高斯(Gauss)公式　通量与散度

空间二维单连通域的概念:

对于空间区域 G,如果 G 内任一闭曲面所围成的区域仍属于 G,则称 G 是空间二维单连通域;否则称 G 为二维复连通域.

通俗而言，空间二维单连通域之中不含“洞”，而二维复连通域之中含有“洞”.

例如，两个同心球面所围区域不是二维单连通域；环面（即轮胎面）所围区域是二维单连通域.

一、高斯(Gauss)公式

定理 1 设空间闭区域Ω是由分片光滑的闭曲面Σ所围成，函数 $P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$在Ω上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy,$$

或 $$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

其中闭曲面Σ取外侧（即法方向朝外）,$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是Σ上任一点(x,y,z)处法向量的方向余弦.

简要证明

设Ω是一柱体，上边界曲面为Σ_2: $z=z_2(x, y)$，下边界曲面为Σ_1: $z=z_1(x, y)$，侧面为柱面Σ_3, Σ_1 取下侧, Σ_2 取上侧; Σ_3 取外侧.

根据三重积分的计算法，有

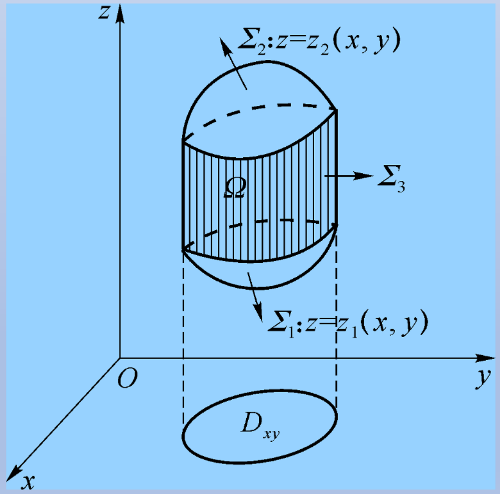
$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dv=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz=\iint_{D_{xy}}\{R[x,y,z_2(x,y)]-R[x,y,z_1(x,y)]\}dxdy.$$

另一方面，有

$$\iint_{\Sigma_1}R(x,y,z)dxdy=-\iint_{D_{xy}}R[x,y,z_1(x,y)]dxdy,$$

$$\iint_{\Sigma_2}R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}}R[x,y,z_2(x,y)]dxdy,$$

$$\iint_{\Sigma_3}R(x,y,z)dxdy=0,$$



以上三式相加，得

$$\oiint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} \{R[x,y,z_2(x,y)] - R[x,y,z_1(x,y)]\}dxdy .$$

所以 $$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dv = \oiint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy .$$

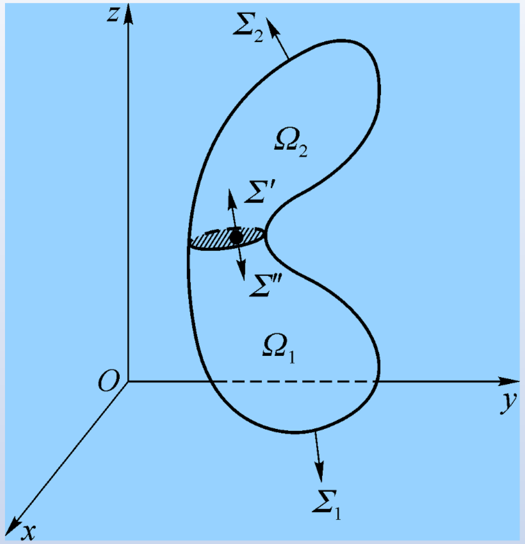
类似地有

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dv = \oiint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz ,$$

