§6.2 随机过程的统计描述

一、随机过程的有限维概率分布

考虑随机过程 $\{X(t), t \in T\}$,

由于$\{X(t), t \in T\}$,在任意时刻均为随机变量，故可用随机变量的统计描述方法来描述其统计特性。

1、一维分布

对于任意确定时刻$t \in T$，$X(t)$为随机变量，其分布函数一般与t有关，记为

$$F_X\{x, t\} = P\{X(t) \le x\},\ x \in R$$

称为随机过程$\{X(t), t \in T\}$的一维分布函数

$F_1 = \{F_X(x,t), t \in T\}$称为一维分布函数族

一维分布函数族描述了该随机过程在任一时刻的统计特性。

2、多维分布

（1）二维分布

对于任意确定时刻t_1，$t_2 \in T$，随机变量$\boldsymbol{X(t_1)}$， $\boldsymbol{X(t_2)}$的联合分布函数一般与t_1，t_2有关，记为

$$F\{x_1, x_2; t_1, t_2\} = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2\}$$

称为随机过程的二维分布函数。

$$F_2 = \{F(x_1, x_2; t_1, t_2), t_1, t_2 \in T\}$$

称为随机过程的二维分布函数族。

二维分布函数族描述了该随机过程在任意两时刻的状态及其联系。

（2）三维分布

对于任意确定时刻t_1，t_2, $t_3 \in T$，随机变量$\boldsymbol{X(t_1), X(t_2), X(t_3)}$的联合分布函数一般与$t_1,t_2,t_3$有关，记为

$$F\{x_1,x_2,x_3;t_1,t_2,t_3\} = P\{X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2, X(t_3)\le x_3\}$$

称为随机过程的三维分布函数。

$$F_3 = \{F(x_1,x_2,x_3;t_1,t_2,t_3), t_1,t_2,t_3 \in T\}$$

称为随机过程的三维分布函数族。

三维分布函数族描述了该随机过程在任意三个时刻的状态及其联系。

……

（3）n维分布

对于任意确定时刻t_1，t_2，…,$t_n \in T$，随机变量 $X(t_1), X(t_2),\ldots,X(t_n)$的联合分布函数一般与$t_1,t_2,\ldots,t_n$有关，记为

$$F\{x_1, x_2,\cdots,x_n; t_1,t_2,\ldots,t_n\} = P\{X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2,\ldots, X(t_n)\le x_n\}$$

称为随机过程的n维分布函数。

$$F_n = \{F(x_1, x_2,\ldots, x_n; t_1, t_2,\ldots, t_n), t_1, t_2, \ldots, t_n \in T\}$$

称为随机过程的n维分布函数族。

n维分布函数族描述了该随机过程在任意n个时刻的状态及其联系。

3、有限维分布函数族

变化n及t_1,t_2，…，t_n所得到的有限维分布函数的全体

$$F=\left\{\begin{array}{l} F\{x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n\}, \\ \qquad\qquad t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, t\in T, n\geq 1 \end{array}\right\}$$

$$=\boldsymbol{F_1}\cup\boldsymbol{F_2}\cup\ldots\cup\boldsymbol{F_n}\cup\ldots$$

称为随机过程的有限维分布函数族。

$$\text{随机过程} \rightleftarrows \text{有限维分布函数族}$$

Kolmogorov, 1933

由此，随机过程的有限维分布函数族$\boldsymbol{F}$完整地刻画了该随机过程的统计特性。

例

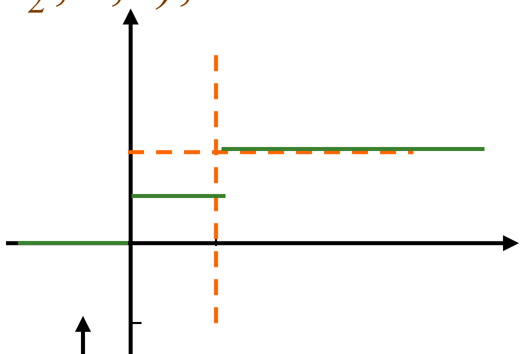
例1：抛掷一枚硬币，样本空间是Ω={H,T}，其中$P(H)=P(T)=1/2$, 现定义：

$$X(t)=\begin{cases} \cos\pi t & \text{当出现}H \\ t & \text{当出现}T \end{cases} \quad t\in(-\infty,+\infty),$$

