Discrete Mathematics and Its Applications

1.3 Propositional equivalence

Wenjing Li

wjli@bupt.edu.cn

School of Computer Science

Beijing University of Posts & Telecommunications

Outline

- 命题公式
- 命题公式的指派
- 命题公式的分类
- 逻辑等值式（Logical Equivalence）

PROPOSITIONAL FORMULA(命题公式)

- **定义：**
  - 由命题标识符、逻辑联结词和圆括号按照一定的正确规则组成的字符串称为命题公式，或合式公式，简称公式。
- **命题公式的规定：**
  - 1）单个命题变项是合式公式。
  - 2）如果A是合式公式，则~A是合式公式。
  - 3）如果A、B是合式公式，则A∧B、A∨B、A→B、A↔B也是合式公式。
  - 4）当且仅当有限次运用1）、2）、3）所得到的符号串是合式公式。
- ***（P∨Q），P→（Q∧R），~P↔(Q∧R)是公式***
- ***（P∨Q，P→，P~Q，P↔ 不是公式***

命题公式的指派（赋值）

- **命题与命题变项（variable）**
  - 命题指具体的陈述句，有确定的真值
  - 为了对命题做逻辑演算，用数学手法将命题符号化
  - 当命题符号*P*表示任意命题时，称为命题变项（变元，variable）
  - 命题变项的真值不定，只有将具体命题代入命题变项时，方可确定其真值。
- **指派（赋值）：**
  - 命题公式中出现n个不同的命题变项$P_1 \cdots P_n$，对这n个命题给定一组真值指定，称为这个公式的一个指派或称为一个赋值。
  - 若一个公式中出现n个不同的命题变项，每个变项分别可以取成1、0，那么该公式共有个2^n个不同的指派。
  - 列出公式的所有指派及其相应的公式真值形成的表格称为公式的**真值表**，真值表对证明以及判断公式的恒真、恒假起很大作用。

命题公式的指派（赋值）

- **Example:**
  - *'If I go to Harry's or go to the country, I will not go shopping.'*
  - *p: I go to Harry's, q: I go to the country, r: I will go shopping*
  - *If…p…or…q…then…not…r*
  - $(p \vee q) \rightarrow \sim r$

p	q	r	$p \vee q$	$\sim r$	$(p \vee q) \rightarrow \sim r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

n propositional variables = 2^n rows

命题公式的分类

- A ***tautology***（*永真式/重言式*）is a proposition which is always true .
  - Classic Example: $p \vee \sim p$
- A ***contradiction***（*永假式*）is a proposition which is always false .
  - Classic Example: $p \wedge \sim p$
- A ***contingency***（*可满足式*） is a proposition which neither a tautology nor a contradiction.
  - Example: $(p \vee q) \rightarrow \sim r$

求 $(p \wedge q) \rightarrow p$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
T	?	?	T
F	?	F	T

Logical Equivalence

- **Definition:**
  - Two syntactically (i.e., textually) different compound propositions may be semantically identical (i.e., have the same meaning). We call them ***logically equivalent*** ***（逻辑等价/逻辑等值）***.
  - Compound propositions that have the same truth values in **all** rows of their truth tables are called ***logically equivalent***.
- **Notation:**
  - Two propositions P and Q are logically equivalent if $P \leftrightarrow Q$ is a tautology. We write

$$P \Leftrightarrow Q \quad \text{or} \quad P \equiv Q$$

Proving Equivalence via Truth Table

- **Example 1:**

  Prove that $p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
F	F	F	T	T	T	F
F	T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T
T	T	T	F	F	F	T

Proving Equivalence via Truth Table

- Example 2:
  - Proof that $p \oplus q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$	$p \oplus q$
0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0

$p \oplus q$ *and* $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ **are logical equivalent.**

$p \oplus q$ *and* $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ **are logical equivalent.**

Proving Equivalence via Counter Eg.

- **Example 3:**
  - Proof: $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$
  - The left side and the right side must have the same truth values independent of the truth value of the component propositions.
  - To show a proposition is not a tautology: use an **abbreviated** truth table.
  - Try to find a ***counter example*** （反例） or to ***disprove*** （反驳） the assertion.
  - Search for a case where the proposition is false.
- **Case 1: *Try left side false, right side true***
  - Left side false: only one of $P \to Q$ or $Q \to P$ be false.
  - 1a. Assume $P \to Q$ = F. Then P = T , Q = F. But then right side P $\leftrightarrow$ Q = F. Oops, wrong guess.
  - 1b. Try $Q \to P$ = F. Then Q=T, P = F. Then the right side P $\leftrightarrow$ Q = F. Another wrong guess.

