第4章　随机变量的数字特征

计划学时：6学时

教学基本要求：

1、熟练掌握随机变量的数学期望，方差，协方差及相关系数的概念与性质；

2、能够正确计算上述数字特征，并能用以解决相应问题；

3、*了解特征函数的概念；

4、知道**n**维正态分布及其基本性质。

重点：数学期望、方差、协方差以及相关系数的概念、性质及计算

难点：两个随机变量的函数的数字特征的计算

随机变量的概率分布能完整地描述 随机变量的统计特性。但在实际应用中,我们往往只关心（或者只能关心）某些集中反映随机变量统计规律的典型特征的数字指标。例如

在评定某地区粮食产量的水平时，,最关心的是平均产量;

在检查一批棉花的质量时，既需要注意纤维的平均长度，又需要注意纤维长度与平均长度的偏离程度;

考察北京市居民的家庭收入情况时，既要知道家庭的年平均收入，又要研究贫富之间的差异程度; ……

这些集中反映随机变量统计规律的典型特征的数字指标就称为随机变量的数字特征。

其中，刻画随机变量平均取值的是数学期望，刻画随机变量取值与其平均值的差异程度的是方差和标准差;

而对于多维随机变量，还有刻画其分量间线性相关程度的协方差和相关系数。

§ 4.1数学期望

第1次课

教学内容：

数学期望

教学目的及目标：

理解数学期望的概念；

掌握数学期望的性质；

能熟练计算随机变量及其函数的数学期望，并能利用数学期望解决一些相关的实际问题。

教学重点：

数学期望的定义、性质及计算

教学难点：

两个随机变量的函数的数学期望的计算，数学期望的实际应用。

一、 离散型随机变量的数学期望

1、引例 设甲、乙两射击手的射击技术列表如下：

甲：击中环数X	8	9	10
概率	0.1	0.8	0.1

乙：击中环数Y	8	9	10
概率	0.2	0.65	0.15

问:哪一个射手的本领较好?

射击水平—“平均中靶环数”(平均1发子弹击中的环数)

设每人射击N次，由于

$\boxed{8*0.1+9*0.8+10*0.1}$

甲平均中靶环数=(8*0.1N+9*0.8N+10*0.1N)/N=9

乙平均中靶环数=(8*0.2N+9*0.65N+10*0.15N)/N=8.95

$\boxed{8*0.2+9*0.65+10*0.15}$

所以甲的本领较好。

此例说明，离散型随机变量的以对应概率为权的加权平均值（而不是其取值的算术平均值）刻画了它的实际平均取值。离散型随机变量X,Y的上述加权平均值就是它们的数学期望**(Mathematical Expectation)**.
一般地，我们有

2、定义

定义 若离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1,2,\cdots,n,$$

则称 $\sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望 (简称期望，又称均值), 记为 $E(X)$（或EX),即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k .$$

问题： 若离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1,2,\cdots,$$

应如何定义其 数学期望EX呢？

定义 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

关于定义的几点说明

（1）级数的绝对收敛性保证了级数的收敛性.

（2）级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变，之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X 取可能值的平均值,它不应随可能值的排列次序而改变.

（3）$E(X)$是一个实数, 而非变量, 它是一种加权平均值，它从本质上体现了随机变量 X 取各个可能值的真正的平均值，与一般的算术平均值不同.

3、重要离散型分布的数学期望的计算

X	0	1
P	$1-p$	p

(1) 若X服从参数为p的0-1分布，即

则$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$；

(2)若$X\sim b(n,p)$,则

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad k=0,1,2,\ldots,n.$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-k}=np(p+q)^{n-1}=np.$$

（3）若$X\sim P(\lambda)$，则

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad k=0,1,2,\ldots\ldots$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

4、应用举例

例1： 设有某种产品投放市场，每件产品投放可能发生三种情况：按定价销售出去，打折销售出去，销售不出而回收。根据市场分析，这三种情况发生的概率分别为0.6，0.3，0.1。在这三种情况下每件产品的利润分别为10元，0元，－15元（即亏损15元）。问对每件产品厂家可期望获利多少？

解: 设X表示一件产品的利润（单位：元），则X是随机变量，且其分布律为

X	10	0	-15
P	0.6	0.3	0.1

依题意，所要求的是X的数学期望。

$$E(X)=10\times 0.6+0\times 0.3+(-15)\times 0.1=4.5\text{（元）}$$

例2　分组验血

在一个人数很多的团体中普查某种疾病，为此要抽验 N 个人的血，可以用两种方法进行.