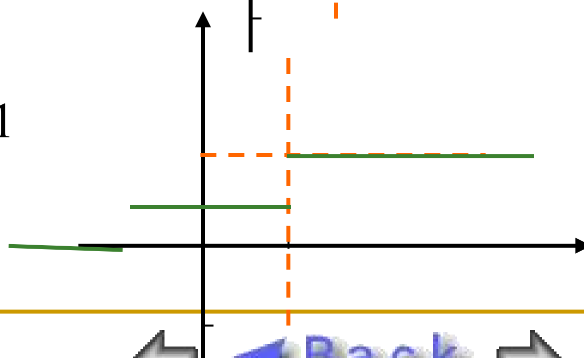
试确定$X(t)$的：　(1) 一维分布函数 $F(x;0)$，$F(x;1)$;

(2) 二维分布函数 $F(x_1,x_2;0,1)$;

解：$X(0)=\begin{cases} 1 & \text{出现}H \\ 0 & \text{出现}T \end{cases}$　　故$F(x;0)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2} & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$



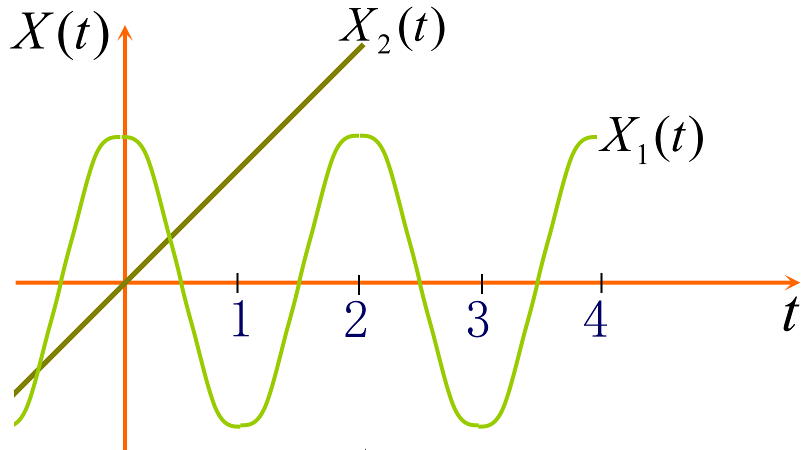
$X(1)=\begin{cases} -1 & \text{出现}H \\ 1 & \text{出现}T \end{cases}$　　故$F(x;1)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ \frac{1}{2} & -1\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$



例1：抛掷一枚硬币，样本空间是$\Omega=\{H,T\}$，其中$P(H)=P(T)=1/2$，现定义：$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t & 当出现H \\ t & 当出现T\end{cases}\quad t\in(-\infty,+\infty)$，

试确定$X(t)$的：（1）一维分布函数 $F(x;0)$，$F(x;1)$；

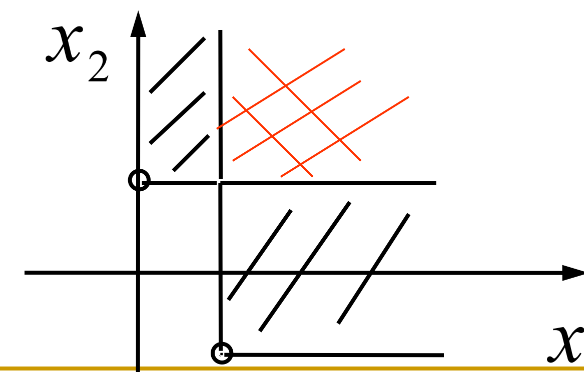
（2）二维分布函数 $F(x_1,x_2;0,1)$；



解（2）

$$(X(0),X(1))=\begin{cases}(1,-1) & 出现H \\ (0,\ \ 1) & 出现T\end{cases}$$

$$故F(x_1,x_2;0,1)=\begin{cases}0 & x_1<1且x_2<1 \\ & x_1<\ 0\ 或x_2<-1 \\ 1 & x_1\geq 1且x_2\geq 1 \\ \frac{1}{2} & 其他\end{cases}$$



