第十章　无穷级数

1. 级数是数列极限的实际应用
2. 解决无穷多个数相加问题
3. 表示函数、研究函数性质、计算函数值、微分方程求解的重要工具

第一节 常数项级数

一、常数项级数的概念

常数项级数定义:

给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$, 各项依次相加得到表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

叫做(常数项)无穷级数, 简称(常数项)级数, 记为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

其中第n项 u_n叫做级数的通项或一般项.

级数的部分和: 作级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前n项和

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

得到**部分和数列** $\{s_n\}$:

$$s_1 = u_1$$

$$s_2 = u_1 + u_2$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

$$\vdots$$

级数收敛与发散的定义:

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列$\{s_n\}$有极限 s , 即 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$,

则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 这时极限 s 叫做这级数的和

(或$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 s) .

并写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = s$$

如果 $\{s_n\}$ 没有极限,则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 这时级数没有和。

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时, 其部分和s_n是级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和s的近似值,

它们之间的差值

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

叫做级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**余项**,且 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0.$

需解决级数的两个问题:

（1）级数的敛散性

（2）收敛级数的和

例1. 讨论**等比级数(或几何级数)** $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$ 的敛散性, 其中$a \neq 0$, q叫做级数的公比.

解: 部分和 $s_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$.

当 $q \neq 1$ 时, $s_n = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$; 当 $q = 1$ 时, $s_n = an$;

于是, 当 $|q| < 1$ 时 $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$, 级数收敛, 和为 $s = \dfrac{a}{1-q}$;

当 $|q| > 1$ 时 $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$; 当 $q = 1$ 时, $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$;

当 $q = -1$ 时, $s_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}a$, $s_{2k} = 0$, $s_{2k-1} = a$, $\{s_n\}$ 发散, 级数发散.

结论： 等比级数$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$（$a\neq 0$）当$|q|<1$时级数$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$收敛，级数的和为$\frac{a}{1-q}$；当$|q|\geq 1$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$发散.

例如:无穷级数$\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(-\frac{3}{2}\right)^n$，$\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n$ 发散；

级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^{n-1}}$收敛，和为$\frac{-2}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=-\frac{6}{5}$，即$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^{n-1}}=-\frac{6}{5}$.

例 2 证明级数

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots$$

是发散的.

证： 部分和 $s_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}\to\infty\ (n\to\infty)$， 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散.

例 3 判别无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

的收敛性.

解： $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，部分和 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}\to1\,(n\to\infty)$.

级数收敛， 和为 1.

例4.判别下列级数的敛散性，若收敛求其和。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$　　（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$　　（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$

提示： $\arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan\frac{1}{2n-1}-\arctan\frac{1}{2n+1}$

解：

（1） $u_n=\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$， $s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=1-\frac{1}{(n+1)!}\to 1\ (n\to\infty)$， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$收敛，和为 1；

（2） $u_n=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$， $s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\to\frac{1}{2}\ (n\to\infty)$，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$收敛于和$\frac{1}{2}$；

（3） $u_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\to\frac{3}{4}\ (n\to\infty)$$， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$收敛于和$\frac{3}{4}$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$为等比级数，公比$q=\frac{1}{3}$，$|q|<1$，级数收敛，

和为$\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=1$；

（5）$u_n=\ln(n+1)-\ln n$，$s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\ln(n+1)\to\infty\ (n\to\infty)$，级数发散；

（6）因为当$x,y>0$时$\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}$，所以

$u_n=\arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan\frac{1}{2n-1}-\arctan\frac{1}{2n+1}$，于是

部分和$s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\arctan 1-\arctan\frac{1}{2n+1}\to\frac{\pi}{4}\ (n\to\infty)$，级数收敛，

和为$\frac{\pi}{4}$，即$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\frac{\pi}{4}$.

二、收敛级数的基本性质

性质1 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛于和 s,则它的各项同乘以一个常数k

所得的级数$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$也收敛，且其和为 ks.

证：设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$的部分和分别为s_n，t_n，则$t_n = ks_n$.

如果$\lim_{n\to\infty} s_n = s$，则$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} ks_n = ks$，即$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$收敛于和$ks$.

推论： 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 收敛性相同，其中 $k \neq 0$ 。

例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2}$ 都是发散的.