(i) 将每个人的血分别化验，N人共需化验 N 次.

(ii) 按 k 个人一组进行分组，把从 k 个人抽来的血混合在一起进行化验，如果这混合血液呈阴性反应，就说明 k 个人的血都呈阴性反应，这样，这 k 个人的血就只需验一次；若呈阳性，则再对这 k 个人的血液分别进行化验，这样，k 个人的血共需化验 $k+1$ 次.

设每人血样化验呈阳性的概率为 p，且这些人的化验反应是相互独立的. 试说明当 p 较小时，选取适当的 k，按第二种方法可以减少化验的次数. 并说明 k 取什么值时最适宜.

解 由于每人血液呈阳性反应的概率为 p，

所以每人血液呈阴性反应的概率为 $q = 1 - p$，

因而 k 个人的混合血样呈阴性反应的概率为 q^k，

k 个人的混合血样呈阳性反应的概率为 $1 - q^k$.

以 k 个人为一组时，组内每人的血化验的次数 X 是一个随机变量，且其分布律为

X	$\frac{1}{k}$	$\frac{k+1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

X	$\frac{1}{k}$	$\frac{k+1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

X 的数学期望为

$$E(X)=\frac{1}{k}q^k+\left(1+\frac{1}{k}\right)(1-q^k)=1-q^k+\frac{1}{k}.$$

N 个人平均需化验的次数 为$N\left(1-q^k+\frac{1}{k}\right).$

由此可知，只要选择k使:$1-q^k+(1/k)<1$，则N个人平均需化验的次数$<N$。当p固定时，选取k使得$L=1-q^k+(1/k)$小于1且取到最小值，就能得到最好的分组方法。

例如，若$p=0.1$，则$q=0.9$，当$k=4$时,$L=1-q^k+(1/k)$取到最小值，此时得到最好的分组方法。特别地，若$N=1000$，则平均化验次数为

$$1000\left(1-0.9^4+\frac{1}{4}\right)=594$$

这样平均来说，可以减少40%的工作量。

练2 按规定，某车站每天 $8:00\sim9:00$，$9:00\sim10:00$ 都恰有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两者到站的时间相互独立。其规律为

到站时刻	$8:10$ $9:10$	$8:30$ $9:30$	$8:50$ $9:50$
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

(i) 一旅客 $8:00$ 到车站，求他候车时间的数学期望。

(ii) 一旅客 $8:20$ 到车站，求他候车时间的数学期望。

解 设旅客的候车时间为 X(以分计).

(i) X 的分布律为

X	10	30	50
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X)=10\times\frac{1}{6}+30\times\frac{3}{6}+50\times\frac{2}{6}$$

$$=33.33(\text{分}).$$

(ii) X 的分布律为

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X)=$$

$$10\times\frac{3}{6}+30\times\frac{2}{6}+50\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+70\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+90\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$$

$=27.22$(分).

设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

问题

若X 是连续型随机变量，概率密度为 $f(x)$, 应如何定义其数学期望呢？

二、连续型随机变量的数学期望

1、定义

定义 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2、三种重要连续型分布的数学期望

（1）若$X\sim U(a,b)$, 则$E(X)=(a+b)/2$；

证：X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x\in(a,b)\\ 0 & x\notin(a,b)\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

（2）若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$E(X)=$ μ

证：X的概率密度为：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t$，

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\mu\ .$$

即：若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$E(X)=\mu$；

特别地，若$X\sim N(0,1)$，则$E(X)=0$。

（3）若X服从指数分布$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$则$E(X)=1/\lambda$

证 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{+\infty}x\cdot d\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}dx$$

$$=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

即，

若X服从指数分布 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，则$E(X)=1/\lambda$

***例**

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间X(以分计)服从指数分布, 其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求顾客等待服务的平均时间?