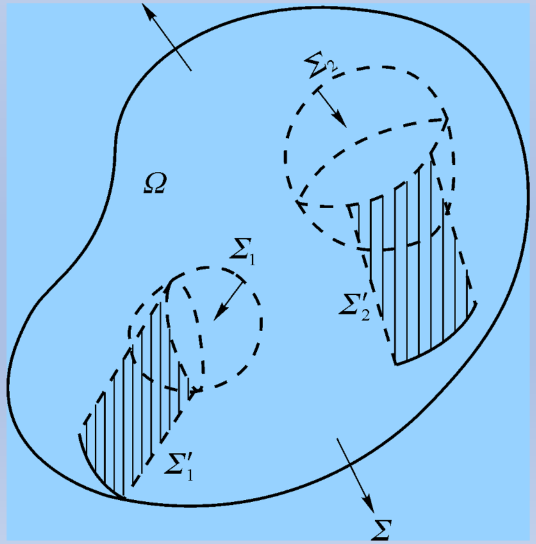
$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dv = \oiint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx ,$$

把以上三式两端分别相加，即得高斯公式.

对于一般二维单连通域：

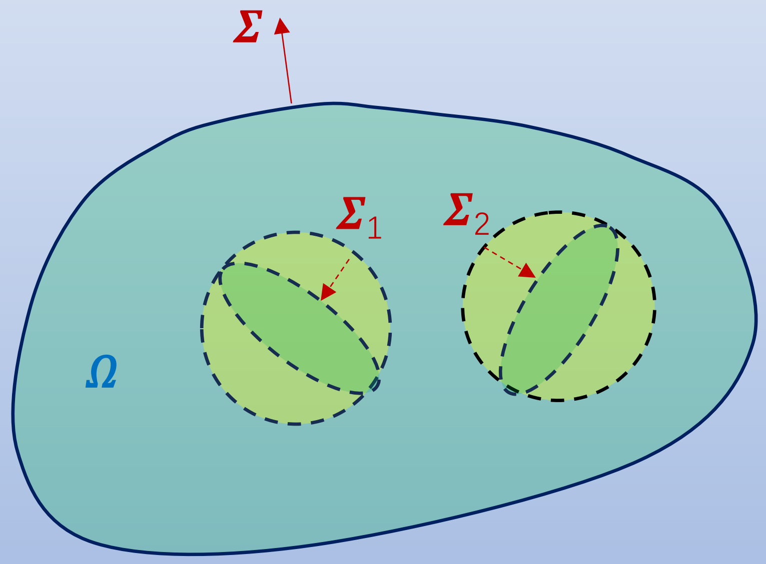


对于二维复连通域：



对于二维复连通域（如下图），高斯公式仍然成立:

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy \,.$$



设空间闭区域Ω是由分片光滑的闭曲面Σ所围成，则闭区域Ω的体积

$$V=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy,$$

其中闭曲面Σ取外侧.

Gauss 公式使用要求：

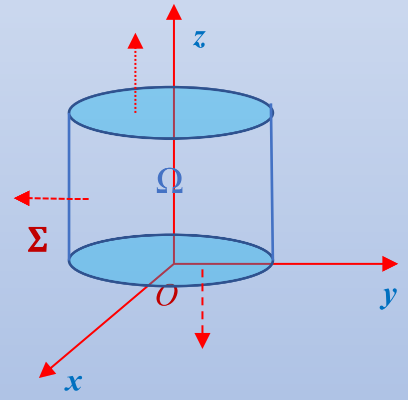
（1）　积分曲面Σ为闭曲面，取外侧；

（2）　Σ所围区域Ω上函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 有一阶连续偏导数.

例 1 利用高斯公式计算曲面积分$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$，其中Σ为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$，$z=3$ 所围成的空间闭区域Ω的整个边界曲面的外侧.

