北京邮电大学 2019——2020 学年第 2 学期

4 学时《概率论与随机过程》期末考试（A）

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效。

一．　填空题（40 分，每空 4 分）

1. 一个寝室有 4 名同学，4 人生日不都在星期天的概率是 2400 /2401 .

2. 设$X\sim\pi(1)$(*参数为*1 *的泊松分布*)，$Y\sim\pi(2)$ (*参数为*2 *的泊松分布*)，且X与Y

相互独立，则P$\{X+Y=2\}$=_____.

3 若发报机以 0.7 和 0.3 的发出信号 0 和 1，由于随机干扰的影响，发出信号 0 时，接收机不一定收到 0，而是以概率 0.8 和 0.2 收到信号 0 和 1；同样地， 当发报机发出信号 1 时，接收机以概率 0.9 和 0.1 收到信号 1 和 0.则当接收 机收到信号 0 时，发报机是发出信号 0 的概率为____.

4 设(X,Y)服从区域 G 上的二维均匀分布，其中区域 G={(x,y)|-1<x<1,-1<y<1}，则关于 x 的二次方程$x^2+2Xx+Y=0$有实根的概率为___________.

5. 设随机变量X的概率密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}1-|x|, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$求随机变量

$Y=X^2+1$的概率密度函数$f_Y(y)$＝_____.

6. 设甲打电话所用时间 X 服从指数分布，且打电话所花时间超过两分钟和不超过两分钟的概率相等。乙找甲有事情商量，因为甲正打电话就在旁边默默等候，则乙等待时间超过 5 分钟的概率为______.

7 设随机变量序列$X_1,X_2,\ldots,X_{50}$独立同参数(0.5)的两点分布，记$Y=\sum_{i=1}^{50}X_i$，

利用中心极限定理近似计算$P(Y\geq 2)=$____.(用标准正态分布函数$\Phi(x),x>0$表示结果).

8 设$\{W(t),t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程，$W(0)=0$。定义$X(t)=W(e^{-t}),t\geq 0$， 则相关函数$R_X(1,2)=$______________.

9 设平稳过程$\{X(t),t\geq 0\}$的功率谱密度$S_X(\omega)=\frac{2\omega^2+5}{\omega^4+5\omega^2+4}$，则其平均功率

$Q=$______________.

10 设齐次马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的状态空间$E = \{1,2 \dots m\}$， 转移矩阵的每一行每一列都是$\frac{1}{m}$，则状态 1 的平均返回时间为___.

二．（10 分）设D是由曲线$xy=1$与直线$x=1, y=0, x=e^2$围成的平面区域，二维随机变量(X,Y)在区域D上服从均匀分布，

（1）给出(X,Y) 的概率密度函数，

（2）求(X,Y)关于X 的边缘分布及其在$x=2$处的值，

三．（10 分）

设随机变量和$(X,Y) \sim N(1,2,8,4,-0.5)$. $\xi = X + Y, \eta = X - Y$，求

1）(ξ,η)的相关系数

2) 求 $\mathrm{E}(\eta)$ *和* $E(\xi)$

四（10 分）

设齐次马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的状态空间为$E = \{0,1,2\}$，一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix},$$

初始分布为$P\{X_0 = 0\} = P\{X_0 = 1\} = P\{X_0 = 2\} = \frac{1}{3}$, 求

(1) $P\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_4 = 2\}$和 $P\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_4 = 2 | X_0 = 0\}$;

(2) X_2的分布律;

五．（10 分）

设马氏链的状态空间E=$\{1，2，3,4,5\}$，一步转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

（1）问马氏链是否可分，若可分给出全部不可分闭集；

（2）讨论其状态分类，各状态的周期；

（3）求其全部平稳分布。

六.（10分）

设随机过程

$$X(t)=A\cos(t+\Theta),-\infty<t<+\infty,$$

其中$\Theta\sim U(0,2\pi)$，$A\sim N(0,3)$，且Θ,A相互独立，

（1）证明$X(t)$为平稳过程，并求它的均值函数μ_X和自相关函数$R_X(\tau)$；

（2）若将$X(t)$输入一脉冲响应函数为$h(t)=\begin{cases}e^{-t} & t>0\\ 0 & 其他\end{cases}$的线性系统，求输出$\{Y(t)\}$ 的自相关函数和谱密度。

七.（10分）叙述与证明

叙述概率公理化定义,并利用概率公理化定义证明不可能事件的可能性为零.