Proving Equivalence via counter eg.

- **Proof(cont):** $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$
- **Case 2.** ***Try left side true, right side false.***
  - If right side is false, P and Q cannot have the same truth value.
  - 2a. Assume P =T, Q = F. Then $P \rightarrow Q$ = F and the conjunction must be false so the left side cannot be true in this case. Wrong guess.
  - 2b. Assume Q = T, P = F. Then $Q \rightarrow P = F$, *a*gain the left side cannot be true. Another wrong guess.

- **Conclusion:**
  - We have exhausted all possibilities and not found a counterexample. The two propositions must be ***logically equivalent***.
  - Note: Because of this equivalence, ***if and only if*** or ***iff*** is also stated as is a ***necessary and sufficient condition*** *(充分必要条件）*.

Proving Equivalence

- **Example 4:**
  - **Proof**： $\sim(A \vee B) \Leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$

A	B	$A \vee B$	$\sim(A \vee B)$	$\sim A \wedge \sim B$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

Proving Equivalence

- **Example 5:**
  - **Proof：** $A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim A \vee B$

A	B	$A \rightarrow B$	$\sim A$	$\sim A \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Important Logical Equivalences

- $P \wedge T \Leftrightarrow P$ — Identity（同一律/恒等律）
- $P \vee F \Leftrightarrow P$
- $P \vee T \Leftrightarrow T$ — Domination（零律/支配律）
- $P \wedge F \Leftrightarrow F$
- $P \vee P \Leftrightarrow P$ — Idempotency（幂等律）
- $P \wedge P \Leftrightarrow P$
- $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ — Commutativity（交换律）
- $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
- $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ — Associativity（结合律）
- $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

Important Logical Equivalences

- $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ **Distributivity（分配律）**
- $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- $\sim(\sim P) \Leftrightarrow P$ **Double negation（双重否定律）**
- $\sim(P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$ **DeMorgan's laws（德·摩根律）**
- $\sim(P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$
- $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ **Absorption（吸收律）**
- $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
- $P \vee \sim P \Leftrightarrow T$ **Excluded middle（排中律）**
- $P \wedge \sim P \Leftrightarrow F$ **Contradiction（矛盾律/否定律）**

Important Logical Equivalences

- $P \to Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$ Implication（蕴涵等值式）(conditional as disjunction)
- $(P \to Q) \Leftrightarrow (\sim Q \to \sim P)$ Contrapositive（假言易位）
- $(P \to Q) \wedge (P \to \sim Q) \Leftrightarrow \sim P$ Absurdity（归谬论）
- $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$ Equivalence（等价等值式）(biconditional as implication)
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \sim P \leftrightarrow \sim Q$ Equivalent negation（等价否定等值式）
- $\sim(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \sim Q$
- $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$
- $(P \wedge Q) \to R \Leftrightarrow P \to (Q \to R)$ Exportation（输出律）
- …..

等值式模式

- *A*，*B*，*C*代表任意的公式，上述等值式称为等值式模式。
- 每个等值式模式都给出了无穷多个同类型的具体的等值式。
- **Example:**
  - 蕴涵等值式模式

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim A \vee B$$

  - 取$A=p$，$B=q$时，得到

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

  - 取$A=p\vee q\vee r$，$B=p\wedge q$时，得到

$$(p \vee q \vee r) \rightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q \vee r) \vee (p \wedge q)$$

等值演算

- **Example 1:** Proof: $(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$
- **Steps:**
  - $(p \wedge q) \rightarrow r$
  - $\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$ （Implication）
  - $\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$ （De Morgan's）
  - $\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$ （Associtive）

- **Example 2:** Proof: $(A \wedge B) \rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$
- **Steps:**
  - $(A \wedge B) \rightarrow C$
  - $\Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C$ （ Implication ）
  - $\Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \vee C$ （ De Morgan's ）
  - $\Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee C)$ （ Associative ）
  - $\Leftrightarrow \neg A \vee (B \rightarrow C)$ （ Implication ）
  - $\Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$ （ Implication ）