解 这里 $P=(y-z)x$, $Q=0$, $R=x-y$,

$$\frac{\partial P}{\partial x}=y-z,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=0.$$



由高斯公式，有

$$\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

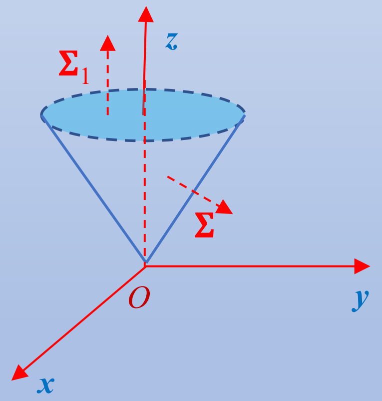
$$=\iiint_{\Omega}(y-z)dxdydz=\iiint_{\Omega}(\rho\sin\theta-z)\rho d\rho d\theta dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^3(\rho\sin\theta-z)dz=-\frac{9\pi}{2}.$$

例 2 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$，其中Σ为锥面$x^2+y^2=z^2$介于平面$z=0$及$z=h$ $(h>0)$之间的部分的下侧, $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$是Σ上点(x, y, z)处的法向量的方向余弦.

解 设Σ_1为$z=h(x^2+y^2\le h^2)$的上侧，则Σ与Σ_1一起构成一个闭曲面，记它们围成的空间闭区域为Ω，由高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2z)dv$$



$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}(x+y+z)dz=2\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}zdz$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}(h^2-x^2-y^2)dxdy=\frac{1}{2}\pi h^4$$

注意:利用对称性 $\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}(x+y)dz=0$.

而 $$\iint_{\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS=\iint_{\Sigma_1}z^2dS=\iint_{x^2+y^2\le h^2}h^2dxdy=\pi h^4,$$

因此 $$\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS=\frac{1}{2}\pi h^4-\pi h^4=-\frac{1}{2}\pi h^4.$$

例 3 设函数 $u(x, y, z)$和 $v(x, y, z)$在闭区域Ω上具有一阶及二阶连续偏导数，证明

$$\iiint_{\Omega} u\Delta v dxdydz = \oiint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}dS - \iiint_{\Omega}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z})dxdydz,$$

其中Σ是闭区域Ω的整个边界曲面，$\dfrac{\partial v}{\partial n}$为函数 $v(x, y, z)$沿Σ的外法线方向的方向导数，符号 $\Delta=\dfrac{\partial}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y^2}+\dfrac{\partial}{\partial z^2}$，称为拉普拉斯算子．这个公式叫做格林第一公式．

证：因为方向导数

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$是Σ在点(x, y, z)处的外法线向量的方向余弦．

于是曲面积分

$$\oiint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}dS=\oiint_{\Sigma} u(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma)dS$$

$$=\oiint_{\Sigma}[(u\frac{\partial v}{\partial x})\cos\alpha+(u\frac{\partial v}{\partial y})\cos\beta+(u\frac{\partial v}{\partial z})\cos\gamma]dS.$$

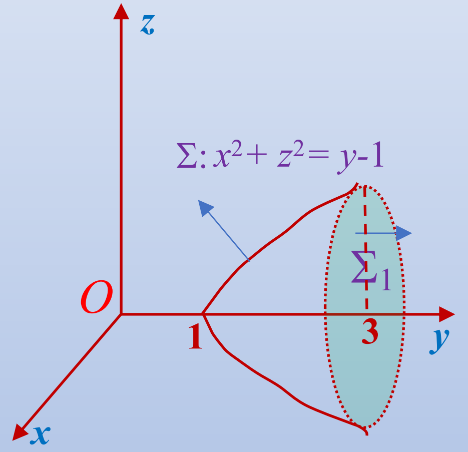
利用高斯公式，即得

$$\oiint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}dS=\iiint_{\Omega}[\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial v}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(u\frac{\partial v}{\partial z})]dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega} u\Delta v dxdydz+\iiint_{\Omega}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z})dxdydz,$$

将上式右端第二个积分移至左端便得所要证明的等式.

例 4.计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$,其中Σ是由曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面,它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.[34π]



解：这里 $P=(8y+1)x, Q=2(1-y^2), R=-4yz.$

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=8y+1-4y-4y=1$$

作辅助面 $\Sigma_1: y=3\ \left(x^2+z^2\le 2\right)$,法方向取右侧，则Σ与Σ₁ 构成法方向指向外侧的闭曲面.记 Ω 为Σ与Σ₁ 所围闭区域.

