二、利用极坐标计算二重积分

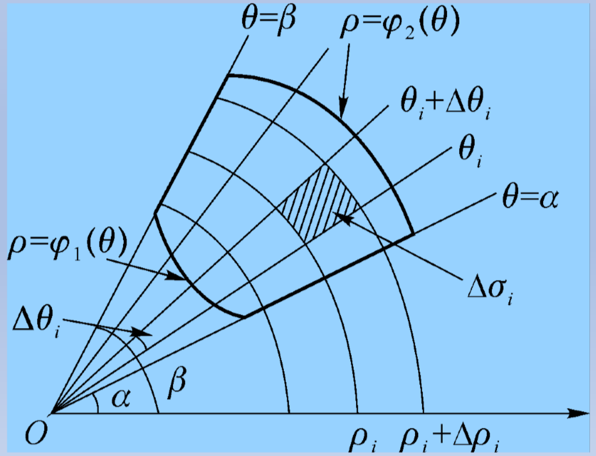
按照二重积分的定义有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

现研究这一和式极限在极坐标中的形式。

用以极点 O 为中心的一族同心圆 $\rho=$常数以及从极点出发的一族射线 $\theta=$常数, 将 D 剖分成个小闭区域.

除了包含边界点的一些小闭区域外, 小闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的面积可如下计算



$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2}(\rho_i+\Delta\rho_i)^2\Delta\theta_i - \frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\theta_i = \frac{1}{2}(2\rho_i+\Delta\rho_i)\Delta\rho_i\Delta\theta_i$$

$$= \frac{\rho_i+(\rho_i+\Delta\rho_i)}{2}\Delta\rho_i\Delta\theta_i = \overline{\rho_i}\Delta\rho_i\Delta\theta_i$$

其中, $\overline{\rho_i}$ 表示相邻两圆弧半径的平均值.

在小区域$\Delta\sigma_i$上取点$(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$,设该点直角坐标为$(\xi_i,\eta_i)$,据直角坐标与极坐标的关系有

$$\xi_i = \overline{\rho_i}\cos\overline{\theta_i}\,,\ \eta_i = \overline{\rho_i}\sin\overline{\theta_i}$$

于是

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{\rho_i}\cos\overline{\theta_i}, \overline{\rho_i}\sin\overline{\theta_i})\cdot\overline{\rho_i}\Delta\rho_i\Delta\theta_i$$

即

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

由于$\iint\limits_{D} f(x.y)\,d\sigma$也常记作$\iint\limits_{D} f(x.y)\,dxdy$，因此,上述变换公式也可以写成

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

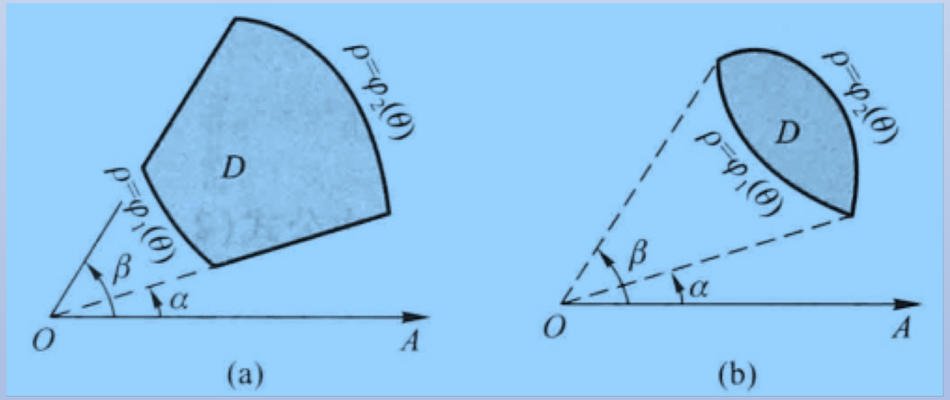
此式称为二重积分由直角坐标变量变换成极坐标变量的变换公式,其中,$\rho d\rho d\theta$就是极坐标中的面积元素.