等值演算

- **Example 3：** Proof： $(\sim A \wedge(\sim B \wedge C)) \vee(B \wedge C) \vee(A \wedge C) \Leftrightarrow C$
- **Steps：**
  - $(\sim A \wedge(\sim B \wedge C)) \vee(B \wedge C) \vee(A \wedge C)$
  - $\Leftrightarrow (\sim (A \vee B) \wedge C) \vee ((A \vee B) \wedge C))$

    （Associative, De Morgan’s, Distributive）
  - $\Leftrightarrow (\sim (A \vee B) \vee (A \vee B)) \wedge C$ （ Distributive）
  - $\Leftrightarrow T \wedge C$ （Excluded Middle）
  - $\Leftrightarrow C$ （Identity）

等值演算

- **Example 4:** Proof: $(p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
- **Steps:**
  - $(p \vee q) \rightarrow r$
  - $\Leftrightarrow \sim(p \vee q) \vee r$ *Implication*
  - $\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee r$ *De morgan's*
  - $\Leftrightarrow (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)$ *Distributive*
  - $\Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ *Implication*

等值演算

- **Example 5:** Proof $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \oplus r) \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee \neg r.$
- **Steps:**

$(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \oplus r)$	
$\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \vee (p \oplus r)$	*implication*
$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r))$	
$\Leftrightarrow (q \vee \neg p) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r))$	*commutativity*
$\Leftrightarrow q \vee (\neg p \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r)))$	*associativity*
$\Leftrightarrow q \vee (((\neg p \vee (p \vee r)) \wedge (\neg p \vee \neg(p \wedge r)))$	*distributivity*
$\Leftrightarrow q \vee (((\neg p \vee p) \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg p \vee \neg r)))$	*associativity*
$\Leftrightarrow q \vee ((\mathbf{T} \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r)))$	*idempotency*
$\Leftrightarrow q \vee (\mathbf{T} \wedge (\neg p \vee \neg r))$	*domination*
$\Leftrightarrow q \vee (\neg p \vee \neg r)$	*identity*
$\Leftrightarrow \neg p \vee q \vee \neg r$	*associativity*

Using De Morgan's Laws

- **Example 6**
  - Use De Morgan's laws to Express the negations of
    - *"Mike has a cellphone and he has a laptop computer"*
    - *"Heather will go to the concert or Steve will go to the concert."*

- P: *Mike has a cellphone.*
- *Q: Mike has a laptop computer.*
- $\sim(P \wedge Q) = \sim P \vee \sim Q$:
- *Mike has not a cellphone or he has not a laptop computer.*

Using De Morgan's Laws

- Show that $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ is a tautology.

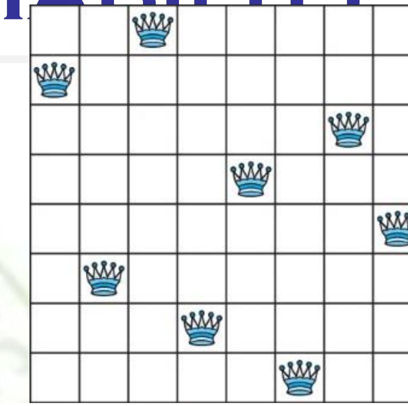
Solution:

$(p \wedge q) \to (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$	by truth table for $\to$
$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$	by the first De Morgan law
$\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$	by associative and commutative laws laws for disjunction
$\equiv T \vee T$	by truth tables
$\equiv T$	by the domination law

Propositional Satisfiability

- **Definition:**
  - A compound proposition is ***satisfiable*** if there is an assignment of truth values to its variables that makes it true.
  - When no such assignments exists, that is, when the compound proposition is false for all assignments of truth values to its variables, the compound proposition is ***unsatisfiable***.
- **Example:**
  - Determine whether each of the compound propositions
    - $(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim r) \wedge (r \vee \sim p)$,
    - $(p \vee q \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$, *and*
    - $(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim r) \wedge (r \vee \sim p) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$
  - is satisfiable.

