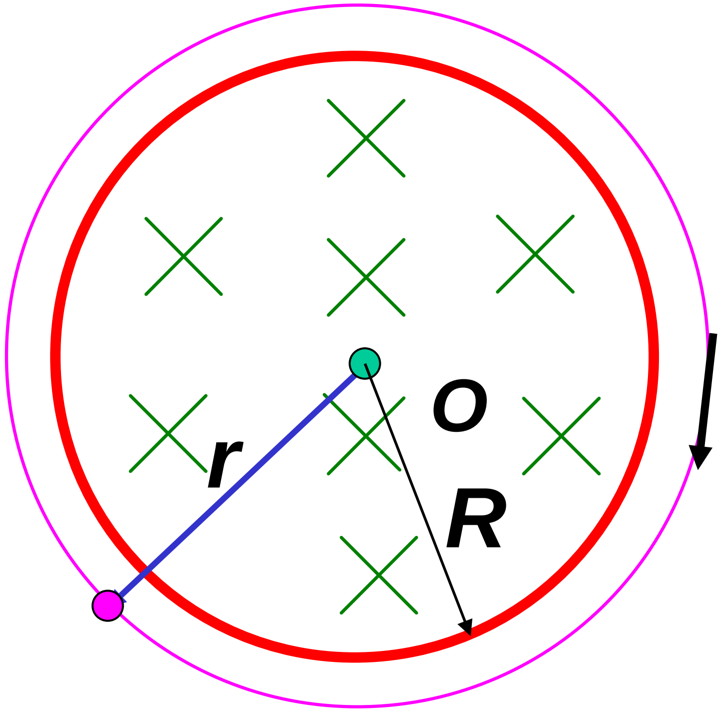
$$\oint_L \vec{E}_{感生} \cdot d\vec{l} = E_{感生} 2\pi r$$

$$\oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

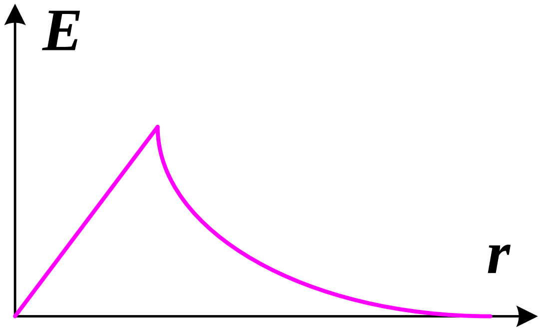
而 $-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{dB}{dt} \pi R^2$

故 $E_{感生} 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \pi R^2$

故 $r > R, \quad E_{感生} = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$

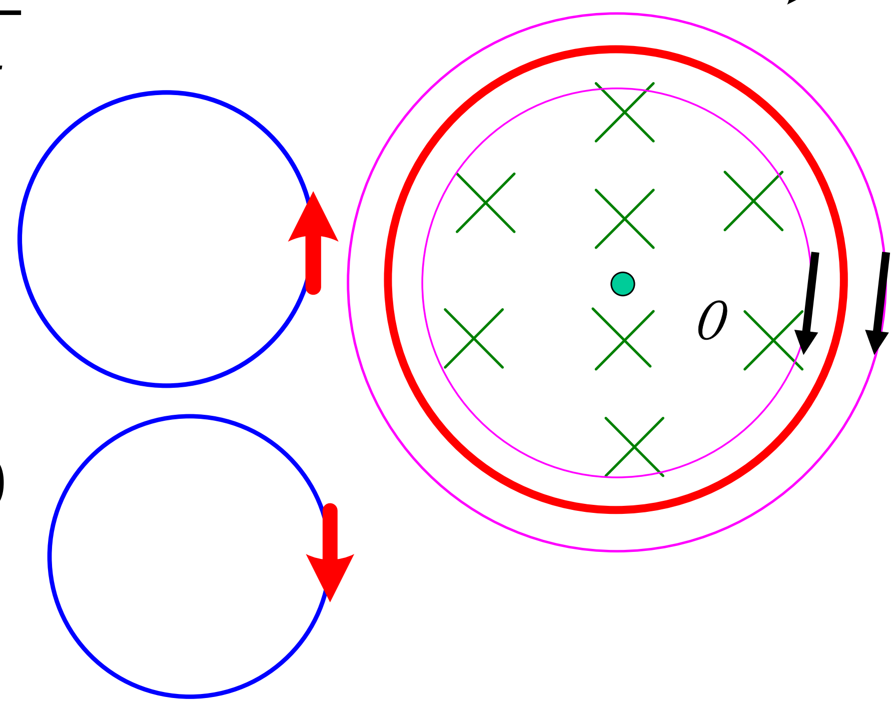


$$\begin{cases} r < R, \quad E_{感生} = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB}{dt} \\ r > R, \quad E_{感生} = -\dfrac{R^2}{2r}\dfrac{dB}{dt} \end{cases}$$



