

2018-2019 学年第一学期

《高等数学 A》(上) 期末考试试题 (1)

考试注意事项: 学生必须将答题内容写在答题纸上, 写在试题纸上一律无效

一. 填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{3}{x})^x =$ _____.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) =$ _____.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x \cos t^2 dt}{\ln(1+x^5)} =$ _____.

4. 曲线 $xy + e^y + x^2 - e = 0$ 上点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 _____.

5. 曲线 $y = x^2 e^{-x}$ 的上凸区间是 _____.

6. 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq 2 - x$ 所确定的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 _____.

7. $\int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx =$ _____.

8. $\int_0^2 (x+4)\sqrt{2x-x^2} dx =$ _____.

9. $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} =$ _____.

10. $y' = (x+y+1)^2$ 的通解为 _____.

二 (10 分). 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + a \sin x + bx^2}{x^2} = \frac{5}{2}$, 求常数 a 与 b 的值.

三 (10 分). 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \cos t^2, \\ y = t \cos t^2 - \int_1^{t^2} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}} du, \end{cases} (t > 0)$

确定. 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

四 (10 分) 确定常数 A 的取值范围, 使得函数 $f(x) = x^2 + \frac{A}{x^4} \geq 6$ 对任何 $x \neq 0$ 均成立.

五 (10 分). 设常数 $a > 0$, 证明当 $x > 0$ 时, 下面的不等式成立:

$$e^{-x}(x^2 - ax + 1) < 1$$

六 (12 分). (1) 设 $f(x)$ 为非负连续函数, 且满足

$$f(x) \int_0^x f(x-t) dt = \ln(1+x), \text{ 求 } f(x) \text{ 在 } [0, 2] \text{ 上的平均值.}$$

(2) 计算 $\int_0^{n\pi} x |\sin x| dx$, 其中 n 为正整数.

七 (12 分). 求微分方程 $y'' + 8y' + 16y = e^{-4x} + 16x^2 + 8x$ 的通解.

八 (8 分). 设 $0 < x_1 < x_2$, 证明, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$x_1 e^{x_2} - x_2 e^{x_1} = (1 - \xi) e^{\xi} (x_1 - x_2)$$