概率论与随机过程

理学院　张鹏

Email：zhangpeng@bupt.edu.cn

- 学时分配：概率论 30学时；随机过程 18学时
- 课程考核：平时 30%；期末70%

参考书目：

1.概率论与数理统计，

盛骤 谢式千 潘承毅，高等教育出版社

2.Stochastic Processes,

Emanuel Parzen, Holden-Day, Inc.（有中译本，邓永录，高教社）

第一篇　概率论

计划教学周数：**10**
计划教学时数：**30**
实际教学时数：**30**

第一章教学时数：**8**
第二章教学时数：**6**
第三章教学时数：**6**
第四章教学时数：**6**
第五章教学时数：**2**

１．、课程简介

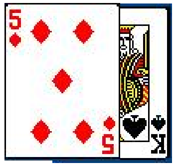
现象

确定性现象(**Certain Phenomenon**)：

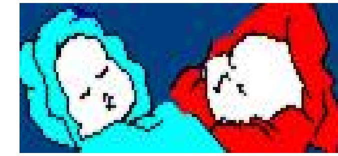
在一定条件下必然发生（不发生）的现象。

随机现象(**Chance Phenomenon**)：

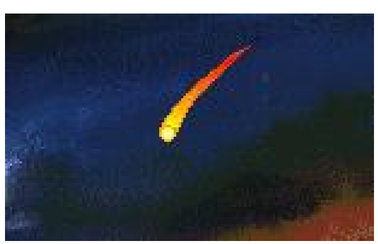
在基本条件不变的前提下，有时发生有时不发生的现象。

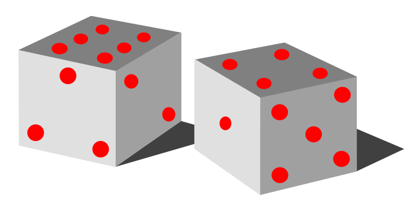


在我们所生活的世界上，充满了不确定性



从扔硬币、掷骰子和玩扑克等简单的机会游戏，到复杂的社会现象；从婴儿的诞生，到世间万物的繁衍生息；从流星坠落，到大自然的千变万化……，我们无时无刻不面临着不确定性（随机性）——随机现象大量存在.





随机现象的特点

——多结果、偶然性

随机现象是否有规律性？

有。随机现象有其偶然性一面，也有其必然性一面。这种必然性表现在大量重复试验或观察中随机现象所呈现出的固有规律性，称为随机现象的统计规律性.

例如:

　　一门火炮在一定条件下进行射击，个别炮弹的弹着点可能偏离目标而有随机性的误差，但大量炮弹的弹着点则表现出一定的规律性，如一定的命中率，一定的分布规律等等.

再如:

测量一物体的长度，由于仪器及观察受到的环境的影响，每次测量的结果可能是有差异的．但多次测量结果的平均值随着测量次数的增加逐渐稳定于一常数，并且诸测量值大多落在此常数的附近，越远则越少，因而其分布状况呈现“两头小，中间大，左右基本对称”．

研究随机现象的统计规律性的数学分支就是

随机数学

随机数学

随机数学

随机数学的三个基本部分：

概率论： 研究定态（时间点固定）随机现象的统计规律性。∨

数理统计： 以概率论为基础，利用观测值做随机推断；研究概率论如何在各个领域中的应用。

随机过程： 研究动态（随时间演变）随机现象的统计规律性。∨

第一章 概率论的基本概念

一、课程教学基本要求

1、理解随机事件的概念，熟练掌握事件间的关系与运算；
2、了解概率的统计定义和公理化定义；
3、掌握概率的基本性质、古典概率、条件概率及其相关公式、事件的独立性和伯努利试验概型；

二、教学内容及学时分配

本章计划学时：8学时
1、随机试验、随机事件和样本空间；统计概率，古典概型
2、几何概率，概率空间
3、条件概率，乘法公式，全概率公式，贝叶斯公式
4、独立性，伯努利试验概型

