§2 常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法

正项级数: 各项是正数或零的级数称为正项级数.

正项级数的特点：它的部分和数列$\{s_n\}$ 单调递增

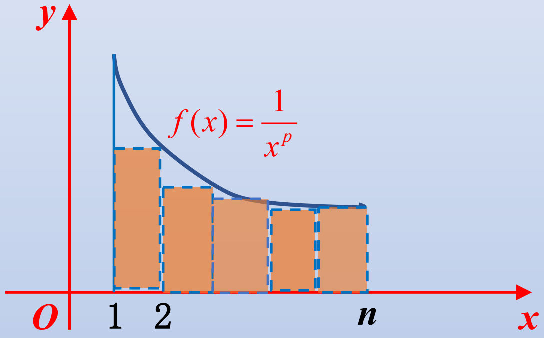
根据数列收敛的单调有界收敛准则，可得下面定理

定理1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件它的部分和数列$\{s_n\}$有（上）界.

例1 讨论p–级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ 的收敛性，

其中常数$p>0$.

解：部分和 $s_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$，



当 $p>1$时， $s_n=1+\frac{1}{2^p}\cdot 1+\frac{1}{3^p}\cdot 1+\cdots+\frac{1}{n^p}\cdot 1<1+\int_1^n\frac{1}{x^p}dx$

$$=1+\frac{1}{1-p}x^{1-p}\bigg|_1^n=\frac{p}{p-1}-\frac{n^{1-p}}{p-1}<\frac{p}{p-1}，$$ 级数收敛；

当 $p\le 1$时有$\frac{1}{k^p}\ge\frac{1}{k}\ (k\in N_+)$，

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\to+\infty\ (n\to\infty),$$

$\{s_n\}$无上界，故级数发散.

结论: p-级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散.

例如，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ $(\varepsilon>0)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$均收敛，

其中$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

练习:讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}, a>0$ 的收敛性.

提示： $\frac{1}{a^{\ln n}}=\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln a}}=\frac{1}{n^{\ln a}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln a}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，$p=\ln a$

定理2 (比较审敛法)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $u_n \le v_n\ (n=1,2,\ldots)$.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

证 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛于和$\sigma$, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\leq v_1+v_2+\cdots+v_n\leq\sigma\ (n=1, 2, \cdots),$$

即部分和数列$\{s_n\}$有上界, 由定理 1 知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

反之, 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$必发散. 因为若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛, 由上已证明的结论, 得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛, 与假设矛盾.

推论 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数,

(1)如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 且存在自然数N, 使当 $n\geq N$ 时,

有 $u_n\leq kv_n\,(k>0)$ 成立,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(2)如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散, 且当 $n\geq N$ 时, 有 $u_n\geq kv_n\,(k>0)$成立,

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

例2 判别下列级数的收敛性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

解：（1）因为$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}=\frac{1}{n+1}$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}+\cdots$ 是发散的，根据比较审敛法可知所给级数也是发散的.

（2）因为当$x>0$时，$\ln(1+x)<x$，所以$\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$的部分和$s_n=\ln(n+1)\to+\infty$ $(n\to\infty)$，故$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$发散；根据比较审敛法可知所给级数也是发散的；

（3）因为$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln\ln n}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\ln n=+\infty$，所以存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$\ln\ln n>2$，于是当 $n>N$ 时，$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln\ln n}}<\frac{1}{n^2}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，根据比较审敛法，级数收敛；

例3. 证明题

1. 设$a_n \le b_n \le c_n (n=1,2,\ldots)$ 且级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$均收敛, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛.

证明： 由$a_n \le b_n \le c_n (n=1,2,\ldots)$可得$0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n\ (n=1,2,\ldots)$， 因为级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$均收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$收敛，根据比较审敛法可得$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$收敛，于是级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} [(b_n - a_n) + a_n]$收敛.

2.设 $u_n>0, v_n>0$,满足$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\le\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\quad n=1,2,\ldots$ 证明:

(1)若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛; (2)若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散。

证明: 已知条件可变为$\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\le\dfrac{u_n}{v_n}$, 即$\left\{\dfrac{u_n}{v_n}\right\}$单调减少,

于是$\dfrac{u_n}{v_n}\le\dfrac{u_1}{v_1}$ $(n=1,2,3,\ldots)$, 即

$0<u_n\le kv_n\ \ (n=1,2,3,\ldots)$, 其中$k=\dfrac{u_1}{v_1}$为正常数,

根据比较审敛法可得

(1)若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛; (2)若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

3.设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,证明:$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ 均收敛.

证明：因为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，根据级数收敛的必要条件，有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，所以存在正整数 N, 当 $n>N$ 时，$0 \le u_n < 1 \Rightarrow 0 \le u_n^2 < u_n$，根据比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛;

又因为 $0 \le \frac{\sqrt{u_n}}{n} \le \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 都收敛，根据收敛级数的性质知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$ 收敛，再由比较审敛法可得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ 收敛.

定理 3 (比较审敛法的极限形式)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $v_n > 0 \ (n = 1, 2, 3, \dots)$

（1） 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l \ (0<l<+\infty)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 敛散性相同;

（2） 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = 0$,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（3） 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = +\infty$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

证明 (1)由极限的定义可知，对$\varepsilon=\frac{l}{2}>0$，存在自然数 N,

当 $n>N$ 时，有不等式

$$l-\frac{l}{2}<\frac{u_n}{v_n}<l+\frac{l}{2},\quad \text{即}\ \frac{l}{2}v_n<u_n<\frac{3l}{2}v_n,$$

再根据比较审敛法的推论，即得所要证的结论.

（2）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$，$\exists N\in N^+$，当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{u_n}{v_n}-0\right|<1\Rightarrow \mathbf{0}\le u_n<v_n$，

所以若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（3）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$，$\exists N\in N^+$，当 $n>N$ 时，$\dfrac{u_n}{v_n}>1\Rightarrow u_n>v_n$，

所以若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

推论 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数,

(1) 如果 $p\le 1$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p u_n = l > 0$(或 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p u_n = +\infty$)，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(2)如果 $p>1$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p u_n = l\ (0\le l<+\infty)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例4. 判别级数的收敛性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n})$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}(1-\cos\frac{\pi}{n})$

解： 这些级数都是正项级数

（1）因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\cdot\dfrac{\ln n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$ （注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$ ），

根据极限形式的比较审敛法，级数收敛

（2）因为当 $n\to\infty$ 时，

$$u_n=\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\sim\sqrt{n}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}u_n=\dfrac{1}{4}$，级数收敛；

(3) 因为

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}u_n=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2=\frac{1}{2}\pi^2,$$

根据比较审敛法，知所给级数收敛；

练习. 判别级数的收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$

(3) $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{5n}+\cdots$

解： 这些级数都是正项级数

（1）因为当 $n \to \infty$ 时 $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,根据极限形式的比较审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散；

（2）因为当 $n \to \infty$ 时 $\ln(1+\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2}$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}=1$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,根据极限形式的比较审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$ 收敛；

（3）将级数加括号$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{5n}\right)$，当$n\to\infty$时，其通项

$$u_n=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{5n}=\frac{3n+1}{5n(2n-1)}\sim\frac{3}{10}\frac{1}{n}，\quad 即\lim_{n\to\infty}n\cdot u_n=\frac{3}{10}，$$

根据极限形式的比较审敛法，可知加括号后的级数发散；

再根据收敛级数的性质，原级数发散.