Applications of Satisfiability



- **Example: the n-Queens Problem**
  - **row i contains at least one queen** $\bigvee_{j=1}^{n} p(i,j)$
  - **every row contains at least one queen** $Q_1 = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} p(i,j)$
  - **there is at most one queen in each row** $Q_2 = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n-1} \bigwedge_{k=j+1}^{n} (\neg p(i,j) \vee \neg p(i,k))$
  - **no column contains more than one queen** $Q_3 = \bigwedge_{j=1}^{n} \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{k=i+1}^{n} (\neg p(i,j) \vee \neg p(k,j))$
  - **no diagonal contains two queens**

$$Q_4 = \bigwedge_{i=2}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n-1} \bigwedge_{k=1}^{\min(i-1,n-j)} (\neg p(i,j) \vee \neg p(i-k, k+j))$$ and

$$Q_5 = \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=1}^{n-1} \bigwedge_{k=1}^{\min(n-i,n-j)} (\neg p(i,j) \vee \neg p(i+k, j+k))$$

$$Q = Q_1 \wedge Q_2 \wedge Q_3 \wedge Q_4 \wedge Q_5$$

Applications of Satisfiability

- **Example: Sudoku**

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

- **For each cell with a given value, we assert *p(i,j,n)* when the cell in row i and column j has the given value n.**

- **Assert that every row contains every number**

$$\bigwedge_{i=1}^{9}\bigwedge_{n=1}^{9}\bigvee_{j=1}^{9} p(i,j,n)$$

- **Assert that every column contains every number**

$$\bigwedge_{j=1}^{9}\bigwedge_{n=1}^{9}\bigvee_{i=1}^{9} p(i,j,n)$$

- **Assert that each of nine blocks (3*3) contains every number**

$$\bigwedge_{r=0}^{2}\bigwedge_{s=0}^{2}\bigwedge_{n=1}^{9}\bigvee_{i=1}^{3}\bigvee_{j=1}^{3} p(3r+i,3s+j,n)$$

- **Assert that no cell contains more than one number, we take the conjunction over all values of *n,n',i and j* where each variable ranges from 1 to 9 and n≠n' of *p(i,j,n)->~p(i,j,n')*.**

Suppl: Normal Form(范式)

Wenjing Li

wjli@bupt.edu.cn

School of Computer Science

Beijing University of Posts & Telecommunications

Outline

- 简单析取式
- 简单合取式
- 析取范式DNF
- 合取范式CNF
- 主析取范式PDNF
- 主合取范式PCNF

简单析取式和简单合取式

- 仅有有限个命题变元或其否定的**析取**构成的析取式称为**简单析取式，或基本和（sum）**。
  - 如：$\sim P \vee Q \vee R$，$\sim P \vee \sim Q \vee P$是简单析取式
- 仅有有限个命题变元或其否定的**合取**构成的合取式称为**简单合取式，或基本积（Product）**。
  - 如：$\sim P \wedge R$，$Q \wedge R \wedge \sim Q$是简单合取式。
- P，~P变项本身可以看作简单析取式也可以看作简单合取式。
- $\sim P \vee (Q \wedge R)$, $(P \wedge Q) \vee \sim R$不是简单析取式或简单合取式。

析取范式(DISJUNCTIVE NORMAL FORM)

- **定义：** 由有限个简单合取式（基本积）的**析取**构成的析取式称为**析取范式DNF**。
- 例：
  - $P\vee(P\wedge Q)\vee(\sim P\wedge\sim Q\wedge\sim R)$是析取范式
  - $P\vee Q\vee R$是析取范式，是三个简单合取式的析取

合取范式(CONJUNCTIVE NORMAL FORM)

- **定义：** 由有限个简单析取式（基本和）的**合取**构成的合取式称为**合取范式CNF**。
- 例：
  - $(P\vee Q)\wedge \sim Q\wedge(Q\vee \sim R\vee S)$是合取范式
  - $P\wedge Q\wedge R$是合取范式，是一个简单析取式的合取

范式的存在性定理

- **存在性定理：**
  - 任意一个命题公式均存在与之等值的析取范式和合取范式。
- **证明：**
  - 对于任意公式，可用下面的方法构造出与其等值的析取范式和合取范式
  - **第一步：** 利用等值式，消去公式中的联结符→和↔
    - （1） $P \to Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$
    - （2） $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
  - **第二步：** 利用德·摩根律将公式中的~联结符移到命题变元之前，用双重否定律消去两个连续的~联结符
  - **第三步：** 用分配律将公式化为**基本积的析取DNF**或**基本和的合取CNF**。

范式的存在性定理

- **例:求公式 $(P \vee Q) \to R$ 的析取范式和合取范式**
- **解1:**
  - $(P \vee Q) \to R \Leftrightarrow \sim(P \vee Q) \vee R$ implication

