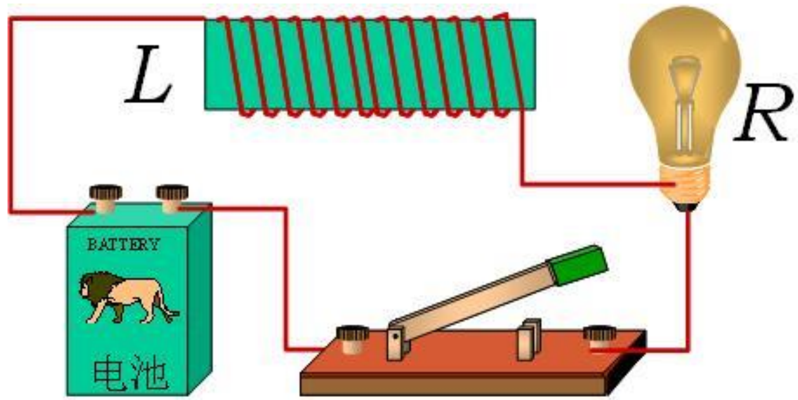
§8.5 磁场的能量

一、自感储能

$t = 0 \rightarrow t$， $i = 0 \rightarrow I$



由欧姆定律 $\varepsilon + \varepsilon_L = iR$

$$\varepsilon - L\frac{di}{dt} = iR$$

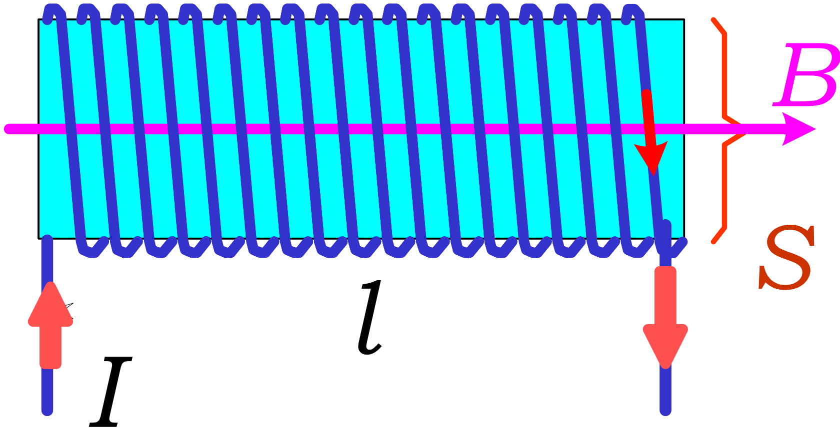
$$\int_0^t \varepsilon i dt - \int_0^I L i di = \int_0^t i^2 R dt \Rightarrow \int_0^t \varepsilon i dt = \frac{1}{2}LI^2 + \int_0^t i^2 R dt$$

电源提供的能量

自感储能

焦耳热

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$



螺线管为例:

$$L = \mu_0 n^2 V$$

$$B = \mu_0 n I$$

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 V \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} V$$

单位体积中储存的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}V$$

$$w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

磁场能量密度：

此式适用于任何载流体产生的磁场。

对于一般载流体产生的磁场

磁能为：

$$W_m = \iiint_V w_m dv$$

积分遍及磁场存在的整个空间。

例1 求同轴传输线之磁能

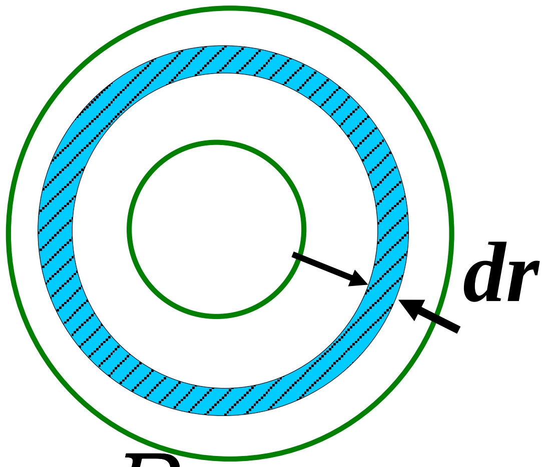
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