Back

练：设随机过程$X(t)=Y+Zt,\ t\in T=(-\infty,+\infty)$，其中$Y$，$Z$是相互独立的服从$N(0,1)$的随机变量，求$\{X(t),\ -\infty<t<+\infty\}$的一，二维概率密度。

解：$\forall t\in T$，由正态分布的性质知$X(t)$服从正态分布：

$$E[X(t)]=E(Y)+tE(Z)=0,$$

$$D[X(t)]=D(Y)+t^2D(Z)=1+t^2$$

所以一维概率密度为 $$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2)}}e^{-\frac{x^2}{2(1+t^2)}}$$

又由正态分布的性质知，对于任意$s,t\in T$，$(X(s),X(t))$服从二维正态分布而$E[X(s)]=E[X(t)]=0$；$D[X(s)]=1+s^2$，$D[X(t)]=1+t^2$

$$C_X(s,t)=E[(Y+Zs)(Y+Zt)]=1+st$$

Back

又由正态分布的性质知，对于任意 $s,t\in T$,

$(X(s), X(t))$服从二维正态分布而

$$E[X(s)]=E[X(t)]=0；D[X(s)]=1+s^2, D[X(t)]=1+t^2$$

$$C_X(s,t)=R_X(s,t)=E[(Y+Zs)(Y+Zt)]=1+st$$

$$\rho_X(s,t)=\frac{1+st}{\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)}}$$

所以二维概率密度为

$$f(x_1,x_2;s,t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(1+s^2)\bullet(1+t^2)}\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x_1^2}{1+s^2}-2\rho\frac{x_1x_2}{\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)}}+\frac{x_2^2}{1+t^2}\right]\right)$$

其中$\rho=\rho_x(s, t)$。

◁ ◀Back ▷

* 例2：设随机过程$X(t)=V\cos\omega t, t\in(-\infty,+\infty)$，$V$在[0,1]上均匀分布

求在$t=0,\frac{\pi}{4\omega},\frac{3\pi}{4\omega},\frac{\pi}{\omega},\frac{\pi}{2\omega}$时$X(t)$的密度函数。

解：对给定的t，若$\cos\omega t\neq 0$，记$a=\cos\omega t$，则$X(t)=aV$的密度函数为：

$$f_X(x;t)=f_V\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{|a|}=\begin{cases}\frac{1}{|a|} & 0<\frac{x}{a}<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$a=\cos\omega\cdot 0=1 \qquad \text{于是 } f_X(x;0)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$a=\cos\omega\cdot\frac{\pi}{4\omega}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad f_X\left(x;\frac{\pi}{4\omega}\right)=\begin{cases}\sqrt{2} & 0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$a=\cos\omega\cdot\frac{3\pi}{4\omega}=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad f_X\left(x;\frac{3\pi}{4\omega}\right)=\begin{cases}\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}<x<0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$a=\cos\omega\cdot\frac{\pi}{\omega}=-1, \qquad f_X\left(x;\frac{\pi}{\omega}\right)=\begin{cases}1 & -1<x<0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$a=\cos\omega\cdot\frac{\pi}{2\omega}=0, \qquad P\left\{X\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)=0\right\}=1$$

Back

二、随机过程的数字特征

① 函数 $\mu_X(t)=E[X(t)],\ t\in T$

为 $\{X(t),\ t\in T\}$ 的**均值函数**.

② $\psi_X^2(t)=E[X^2(t)]$ 为 $\{X(t),\ t\in T\}$ 的**均方值函数**.

③ $\sigma_X^2(t)=D_X(t)=D[X(t)]$

为 $\{X(t),\ t\in T\}$ 的**方差函数**.

④ $C_X(s,t)=Cov(X(s),X(t))$

$$=E\{[X(s)-\mu_X(s)][X(t)-\mu_X(t)]\}$$

为 $\{X(t),\ t\in T\}$ 的（自）**协方差函数**.