    $\Leftrightarrow (\sim P \wedge \sim Q) \vee R$ de Morgan's（析取范式）

    $\Leftrightarrow (\sim P \vee R) \wedge (\sim Q \vee R)$ distributivity（合取范式）

    $\Leftrightarrow ((\sim P \vee R) \wedge (\sim Q)) \vee ((\sim P \vee R) \wedge R))$ distributivity

    $\Leftrightarrow (\sim P \wedge \sim Q) \vee (R \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge R) \vee R$（析取范式）

析取（合取）范式不唯一！

极小项

- **定义**：若公式中共有N个命题变项P_1，……，P_n，在这N个变项的合取式中，每个变项P_i或其否定~P_i，**均出现且两者仅出现一个**，并且按命题变项的下标排列（字母按字典序列），这样的**简单合取式**称为**极小项**，又称**布尔合取**。

- **示例**：公式中出现P，Q，R三个命题变项
  - $P \wedge \sim Q \wedge R$，$\sim P \wedge Q \wedge \sim R$是极小项
  - $P \wedge \sim Q$不是极小项，因为没出现R
  - $P \wedge \sim Q \wedge \sim P$不是极小项，因为$P$，$\sim P$同时出现

极小项和赋值一一对应

- **极小项的特征：**
  - n个变项的赋值中，每一个极小项只有一个赋值使其为真，其余2^n-1个赋值使其为假。
- **示例：**
  - 公式中出现P，Q，R三个不同的变项。
  - 极小项~P∧Q∧~R，赋值010使其为真，其余2^3-1=7个赋值使其为假。
  - ~P∧Q不是极小项，有两个赋值010，011使其为真，其余6个赋值使其为假。
  - 极小项与命题公式的赋值之间可以建立一一对应关系。

极小项的记法

- 命题公式共有2^n个赋值，每个赋值对应一个极小项。
- **编码：** 若极小项对应赋值$a_1a_2a_3$（二进制数），对应的十进制数为$0 \le k \le 2^n-1$，则对该极小项进行编码，记作m_{a1a2a3}或m_k

极小项	真值对应的赋值	十进制数	记法
$\sim P \wedge \sim Q \wedge \sim R$	000	0	m_{000}或m_0
$\sim P \wedge \sim Q \wedge R$	001	1	m_{001}或m_1
$\sim P \wedge Q \wedge \sim R$	010	2	m_{010}或m_2
$\sim P \wedge Q \wedge R$	011	3	m_{011}或m_3
$P \wedge \sim Q \wedge \sim R$	100	4	m_{100}或m_4
$P \wedge \sim Q \wedge R$	101	5	m_{101}或m_5
$P \wedge Q \wedge \sim R$	110	6	m_{110}或m_6
$P \wedge Q \wedge R$	111	7	m_{111}或m_7

主析取范式（PRINCIPAL DNF）

- 定义：若干不同的极小项组成的析取式，称为主析取范式。
  - Principal disjunctive normal form （**Major DNF**）
- 例如：
  - $P\vee(\sim P\wedge Q)$，$(P\wedge Q)\vee(\sim P\wedge R)$是析取范式,但不是主析取范式。
  - $(P\wedge Q\wedge\sim R)\vee(\sim P\wedge Q\wedge R)$是主析取范式，当然也是析取范式。

- 定理：任何一个命题公式均存在一个与之等值的主析取范式，而且是唯一的。
- 求主析取范式的方法：
  - 真值表法
  - 等值演算法

求主析取范式方法之一：真值表法

- 一个公式的主析取范式可通过公式的真值表构造
- 例如：
  - 假设某公式真值表如右所示，由三个极小项组成的析取范式:

    $(\sim P \wedge Q \wedge \sim R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

  - 当变项赋值为010，011，111时，主析取式为真，公式为真
  - 当变项为其它五个赋值时，主析取式为假，公式为假
  - 该三个极小项的析取与原公式等值

p	q	r	*formula*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

命题公式的主析取范式是由赋值为真对应的极小项的析取组成的

求主析取范式方法之一：真值表法

- **示例：用真值表法求$\sim(P\wedge Q)$的主析取范式**
- **解：**
  - 列出$\sim(P\wedge Q)$的真值表
  - 找到使公式为**真**的赋值
  - 00对应的极小项是$\sim P\wedge\sim Q$（m_0）
  - 01对应的极小项是$\sim P\wedge Q$ （m_1）
  - 10对应的极小项是$P\wedge\sim Q$ （m_2）
  - 则原公式的**主析取范式**是
  - $\sim(P\wedge Q)$