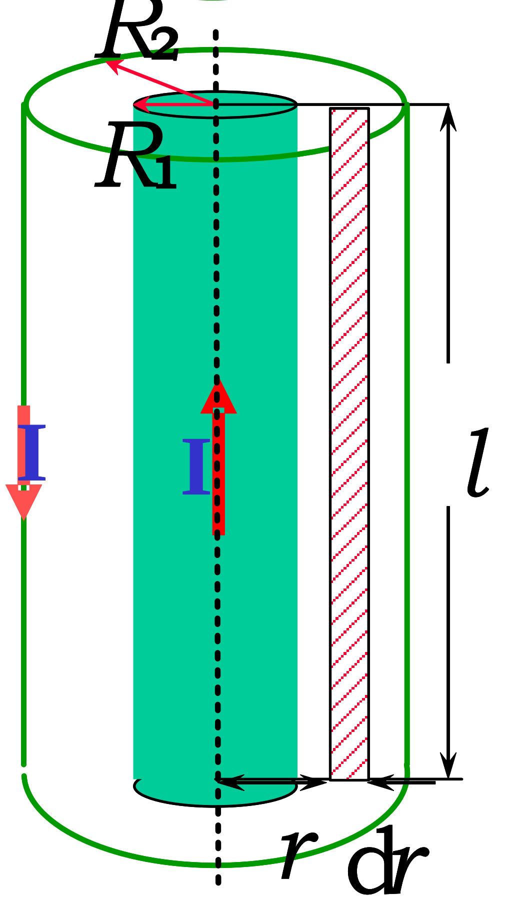
$$\mathrm{d}V=2\pi r l\,\mathrm{d}r$$

$$W_m=\int_V \omega_m \mathrm{d}V=\int_V \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}dV$$

$$=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 2\pi r l\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$



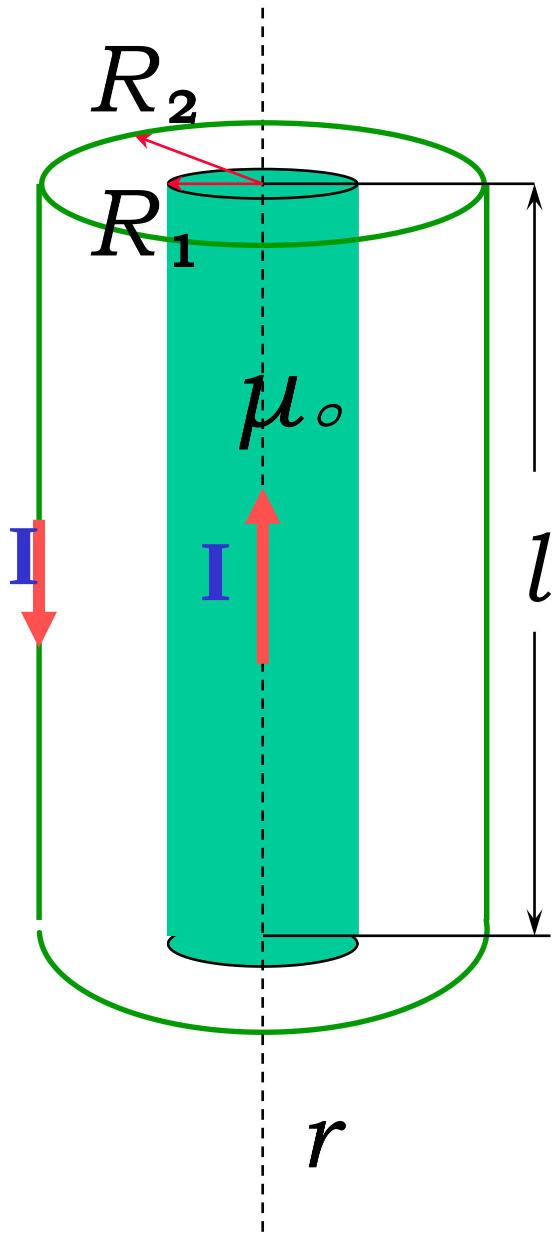


计算自感的另一种方法:

因为 $W_m = \frac{1}{2} L I^2 \Rightarrow L = \frac{2W_m}{I^2}$

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln R_2 / R_1$$

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln R_2 / R_1$$



§8.6 麦克斯韦电磁场理论

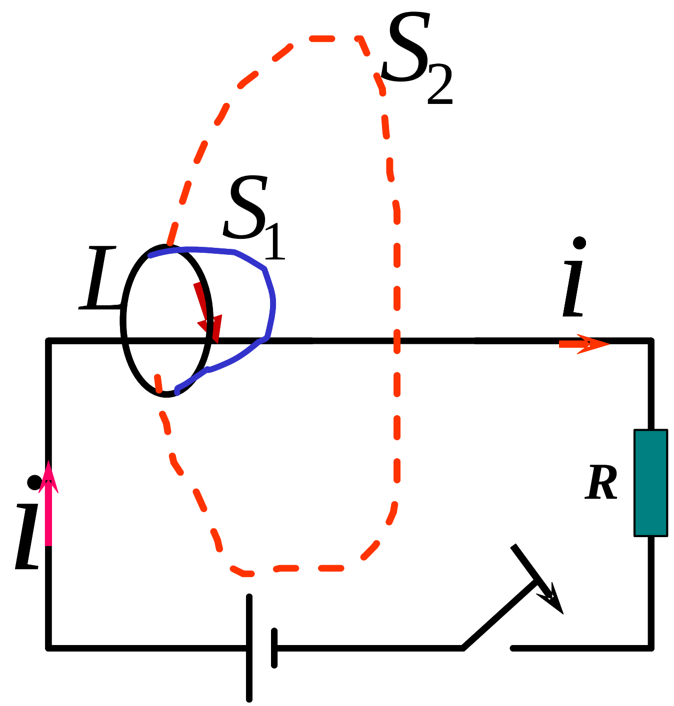
•电场	静电场	感生电场
	静止电荷产生	由于存在 $\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$
•磁场	稳恒磁场	是否存在感生磁场
	恒定电流产生	是否由于 $\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}$
		本节要解决的问题

一、安培环路定理解析

对恒定电流 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{i内传导电流}$

$$= \mu_0 \oint_S \sigma_0 dS$$

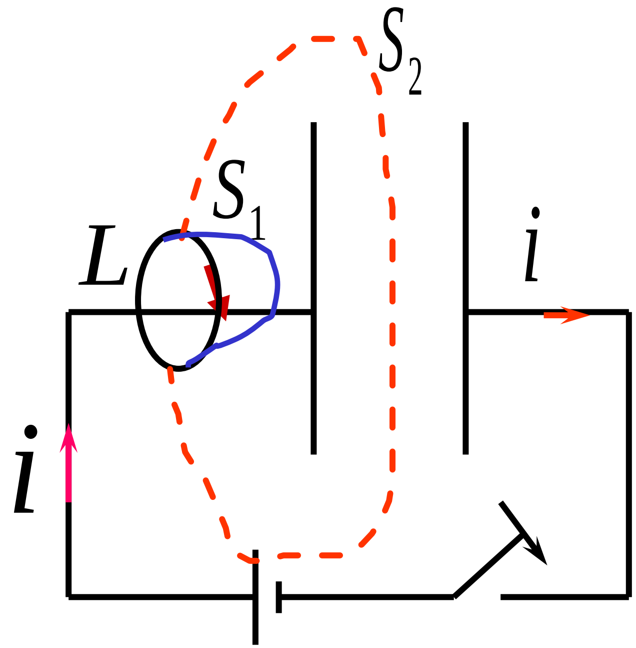
以L为边界的任何曲面，所通过的传导电流均为*I*



对非恒定电流

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{i内传导电流} = \mu_0 \oint_s \sigma_0 dS$$

取 *L* 如图，计算*H*的环流



- **若取以L为边界的曲面S_1**

$$\sum_i I_{i内} = i \qquad \text{得} \qquad \oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 i$$