⑤ $R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$ 为 $\{X(t),t\in T\}$ 的（自）**相关函数**

显然 $\psi_X^2(t)=R_X(t,t),\quad C_X(s,t)=R_X(s,t)-\mu_X(s)\cdot\mu_X(t)$

$$\sigma_X^2(t)=C_X(t,t)=\psi_X^2(t)-\mu_X^2(t)$$

定义： 随机过程$\{X(t), t \in T\}$，如果对每一$t \in T, E[X^2(t)]$都存在，则称$X(t)$是二阶矩过程，

二阶矩过程的均值函数和相关函数总是存在的。

例3：设随机过程 $X(t)=Y\cos\omega t+Z\sin\omega t, t\geq 0$，其中$Y,Z$是相互独立的随机变量，且$E(Y)=E(Z)=0$，$D(Y)=D(Z)=\sigma^2$，求$\{X(t), t\geqslant 0\}$均值函数 $\mu_x(t)$和自相关函数$R_x(s,t)$。

解：$\mu_x(t)=E[X(t)]=E(Y\cos\omega t+Z\sin\omega t)$
$=\cos\omega t\cdot E(Y)+\sin\omega t\cdot E(Z)=0$,

因为Y与Z相互独立，于是

$$\begin{aligned}
R_X(s,t) &= E[X(s)X(t)] \\
&= E\{[Y\cos\omega s+Z\sin\omega s][Y\cos\omega t+Z\sin\omega t]\} \\
&= \cos\omega s\cdot\cos\omega t\cdot E(Y^2)+\sin\omega s\cdot\sin\omega t\cdot E(Z^2) \\
&= \sigma^2\cos\omega(t-s)
\end{aligned}$$

练：求随机相位正弦波过程 $X(t)=a\cos(\omega t+\Theta), t\in(-\infty,+\infty)$ 的均值函数，方差函数和自相关函数，其中a和ω是常数，Θ是在(0，2π)上服从均匀分布的随机变量。

解： Θ的概率密度为

$$f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & \theta\in(0,2\pi)\\ 0 & \theta\notin(0,2\pi)\end{cases}$$

于是 $\mu_X(t)=E[X(t)]=E[a\cos(\omega t+\Theta)]$

$$=\int_0^{2\pi}a\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=0$$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=E\{[a^2\cos(\omega s+\Theta)\cos(\omega t+\Theta)]\}$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\cos(\omega s+\theta)\cdot\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s)$$

$$\sigma_X^2(t)=R_X(t,t)-\mu_X^2(t)=\frac{a^2}{2}.$$

Back

三、二维随机过程的有限维分布及数字特征

1、**定义：** $\{X(t)\}$、$\{Y(t)\}$为定义在同一样本空间Ω和同一参数集T上的随机过程，对于任意$t\in T$，$(X(t),Y(t))$是二维随机变量，称$\{(X(t),Y(t)),t\in T\}$为二维随机过程。

2．有限维分布函数和独立性

(1) $\{(X(t),Y(t)),\ t\in T\}$为二维随机过程，对于任意的正整数n和m，以及任意的$t_1,t_2,\ldots,t_n$；$t'_1,t'_2,\ldots,t'_m\in T$，称$n+m$元函数

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ y_1,y_2,\ldots,y_m;\ t_1,t_2,\ldots,t_n;\ t'_1,t'_2,\ldots,t'_m)$$

$$=P\{X(t_1)\le x_1,\ldots,\ X(t_n)\le x_n;\ Y(t'_1)\le y_1,\ldots,Y(t'_m)\le y_m\}$$

为$\{(X(t),Y(t)),\ t\in T\}$的$n+m$维分布函数。

类似可定义有限维分布函数族。

（2）若对于任意的正整数n和m，以及任意的$t_1,t_2,\ldots,t_n$；$t'_1, t'_2,\ldots,t'_m \in T$，任意的$x_1,x_2,\ldots,x_n$；$y_1,y_2,\ldots,y_m \in R$, 有

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ y_1,y_2,\ldots,y_m;\ t_1,t_2,\ldots,t_n;\ t'_1,t'_2,\ldots,t'_m)$$

$$=F_X\{X(t_1)\le x_1,\ldots, X(t_n) \le x_n\}\, F_Y\{Y(t'_1) \le y_1,\ldots,Y(t'_m) \le y_m\}$$

则称$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$相互独立，其中F_X，F_Y分别为$\{X(t)\}$，$\{Y(t)\}$的有限维分布函数.