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-x/5}\,\mathrm{d}x=5$(分钟).

因此，顾客平均等待5分钟就可得到服务.

注 随机变量的数学期望不一定存在。例如

(1)随机变量X的取值为

$$x_k=(-1)^k\frac{2^k}{k}\quad k=1,2,\cdots\qquad p_k=\frac{1}{2^k}\quad k=1,2,\cdots$$

易验证 $p_k=\frac{1}{2^k}\quad k=1,2,\cdots$ 满足分布律的两个条件，但

$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k=\sum_{k=1}^{\infty}|(-1)^k\frac{2^k}{k}|\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}|\frac{(-1)^k}{k}|$ 发散。所以$E(X)$不存在。

(2)随机变量X的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ (柯西分布)。

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x}{1+x^2}dv=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)|_0^{+\infty}$ 发散。

所以$E(X)$不存在。

三、随机变量函数的数学期望

1、 问题：

已知随机变量X的分布，如何计算$g(X)$的期望？

方法一：先由X的分布求出$g(X)$ 的概率分布，再按照数学期望的定义计算$E[g(X)]$。如下例(略)

*例: 有5个相互独立工作的电子装置，它们的寿命$X_k(k=1,2,3,4,5)$服从同一指数分布，其概率密度为$(\theta>0)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

(1)若将这5个电子装置串联组成整机，求整机寿命N的数学期望;

(2)若将这5个电子装置并联组成整机，求整机寿命M的数学期望。

解: $X_k(k=1,2,3,4,5)$的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x/\theta} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

(1) 由第三章知N=min(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)的分布函数为

$$F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^5=\begin{cases}1-e^{-5x/\theta} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

因而N的概率密度为

$$f_{\min}(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{\theta}e^{-5x/\theta} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

于是N的数学期望为

$$E(N)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\min}(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\frac{5}{\theta}e^{-5x/\theta}dx=\frac{\theta}{5}$$

由第三章知，M=max(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)的分布函数为

$$F_{\max}(x)=[F(x)]^5=\begin{cases}\left(1-e^{-x/\theta}\right)^5 & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

因而M的概率密度为

$$f_{\min}(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{\theta}\left[1-e^{-x/\theta}\right]^4 e^{-x/\theta} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

M的数学期望为

$$E(M)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\max}(x)dx=\int_0^{+\infty}x\frac{5}{\theta}\left(1-e^{-x/\theta}\right)^4e^{-x/\theta}dx=\frac{137\theta}{60}$$

方法二

定理 设Y是随机变量X的函数:$Y=g(X)$(g是连续函数),

(1) 若X是离散型随机变量，分布律为$P\{X=x_k\}=p_k$,

$k=1,2,\ldots$，且$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$绝对收敛，则

$$E(Y)=E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

(2) 若X是连续型随机变量，概率密度为$f(x)$，且

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，则

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

此定理可推广至二个或二个以上随机变量的函数的情形

例如，若二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，

$Z=g(X,Y)$(g是连续函数) 是X,Y的函数，则

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

这里要求上式右边的积分绝对收敛。

若(X,Y)是离散型随机变量，分布律为

$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$, $i,j=1,2,\ldots.$

则

$$E(Z)=E(g(X,Y))=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

这里要求上式右边的级数绝对收敛。

优点：不必求$g(X)$或$g(X,Y)$的分布，而直接由X或(X,Y)的分布求得$E[g(X)]$或$E[g(X,Y)]$.