- **若取以L为边界的曲面S_2**

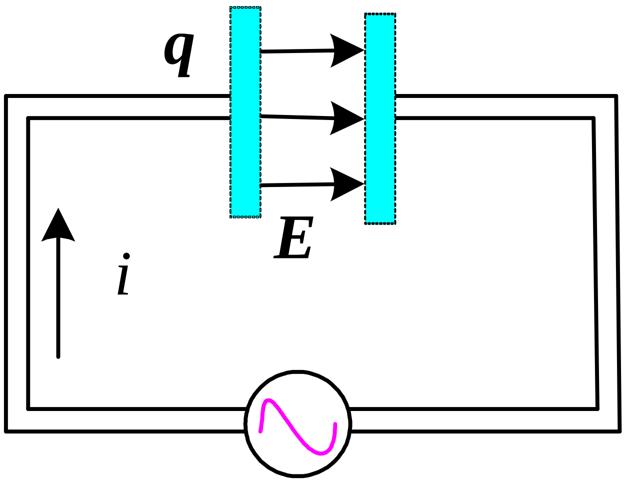
$$\sum_i I_{i内} = 0 \qquad \text{得} \qquad \oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

二、位移电流

充电过程中，电容器极板带电量q

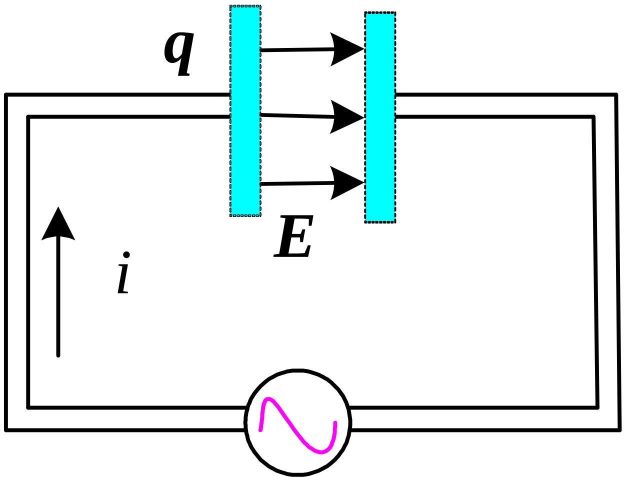
t 时刻： $\vec{E}$ σ

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad q = \int_S \sigma dS$$



随时间变化：

$$\frac{d\vec{E}}{dt} \quad \frac{d\Phi_E}{dt} \quad \frac{dq}{dt} \quad \frac{d\sigma}{dt}$$



则

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{d(\sigma S)}{dt}=\frac{d\left(\varepsilon_0\vec{E}\bullet\vec{S}\right)}{dt}=\varepsilon_0\frac{d\phi_E}{dt}$$

$$\varepsilon_0\int_S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\bullet d\vec{S}=\varepsilon_0\frac{d\phi_E}{dt}=I_D$$

位移电流

通过该面积的电位移通量对时间的变化率。

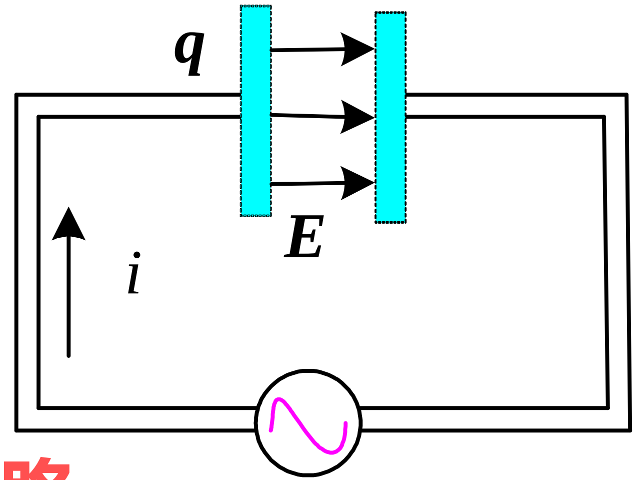
变化的电场等效为电流

$$\vec{j}_D=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

位移电流密度

位移电流和传导电流称 全电流

$$I_{全} = I_{传} + I_D = I_{传} + \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$