极坐标下的二重积分计算法

极坐标系中的二重积分，同样可以化归为二次积分来计算。

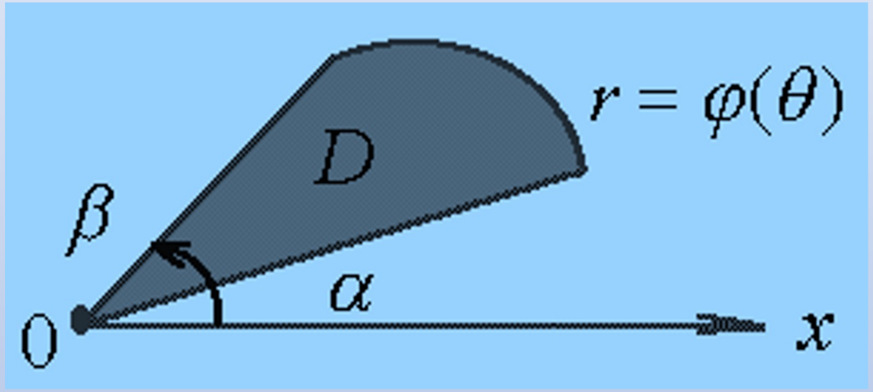
(1) 积分区域 D 可表示成下述形式 $\alpha \le \theta \le \beta,\ \ \varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta)$

其中函数 $\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续。



则 $\displaystyle\iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cdot \rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_1(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$

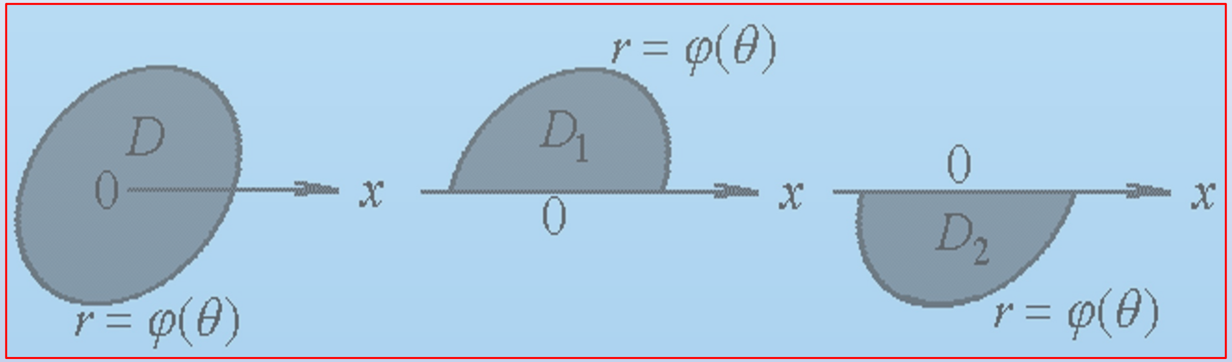
(2) 积分区域D为下述形式



极点在积分区域的边界上

$$\iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r dr d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr .$$

特别地



$D: 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le \varphi(\theta)$；

$D_1: 0 \le \theta \le \pi, 0 \le r \le \varphi(\theta)$；

$D_2: \pi \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le \varphi(\theta)$.

使用极坐标变换计算二重积分的原则

(1) 积分区域的边界曲线易于用极坐标方程表示

（ 含圆弧, 直线段 ）；

(2) 被积函数表示式用极坐标表示较简单.

（ 例如， 含$(x^2+y^2)^\alpha$， α 为实数 ）

例 1 计算$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，其中 D 为 $x^2+y^2\le 2ax$. $[\frac{32}{9}a^3]$

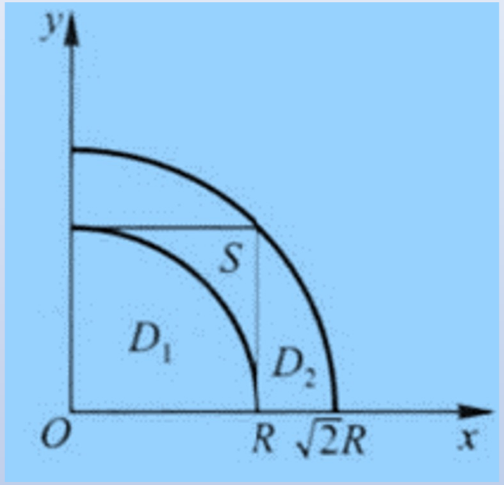
解：积分区域 D 在极坐标下表示为

$$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le 2a\cos\theta.$$

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\cdot\rho d\rho=\frac{8}{3}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{8}{3}a^3\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{32}{9}a^3.$$

例 7. 计算$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}d\sigma$，其中 D 为 $x^2+y^2\le R^2$.

利用此题结果推出概率积分$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.



