# 2020-2021 学年第一学期

# 《高等数学 A》（上）期末考试题（A1）

## 一. 填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2}{n^2+3}\right)^{n^2}=$ ________.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x+\sin x^4}{\cos^2 x\cdot\ln(1+x^2)}=$ ________.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{\arcsin x+x^2}{x(x-1)}$ 的可去间断点是________.

4. 设函数 $f(x),g(x)$ 都在 $(-1,1)$ 上有定义,且都在 $x=0$ 点处连续，若

$$f(x)=\begin{cases} g(x)/x, x\neq 0, \\ 2, \quad x=0. \end{cases}$$ 则 $g'(0)=$ ________.

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ______.

6. 设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-2}\int_2^x f(t)dt$ ，其中 $f(x)$ 连续且 $f(2)=1$ ，则

$\lim\limits_{x\to2}F(x)=$ ________.

7. $\int\ln(x+\sqrt{x^2+1})dx=$ ________.

8. 设 $f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=0$ 及 $\int_0^1 f(x)dx=2$，则 $\int_0^1 x^2f''(x)dx=$ _____.

9. $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+4x+8}=$ ________.

10. 微分方程 $y'=\dfrac{y(1+2x^2)}{x}$ 的通解为________.

二(10 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 令

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\,f(t)dt, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$$

(1) 试求 $A$ 的值, 使 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续; (2) 求出 $F'(x)$ 并讨论其连续性.

三(10 分)已知当 $x\to 0$ 时 $x-(a+be^{x^2})\sin x$ 是关于 $x$ 的5阶无穷小, 求常数 $a$ 和 $b$ 的值.

四(12 分)证明不等式:

(1) 当 $x>0$ 时 $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$;

(2) 当 $x\in(0,1)$ 时 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-x>\dfrac{1}{\ln 2}-1$.

五(12 分) 求不定积分.

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$;

(2) 设 $\displaystyle\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

六(12 分) 过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\ (x\geq 0)$ 上点 $A$ 作切线, 使该切线与曲线及 $x$ 轴围成的平面图形 $D$ 的面积 $S=\dfrac{3}{4}$.

(1) 求点 $A$ 的坐标; (2) 求 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积.

七(14 分) 设 $f(x),g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x), f(0)=1$ 且

$$g(x)=1+\int_0^x[6\sin^2 t-f(t)]dt$$

求 $f(x)$ 和 $g(x)$.