全电流是连续的，在空间构成闭合回路。

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{i内传导电流} \Longrightarrow \oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{全}$$

三、全电流定律

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{\text{全}} = \mu_0 I_{\text{传}} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_s \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$

1）传导电流　载流子定向运动

2）位移电流　变化的电场

说明：

(1) 位移电流仅仅从产生磁场的能力上定义，其他跟传导电流都不同，如位移电流不能产生焦耳热；

(2) 全电流定律既适用于恒定情况，又适用于 $\frac{\partial E}{dt}=0$ 非恒定情况。

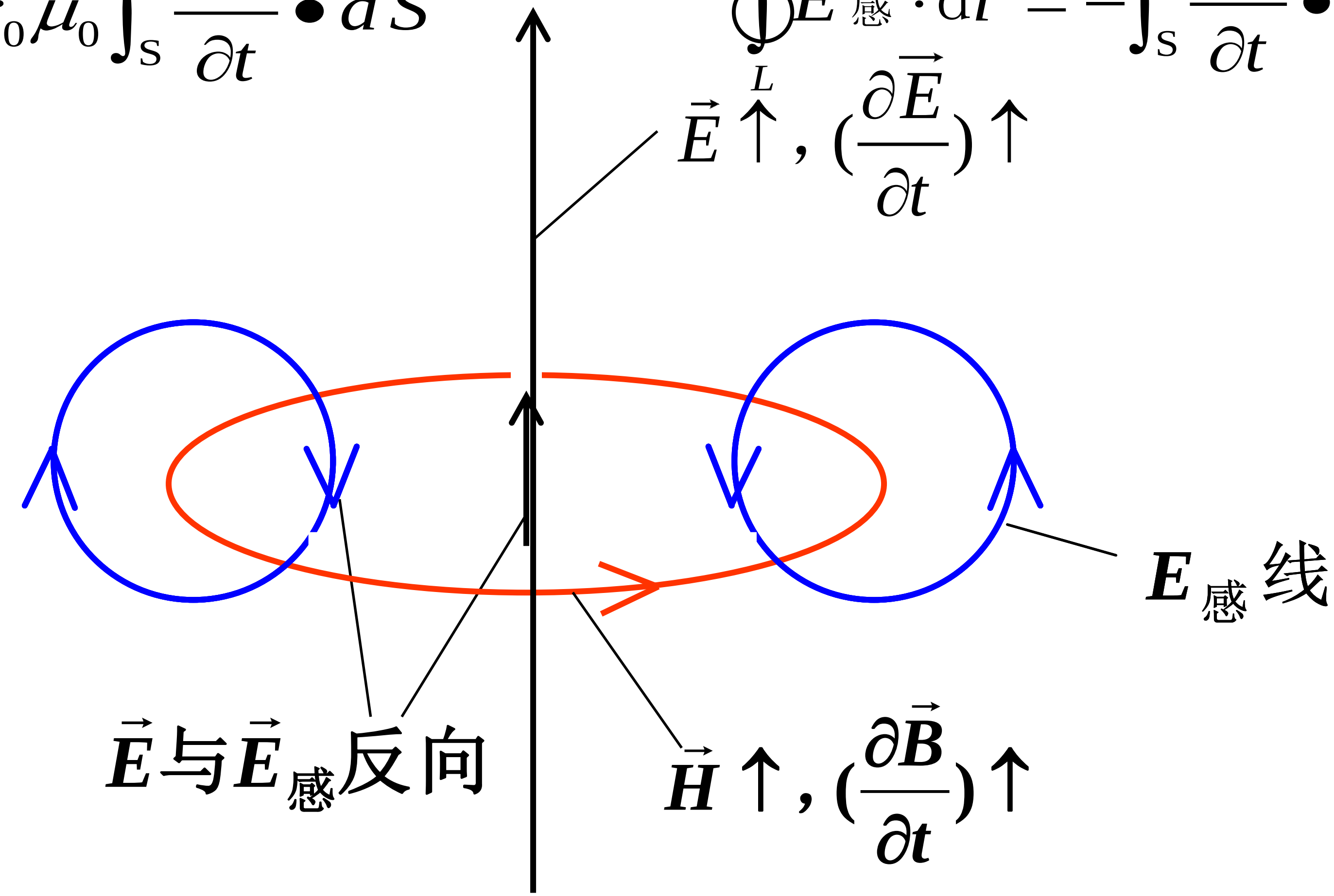
若 $I_{\text{传}}=0$　$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \int_s \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$　变化的电场产生磁场