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(8y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$$

$$-\iint\limits_{\Sigma_1}(8y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$$

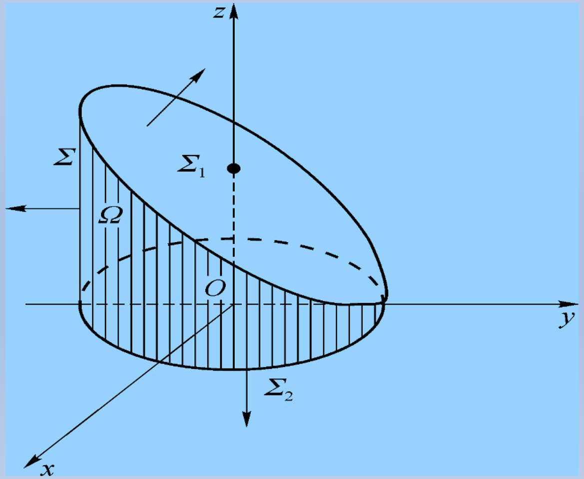
$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv-\iint\limits_{x^2+z^2\le 2}2\left(1-3^2\right)dzdx$$

$$=\int_1^3 dy\iint\limits_{x^2+z^2\le y-1}dzdx+16\cdot\pi\left(\sqrt{2}\right)^2=\int_1^3\pi\left(\sqrt{y-1}\right)^2dy+32\pi$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(y-1\right)^2\Big|_1^3+32\pi=34\pi.$$

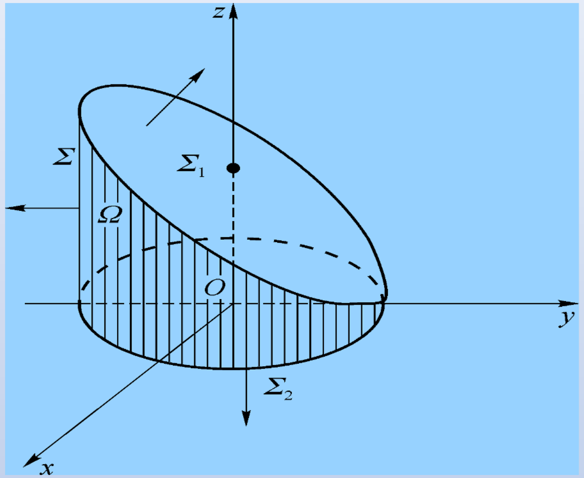
例 5.计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(2z^2+xy\right)dydz+\left(x^2-yz\right)dxdy$，其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $y+z=1$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧.

解：作椭圆面 Σ_1（取上侧）及圆面 Σ_2（取下侧），它们分别位于平面 $y+z=1$ 及 $z=0$ 上.这样 $\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2$ 构成闭曲面，其法向量指向外侧，记 Ω 为 $\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2$ 闭曲面所围空间闭区域.



$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\left(2z^2+xy\right)dydz+\left(x^2-yz\right)dxdy-\iint_{\Sigma_1}\left(2z^2+xy\right)dydz+\left(x^2-yz\right)dxdy$$

$$-\iint_{\Sigma_2}\left(2z^2+xy\right)dydz+\left(x^2-yz\right)dxdy,$$



因为 Σ₁、Σ₂ 在 yOz 坐标面上投影为零，所以

$$\iint_{\Sigma_1}\left(2z^2+xy\right)dydz=0,\quad \iint_{\Sigma_2}\left(2z^2+xy\right)dydz=0;$$

根据高斯公式，有

$$I=\iiint_{\Omega}(y-y)dv-\iint_{D_{xy}}\left(x^2-y(1-y)\right)dxdy+\iint_{D_{xy}}\left(x^2-y\cdot 0\right)dxdy$$