例3: 设风速V在（0, a）上服从均匀分布，即具有概率密度：

$$f(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & 0<v<a\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

又设飞机翼受到的正压力 W是V的函数：

$W = kV^2$ (k>0，常数)，求 W的数学期望。

解: 由公式有

$$E(W)=\int_{-\infty}^{+\infty}kv^2 f(v)dv=\int_0^a kv^2\frac{1}{a}dv=\frac{1}{3}ka^2$$

例4：

设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.25	0.15
1	0.15	0.2	0.15

求随机变量 $Z=\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}$ 的数学期望。

解：(X,Y)的分布为

(X,Y)	**(0,0)**	**(1,0)**	**(0,1)**	**(1,1)**	**(0,2)**	**(1,2)**
P	**0.1**	**0.15**	**0.25**	**0.2**	**0.15**	**0.15**

解：$$E(Z)=E[\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}]=\sin\frac{\pi(0+0)}{2}\times 0.1+\sin\frac{\pi(1+0)}{2}\times 0.15$$

$$+\sin\frac{\pi(0+1)}{2}\times 0.25+\sin\frac{\pi(1+1)}{2}\times 0.2+\sin\frac{\pi(0+2)}{2}\times 0.15$$

$$+\sin\frac{\pi(1+2)}{2}\times 0.15=0.25$$

例5: 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试求XY的数学期望。

解: 由公式得

$$E[XY]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy=\frac{1}{3}$$

***练3** 设 $(X,Y)\sim N(0,1;0,1;0)$，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的数学期望.

解

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty}r\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr\right)d\theta$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

例6 某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式，记使用寿命为 X (以年计)，规定：

$X \le 1$，一台付款 1500 元；$1 < X \le 2$，一台付款 2000 元；$2 < X \le 3$，一台付款 2500 元；$X > 3$，一台付款 3000元.

设寿命 X 服从指数分布，概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{-x/10}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

试求该商店一台家用电器收费 Y 的数学期望.

解：

$$Y = g(X) = \begin{cases} 1500, & 若 X \le 1 \\ 2000, & 若 1 < X \le 2 \\ 2500, & 若 2 < X \le 3 \\ 3000, & 若 X > 3 \end{cases}$$

解 $$P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx = 1 - e^{-0.1} = 0.0952,$$

$$P\{1 < X \le 2\} = \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx = e^{-0.1} - e^{-0.2} = 0.0861,$$

$$P\{2 < X \le 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx = e^{-0.2} - e^{-0.3} = 0.0779,$$

$$P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx = e^{-0.3} = 0.7408.$$

因而一台收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

得 $E(Y) = 2732.15,$

即平均一台家用电器收费 2732.15 元.

*练：设随机变量 (X,Y) 的概率密度为：

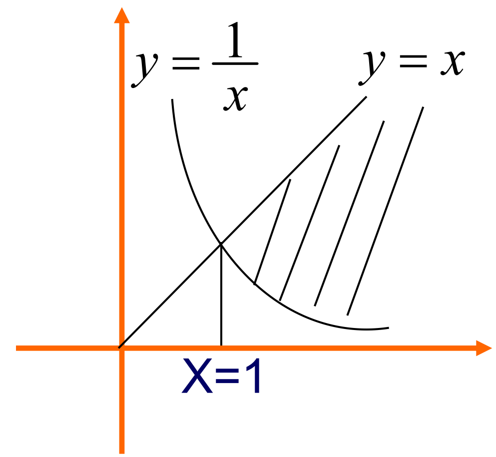
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2} & \dfrac{1}{x}<y<x,\ x>1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求数学期望 $E(Y),E\left(\dfrac{1}{XY}\right)$。

解：$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dydx=\int_{1}^{+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\dfrac{3}{2x^3y}dydx$

$$=\frac{3}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^3}lny\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=3\int_{1}^{+\infty}\frac{lnx}{x^3}dx$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{lnx}{x^2}\Big|_{1}^{+\infty}+\frac{3}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{3}{4}$$



$$E\left(\frac{1}{XY}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)dydx=\int_{1}^{+\infty}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^4y^3}dy$$

$$=\int_{1}^{+\infty}\frac{3}{2x^4}\left[-\frac{1}{2y^2}\right]\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=\frac{3}{4}\int_{1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{5}+1\right)=\frac{3}{5}$$

考虑：先求 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$，这里

$$f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty}\frac{3}{2x^3y^2}dx & 0<y<1\\ \displaystyle\int_{y}^{+\infty}\frac{3}{2x^3y^2}dx & y>1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

