重积分

二重积分的概念与性质

一、 二重积分的概念

实例 1. 平面薄片的质量

设有一平面薄片占有 xoy 面上的区域 D，它在 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$，这里 $\rho(x,y)\geq 0$，而且 $\rho(x,y)$ 在 D 上连续，现计算该平面薄片的质量 M。

解:(1) 将 D 分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, …, $\Delta\sigma_n$, $M=\sum_{i=1}^{n}\Delta M_i$;

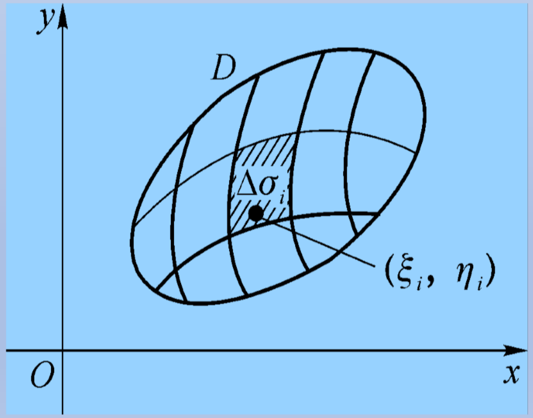
用 λ_i 记 $\Delta\sigma_i$ 的直径， $\Delta\sigma_i$ 既代表第 i 个小区域又代表它的面积。

(2) 当 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\lambda_i\}$ 很小时， 由于 $\rho(x,y)$ 连续， 每小片区域的质量可近似地看作是均匀的， 那么第 i 小块区域的近似质量可取为

$$\Delta M_i \approx \rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,\ \forall(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$$

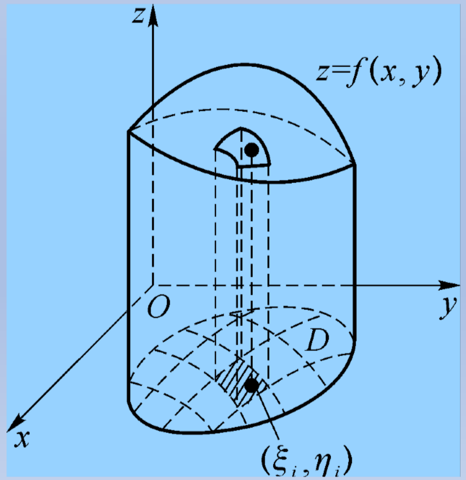
(3) $\boldsymbol{M \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i}$;

(4) $$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



实例 2. 曲顶柱体的体积

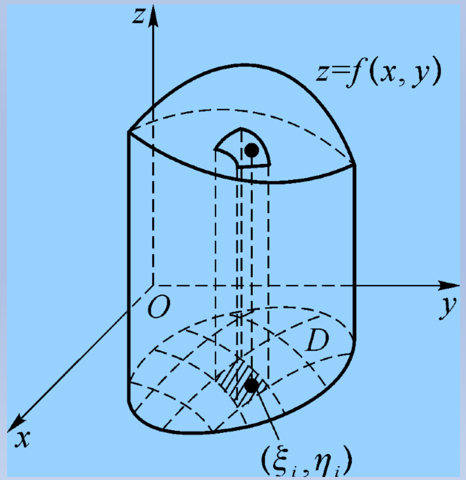
设有一空间立体Ω,它的底是xoy面上的有界区域D,它的侧面是以D的边界曲线为准线,而母线平行于z轴的柱面,它的顶是曲面$z=f(x.y)$（$f(x,y)$在D上连续且$f(x,y)\geq 0$）,称这种立体为曲顶柱体。



解 （1）用任意一组曲线网将区域D分成n个小区域$\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$，以这些小区域的边界曲线为准线，作母线平行于z轴的柱面，这些柱面将原来的曲顶柱体Ω分划成n个小曲顶柱体$\Delta\Omega_1$，$\Delta\Omega_2$，$\cdots$，$\Delta\Omega_n$。

（其中$\Delta\sigma_i$所对应的小曲顶柱体为$\Delta\Omega_i$，这里$\Delta\sigma_i$既代表第i个小区域，又表示它的面积值，$\Delta\Omega_i$既代表第i个小曲顶柱体，ΔV_i代表它的体积值）