3．二维随机过程的数字特征

（1）互相关函数：称 $R_{XY}(s,t)=E[X(s)Y(t)]$

为$\{(X(t), Y(t)), t\in T\}$的互相关函数。

若对于任意的$s,t\in T$, $R_{XY}(s,t)=0$，称$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$正交。

(2) 互协方差函数：

称 $C_{XY}(s,t)=E\{[X(s)-\mu_X(s)][Y(t)-\mu_Y(t)]\}$

为 $\{(X(t),Y(t)),t\in T\}$ 的互协方差函数。

显然 $C_{XY}(s,t)=R_{XY}(s,t)-\mu_X(s)\mu_Y(t)$

若对于任意的$s,t\in T$，有$C_{XY}(s,t)=0$，则称$\{X(t)\},\{Y(t)\}$不相关。

若$\{X(t)\}$，$\{Y(t)\}$相互独立，且二阶矩存在，则$\{X(t)\}$，$\{Y(t)\}$不相关。

例4：设有两个随机过程$X(t)=g_1(t+\varepsilon)$和$Y(t)=g_2(t+\varepsilon)$，其中$g_1(t)$和$g_2(t)$都是周期为L的周期函数，ε是在$(0,L)$上服从均匀分布的随机变量。求互相关函数$R_{XY}(s，t)$的表达式.

解：

$$R_{XY}(s,t)=E[X(s)Y(t)]=E[g_1(s+\varepsilon)g_2(t+\varepsilon)]$$

$$=\int_0^L g_1(s+x)g_2(t+x)\frac{1}{L}dx$$

令$v=s+x$，利用$g_1(t)$和$g_2(t)$的周期性，有

$$R_{XY}(s,t)=\frac{1}{L}\int_S^{S+L} g_1(v)g_2(t-s+v)dv$$

$$=\frac{1}{L}\int_0^L g_1(v)g_2(t-s+v)dv$$

Back

例5：设$X(t)$为信号过程，$Y(t)$为噪声过程，令

$W(t)=X(t)+Y(t)$，则

（1）$W(t)$的均值函数为 $\mu_W(t)=\mu_X(t)+\mu_Y(t)$.

（2）其自相关函数为

$$R_W(s,t)=E\{[X(s)+Y(s)][X(t)+Y(t)]\}$$

$$=R_X(s,t)+R_{XY}(s,t)+R_{YX}(s,t)+R_Y(s,t)$$

两个随机过程之和的自相关函数是每个随机过程的自相关函数与它们的互相关函数之和。若两个随机过程正交（或互不相关且均值函数均恒为零），则

$$R_W(s,t)=R_X(s,t)+R_Y(s,t)$$

Back

* 例6：随机过程$W(t)$是三个随机过程$X(t),Y(t),Z(t)$之和，

已知$\mu_X(t),\mu_Y(t),\mu_Z(t),R_X(t_1,t_2),R_Y(t_1,t_2),R_Z(t_1,t_2),$

$R_{XY}(t_1,t_2),R_{YZ}(t_1,t_2),R_{ZX}(t_1,t_2)$，求$\mu_W(t),R_W(t_1,t_2).$

解：$W(t)=X(t)+Y(t)+Z(t)$

$$\mu_W(t)=\mu_X(t)+\mu_Y(t)+\mu_Z(t)$$

$$\begin{aligned}R_W(t_1,t_2)&=R_X(t_1,t_2)+R_Y(t_1,t_2)+R_Z(t_1,t_2)\\&+R_{XY}(t_1,t_2)+R_{YX}(t_1,t_2)+R_{XZ}(t_1,t_2)\\&+R_{ZX}(t_1,t_2)+R_{YZ}(t_1,t_2)+R_{ZY}(t_1,t_2)\end{aligned}$$