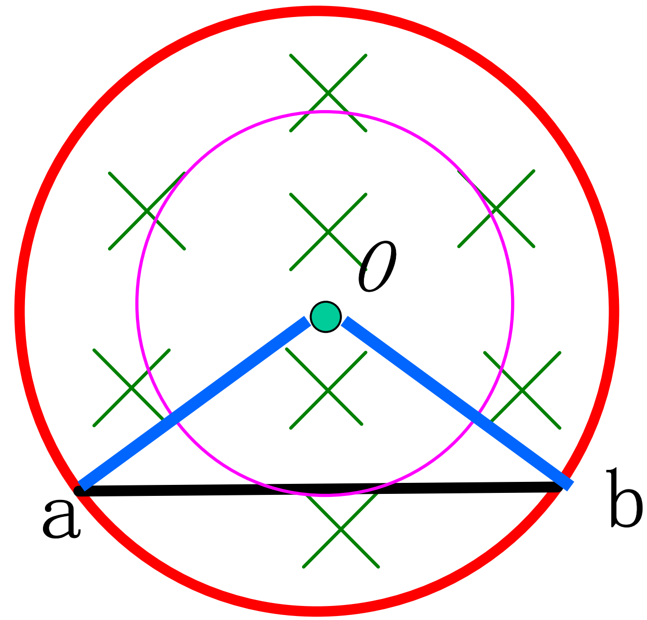
若 $\dfrac{dB}{dt} > 0 \qquad E_{感生} < 0$

若 $\dfrac{dB}{dt} < 0 \qquad E_{感生} > 0$



例2 如图中均匀磁场，且B以不变速率变化，求其中线段ab内的感生电动势

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



解：法拉第

$$\varepsilon = \varepsilon_{ob} + \varepsilon_{ba} + \varepsilon_{ao} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

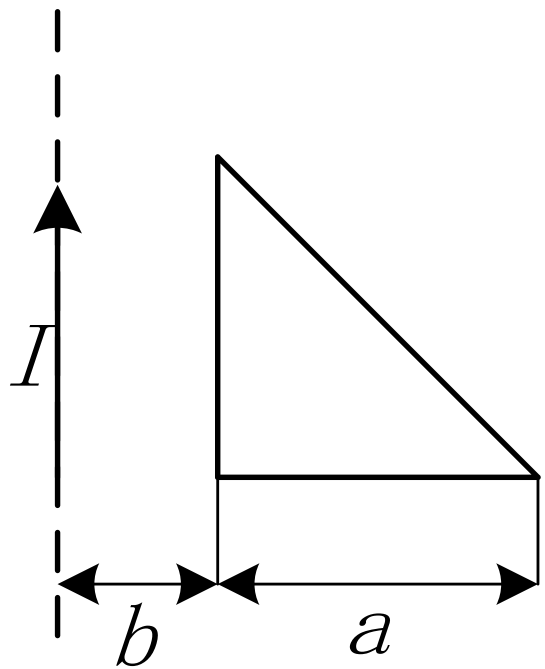
因为 $\varepsilon_{ao} = \int \vec{E}_{感生} \cdot d\vec{l}$ **=0** $\varepsilon_{ob} = 0$

因此 $\varepsilon_{ba} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d\left(BS_{\Delta}\right)}{dt} = -S_{\Delta}\frac{dB}{dt}$

在一长直载流导线附近，有一边长为**a**的等腰三角形线圈，导线与线圈共面，相距为**b**，如图所示。

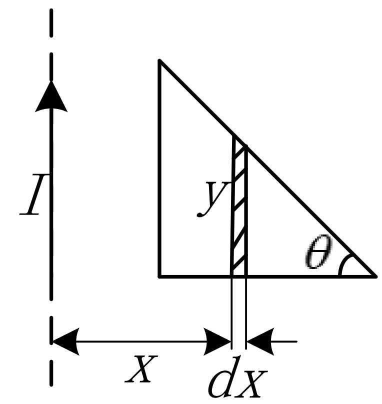
(1)若导线中的电流为 $I = I_0 \sin \omega t$ ，试求线圈中的感应电动势。

(2)若导线中的电流保持不变，而线圈以速度 $\vec{v}$ 向右运动，试求当线圈的一边与长直导线相距为**b**时，线圈中的感应电动势。



解

（**1**）在距离长直导线**x**处取宽为**dx**的面积元**ds**，则任意时刻导线在微元处的磁感应强度为 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$



