北京邮电大学 2020 ——2021 学年第一学期

《线性代数》期末考试试题（A 卷）

请注意：所有答案一律写在答题纸上，写在试题纸上无效。

一、　　填空（30 分，每空 3 分）

1． 已知$\alpha=(1,5,3)$，$\beta=(1,\frac{1}{5},\frac{1}{3})$，设$A=\alpha^T\beta$，其中$\alpha^T$为$\alpha$的转置，则$A^n$=________.

2． 设A为三阶矩阵，$|A|=3$，A^*为A的伴随矩阵，若交换A的第一行与第二行得到矩阵B，则$|BA^*|$=________.

3． 过已知点M_0(2, 3, -5)且垂直于平面$2x+7y-2z+5=0$的直线的标准（点向式）方程为____________.

4． 设 4 阶方阵$A=(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，$B=(\gamma,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，其中$\alpha,\gamma,\beta_1,\beta_2,\beta_3$均为 4 维列向量，且已知行列式$|A|=4$，$|B|=1$，则$|A+B|$=_________.

5． 设A是5×4矩阵，A的秩$r(A)=2$，$X_1=(1,2,0,1)^T$，$X_2=(2,1,1,3)^T$是方程组$AX=b$的解，$X_3=(1,0,1,0)^T$是对应齐次线性方程组$AX=0$的一个解，则$AX=b$的通解为_____________.

6． 设A为n阶方阵，且$A^2-A-5E=0$，则$(A+E)^{-1}=$__________.

7． 已知n阶实对称矩阵A满足$A^2=A$，且A的秩$r(A)=r$，则$\left|A-3E\right|=$_________.

8． 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&-2\\0&-2&k\end{pmatrix}$是正定矩阵，则$k$的取值范围是______.

9. 若 4 阶矩阵 B 与 A 相似，且 A 的特征值为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，则 $\left|B^{-1}-E\right|=$ ________________.

10. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -3 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的等价标准形是_______.

二、(12 分) 设 $\alpha_1=(-1,-1,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,2,1,-1)^T$，$\alpha_3=(1,3,2,1)^T$，$\alpha_4=(2,6,4,1)^T$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，并将向量组中其余向量用该极大线性无关组线性表示.

三、(12 分) 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，$[(\frac{1}{2}A)^*]^{-1}BA^{-1}=2AB+12E$，求 B.

四、(14 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$，(1) 求 A 的特征值和特征向量；(2) 求正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角矩阵.

五、(14 分) 求 k，使方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+3x_2+5x_3+x_4=3 \\ x_1-x_2-3x_3+5x_4=3 \\ x_1-5x_2-11x_3+12x_4=k \end{cases}$ 有解, 并求其通解.

六、(12 分) 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\,(s\ge 1)$ 线性无关，讨论向量组 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3,\ ...,\ \alpha_s+\alpha_1$ 的线性相关性.

七、(6 分) 设 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，$\alpha,\beta$ 为 3 维列向量，α^T 为 α 的转置，β^T 为 β 的转置，证明：(1) $r(A)\le 2$；(2) 若 α,β 线性相关，则 $r(A)<2$.