解：$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R e^{-\rho^2}\cdot\rho d\rho=\pi\left(1-e^{-R^2}\right)$

根据对称性，$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\dfrac{1}{4}\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\dfrac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$，

类似地$\iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\dfrac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$；

$$\iint\limits_S e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\int_0^R dx\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}dy=\int_0^R e^{-x^2}dx\int_0^R e^{-y^2}dy=\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2.$$

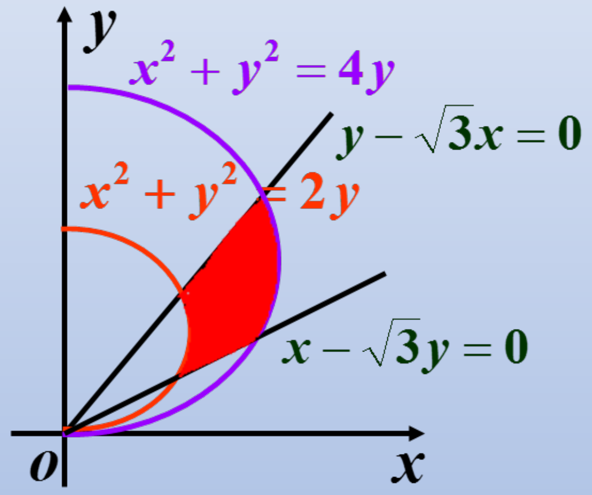
因为$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma<\iint\limits_S e^{-(x^2+y^2)}d\sigma<\iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma$，

所以$\dfrac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)<\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2<\dfrac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$.令 $R\to+\infty$，有$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

例 2 计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其中 D 为由圆 $x^2+y^2=2y, x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$，$y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.

解：如图，积分区域 D 在极坐标下表示为：

$$\frac{\pi}{6}\le\theta\frac{\pi}{3},\ 2\sin\theta\le\rho\le4\sin\theta.$$



$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}d\theta$$

$$=60\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^4\theta d\theta=15\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{2}-2\cos2\theta+\frac{1}{2}\cos4\theta\right)d\theta$$

$$=15\left(\frac{\pi}{4}-\sin2\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{8}\sin4\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{15}{4}\left(\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

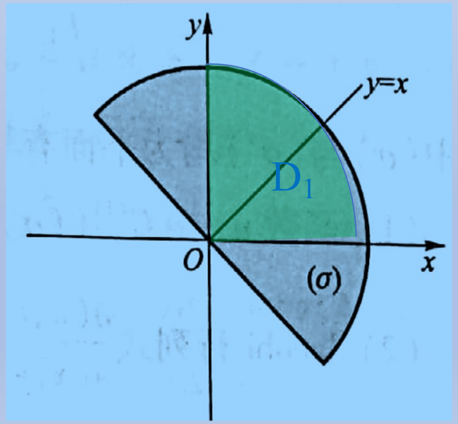
例 3 计算$\iint\limits_D x^2dxdy$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=R^2$ 与直线 $y=-x$ 所围成的右上半圆域.

解: 因为 D 关于直线 $y=x$ 对称，所以$\iint\limits_D x^2dxdy=\iint\limits_D y^2dxdy$

$\iint\limits_D x^2dxdy=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, 被积函数 x^2+y^2 关于 x 和 y 都是偶函数，于是

$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy$ D_1 为 D 在第一象限部分;

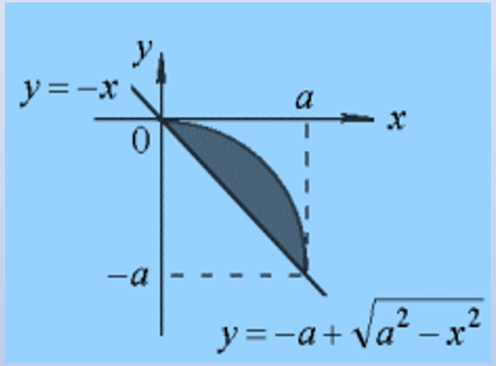
$$\iint\limits_D x^2dxdy==\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R \rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{\pi}{8}R^4.$$



例 4 计算

$$I=\int_0^a dx\int_{-x}^{-a+\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)}}\ (a>0)$$

解：积分区域



$$D:\ 0\le x\le a\ ,\ -x\le y\le -a+\sqrt{a^2-x^2}$$

如图，该区域在极坐标下的表示形式为

$$D:\ -\frac{\pi}{4}\le\theta\le 0\ ,\ 0\le r\le -2a\sin\theta$$

$$I=\iint_D\frac{rdrd\theta}{r\sqrt{4a^2-r^2}}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{dr}{\sqrt{4a^2-r^2}}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left[\arcsin\frac{r}{2a}\right]_0^{-2a\sin\theta}d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(-\theta)d\theta=-\frac{1}{2}\theta^2\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}=\frac{\pi^2}{32}$$

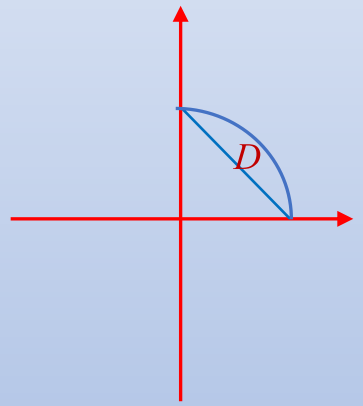
例 5 将下述二次积分化为直角坐标系下的二次积分

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho\,.$$

$$\left[\,I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}dx\int_{-x}^{x}f(x,y)dy+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)dy\,\right]$$

例 6 写出积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$的极坐标二次积分形式，其中积分区域$D=\{(x,y)\mid 1-x\le y\le\sqrt{1-x^2},0\le x\le 1\}$.