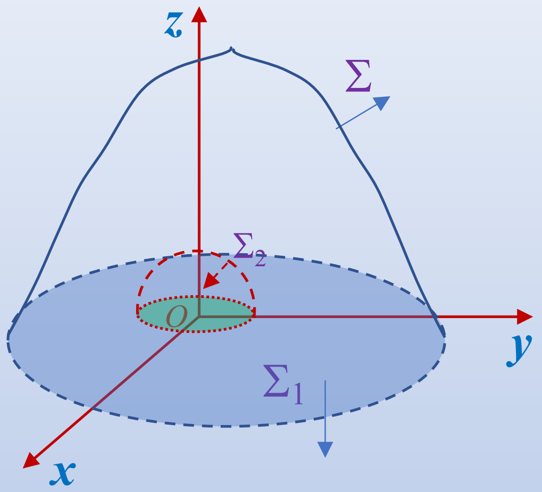
$$=\iint_{D_{xy}}y(1-y)dxdy=\iint_{D_{xy}}ydxdy-\iint_{D_{xy}}y^2dxdy$$

$$=0-\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)dxdy=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho=-\frac{\pi}{4}.$$

其中 $D_{xy}=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\right\}$.

例 6.计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ 其中Σ为曲面

$$1-\frac{z}{5}=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\ (z\ge 0)$$ 的上侧.[2π]



解：这里 $P=\frac{x}{r^3},Q=\frac{y}{r^3},R=\frac{z}{r^3}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

当 $x^2+y^2+z^2\neq 0$ 时，$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{r^3}+x\left(-3r^{-4}\right)\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-3\frac{x^2}{r^5}$，

$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{r^3}-3\frac{y^2}{r^5}$，$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{r^3}-3\frac{z^2}{r^5}$，$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$.

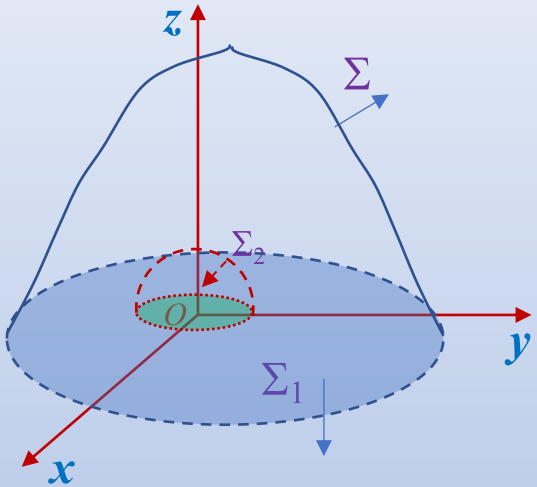
作辅助面 $\Sigma_1:z=0$ 上介于 $x^2+y^2=\delta^2$ 与 $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ 之间部分，取下侧；上半球面 $\Sigma_2:x^2+y^2+z^2=\delta^2\ (z\ge 0)$，取下侧；其中 $\delta>0$ 充分小，则Σ、Σ_1 及 Σ_2 构成法方向指向外侧的闭曲面.记 Ω 为Σ、Σ_1 及 Σ_2 所围空间闭区域.

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}-\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}-\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv-0-\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\delta^3}$$

$$=-\frac{1}{\delta^3}\iint\limits_{\Sigma_2}\left[x\cdot\left(-\frac{x}{\delta}\right)+y\cdot\left(-\frac{y}{\delta}\right)+z\cdot\left(-\frac{z}{\delta}\right)\right]dS$$

$$=\frac{1}{\delta^4}\iint\limits_{\Sigma_2}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS=\frac{1}{\delta^2}\cdot 2\pi\delta^2=2\pi.$$



其中$\left(-\frac{x}{\delta},-\frac{y}{\delta},-\frac{z}{\delta}\right)$为$\Sigma_2: x^2+y^2+z^2=\delta^2\ (z\geq 0)$上任意点$(x,y,z)$处单位法向量.

1.计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$,其中Σ为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le h)$ 的下侧.$\left[-\frac{\pi}{4}h^4\right]$

练习