

2017-2018 学年第一学期

《高等数学 A (上)》期末考试试题 (A)

考试注意事项: 学生必须将答题内容写在答题纸上, 写在试题纸上一律无效

一. 填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

1. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}} =$ _____.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \cdot \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) =$ _____.

3. 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 上对应于 $t = \frac{\pi}{6}$ 点处的法线方程为 _____.

4. 设函数 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^2) dt$, $g(x) = x^2 + x^3$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 _____ (填选项)

(A) 等价无穷小; (B) 同阶无穷小; (C) 高阶无穷小; (D) 低阶无穷小.

5. 函数 $f(x) = e^{2x} \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 点展开到 x^3 项的带 Peano 型余项的马克劳林公式是 _____.

6. 曲线 $y = e^{-x^2}$ 的向上凸区间是 _____.

7. $\int e^{e^x+x} dx =$ _____.

8. $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+e^{1/x}} =$ _____.

9. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} =$ _____.

10. 微分方程 $yy'' - 2(y')^2 = 0$ 满足条件 $y(0)=1, y'(0)=-1$ 的特解为 _____.

二 (8 分). 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x + 1} - (ax + b)] = 0$, 求常数 a 与 b .

三 (8 分). 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 6y = 2$ 确定.

求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=2}$ 及 $\left. \frac{d^2 x}{dy^2} \right|_{x=2}$.

四 (10 分) 设 $f(x)$ 在 (a, b) ($ab < 0$) 内有 $f''(x) > 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{x^2}}{x - \sin x} = 2$$

试求 $f(0)$ 及 $f'(0)$ 的值, 并证明: 在 (a, b) 内有 $f(x) \geq 1$.

五 (8 分). 根据 k 的不同取值情况, 讨论方程 $x - \frac{\pi}{2} \sin x = k$ 在开区间

$(0, \frac{\pi}{2})$ 内根的个数, 并说明理由.

六 (10 分). 设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 所确定. 求 (1) 图形 A 的面积; (2) 图形 A 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积; (3) 图形 A 绕直线 $x = 2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

七 (10 分). 求微分方程 $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + 6x + 5$ 的通解.

八 (6 分). 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, c]$ 上连续, 其导数 $f'(x)$ 在 $(0, c)$ 内存 $f(0) \geq 0$.

在且单调减少, 试证明不等式: $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$, 其中常数 a, b 满足 $0 < a \leq b \leq a+b \leq c$.