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho\right].$$



例 7 将下述二次积分化为极坐标系下的二次积分

(两种次序)

(1) $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy$,　　(2) $\int_0^a dx\int_0^a f(x,y)dy\ (a>0)$,

(3) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$.

解：（1） $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cdot\rho d\rho$;

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 \rho d\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta$$

$$+\int_1^{\sqrt{2}} \rho d\rho\int_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\frac{\pi}{4}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta .$$

（2） $$\int_0^a dx\int_0^a f(x,y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{a\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cdot\rho d\rho$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{a\csc\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cdot\rho d\rho\ ;$$

$$\int_0^a dx\int_0^a f(x,y)dy=\int_0^a \rho d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta$$

$$+\int_a^{\sqrt{2}a} \rho d\rho\int_{\arccos\frac{a}{\rho}}^{\arcsin\frac{a}{\rho}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta\ .$$

$$(3)\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cdot\rho d\rho\,;$$

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\rho d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta$$

$$+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\rho d\rho\int_{\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}\rho}}^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}\rho}-\frac{\pi}{4}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta\,.$$

例 6 计算$\iint\limits_D x^2 y d\sigma$，其中$D$为$x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0$.

解： 积分区域D在极坐标下表示为：

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le a.$$

$$\iint\limits_D x^2 y d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^a(\rho\cos\theta)^2\cdot\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho=\frac{a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta d\theta=\frac{a^5}{15}.$$

另解： $$\iint\limits_D x^2 y d\sigma=\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x^2 y dy=\frac{1}{2}\int_0^a x^2\left(a^2-x^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a^5}{3}-\frac{a^5}{5}\right)=\frac{a^5}{15}.$$

例 8 求闭曲线$(x^2+y^2)^2=3x^3$围成的平面区域 D 的面积.

解: 极坐标方程$\rho=3\cos^3\theta$, $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

区域 D 的面积为

$$\sigma=\iint_D d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{3\cos^3\theta}\rho d\rho=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta$$

$$=9\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{45}{32}\pi.$$

例 9. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 所截得的（含在柱面内的）立体的体积.

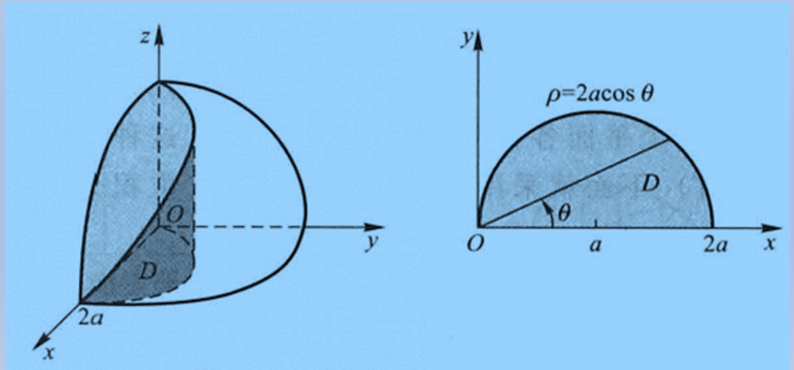
解：由对称性，所求体积是第一挂限内立体（如图）体积的四倍.

$V=4\iint\limits_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,d\sigma$, 其中积分区域 D 在极坐标下表示为：

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le 2a\cos\theta .$$

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}\left(4a^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2a\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^3\theta\right)d\theta=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$



(a) (b)

练习

1. 计算$\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{-y^2}dy\int_0^{y} e^{-x^2}dx+\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a} e^{-y^2}dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} e^{-x^2}dx$；　$\left[\frac{\pi}{8}(1-e^{-a^2})\right]$

2. 计算$\iint\limits_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$，其中$D$为$1\le x^2+y^2\le 4$；　$[-4]$

3. 计算$\iint\limits_D (x+y)d\sigma$，其中$D$为$x^2+y^2\le 2y$；　$[\pi]$

4. 求闭曲线$(x^2+y^2)^2=x^4+y^4$围成的平面区域D的面积. $\left[\frac{3}{4}\pi\right]$