2018-2019 学年第一学期

《高等数学》（上）期末考试试题（1）

2018-2019

答案及参考评分标准

一．填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x})^x =$ ________.

填： e^{-3}

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=$ ________.

填：$\frac{1}{4}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\int_0^x \cos t^2 dt}{\ln(1+x^5)}=$ ________.

填：$\frac{1}{10}$

4. 曲线 $xy+e^y+x^2-e=0$ 上点 $(0,1)$ 处的切线方程为________.

填：$y=-\frac{1}{e}x+1$

5. 曲线 $y=x^2e^{-x}$ 的上凸区间是________.

填：$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$

6. 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge 2-x$ 所确定的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为________.

填：$\frac{\pi}{3}$

7. $\int\frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=$ ________.

填：$\arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}} + C$

8. $\int_0^2 (x+4)\sqrt{2x-x^2}\,dx =$ ________________.

填：$\dfrac{5}{2}\pi$

9. $I = \int_0^1 \dfrac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} =$ ____________________.

填：$\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

10. $y' = (x+y+1)^2$ 的通解为____________________.

填：$\arctan(x+y+1) = x+c$

二（10 分）. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+a\sin x+bx^2}{x^2}=\dfrac{5}{2}$，求常数 a 与 b 的值.

解 由假设有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+a\sin x}{x^2}=\dfrac{5}{2}-b$ (1)

从而 $\dfrac{\ln(1-x)+a\sin x}{x^2}=\dfrac{5}{2}-b+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+a\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{5}{2}-b+\alpha(x)\right]x=0 \qquad \textbf{(3 分)}$$

由洛比达法则. 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{1-x}+a\cos x}{1}=0\Rightarrow a=1 \qquad (2) \qquad \textbf{(6 分)}$$

由(1)，得

$$\frac{5}{2}-b=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{1-x}+\cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1+(1-x)\cos x}{2x(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1+(1-x)\cos x}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-(1-x)+(1-x)\cos x - x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

于是$b=3$.

所以 $a=1, b=3$. **(10 分)**

三(10 分). 设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=\cos t^2, \\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\frac{\cos u}{2\sqrt{u}}du, \end{cases} (t>0)$

确定. 求$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$及$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

解 $\frac{dy}{dt}=\cos t^2-2t^2\sin t^2-\frac{\cos t^2}{2t}2t=-2t^2\sin t^2$

$\frac{dx}{dt}=-2t\sin t^2$ **(3 分)**

所以 $\frac{dy}{dx}=t$ **(5 分)**

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot 1\Big/\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{d}{dt}(t)\cdot 1/(-2t\sin t^2)=-\frac{1}{2t\sin t^2}$$ **(9 分)**

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\left.\frac{1}{2t\sin t^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$ **(10 分)**

四(10 分)确定常数A的取值范围，使得函数$f(x)=x^2+\frac{A}{x^4}\geq 6$对任何$x\neq 0$均成立.

解 对任何$x\neq 0$,

$$f(x)=x^2+\frac{A}{x^4}\geq 6 \Leftrightarrow \frac{x^6+A-6x^4}{x^4}\geq 0 \Leftrightarrow A\geq 6x^4-x^6$$ **(3 分)**

令 $g(x)=6x^4-x^6$. 下面只要求出$g(x)$在$(0,+\infty)$的最大值即可.

$$g'(x)=24x^3-6x^5=6x^3(4-x^2)\begin{cases}>0, 0<x<2,\\=0, \quad x=2\\<0, 2<x<+\infty\end{cases}$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最大值为 $g(2)=32$. (8 分)

故当 $A\in[32,+\infty)$ 时，$f(x)=x^2+\dfrac{A}{x^4}\ge 6$ 对任何 $x\neq 0$ 均成立.

(10 分)

五 (10 分). 设常数 $a>0$，证明当 $x>0$ 时，下面的不等式成立:

$$e^{-x}(x^2-ax+1)<1$$

证明 注意不等式等价于

$$x^2-ax+1<e^x \Leftrightarrow e^x-x^2+ax-1>0 \quad (2\text{ 分})$$

令 $f(x)=e^x-x^2+ax-1$. 则当 $x\ge 0$ 时，$f(x)$ 任意阶可导.

$$f'(x)=e^x-2x+a,\quad f''(x)=e^x-2 \quad (4\text{ 分})$$

由于 $f''(x)=e^x-2\begin{cases}<0, 0\le x<\ln 2\\=0, \quad x=\ln 2\\>0, \ln 2<x<+\infty\end{cases}$，所以 $f'(x)$ 在 $x=\ln 2$ 取得最小值，最小值为

(7 分)

$$f'(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2+a=2(1-\ln 2)+a>a>0$$

故函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增加，于是有

$$f(x)>f(0)=0, \forall x>0$$

从而要证明的不等式成立.