从而 $V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i$



(2) 由于 $f(x,y)$ 连续，对于同一个小区域来说，函数值的变化不大。因此，可以将小曲顶柱体近似地看作小平顶柱体，于是

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,\ \forall(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$$

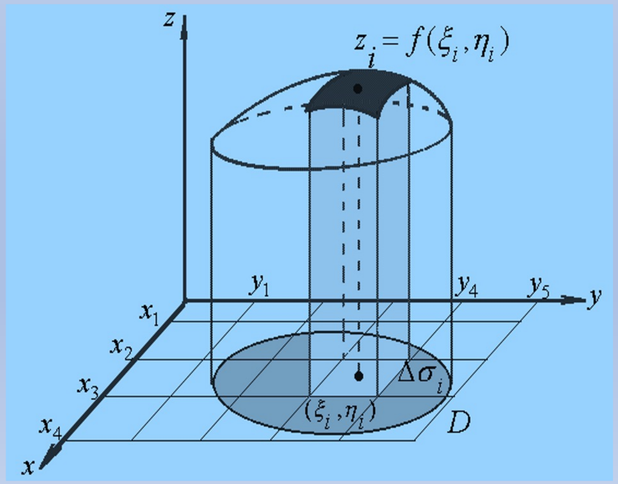
(3) 整个曲顶柱体的体积近似值为

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

(4) 为得到 V 的精确值，只需让这 n 个小区域越来越小，即让每个小区域的直径趋向于零。

设 n 个小区域直径中的最大者为 λ，则

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



两种实际意义完全不同的问题，最终都归结同一形式的极限问题。撇开这类极限问题的实际背景，给出一个更广泛、更抽象的数学概念, 即二重积分。

定义 设$f(x,y)$是有界闭区域D上的有界函数. 将闭区域D任意分成n个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n .$$

其中$\Delta\sigma_i$表示第i个小区域, 也表示它的面积. 在每个$\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i, η_i), 作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

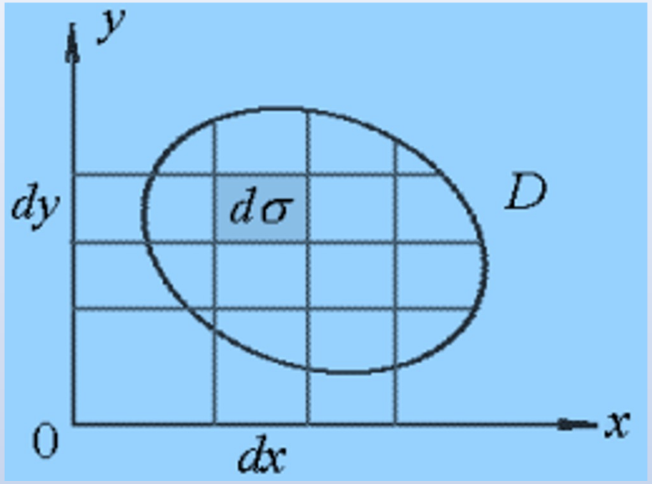
如果当各小闭区域的直径中的最大值λ趋于零时, 这和式的极限总存在, 则称此极限为函数$f(x, y)$在闭区域D上的二重积分, 记作$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$, 即

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

$f(x, y)$被积函数, $f(x, y)d\sigma$被积表达式, $d\sigma$面积元素, x, y 积分变量, D 积分区域, 和式为积分和式.

直角坐标系中的面积元素:

如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网来划分 D, 那么除了包含边界点的一些小闭区域外, 其余的小闭区域都是矩形闭区域. 设矩形闭区域$\Delta\sigma_i$ 的边长为Δx_i 和Δy_i, 则 $\Delta\sigma_i=\Delta x_i\Delta y_i$.



因此,在直角坐标系中，有时也把面积元素 $d\sigma$ 记作 $dxdy$，而把二重积分记作

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

其中 $dxdy$ 叫做直角坐标系中的面积元素.

二重积分的存在性：当$f(x,y)$在有界闭区域D上连续时，积分和的极限是存在的， 也就是说函数$f(x, y)$在D上的二重积分必定存在.