    $\Leftrightarrow(\sim P\wedge\sim Q)\vee(\sim P\wedge Q)\vee(P\wedge\sim Q)$

    $\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2$

P Q	P∧Q	~（P∧Q）
0 0	0	1
0 1	0	1
1 0	0	1
1 1	1	0

求主析取范式的方法之二：等值演算法

- **方法：等值演算法**
  - 利用命题公式逻辑等值式或命题定理等，用**等值演算**的方法一步步将它等值变换为主析取范式。
- **步骤：**
  - **第一步：**将公式化为析取范式，“消去”含有矛盾式的简单合取式，如（$P\wedge\sim P\wedge Q$）$\vee G\Leftrightarrow G$；消去重复项，如$P\wedge P$用P代替。
  - **第二步：**若析取范式中的简单合取式项不是极小项，即该项中缺命题变项，则添加（$P_i\vee\sim P_i$）再用分配律展开。
    - 例如：公式中含P、Q、R，某简单合取项为$P\wedge\sim R$，缺Q。
    - 则$P\wedge\sim R\Leftrightarrow P\wedge\sim R\wedge$（$Q\vee\sim Q$）$\Leftrightarrow$（$P\wedge Q\wedge\sim R$）$\vee$（$P\wedge\sim Q\wedge\sim R$）
  - **第三步：**用幂等律将重复的极小项删去，即$m_i\vee m_i\Leftrightarrow m_i$然后将各极小项按顺序排列。

求主析取范式的方法之二：等值演算法

- 示例：求$((P \vee Q) \rightarrow R) \rightarrow P$的主析取范式
- 解：原公式
  - $\Leftrightarrow \sim(\sim(P \vee Q) \vee R) \vee P$
  - $\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \sim R) \vee P$
  - $\Leftrightarrow (P \wedge \sim R) \vee (Q \wedge \sim R) \vee P$ （析取范式）
  - $\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge \sim R)$ （析取范式）
  - $\Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee \sim Q) \wedge (R \vee \sim R)) \vee ((P \vee \sim P) \wedge (Q \wedge \sim R))$
  - $\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee \underline{(P \wedge Q \wedge \sim R)} \vee (P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (P \wedge \sim Q \wedge \sim R) \vee \underline{(P \wedge Q \wedge \sim R)} \vee (\sim P \wedge Q \wedge \sim R)$
  - $\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \sim R) \vee (P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (P \wedge \sim Q \wedge \sim R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge \sim R)$
  - $\Leftrightarrow m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$
  - $\Leftrightarrow \Sigma(2,4,5,6,7)$

极大项

- **定义：** 如公式中共有N个命题变项P_1，……，P_n，这N个变项的简单析取式中，每个变项P_i或其否定$\sim P_i$，均出现且两者仅出现一个，并且按命题变项的下标排列（字母按字典序列）这样的**简单析取式**称为**极大项，又称布尔析取**。

- **极大项的特征：**
  - n个变项，每个极大项只有一个赋值使其为假，其余2^n-1个赋值使其为真，因此极大项与公式赋值之间也存在一一对应关系，对其进行编码。
  - 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项**成假赋值**的十进制表示

极大项		
公式	成假赋值	名称
$p \vee q$	0 0	M_0
$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

主合取范式（PRINCIPAL CNF）

- 定义：若干个不同的极大项的合取式，称为主合取范式。
  - principal conjunctive normal form （**Major CNF**）
  - 例：$(P\vee Q\vee \sim R) \wedge (P\vee \sim Q\vee \sim R)$

- 定理：任何一个命题公式均存在一个与之等值的主合取范式，而且是唯一的。
- 求主合取范式的方法
  - 真值表法
  - 等值演算法

命题公式的主合取范式是由赋值为假对应的极大项的合取组成的

求主合取范式方法之一：真值表法

- 示例：求$P \leftrightarrow Q$的主合取范式
- 步骤：
  - 构造$P \leftrightarrow Q$的真值表
  - 找使公式为假的赋值
  - 01对应的极大项是$P \vee \sim Q$（M_1）
  - 10对应的极大项是$\sim P \vee Q$（M_2）
  - 则原公式的主合取范式为