(10分)

六 (12 分).(1) 设 $f(x)$ 为非负连续函数， 且满足

$f(x)\int_0^x f(x-t)dt=\ln(1+x)$，求 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的平均值.

(2) 计算 $\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx$，其中 n 为正整数.

解 (1) $f(x)\int_0^x f(x-t)dt \xlongequal{u=x-t} f(x)\int_0^x f(u)du = f(x)\int_0^x f(t)dt$

于是 $$f(x)\int_0^x f(t)dt = \ln(1+x)$$ (2 分)

从而 $$\int_0^2\left[f(x)\int_0^x f(t)dt\right]dx = \int_0^2 \ln(1+x)dx$$

得 $$\frac{1}{2}\left(\int_0^2 f(t)dt\right)^2 = 3\ln 3 - 2$$ (4 分)

所求平均值为 $$\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx = \frac{\sqrt{6\ln 3 - 4}}{2}$$ (6 分)

(2) $$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = \left(\int_0^{\pi} + \cdots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\right) x|\sin x|dx$$

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x|\sin x|dx \xlongequal{x=u+(k-1)\pi} \int_0^{\pi}[u+(k-1)\pi]|\sin u|du$$

$$= \int_0^{\pi} u\sin u du + (k-1)\pi\int_0^{\pi}\sin u du$$

$$= \int_0^{\pi} u\sin u du + 2(k-1)\pi$$

$$= -u\cos u\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos u du + 2(k-1)\pi = (2k-1)\pi$$ (10 分)

所以 $$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)\pi = n^2\pi$$ (12 分)

七(12 分). 求微分方程 $y''+8y'+16y=e^{-4x}+16x^2+8x$ 的通解.

解 齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+8\lambda+16=0$,即

$(\lambda+4)^2=0 \Rightarrow$ 特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-4$. (2 分)

所以齐次方程 $y''+8y'+16y=0$ 的通解为

$$\overline{y} = (c_1+c_2x)e^{-4x}$$ (4 分)

(1) 对非齐次方程 $y''+8y'+16y=e^{-4x}$, 因为 $\alpha=-4$ 是 2 重特征值,

所以可设其特解为 $y_1^* = Ax^2e^{-4x}$，代入上述方程解得 $A=\frac{1}{2}$. 从而

$$y_1^* = \frac{1}{2}x^2e^{-4x} \qquad \text{(7 分)}$$

(2) $y''+8y'+16y=16x^2+8x$，因为 $\alpha=0$ 不是特征根，可设其特解为 $y_2^*=ax^2+bx+c$，代入上述方程，解得 $a=1, b=-\frac{1}{2}, c=\frac{1}{8}$. 于是

$$y_2^* = x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8} \qquad \text{(10 分)}$$

故原方程的通解为

$$y=(c_1+c_2x)e^{-4x}+\frac{1}{2}x^2e^{-4x}+x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8} \qquad \text{(12 分)}$$

八(8 分). 设 $0<x_1<x_2$，证明，$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$$

证 所欲证等式等价于

$$\frac{e^{x_2}}{x_2}-\frac{e^{x_1}}{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)$$

也等价于 $$\left(\frac{e^{x_2}}{x_2}-\frac{e^{x_1}}{x_1}\right)\Big/\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)=(1-\xi)e^{\xi}. \qquad (1) \qquad \text{(3 分)}$$

令 $f(x)=e^x/x$， $g(x)=1/x$. 则 $f(x),g(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导，且 $g'(x)=-1/x^2\neq 0, \forall x\in(x_1,x_2)$. (6 分)

由柯西中值定理知，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$=\left(\frac{\xi e^{\xi}-e^{\xi}}{\xi^2}\right)\Big/\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)=(1-\xi)e^{\xi} \qquad \text{(8 分)}$$