特别的，若$\mu_X(t)=\mu_Y(t)=\mu_Z(t)=0$，$X(t),Y(t),Z(t)$两两不相关

即$R_{XY}(t_1,t_2)=\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2)=0$，$R_{XZ}(t_1,t_2)=0,R_{YZ}(t_1,t_2)=0$

则$R_W(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)+R_Y(t_1,t_2)+R_Z(t_1,t_2)$

复随机过程（详见教材）

如果$\{X_1(t), t\in T\}$和$\{X_2(t), t\in T\}$都是参数集T上的实随机过程，则称

$$\{X(t)=X_1(t)+iX_2(t), t\in T\}$$

为参数集T上的复随机过程。

$$\mu_X(t)=\mu_{X_1}(t)+i\mu_{X_2}(t)$$

模

$$\sigma_X^2(t)=D_X(t)=E[|X(t)-u_X(t)|^2]$$

$$C_X(s,t)=E\{\overline{[X(s)-\mu_X(s)]}[X(t)-\mu_X(t)]\}$$

$$R_X(s,t)=E[\overline{X(s)}X(t)]$$

§6.3 高斯过程（正态过程）

一、定义

设$\{X(t)\}$为随机过程，如果对任意的正整数n及任意$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$（当$i\neq j$时，$t_i\neq t_j$），n维随机变量$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$服从n维正态分布，则称$\{X(t)\}$为**正态过程(或高斯过程)**。

正态过程是二阶矩过程。记其均值函数为$\mu_X(t)$，协方差函数为$C_X(s,t)$。

二、性质

(1)$\{X(t),t\in T\}$为正态过程，其统计特性由$\mu_X(t)$和$C_X(s,t)$确定。

反之，可以证明，$T=[0,+\infty)$，给定$\mu(t)$和非负二元函数$C(s,t)$，则存在正态过程$\{X(t)\}$，使$\mu_X(t)=\mu(t)$，$C_X(s,t)=C(s,t)$。

(2) $\{X(t)\}$为正态过程$\Leftrightarrow$它的任意有限多个随机变量的任意线性组合是正态随机变量。

事实上，由正态变量的性质，n维随机变量为正态随机变量的充要条件是其分量的任意一维线性组合为一维正态变量，因此本结论显然成立。

(3) 正态过程$\{X(t), t\in T\}$与确定过程$\{S(t), t\in T\}$的和仍是正态随机过程。

***(4) 若正态过程$\{X(t), t\in T\}$的均值$\mu_X(t)$与t无关，自相关函数$R_X(t,t+\tau)$只取决于τ的值，则称此过程为（宽）平稳正态过程。**

三、例题选讲

例1 设$X(t)=A+Bt+Ct^2, t\in(-\infty,+\infty)$，其中$A,B,C$是相互独立，且都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$的随机变量，试证明$X(t)$是正态过程，并求它的均值函数和自相关函数。

解：$X(t)$是正态过程

$\Leftrightarrow$ 对任意正整数n和任意一组实数$t_1,t_2,\cdots t_n\in T$,

$\left(X(t_1),X(t_2),\cdots X(t_n)\right)$服从$n$维正态分布

$\Leftrightarrow$ 对任意一组数 $u_1,u_2,\cdots u_n, u_1X(t_1)+u_2X(t_2)+\cdots+u_nX(t_n)$服从一维正态分布

而$u_1X(t_1)+u_2X(t_2)+\cdots+u_nX(t_n)=A\sum_{i=1}^{n}u_i+B\sum_{i=1}^{n}u_it_i+C\sum_{i=1}^{n}u_it_i^2$

因为A,B,C是相互独立的正态变量，

$A\sum_{i=1}^{n}u_i+B\sum_{i=1}^{n}u_it_i+C\sum_{i=1}^{n}u_it_i^2$是$A,B,C$的线性组合，

因此它服从一维正态分布，

所以$X(t)$是正态过程

例1 设$X(t)=A+Bt+Ct^2, t\in(-\infty,+\infty)$，其中$A,B,C$是相互独立，且都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$的随机变量，试证明$X(t)$是正态过程，并求它的均值函数和自相关函数。