性质2 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$分别收敛于和s、σ, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$

也收敛, 且其和为$s \pm \sigma$.

证: 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$的部分和分别$s_n$，$\sigma_n$，$w_n$，

则$w_n = s_n \pm \sigma_n$；

如果$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$，$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$，根据极限的四则运算法则,

$\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = s \pm \sigma$，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛于和$s \pm \sigma$.

这时$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}v_n$.

推论： 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$中一个收敛，另一个发散，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$$ 发散.

例如 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3^n}+\cos n\pi\right)$发散.

性质3 在级数中去掉、加上或改变有限项, 不会改变级数的收敛性.

证：设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$去掉前 k 项得到级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+k}$，它们的部分和分别

为s_n，σ_n，则$\sigma_n = s_{n+k} - s_k$；

如果$\lim_{n\to\infty} s_n = s$，则$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_{n+k} - s_k = s - s_k$；

如果$\{s_n\}$发散，则$\{\sigma_n\}$发散；反之亦然.

即$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+k}$同时收敛或发散.

例如，级数$\sum_{n=3}^{\infty}u_n$ $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+k}$ $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 敛散性相同.

性质4 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则对这级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛, 且其和不变.

即**收敛级数满足加法结合律**.

证： 对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的项任意加括号后所成新级数

$$\left(u_1+\cdots+u_{i_1}\right)+\left(u_{i_1+1}+\cdots+u_{i_2}\right)+\cdots+\left(u_{i_{k-1}+1}+\cdots+u_{i_k}\right)+\cdots.$$

如果它们的部分和分别为 s_n， σ_n， 则 $\sigma_n=s_{i_n}$， 所以 $\{\sigma_n\}$ 是 $\{s_n\}$ 的子数列 $\{s_{i_n}\}$，即级数的项任意加括号后所成新级数的部分和数列是原级数的部分和数列的子数列；根据数列及其子数列的收敛性质，如果 $\{s_n\}$ 收敛，则其任意子数列 $\{s_{i_n}\}$（就是数列 $\{\sigma_n\}$）均收敛于同一值.即对收敛级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛,且其和不变.

注意：发散级数不满足加法结合律！

推论 如果加括号后所成的级数发散，则原来级数也发散.

推论 不变号（正项或负项）级数任意加括号不影响其敛散性，

也不影响它的和(若收敛）.

性质5(级数收敛的必要条件)如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，

那么它的一般项u_n趋于零，即$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$；

$\boxed{\text{级数收敛的充分必要条件是它的余项} r_n \text{趋于零.}}$

推论 如果 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是发散的.

例如，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 都是发散的.

例4 证明调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 是发散的.

证:（反证法） 假若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$收敛且其和为 s, s_n 是它的部分和.

显然有 $\lim_{n\to\infty} s_n=s$ 及 $\lim_{n\to\infty} s_{2n}=s$. 于是 $\lim_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)=0$.

但另一方面,

$$s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

故 $\lim_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)\neq 0$, 矛盾. 这矛盾说明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$必定发散.

证法 2 将级数按以下方式加括号：

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

设此新级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$，则

$$v_1=1, v_2=\frac{1}{2}, v_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2},$$

$$v_4=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}, \quad \cdots,$$

$$v_n=\frac{1}{2^{n-2}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}>\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2}, \quad \cdots$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty} v_n \neq 0$，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$发散，又因为$s_n=v_1+v_2+\cdots+v_n>\frac{n}{2}$，

可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散于$+\infty$.

练习：

（1） 证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$收敛的充分必要条件是数列$\{u_n\}$收敛.

（2） 证明 级数$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$发散

证：（1） 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$的部分和为$T_n$， 则

$$T_n=(u_1-u_2)+(u_2-u_3)+\cdots+(u_n-u_{n+1})=u_1-u_{n+1},$$

于是$\{T_n\}$收敛的充分必要条件是数列$\{u_n\}$收敛， 且

$$\lim_{n\to\infty}T_n=u_1-\lim_{n\to\infty}u_{n+1}=u_1-\lim_{n\to\infty}u_n,$$

即级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$收敛的充分必要条件是数列$\{u_n\}$收敛.

(2) 因为级数加括号后的新级数$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$是发散的， 所以原级数是发散的.