三、教学重点、难点

重点：事件的关系及运算；古典概率的计算；概率的性质；条件概率，概率乘法公式，全概率公式；事件的独立性，伯努利概型。

难点：事件的关系及运算，全概率公式。

第一章教学计划

教学内容：

1、随机试验、随机事件和样本空间；

2、统计概率，古典概型。

教学目的及目标：

1.理解随机事件的概念，熟练掌握事件间的关系与运算；

2、了解概率的统计定义；

3、掌握古典概型 。

教学重点：

1、事件的关系及运算；

2、古典概率的计算 。

教学难点：

1、事件的关系及运算的概率解释；

2、古典概率的计算。

第一节　随机事件及其性质

定义1（随机试验）

概率论中将具有下面三个特点：

（1）可重复性：

（2）多结果性：

（3）不确定性：

的一切试验或观察称为随机试验，简称为试验，常用E表示。

例：

E_1：抛一枚硬币，观察正面、反面出现的情况。

E_2：将一枚硬币抛掷三次，观察正面、反面出现的情况。

E_3：将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数。

E_4：掷一粒骰子，观察出现的点数。

E_5：记录电话交换台一分钟内接到的呼唤次数。

E_6：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

E_7：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度。

二、随机事件

定义2（随机事件）

随机试验中，满足一定条件的结果称为**随机事件，** 简称**事件**。

随机事件一般用大写英文字母$A,B,C\dots\dots$等表示。

例：

在E_4中，“掷得奇数点”，“掷得点数6”，“掷得点数不超过 2”等都是随机事件，可将它们依次记为B,C,D。

在E_6中，“灯泡的寿命超过500小时”也是随机事件，我们可用A表示此事件。

定义3（基本事件与复合事件）

随机试验的任何一个不可拆分的基本结果称为基本事件。

由随机试验的若干个基本事件构成的结果称为复合事件。

两个特别的事件：

（1）不可能事件：在试验中不可能出现的事情，记为 Φ。

如“掷一粒骰子掷出8点”。

（2）必然事件：在试验中必然出现的事情，记为S或 Ω。

如“掷一粒骰子点数小于7”。

为了用数学方法描述随机现象及随机事件，奥地利数学家R. von. Mises于20世纪30年代初期引进了样本空间的概念[1]。

Richard von Mises (1883 – 1953)

Born: 19 April 1883 in Lemberg, Austria (now Lvov, Ukraine)

Died: 14 July 1953 in Boston, Massachusetts, USA

三、样本空间

定义4（样本空间）

随机试验E的每个基本结果称为样本点，一般记为ω或e.

E的全体样本点的集合称为样本空间，一般记为Ω或S.

一旦试验明确，则试验的全部可能结果（或范围）就是明确的。由此，我们可以确定一个试验的样本空间。

样本空间的元素是由试验的内容所决定的。

如果试验是将一枚硬币抛掷两次观察正反面出现的情况，则样本空间由如下四个样本点组成：

$S=\{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

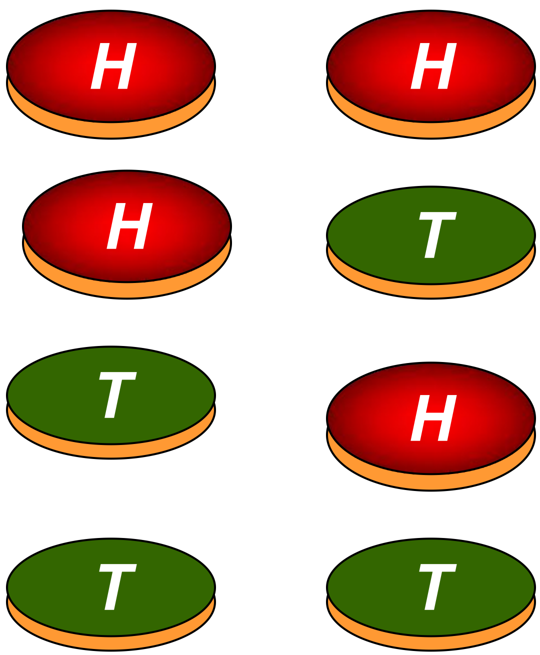
其中　第1次　第2次

(H,H):

(H,T):

(T,H):

(T,T):



样本空间在如下意义上提供了一个理想试验的模型：

在每次试验中必有一个样本点出现且仅有一个样本点出现．

例：

E_1：抛一枚硬币，观察正面、反面出现的情况。

E_2：将一枚硬币抛掷三次，观察正面、反面出现的情况。

E_3：将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数。

E_4：掷一粒骰子，观察出现的点数。

E_5：记录电话交换台一分钟内接到的呼唤次数。

E_6：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

E_7：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度。

例：试写出前面E_2, E_3，E_5,E_6以及E_7的样本空间Ω_2, Ω_3, Ω_5, Ω_6和Ω_7。

$\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}$

$\Omega_3 = \{0，1，2，3\}$

$\Omega_5 = \{0，1，2，3,\ldots\}$

$\Omega_6 = \{t：t \geq 0\}$

$\Omega_7 = \{(x, y)：x \geq y \geq 0\}$

- 样本空间
  - 离散样本空间
    - 有限样本空间
    - 可列样本空间
  - 不可列无穷样本空间——主要讨论连续样本空间

引入样本空间后，事件便可以表示为样本点的集合，即为样本空间的子集。

例如，掷一颗骰子，观察出现的点数,则

$$\Omega = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$$

考虑事件B：“掷得奇数点”

易见，$B = \{1,3,5\}$，

即B是Ω的一个子集。

显然：事件B发生当且仅当B所包含的一个样本点出现.