你算对了吗？哪个更容易呢？

四、数学期望的性质

(1) C为常数,则有$E(C)=C$;

(2) 设X是一个随机变量，C为常数，则$E(CX)=CE(X)$;

(3) 设X，Y是两个随机变量，则 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

证：只对连续型随机变量证明(3) 。

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，其边缘概率密度为$f_X(x)$，$f_Y(y)$。则

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=E(X)+E(Y)$$

推广 $E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$

例7 若 $X\sim B(n,p)$，求X的数学期望。

$X\sim B(n,p)$, 则X表示n重贝努里试验中的“成功”次数.

若设 $X_i=\begin{cases}1 & \text{如第}i\text{次试验成功}\\ 0 & \text{如第}i\text{次试验失败}\end{cases}$ $i=1,2，\ldots，n$

则 $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$

因为 $P(X_i=1)=p$, $P(X_i=0)=1-p$

$$E(X_i)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$$

所以 $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np$

本题是将X分解成数个随机变量之和，然后利用随机变量和的数学期望等于随机变量数学期望之和来求数学期望，这种处理方法具有普遍意义。

练4 将 4 个球随机地放入 4 只盒子中, 每只盒子容量无限, 求空盒子数的数学期望.

解 设空盒个数为X，并引入 X_i（$i=1,2,3,4$）如下：

$$X_i=\begin{cases}1, & 第i盒空,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

$$X=X_1+X_2+X_3+X_4$$

X_i	0	1
P	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^4$	$\left(\frac{3}{4}\right)^4$

$$E(X_i)=\left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$E(X)=4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{64}$$

***练：**一民航送客车载有20位旅客自机场出发，沿途有10个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车，以X表示停车次数，求 $E(X)$。（设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立）

解：引入随机变量：$X_i=\begin{cases}0 & \text{第}i\text{站没有人下车}\\ 1 & \text{第}i\text{站有人下车}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,10$

$$\text{易知：} X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$$

$$E(X_i)=P(X_i=1)=P(\text{第}i\text{站有人下车})=1-(\frac{9}{10})^{20}$$

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})$$

$$=10[1-(\frac{9}{10})^{20}]=8.784(\text{次})$$

(4) 若X，Y相互独立，则$E(XY)=E(X)E(Y)$

证：只对连续型随机变量证明 (4)。设 (X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，边缘概率密度为$f_X(x)$，$f_Y(y)$。

若X和Y相互独立，则$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,故有

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(xy)f_X(x)f_Y(y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=E(X)\cdot E(Y)$$

推广

若$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则

$$E(X_1\cdot X_2\cdot\cdots\cdot X_n)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$$

注

性质 4 的逆命题不成立，即

$E(XY)=E(X)E(Y)$成立时，X,Y不一定独立！

反例1

设

$Y \backslash X$ (p_{ij})	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
-1	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$3/8$
0	$1/8$	0	$1/8$	$2/8$
1	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$3/8$
$p_{i\cdot}$	$3/8$	$2/8$	$3/8$	1

则

XY	-1	0	1
P	$2/8$	$4/8$	$2/8$

$$E(X)=E(Y)=0;\quad E(XY)=0;\quad E(XY)=E(X)E(Y)$$

但 $$P(X=-1,Y=-1)=\frac{1}{8}\neq P(X=-1)P(Y=-1)=\left(\frac{3}{8}\right)^2$$

反例2 设 $(X,Y)\sim U(D),\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$

则

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f(x,y)$$
$$\neq f_X(x)f_Y(y)$$

但

$$E(X)=\int_{-1}^{1}x\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}dx=0;$$

$$E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xy\frac{1}{\pi}dxdy=0;$$

$$E(XY)=E(X)E(Y)=0$$

例8

设随机变量X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立，$X_i \sim U(0, 2i)$,求行列式

$$Y = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$$

的数学期望$E(Y)$.