$$\oint_L \vec{E}_{\text{感}}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$

变化的磁场产生电场

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}_{感}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$



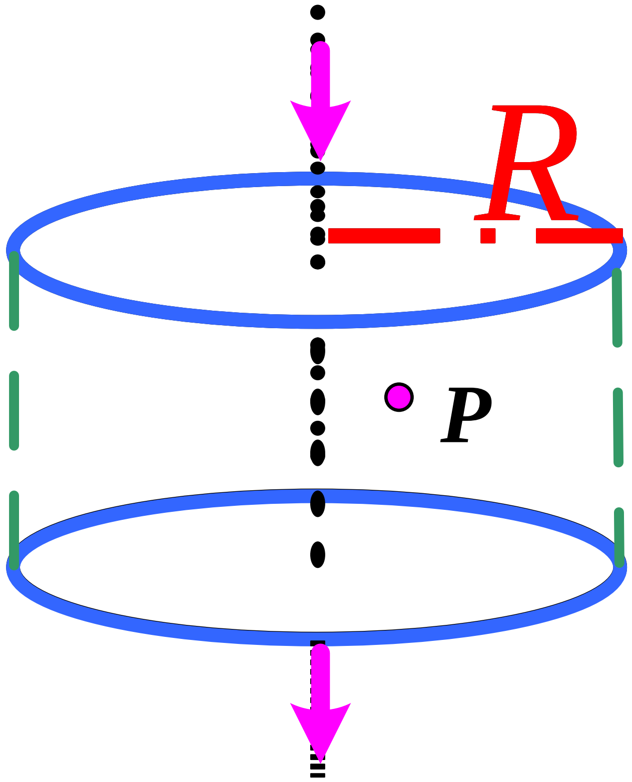
磁场的增加要以电场的削弱为代价

例：半径为R的平板电容器 均匀充电

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = c$$ 内部为真空

求：1) I_{d} (忽略边缘效应)

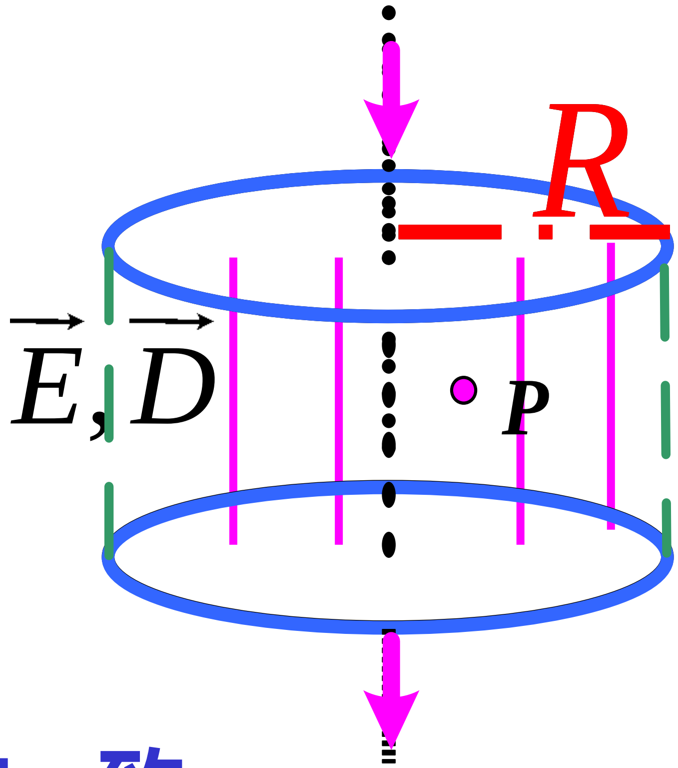
2) $\vec{B}_P$ $(r << R)$



1) I_d (忽略边缘效应)