则此时通过该面积元的磁通量为

$$d\Phi = Bds = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} y dx$$

而 $y=(b+a-x)tg\theta = b+a-x$

故通过整个线圈的磁通量为

$$\Phi=\int d\Phi=\int_b^{b+a}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}(b+a-x)dx$$

$$=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\left[(b+a)\ln\frac{b+a}{b}-a\right]\cos\omega t$$

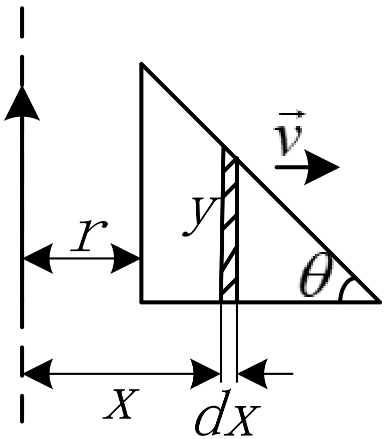
故整个线圈的感应电动势为

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi}\left[(b+a)\ln\frac{b+a}{b}-a\right]\sin\omega t$$

解（2）当线圈与导线间距离为任意距离r时，在距离长直导线x处取宽为dx的面积元ds，则任意时刻导线在微元处的磁感应强度为 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$

则此时通过该面积元的磁通量为

$$d\Phi = Bds = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} y dx$$



而 $y=(r+a-x)tg\theta = r+a-x$

$$\Phi = \int d\Phi = \int_r^{r+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x}(r+a-x)dx$$

故通过整个线圈的磁通量为

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[(r+a)\ln\frac{r+a}{r} - a\right]$$

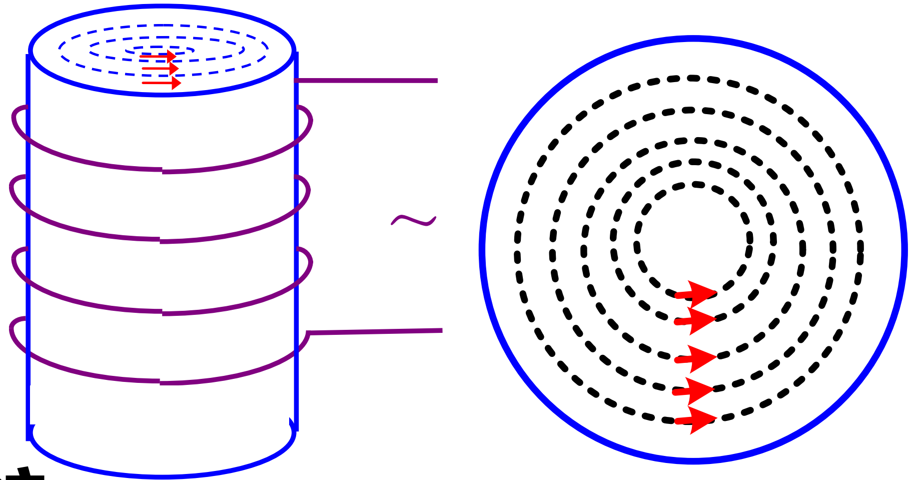
故整个线圈的感应电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln\frac{r+a}{r}\frac{dr}{dt} - (r+a)\frac{1}{r+a}\frac{dr}{dt} - \frac{r+a}{r}\frac{dr}{dt}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\left[\frac{a}{r} - \ln\frac{r+a}{r}\right]$$

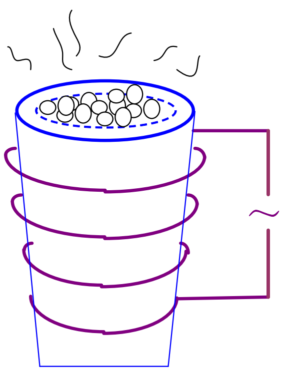
故当r=b时线圈的电动势 $\varepsilon = \dfrac{\mu_0 I v}{2\pi}\left[\dfrac{a}{b} - \ln\dfrac{b+a}{b}\right]$

