2020-2021 学年第一学期

《高等数学 A》（上）期末考试试题（A1）

答案与参考评分标准

一. 填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2}{n^2+3}\right)^{n^2}=$____________.

答：e^{-5}

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+\sin x^4}{\cos^2 x\cdot\ln(1+x^2)}=$__________.

答：$\dfrac{1}{2}$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{\arcsin x+x^2}{x(x-1)}$ 的可去间断点是________.

答：$x=0$

4. 设函数 $f(x),g(x)$ 都在 $(-1,1)$ 上有定义,且都在 $x=0$ 点处连续，若

$$f(x)=\begin{cases} g(x)/x, x\neq 0, \\ 2, \quad x=0. \end{cases}$$ 则 $g'(0)=$________.

答: 2

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$_____.

答：$y'=\dfrac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$

6. 设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-2}\int_2^x f(t)dt$，其中 $f(x)$ 连续且 $f(2)=1$，则

$\lim\limits_{x\to 2}F(x)=$________.

答： 4

7. $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx=$________________.

答：$x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}+C$

8. 设 $f(1)=\frac{1}{2}, f'(1)=0$ 及 $\int_0^1 f(x)dx=2$，则 $\int_0^1 x^2 f''(x)dx=$_____.

答：3

9. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}=$________________.

答：$\frac{\pi}{8}$

10. 微分方程 $y'=\frac{y(1+2x^2)}{x}$ 的通解为________________.

答：$y=Cxe^{x^2}$

二（10 分） 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，令

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\int_0^x t\,f(t)dt, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$$

(1) 试求 A 的值，使 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；(2) 求出 $F'(x)$ 并讨论其连续性.

解 (1) 由变上限积分函数性质知 $F(x)$ 在 $x\neq 0$ 处连续.

由于 $$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{2x}=\frac{f(0)}{2}=0$$

所以当 $A=0$ 时，$F(x)$ 在 $x=0$ 处连续. **(3 分)**

(2) 当 $x\neq 0$ 时，有

$$F'(x)=-\frac{2}{x^3}\int_0^x tf(t)dt+\frac{1}{x^2}xf(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{2}{x^3}\int_0^x tf(t)dt$$

当 $x=0$ 时，由导数的定义知，得

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)dt-0}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{3x}=\frac{1}{3}f'(0)$$

所以

$$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{2}{x^3}\displaystyle\int_0^x tf(t)dt, x\neq 0\\ \dfrac{1}{3}f'(0), \qquad x=0\end{cases}$$ （7 分）

$$(3)\ \lim_{x\to 0}F'(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{2}{x^3}\int_0^x tf(t)dt\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x)}{3x^2}$$

$$=f'(0)-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{3}f'(0)$$

故 $F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. （10 分）

三（10 分）已知当 $x\to 0$ 时 $x-(a+be^{x^2})\sin x$ 是关于 x 的5阶无穷小，求常数 a 和 b 的值.

解 令 $f(x)=x-(a+be^{x^2})\sin x$，利用

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^5),\quad \sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$ （4 分）

得 $$f(x)=x-(a+b+bx^2+\frac{b}{2}x^4+o(x^5))\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)$$

$$=(1-a-b)x+\left(\frac{a+b}{6}-b\right)x^3-\left(\frac{a+b}{120}-\frac{b}{6}+\frac{b}{2}\right)x^5+o(x^5)$$ （7 分）

于是 a,b 应满足方程组

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-5b=0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad a=\frac{5}{6}, b=\frac{1}{6}.$$

这时 $f(x)=-\dfrac{23}{360}x^5+o(x^5)$. （10 分）

四（12 分）证明不等式:

(1) 当 $x>0$ 时 $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$；

(2) 当 $x\in(0,1)$ 时 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-x>\dfrac{1}{\ln 2}-1$.