下面计算均值函数和自相关函数:

因为$E(A)=E(B)=E(C)=E(AB)=E(AC)=E(BC)=0,$

$$E(A^2)=E(B^2)=E(C^2)=\sigma^2$$

故$\mu_X(t)=E\left\{A+Bt+Ct^2\right\}=E(A)+E(B)t+E(C)t^2=0$

$$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)$$

$$=E[(A+Bt_1+Ct_1^2)(A+Bt_2+Ct_2^2)]$$

$$=\sigma^2(1+t_1t_2+t_1^{\ 2}t_2^{\ 2})$$

练：设随机过程$X(t)=U\cos\omega_0 t+V\sin\omega_0 t,\ t\geq 0$，$\omega_0$为常数，$U$, V是两个相互独立的正态随机变量，且 $E(U)=E(V)=0, E(U^2)=E(V^2)=\sigma^2$.试证：$\{X(t)\}$为正态过程，并求其一、二维概率密度.

解：（1）证$\{X(t)\}$为正态过程：只须证$\{X(t)\}$的任意有限多个随机变量的任意线性组合是一维正态随机变量。

对任意正整数n，任意$0\leq t_1<t_2<\ldots<t_n$, 及任意$a_1,a_2,\ldots,a_n\in R$,

$$W=\sum_{i=1}^{n}a_i X(t_i)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\cos\omega_0 t_i\right)U+\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\sin\omega_0 t_i\right)V=AU+BV.$$

即：W是两个相互独立的正态随机变量的线性组合，所

所以W是一维正态随机变量，于是$\{X(t)\}$为正态过程。

（2）求一维概率密度.

对确定的$t\geq 0$,$X(t)$为正态随机变量且

$$E[X(t)]=E(U)\cos\omega_0 t+E(V)\sin\omega_0 t=0,$$

$$D[X(t)]=D(U)\cos^2\omega_0 t+D(V)\sin^2\omega_0 t=\sigma^2,$$

于是$\{X(t)\}$的一维概率密度为:

$$f(x;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

（3）求二维概率密度.

$\forall t_1,t_2\geq 0$, $E[X(t_1)]=E[X(t_2)]=0$,

$$\mathrm{cov}(X(t_1),X(t_2))=E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$=E[(U\cos\omega_0 t_1+V\sin\omega_0 t_1)(U\cos\omega_0 t_2+V\sin\omega_0 t_2)]$$

$$=E(U^2\cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2)+E(V^2\sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2)$$

$$=\sigma^2\cos\omega_0(t_1-t_2),$$

于是,二维正态随机变量$(X(t_1),X(t_2))$的均值和协方差矩阵分别为：

$$\mu=(0,0)'$$

$$C=\begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\cos\omega_0\tau \\ \sigma^2\cos\omega_0\tau & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \tau=t_2-t_1$$

所以

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi|C|^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}X'C^{-1}X},$$

其中$X=(x_1,x_2)'$是列向量

*例2：设有平稳高斯过程{$X(t, t \in T$}，其均值为0, 相关函数

$$R_X(\tau) = \frac{1}{4}e^{-2|\tau|}, \qquad \forall t_1 \in T$$

求X(t_1)的值在0.5与1之间的概率。

解：由题设， $\mu_X = 0 \quad R_X(0) = \frac{1}{4}$

所以 $\sigma_X^2 = R_X(0) - \mu_X^2 = \frac{1}{4} \qquad \sigma_X = \frac{1}{2}$

故 $X(t_1) \sim N(0, 1/4) \qquad \forall t_1 \in T$

从而 $P\{0.5 \le X(t_1) \le 1\} = P\{\sigma_X \le X(t_1) \le 2\sigma_X\}$

$$= \Phi\left(\frac{2\sigma_X - \mu_X}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\frac{\sigma_X - \mu_X}{\sigma_X}\right)$$

$$= \Phi(2) - \Phi(1) \approx 0.1359$$