(5)感生电场的应用

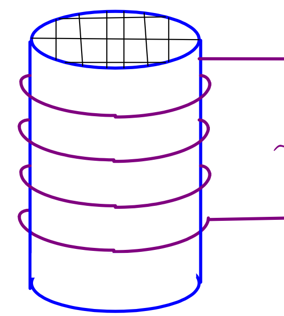


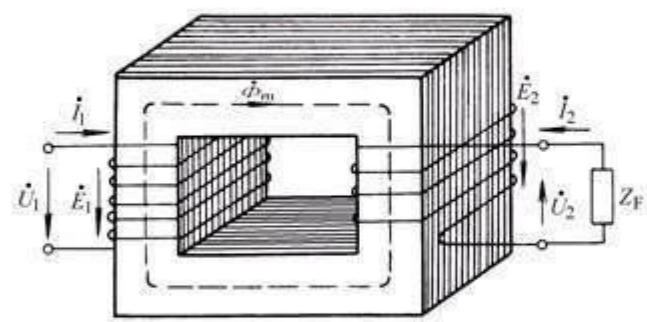
涡流：大块金属导体中的感应电流。

利用涡流：高频加热炉、电磁炉、探测仪、安检门



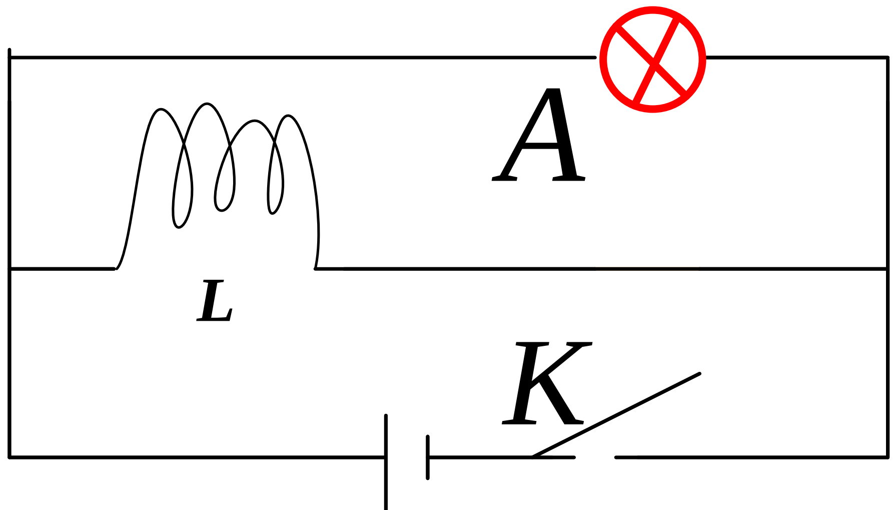
避免涡流：变压器、电机





§8.3 自感和互感现象

一.自感现象 自感系数



*K*合上 灯泡*A*亮

*K*断开 *A*会突然亮一下，再慢慢灭

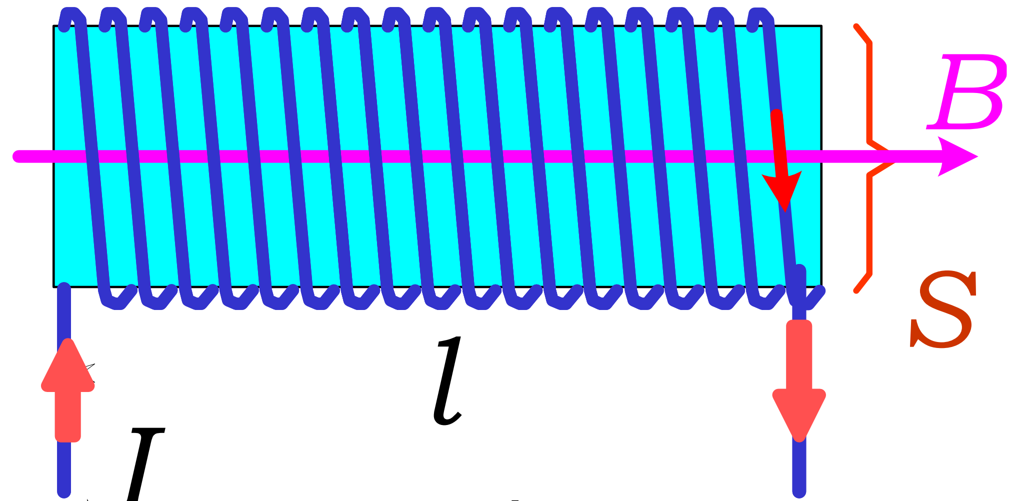
由自身电流发生变化引起的电磁感应现象叫**自感现象**

由自感引起的电动势称**自感电动势** ε_L

讨论：非铁芯的线圈

有*N*匝，电流*I*

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$



$$B \propto I \Rightarrow \phi \propto I \Rightarrow \psi = N\phi \propto I$$

$$\boxed{\psi = N\phi = LI}$$

***L*：自感系数，单位：亨利 H**

仅由线圈的大小、形状、匝数、及介质决定

自感电动势