证 令 $f(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$，则 $f(0)=0$. （2 分）

$$f'(x)=2x-\ln^2(1+x)-(x+1)2\ln(1+x)\frac{1}{1+x}$$

$$=2x-\ln^2(1+x)-2\ln(1+x)\Rightarrow f'(0)=0$$

$$f''(x)=2-2\ln(1+x)\frac{1}{1+x}-\frac{2}{1+x}=\frac{2}{1+x}[x-\ln(1+x)]>0 \quad \text{（6 分）}$$

所以 $f'(x)$ 严格单调递增, 从而 $f'(x)>f'(0)=0$, 从而 $f(x)>f(0)=0$,

于是当 $x>0$ 时有 $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$. （8 分）

(2) 令 $g(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}, x\in(0,1]$，则有

$$g'(x)=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)} \quad \text{（10 分）}$$

由 (1) 知， $g'(x)<0, \forall x\in(0,1]$, 推出在 $(0,1)$, $g(x)$ 严格单调递减, 于是

$$\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=g(x)>g(1)=\frac{1}{\ln 2}-1 \quad \text{（12 分）}$$

五(12 分). 求不定积分.

(1) $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$;

(2) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解 (1) 设 $x=\tan t$，则 $dx=\sec^2 tdt$.

$$\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\int \frac{\sec^2 tdt}{\sec t(1+2\tan^2 t)} \quad \textbf{(3 分)}$$

$$=\int \frac{\cos t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}dt=\int \frac{d\sin t}{1+\sin^2 t}=\arctan(\sin t)+C$$

$$=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C \quad \textbf{(6 分)}$$

(2) $$\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int(\sqrt{1-x^2})'\arcsin xdx \quad \textbf{(8 分)}$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C \quad \textbf{(12 分)}$$

六(12 分).过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\ (x\geq 0)$ 上点 A 作切线，使该切线与曲线及 x 轴围成的平面图形 D 的面积 $S=\frac{3}{4}$.

(1) 求点 A 的坐标；(2)求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 (1) 设点 $A(t,\sqrt[3]{t})$，其中 $t>0$. 于是曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在点 A 的切线方

程为

$$Y-\sqrt[3]{t}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(X-t) \quad 即 \quad Y=\frac{X}{3\sqrt[3]{t^2}}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{t} \qquad \textbf{(2 分)}$$

令 $Y=0$ 得此切线与 x 轴交点的横坐标 $x_0=-2t$．从而图形 D 的面积为

$$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}\cdot 3t-\int_0^t \sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t} \qquad \textbf{(5 分)}$$

由 $S=\dfrac{3}{4}$，得 $t=1$，于是点 A 的坐标为 $(1,1)$． **(7 分)**

(2) 图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V=\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt[3]{1}\right)^2\cdot 3-\pi\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}\right)^2dx=\pi-\frac{3}{5}\pi=\frac{2}{5}\pi \qquad \textbf{(12 分)}$$

七 (14 分)．设 $f(x),g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x),f(0)=1$ 且

$$g(x)=1+\int_0^x[6\sin^2 t-f(t)]dt$$

求 $f(x)$ 和 $g(x)$．

解 由 $f'(x)=g(x)$ 得

$$f''(x)=g'(x)=\frac{d}{dx}\left(1+\int_0^x[6\sin^2 t-f(t)]dt\right)=6\sin^2 x-f(x) \qquad \textbf{(2 分)}$$

又由 $f'(0)=g(0)=1$ 知函数 $f(x)$ 满足

$$\begin{cases} f''(x)+f(x)=6\sin^2 x=3(1-\cos 2x) \\ f'(0)=f(0)=1 \end{cases} \qquad \textbf{(4 分)}$$

对应的齐次方程 $f''(x)+f(x)=0$ 的通解为

$$\overline{f}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x \qquad \textbf{(6 分)}$$

非齐次方程的一个特解可设为

$$f^*(x)=A+B\cos 2x+C\sin 2x \qquad \textbf{(8 分)}$$

代入方程，比较系数可得 $A=3, B=1, C=0$.

于是 $$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos 2x+3 \qquad \text{(12 分)}$$

利用初值条件 $f'(0)=f(0)=1$ 可确定常数 $C_1=-4, C_2=1$，故

$$f(x)=\sin x-4\cos x+\cos 2x+3$$

从而 $$g(x)=f'(x)=\cos x+4\sin x-2\sin 2x. \qquad \text{(14 分)}$$