概率论与集合论有关概念的对应关系表：

概率论	集合论	记号
样本点	元素	e_i ，ω_i
样本空间	全集	**S, Ω**
随机事件	子集	**A，B，C……**
基本事件	单点集	$\{e_i\}$
不可能事件	空集	**Φ**

事件间的关系及运算，就是集合间的关系和运算。

事件间的关系与运算

定义（事件的包含与相等）

若事件A发生必然导致事件B发生，则称**B包含A**，记为$B \supset A$或$A \subset B$。

若$A \subset B$且$A \supset B$则称**事件A与事件B相等**，记为$A = B$。

定义（和事件）

“事件A与事件B至少有一个发生”是一事件，称此事件为事件A与事件B的**和事件**。记为$A \cup B$。

用集合表示为：$A \cup B = \{e \mid e \in A，或 e \in B\}$

推广：事件的和的概念可推行至任意有限和及可列和的情况：

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \triangleq A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \triangleq A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n \bigcup \cdots$$

例　袋中有5个白球，三个黑球，从中任取3个球，令A表示“取出的全是白球”，B表示“取出的全是黑球”，C表示“取出的球颜色相同”，则$C=A\cup B$.

若令$A_i(i=1,2,3)$表示“取出的3个球中恰有i个白球”,D表示“取出的3个球中至少有一个白球”，则

$$D= A_1\cup A_2\cup A_3$$

定义（积事件）

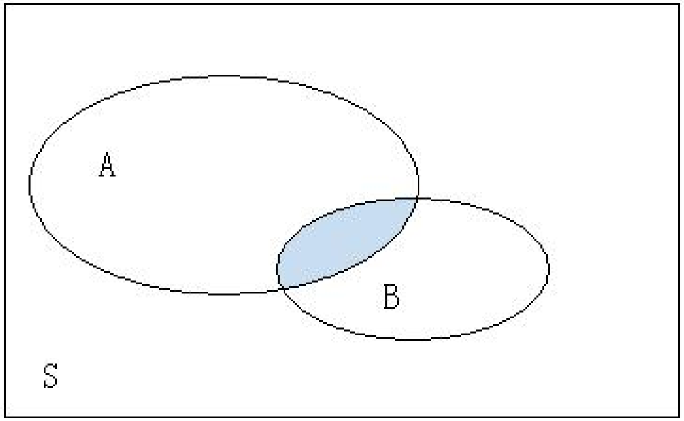
称事件“事件A与事件B都发生”为A与B的积事件，

记为A∩B或AB，用集合表示为AB={e|e∈A且e∈B}。

推广：

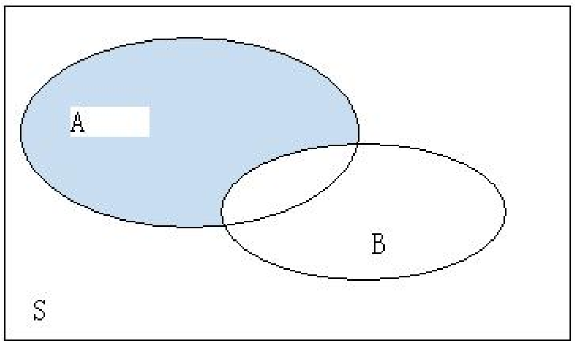
$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k \triangleq A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n$$

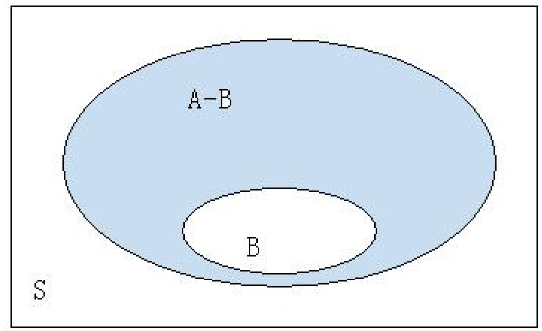
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \triangleq A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n \bigcap \cdots$$