$$\boxed{\varepsilon_L = -\frac{\partial \psi}{\partial t} = -L\frac{dI}{dt}}$$

方向：

楞次定律

二、求自感系数的思路

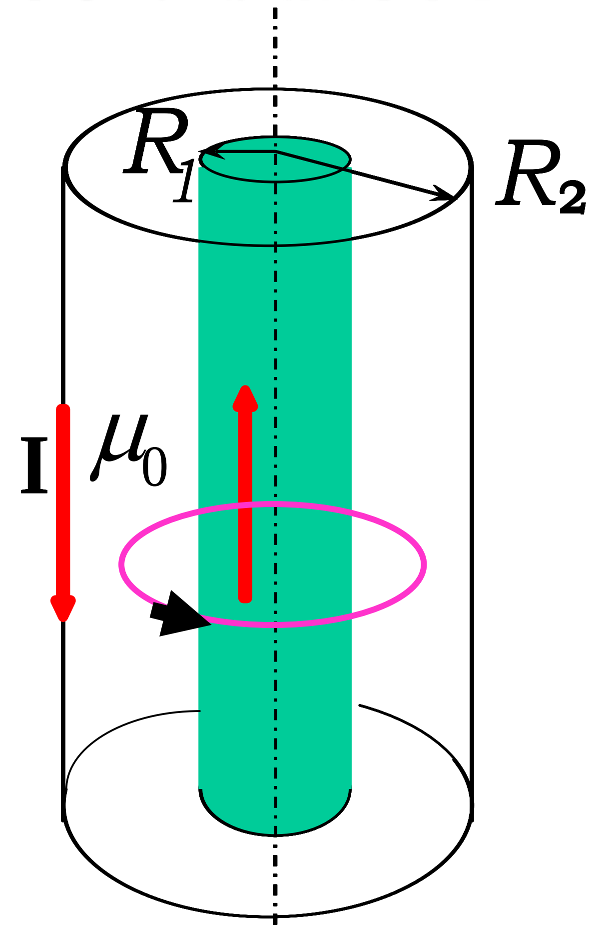
$$\oint_L \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\psi = N\phi = LI$$

$$I \Rightarrow \vec{B} \Rightarrow \phi \Rightarrow L$$

$$\phi = \int \vec{B} \bullet d\vec{S}$$

[例1] 求一无限长同轴电缆(内导线为空筒)，内外筒有等值反向电流，筒间为真空　，求单位长度的自感。



解： 应用安培环路定理

$$R_1 \le r \le R_2 \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

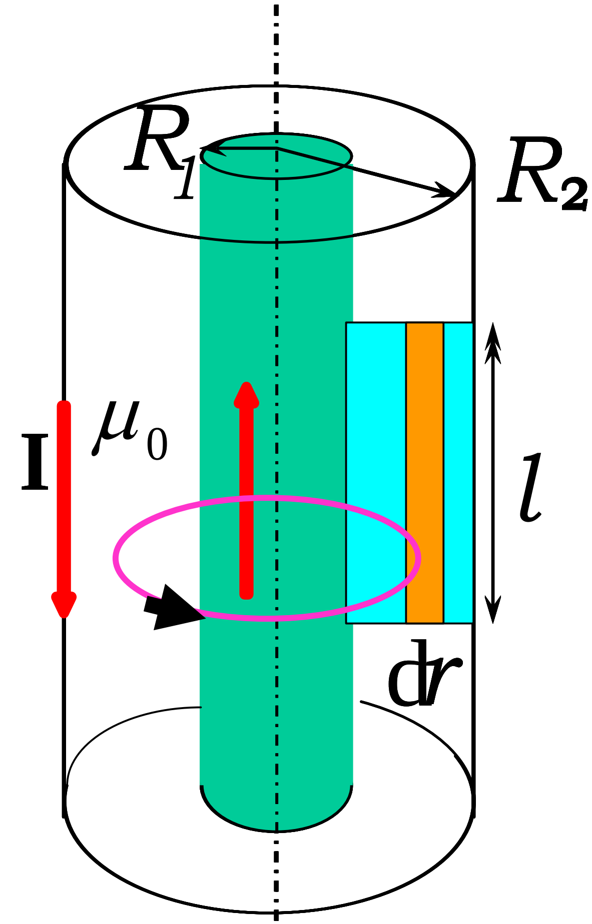
$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = BdS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr$$