解：$E(X_i) = i, i = 1, 2, 3, 4.$

$$Y = X_1X_4 - X_2X_3$$

由条件，$E(Y) = E(X_1X_4) - E(X_2X_3)$

$$= E(X_1)E(X_4) - E(X_2)E(X_3)$$

$$= 1\times4 - 2\times3 = -2$$

(5) 若$X\geq0$,则$E(X)\geq0$。由此可得:

若$X\geq Y$,则$E(X)\geq E(Y)$；$|E(X)|\leq E(|X|)$。

例9: 设X，Y为两个随机变量，$E(X^2)$，$E(Y^2)$都存在且$E(X^2)>0$，$E(Y^2)>0$，则有

$$[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2). \qquad (\Delta)$$

证明: 令$g(t)= E[(tX+Y)^2]=t^2E(X^2)+2tE(XY)+ E(Y^2)$

由于对任意实数t，都有$g(t)\geq 0$，又$E(X^2)>0$,所以

$$[2E(XY)]^2-4E(X^2)E(Y^2)\leq 0,$$

即得$[E(XY)]^2\leq E(X^2)E(Y^2)$。

称(Δ)式为柯西—许瓦兹不等式。

(Δ) 中等号成立的充要条件是存在常数a，使得$P\{Y=aX\}=1$。另外$E(X^2)$或$E(Y^2)$为零时，(Δ) 仍成立，此时(Δ) 两边都为零.

常见 r.v. 的数学期望

分布	概率分布	期望
参数为p 的 0-1分布	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p
$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	np
$P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots$	λ

分布	概率密度	期望
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其它\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
$E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & 其它\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ

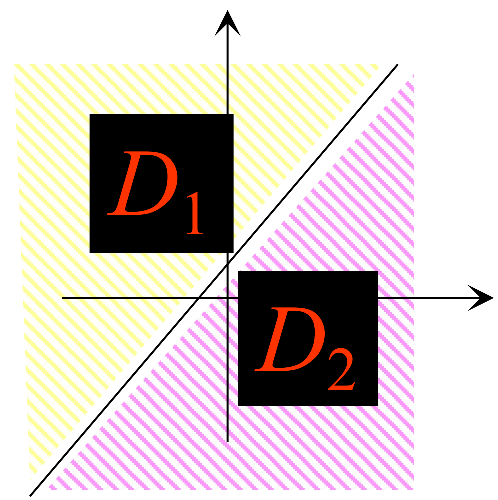
***练** 设$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, X, Y相互独立，求$E(\max(X,Y))$.

解 $$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$E(\max\{X,Y\}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \max\{x,y\} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_{D_1} \max\{x,y\} f(x,y)\,dxdy$$

$$+ \iint_{D_2} \max\{x,y\} f(x,y)\,dxdy$$



$$= \iint_{D_1} y \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy + \iint_{D_2} x \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_x^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \int_y^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_x^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

其中 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ 称为 **概率积分**

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

$$= 4\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

$$=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr$$

$$=4\times\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}=\pi$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

一般地，若 $X\sim N(\mu,\sigma^2), Y\sim N(\mu,\sigma^2)$,

$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 相互独立，则

$$E(\max\{X,Y\})=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$$E(\min\{X,Y\})=\mu-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

***练** 设二维 r.v. (X, Y) 的 d.f. 为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}x(1+3y^2), & 0<x<2, 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求$E(X)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$, $E(XY)$, $E(Y/X)$。

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{4}xdx\int_0^1(1+3y^2)dy=\frac{4}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2\frac{1}{4}xdx\int_0^1 y(1+3y^2)dy=\frac{5}{8}$$

由数学期望性质

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{4}{3}+\frac{5}{8}=\frac{47}{24}$$

$$E(XY)\overset{\boxed{X,Y\text{独立}}}{=}E(X)\cdot E(Y)=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{6}$$

$$E\left(\frac{Y}{X}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{y}{x}\right)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2\frac{1}{2}dx\int_0^1 y\cdot\frac{1}{2}(1+3y^2)dy=\frac{5}{8}\neq\frac{15}{32}=\frac{E(Y)}{E(X)}$$