解：$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

$$= \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E\pi R^2\right) = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\pi R^2$$



$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} > 0$ 充电

I_d 方向与外电路传导电流方向一致

2)求： $\vec{B}_P(r << R)$

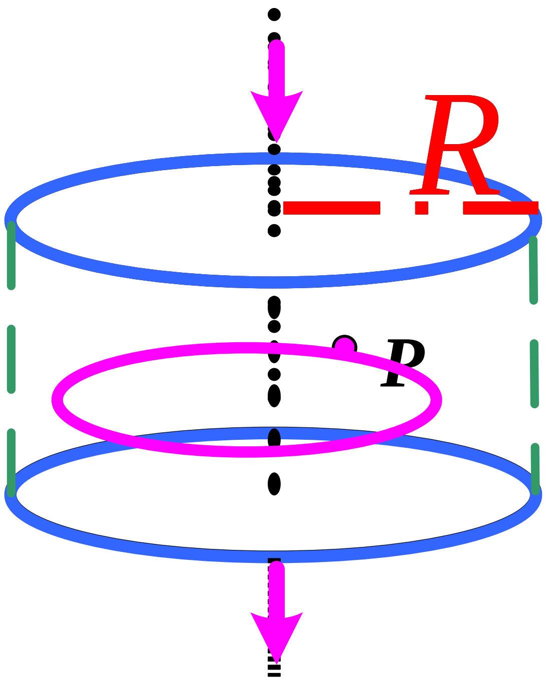
解：由全电流定理有

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{全} = \mu_0\left(I_{传} + I_D\right)$$

则 $B2\pi r = \mu_0 j_d \pi r^2$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 j_d r}{2}$$

而 $j_D = \dfrac{\partial(\varepsilon_0 E)}{\partial t} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t}$ 所以 $\boxed{B = \dfrac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{2}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}$



四、麦克斯韦方程组

一、电场

静电场

$$\oint_s \vec{E}_{静电} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_i q_{0i}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_L \vec{E}_{静电} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

感生电场

$$\oint_s \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

一般 $\vec{E} = \vec{E}_{静电} + \vec{E}_{感生}$

$$\oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_i q_{0i}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

二、磁场

稳恒磁场

$$\oint_S \vec{B}_{稳} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{传}$$

感生磁场

$$\oint_S \vec{B}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$

一般 $\vec{B} = \vec{B}_{稳恒} + \vec{B}_{位移}$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{传} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$

三、麦氏方程（积分）

麦克斯韦方程组（积分形式）

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_{0i}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{传} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$

四、麦氏方程(微分)

Gauss定理

$$\oint_S \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\mathrm{d}V$$

Stokes定理

$$\oint_L \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_i q_{0i}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_0 \mathrm{d}V$$

$$\int_V \left(\nabla\cdot\vec{E}\right) dV$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\int_S \left(\nabla\times\vec{E}\right)\bullet d\vec{S}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Gauss定理

$$\oint_S \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\mathrm{d}V$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\int_V \left(\nabla\cdot\vec{S}\right) dV$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}_0\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \mu_0\varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\int_S \left(\nabla\times\vec{B}\right)\bullet d\vec{S}$$

Stokes定理

$$\oint_L \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_0 + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

麦克斯韦方程组

积分形式

$$\oint_{s} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_{i} q_{0i}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{L} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_{s} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint_{L} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{传} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_{S} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$

微分形式

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_0 + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

积分形式 **微分形式**

$$\oint_{s} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{i} q_{0i}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$$

$$\oint_{L} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_{s} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint_{L} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_{传} + \int_{\mathrm{s}} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

第十一章结束

“电磁学”全部结束！