故

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

单位长度磁通量 $\Phi = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \dfrac{R_2}{R_1}$

$$\therefore L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

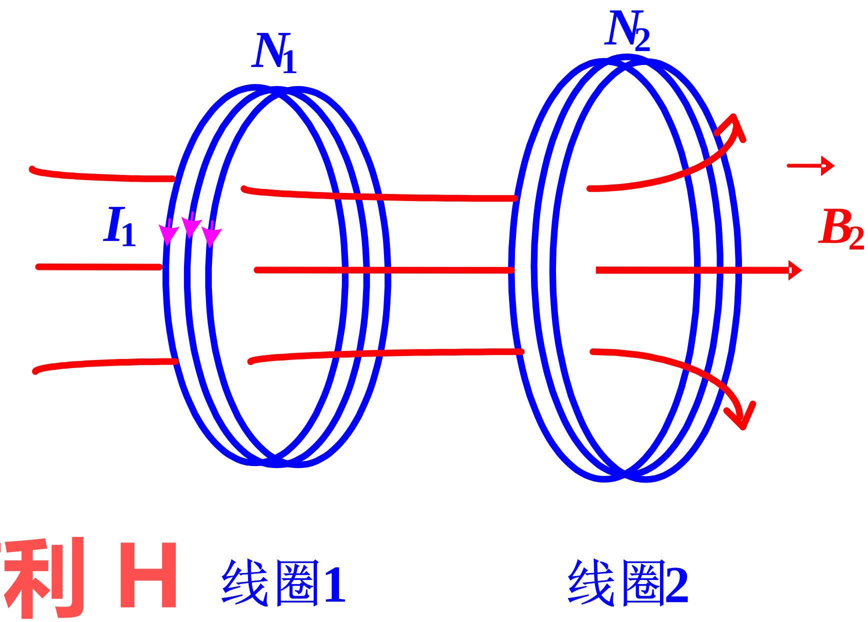


二.互感现象 互感系数

穿过线圈2的磁链为:

$$B_{21} \propto I_1 \qquad \psi_{21} \propto I_1$$

$$\boxed{\psi_{21} = M_{21} I_1}$$



M：互感系数，单位：亨利 H

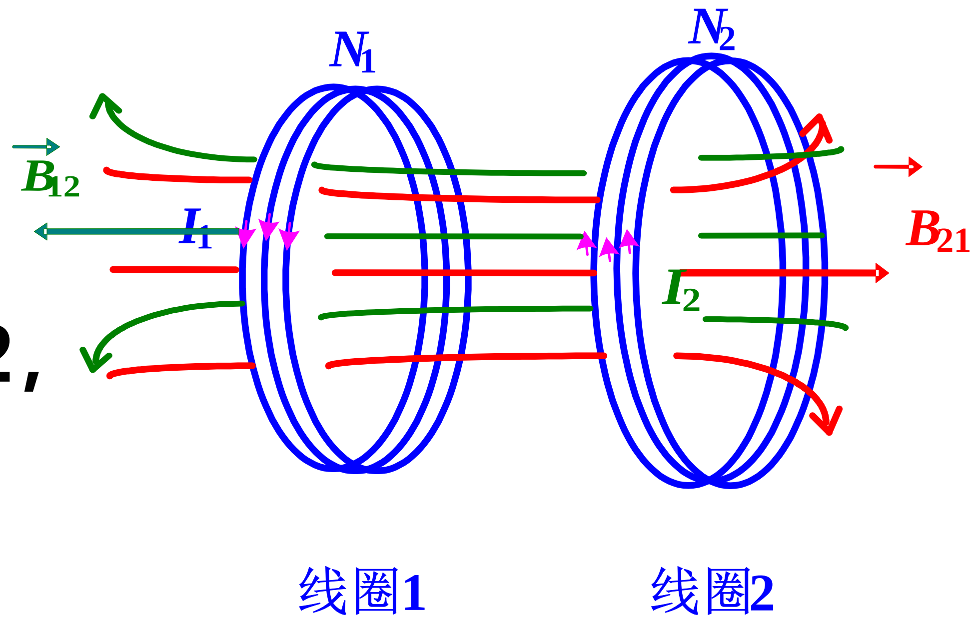
仅由线圈的大小、形状、匝数、线圈相对位置及介质决定

线圈2上的互感电动势:

$$\boxed{\varepsilon_2 = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}}$$

线圈2上的: $\psi_{21} = M_{21} I_1$

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}$$



同理，若线圈2通入电流I2，则线圈1上的感应电动势:

$$\psi_{12} = M_{12} I_2$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -M_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

