北京郵電大學

题目：概率名题——蒙提霍尔问题的分析总结

姓　　名　　张晨阳

学　　院　　计算机学院

班　　级　　2022211320

学　　号　　2022211683

2024 年 1 月 7 日

一、问题介绍

蒙提霍尔问题 (Monty Hall Problem)，也称为三门问题、蒙提霍尔悖论，出自美国电视游戏节目 *Let's Make a Deal*：

参赛者需要从三扇门中选择出一扇门，其中一扇的后面有一辆汽车，另外两扇门后面则各藏有一只山羊。当参赛者选定了一扇门，还未去开启它前，节目主持人开启剩下两扇门中的一扇，露出了一只山羊。然后主持人会问参赛者，是继续坚持之前的选择还是换另一扇还未打开的门。

这个问题的关键在于换另一扇门究竟是否有利于参赛者赢得汽车。

本文将利用条件概率、全概率公式以及贝叶斯公式分析总结蒙提霍尔问题。

二、所需概率论知识介绍

首先介绍条件概率。

在概率论的实际问题中，对于事件 A，常常需要考虑在某些附加条件下事件 A 发生的概率。这些附加条件通常以“某事件 B 已发生”的形式给出，即：考虑在已知事件 B 已发生的条件下，事件 A 发生的概率，这就是条件概率，记为 $P(A|B)$.

下面给出具体定义：

设 A,B 为两事件，且 $P(B)>0$，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率。

也由此推出了乘法定理：

设 $P(B)>0$，则有

$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$

将上式推广到任意 n 个有限多事件的情形，可以得到事件概率的乘法公式：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

再引入全概率公式的概念：

设 Ω 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $\mathrm{P}(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任意事件 A，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

上式即为全概率公式。

全概率公式中提到的“全”就是要将事件 B 发生的每种情况都考虑到。

最后我们介绍贝叶斯(Bayes)公式：

设 Ω 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$为 Ω 的一个划分，A 为 E 的事件，且$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n),P(A)>0$，则有

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A|B_k)P(B_k)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

上式即为贝叶斯公式。其中$P(B_i)$称作先验概率，$P(A|B_k)$称作后验概率。

三、问题分析

假设三扇门分别为 A,B,C，因为三扇门的排序对结果并没有影响，故在不失一般性的前提下，我们假设参赛者第一次的选择是 A，记作$A1$,然后主持人打开的门是 B，记作$B2$，我们把车在门 X 后记作$X3$，那么问题就变成了：

$$P(A3|A1,B2),\ P(B3|A1,B2),\ P(C3|A1,B2)$$

三者的大小问题。

由贝叶斯公式可得：

$$P(A3|A1,B2)=\frac{P(A1,B2|A3)P(A3)}{P(A1,B2)}$$
$$P(B3|A1,B2)=\frac{P(A1,B2|B3)P(B3)}{P(A1,B2)}$$
$$P(C3|A1,B2)=\frac{P(A1,B2|C3)P(C3)}{P(A1,B2)}$$

接下来则需要分别计算三者的大小，我们先给出一些已知条件：

$$P(A3)=P(B3)=P(C3)=\frac{1}{3}$$

作为参赛者、观看者的角度，汽车一开始在三个门的概率都是相等的。

$$P(A1,B2|A3)=\frac{1}{2}$$

若汽车在 A 门，主持人会打开 B、C 两个门中的任意一个，所以打开 B 门概率为$\frac{1}{2}$。

$$P(A1,B2|B3)=0$$

若汽车在 B 门，因为主持人是知道答案的，所以他不会打开 B 门直接展示汽车，故打开 B 门的概率为 0.

$$P(A1,B2|C3)=1$$

若汽车在 C 门，主持人肯定不会打开 C 门，又因为参赛者选的 A 门，主持人不可能直接告诉参赛者选错了，所以也不会打开 A 门，故一定打开 B 门，概率为 1。

我们不考虑羊的不同，因为羊的不同对试验没有影响，那么汽车在 A 门、B 门、C 门（比赛开始前），即$A3,B3,C3$这三个事件的发生概率都为$\frac{1}{3}$.

我们可以求得：

$$P(A1,B2)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}+0+1\right)=\frac{1}{2}$$

至此我们便可计算最终结果：

$$P(A3|A1,B2)=\frac{P(A1,B2|A3)P(A3)}{P(A1,B2)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$P(B3|A1,B2)=\frac{P(A1,B2|B3)P(B3)}{P(A1,B2)}=\frac{0\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=0$$

$$P(C3|A1,B2)=\frac{P(A1,B2|C3)P(C3)}{P(A1,B2)}=\frac{1\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

所以，在一开始选择 A 门，主持人打开 B 门的情况下，汽车在 C 门的概率是最大的，故此时参赛者应该选择换门。

四、问题推广

若我们将三门问题推广到更一般的形式：一共有 n 扇门，其中 k 扇门后为汽车，主持人会打开 p 扇门，其中 a 扇门是汽车门$(a<k,a\leq p)$，参赛者在初始门和剩下的未开门中选择，结论又会如何呢？

下面给出分析过程。

令事件 A:初始选择为车门；事件 B：初始选择为羊门；事件 X：不换门且获胜；事件 Y：换门且获胜。

则易知：

$$P(A)=\frac{k}{n},\ \ P(B)=\frac{n-k}{n}$$

若参赛者不换门，可得到：

$$P(X)=P(A)=\frac{k}{n}$$

若参赛者换门，有两种获胜情况：

1. 发生事件 A,Y：

   因为现在的情况是参赛者选择换门，故还能从$(n-p-1)$扇门中选择。其中$(k-a-1)$扇门是车门。故获胜概率为：

   $$P(Y|A)=\frac{k-a-1}{n-p-1}$$

2. 发生事件 B,Y：

   同理此时的获胜概率为：

   $$P(Y|B)=\frac{k-a}{n-p-1}$$

那么根据全概率公式可得：

$$P(Y)=P(Y|A)\cdot P(A)+P(Y|B)\cdot P(B)$$
$$=\frac{k}{n}\cdot\frac{k-a-1}{n-p-1}+\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k-a}{n-p-1}=\frac{nk-na-k}{n(n-p-1)}$$

接下来即可分析什么情况下该换门，什么情况下该保持选择。

由$P(X)$和$P(Y)$的表达式可知，当

$$\frac{k}{n}<\frac{nk-na-k}{n(n-p-1)}$$

化简得

$$\frac{a}{p}<\frac{k}{n}$$

即：当主持人打开的门中的车门比例小于总车门比例时，换门为最优选择；当打开门中车门比例大于总车门比例时，保持原选择为最优选择。

五、总结

本文利用本学期所学条件概率、全概率公式、贝叶斯公式等概率论知识，研究学习了蒙提霍尔问题，完成了完整的推导过程，并将三门问题推广到更为一般的情况。