定义（差事件）

称“事件A发生而事件B不发生，这一事件为事件A与事件B的差事件，记为A—B，用集合表示为 $A-B=\{e\,|\,e\in A,\ e\notin B\}$

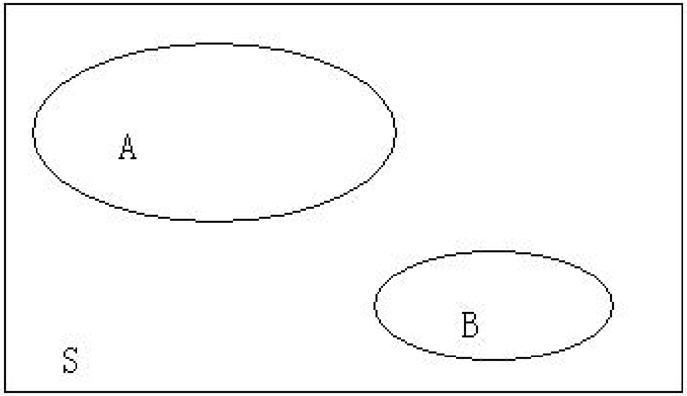




例 从1,2,3…,N这N个数字中，任取一数，取后放回，先后取k个数($1\le k\le N$),令A表示“取出的k个数中最大数不超过M”($1\le M\le N$), B表示“取出的k个数中最大数不超过M-1”，C表示“取出的k个数中最大数为M”，则 $C=A-B$，且$B\subset A$

定义（互不相容事件或互斥事件）

如果A，B两事件不能同时发生，即$AB=\Phi$ ，则称事件A与事件B是**互不相容事件**或**互斥事件**。



推广　对有限个事件或可列个事件A_1，A_2，…，A_n …，如果对任意$i\neq j$，$A_i A_j=\Phi$，则称A_1，A_2，…，A_n**两两互斥**，或A_1，A_2，…，A_n …两两**互不相容**。

定义（**逆事件/对立事件**）

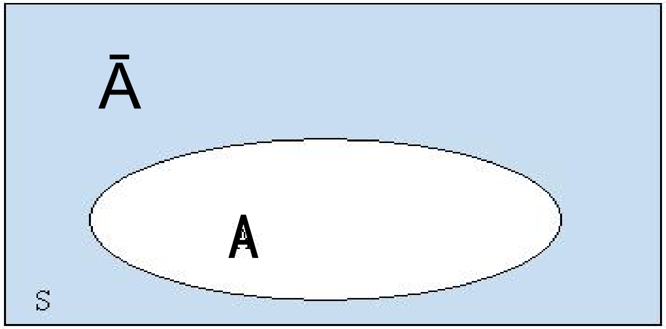
称事件“A不发生”为事件A的**逆事件**，记为$\bar{A}$ 。

易见A与$\bar{A}$满足：$A\cup\bar{A}=S$，且$A\bar{A}=\Phi$。

一般地，若A，B满足：$A\cup B=S$，$AB=\Phi$称为A与B互为**对立事件**，此时，A为B的逆事件，B为A的逆事件，即$A=\bar{B}$，$B=\bar{A}$。

若A，B互为对立事件，那么在每次试验中，事件A，B必有一个发生而且只有一个发生，显然

$\bar{A}=\{e\,|\,e\notin A\}$，A−B=◌̄BA=A−AB。



事件与集合的关系及运算对照：

记号	概率论	集合论
$A \subset B$	事件A发生导致B也发生	A是B的子集
$A = B$	A与B相等	A与B相等
$AB = \phi$	A与B不相容	A与B无公共元
素 $\bar{A}$		
$A \cup B$	A的对立事件	A的余集
$A \cap B$	A与B至少有一个发生	A与B的并集
$A - B$	A与B同时发生	A与B的交集
	A发生而B不发生	A与B的差集

相关性质还有：

1. $\bar{A}=S-A$，$\bar{S}=\Phi$，$\bar{\Phi}=S$;

2. 若$A\subset B$，则$\bar{B}\subset\bar{A}$;

3. $A\cup B=A\cup\bar{A}B$，$A\cup B\cup C=A\cup\bar{A}B\cup\bar{A}\bar{B}C$;

4. 若A、B互为对立事件，则A、B**互不相容。**

注意：4.的逆不成立，即A、B**互不相容，未必有**A、B互为对立事件。

例　将n个人任意分配到N个房间($n\le N$)，令A表示“恰有n个房间各有一人”，B表示“第一个房间恰有两人”，从而$AB=\Phi$，但B不等于$\bar{A}$。