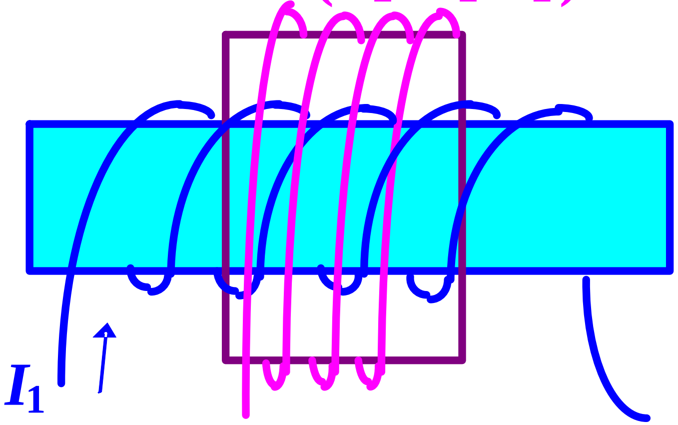
实验证明 $\boxed{M_{21} = M_{12} = M}$

M：互感系数，单位：亨利 H

仅由线圈的大小、形状、匝数、线圈相对位置及介质决定

例 两直螺旋线圈如图，求互感。

解：线圈1通电，在线圈2中的磁场部分为均匀磁场，其他部分为零。



线圈1产生的磁场为

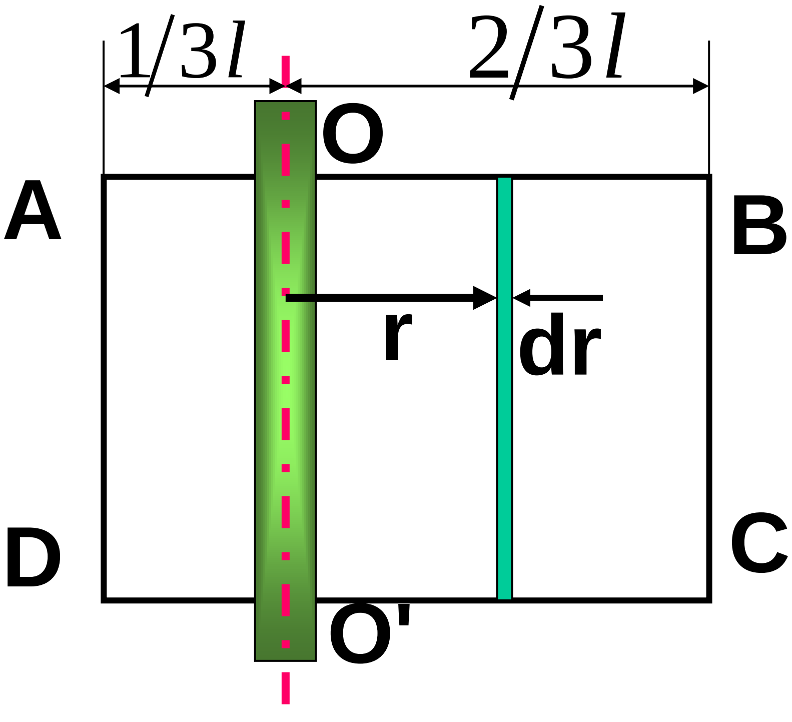
$$B=\mu_0 n I_1=\mu_0\frac{N_1}{l}I_1$$

由

$$\psi_{21}=N_2BS_1=N_2\mu_0\frac{N_1}{l}I_1S_1$$

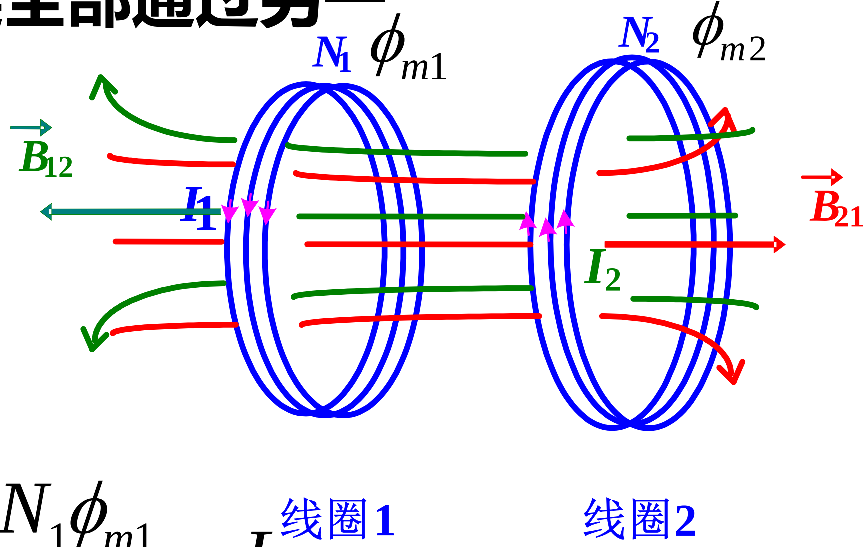
由 $\psi_{21}=M_{21}I_1$ $\therefore M_{21}=\dfrac{\mu_0N_1N_2S_1}{l}$