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \vee \sim Q) \wedge (\sim P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow M_1 \wedge M_2$$

P Q	$P \leftrightarrow Q$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

求主合取范式方法之二：等值演算法

- **方法：**
  - 利用命题逻辑等值式、命题定理等，采用**等值演算**的方法一步步将它化为主合取范式。
- **步骤：**
  - **第一步：**将公式化为合取范式，“消去”含有永真式的简单析取式，如$(P\vee\neg P\vee Q)\wedge G\Leftrightarrow G$；使用幂等律消去重复项，如P ∨ P用P代替。
  - **第二步：**若合取范式中的简单析取式项不是极大项，即该项中缺命题变项，则**添加（$P_i\wedge\neg P_i$）**再用分配律展开。

    例如：公式中含P、Q、R，某析取项为$P\vee\neg R$，缺Q。

    则$P\vee\neg R\Leftrightarrow P\vee\neg R\vee(Q\wedge\neg Q)\Leftrightarrow(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)$
  - **第三步：**用幂等律将重复的极大项删去，即$M_i\vee M_i\Leftrightarrow M_i$，然后将各极大项按顺序排列。

求主合取范式方法之二：等值演算法

- 示例：求P∧Q的主合取范式
- 解：

$$P \wedge Q$$

$$\Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \sim Q)) \wedge ((P \wedge \sim P) \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q) \wedge ((P \vee Q) \wedge (\sim P \vee Q))$$

$$\Leftrightarrow \underline{(P \vee Q)} \wedge (P \vee \sim Q) \wedge \underline{(P \vee Q)} \wedge (\sim P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q) \wedge (\sim P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow M_{00} \wedge M_{01} \wedge M_{10}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_2$$

p	Q	P∧Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Excercise

- **Find the Principal Disjunctive Normal Form of $(p \vee q) \rightarrow \sim r$**

- **解:**

原式 $\Leftrightarrow \sim (p \vee q) \vee \sim r$

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee \sim r$

$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \wedge (r \vee \sim r)) \vee ((p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim q) \wedge \sim r)$

$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee \underline{(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)}) \vee ((p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee \underline{(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)})$

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_6$

Excercise

- Find the Principal Conjunctive Normal Form of $(p \vee q) \rightarrow \sim r$

- 解:

原式 $\Leftrightarrow \sim(p \vee q) \vee \sim r$

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee \sim r$

$\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim r)$

$\Leftrightarrow (\sim p \vee (q \wedge \sim q) \vee \sim r) \wedge ((p \wedge \sim p) \vee \sim q \vee \sim r)$

$\Leftrightarrow (\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge \underline{(\sim p \vee \sim q \vee \sim r)} \wedge (p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge \underline{(\sim p \vee \sim q \vee \sim r)}$

$\Leftrightarrow (p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$

$\Leftrightarrow M_3 \wedge M_5 \wedge M_7$

Homework

- § **1.3**
  - 8, 28, 34, 40, 44, 52, 58, 62.
- 求下列公式的析取范式和合取范式
  - $((\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \leftrightarrow C)) \rightarrow B$
- 通过求主合取范式的方法，判断下列一对公式是否等值
  - $\neg A \vee (A \wedge B) \vee C$
  - $(\neg A \vee B) \wedge (B \vee C)$
- 通过求主析取范式，求出所有使下列公式为真的赋值
  - $(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$

Homework

- P，Q，R，S四个字母，从中取两个字母，但要满足下述三个条件，问有几种取法，如何取？
  - 如果取P，则R和S要取一个
  - Q，R不能同时取
  - 取R则不能取S

HOMEWORK（选作）

- 张先生手中有代号为A、B、C、D、E的五种股票，根据当前股市情况及张先生本人的经济需求，需要将若干个股票抛出，但又必须满足如下复杂的要求：
  - 1）若A抛出，则B也抛出；
  - 2）B和C要留一种股票且只能留一种；
  - 3）C和D要么全抛，要么都不抛；
  - 4）D和E两种股票中必然有一种或两种要抛出；
  - 5）若E抛出，则A、B也抛出。
- 若上述五种条件全部满足，问有几种合理的方案供选择？

$$\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D \wedge \neg E$$

$$A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge E$$