例1：袋中装有编号为1，2，3，4，5，6，7，8的八张卡片中任取一张，设事件Ａ为“抽得一张标号不大于４的卡片”，事件Ｂ为“抽得一张标号为偶数的卡片”，事件Ｃ为“抽得一张标号为奇数的卡片”。请用样本点的集合表示下列事件：$A\cup B$，AB，$A-B$，$B-A$，$B\cup C$，$(A\cup B)C$

解：将A，B，C表示集合形式为$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，$C=\{1,3,5,7\}$所以

$$A\cup B=\{1,2,3,4,6,8\}$$

$$(A\cup B)C=\{1,3\}$$

$AB=\{2,4\}$；$A-B=\{1,3\}$

$B-A=\{6,8\}$

$B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

例2：A, B, C, D四个事件，用运算关系表示：

（1）A, B, C, D至少有一个发生；

（2）都不发生；（3）都发生；

（4）A, B, C, D恰有一个发生；

（5）至多一个发生。

解：（1）$A \cup B \cup C \cup D$或 $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}}$

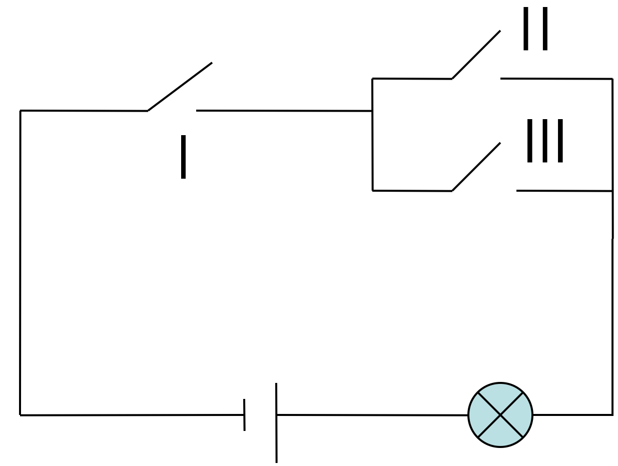
（2）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ 或 $\overline{A \cup B \cup C \cup D}$

（3）ABCD或 $\overline{\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \cup \bar{D}}$

（4）$A\bar{B}\bar{C}\bar{D} \cup \bar{A}B\bar{C}\bar{D} \cup \bar{A}\bar{B}C\bar{D} \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$

（5）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \cup (4)$

例3：如图所示的电路中，以A表示事件“信号灯亮”，B，C，D分别表示事件：继电器接点Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ闭合，以B，C，D表示A及Ā。



解：在如图的电路中，信号灯亮当且仅当接点Ⅰ闭合且Ⅱ与Ⅲ中至少有一个闭合，因此由事件的运算，易得

$$A=B\cap(C\cup D)$$

信号灯不亮当且仅当Ⅰ断开或Ⅱ，Ⅲ都断开，故

$$\overline{A}=\overline{B}\cup(\overline{C}\cap\overline{D})$$

事件的运算律

设A，B，C为事件，则有

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$

（2）结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$

$A(BC)=(AB)C=ABC$

（3）分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=AB\cup AC$

（4）德摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

推广 $\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k\overline{A_k}$，$\overline{\bigcap_k A_k}=\bigcup_k\overline{A_k}$.

Born: 27 June 1806 in Madura, Madras Presidency, India (now Madurai, Tamil Nadu, India)

Died: 18 March 1871 in London, England

Augustus De Morgan
1806 - 1871

例3（*） 设A、B是两事件，证明

(1). $B=AB\cup\bar{A}B$, 且AB与$\bar{A}B$互不相容；

(2). $A\cup B=A\cup\bar{A}B$, 且A与$\bar{A}B$互不相容.

证明: (1) $AB\cup\bar{A}B=(A\cup\bar{A})B=\Omega B=B$,

$$(AB)(\bar{A}B)=(A\bar{A})B=\Phi.$$

(2) $A\cup\bar{A}B=A\cup AB\cup\bar{A}B$

$=A\cup(AB\cup\bar{A}B)$

$=A\cup B$,

$$A(\bar{A}B)=(A\bar{A})B=\Phi.$$

事件的关系、运算和运算法则可概括为

四种关系：包含、相等、对立、互不相容；

四种运算：和、积、差、逆；

四个运算法则：交换律、结合律、分配律、对偶律。