例 如图所示，有一边长为l和b的矩形导线框ABCD，其平面内有一根平行于AD边的长直导线OO‘，其半径为a，求该系统的互感系数



三.两线圈中自感与互感系数的关系

当两个线圈中每一线圈产生的磁链全部通过另一线圈的每一匝，称无漏磁



互感 $\begin{cases} N_2\phi_{m21} = MI_1 \\ N_1\phi_{m12} = MI_2 \end{cases}$

$$M = \frac{N_2\phi_{m21}}{I_1} = \frac{N_1\phi_{m12}}{I_2}$$

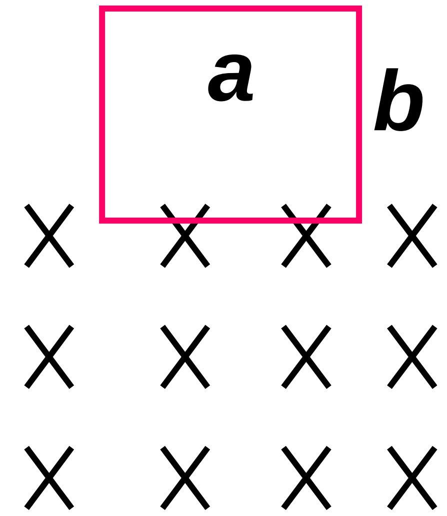
自感 $\begin{cases} N_1\phi_{m1} = L_1 I_1 \\ N_2\phi_{m2} = L_2 I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{N_1\phi_{m1}}{I_1} = L_1 \\ \dfrac{N_2\phi_{m2}}{I_2} = L_2 \end{cases}$

由于无漏磁 $\phi_{m21} = \phi_{m1} \quad \phi_{m12} = \phi_{m2}$

$$M^2 = \frac{N_2\phi_{m1}}{I_1}\frac{N_1\phi_{m2}}{I_2} = L_1 L_2 \Rightarrow M = \sqrt{L_1 L_2}$$

一般情况下 $M = k\sqrt{L_1 L_2}\ (0 \le k \le 1)$

例题：某边长分布为a和b的长方形线圈，在t＝0时刻正好从如图所示的磁场为B的区域上方由静止释放，线圈的电阻为R，自感为L，质量为m，考虑线圈的上边还在零场区域运动，假定电阻可忽略而自感不可忽略，求线圈的电流(为时间的函数)



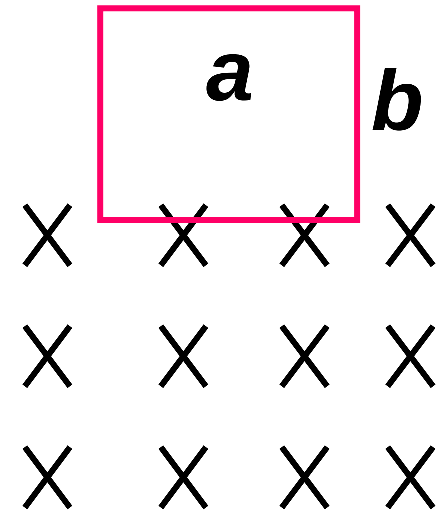
解：由欧姆定律有 $Bva - L\frac{dI}{dt} = 0$

由牛顿定律有 $mg - BIa = m\frac{dv}{dt}$

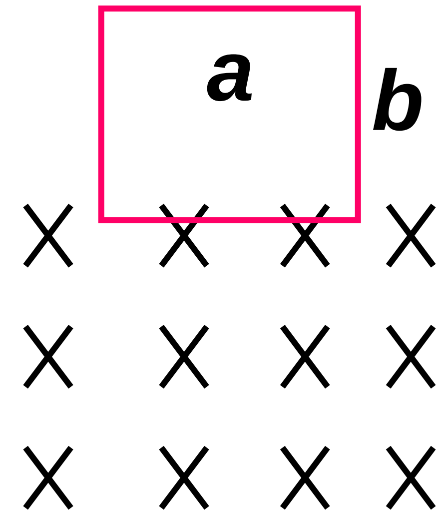
两式联立，消去I，则有

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{B^2a^2}{mL}v = 0$$

令 $\omega = \frac{B^2a^2}{mL}$



由牛顿定律有 $mg - BIa = m\dfrac{dv}{dt}$



则有 $\dfrac{d^2v}{dt^2} + \omega^2 v = 0$

$v = C\sin\omega t + D\cos\omega t$

根据题意t=0时，v=0，故有D=0，则$v = C\sin\omega t$

因此有 $mg - BIa = m\omega C\cos\omega t$

t=0时，I=0，则 $C = g/\omega$

因此有 $I = \dfrac{mg}{Ba}\left(1 - \cos\omega t\right)$