我们总假定函数$f(x, y)$在有界闭区域D上连续，所以$f(x, y)$在D上的二重积分都是存在的.

二重积分的几何意义:

（1） 如果 $f(x,\ y)\geq 0$,二重积分表示以 $f(x,y)$ 为曲顶, 以 D 为底的曲顶柱体的体积;

（2） 如果 $f(x,y)$ 是负的，柱体就在 xOy 面的下方，二重积分的绝对值仍等于柱体的体积，但二重积分的值是负的;

（3） 如果 $f(x,y)$ 变号，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示曲顶柱体的体积的代数和.

例如，若 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1\right\}$，$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{2}{3}\pi$.

二. 二重积分的性质

性质 1 设 c_1、c_2 为常数，则

$$\iint_D [c_1 f(x,y)+c_2 g(x,y)]d\sigma = c_1\iint_D f(x,y)d\sigma + c_2\iint_D g(x,y)d\sigma.$$

性质 2 $\iint_D 1\cdot d\sigma=\iint_D d\sigma=\sigma$ (σ 为 D 的面积).

性质 3(对积分区域的可加性)如果闭区域 D 被有限条曲线分为有限个部分闭区域，则在 D 上的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和. 例如 D 分为两个闭区域 D_1 与 D_2，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

性质 4 如果在 D 上，$f(x, y) \leq g(x, y)$，则有不等式

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leq \iint\limits_D g(x,y)d\sigma .$$

特殊地

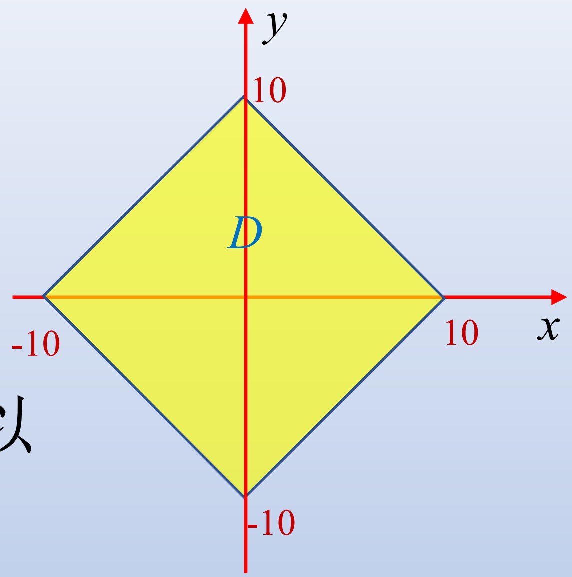
$$\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma .$$

性质 5(估值不等式)设 M、m 分别是 $f(x, y)$在闭区域 D 上的最大值和最小值, σ 为 D 的面积, 则有

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma .$$

例 1 估计下列积分之值

$$I=\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} \qquad D: |x|+|y|\le 10 .$$



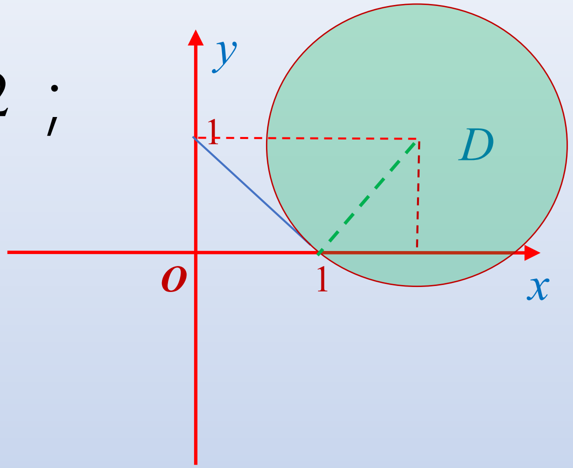
解：如图，$\forall (x,y)\in \mathrm{D}$，$\dfrac{1}{102}\le \dfrac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le \dfrac{1}{100}$，所以

$\dfrac{1}{102}\left(10\sqrt{2}\right)^2\le I\le \dfrac{1}{100}\left(10\sqrt{2}\right)^2$，即 $\dfrac{100}{51}\le I\le 2$.

例 2 比较下列各对二重积分的大小

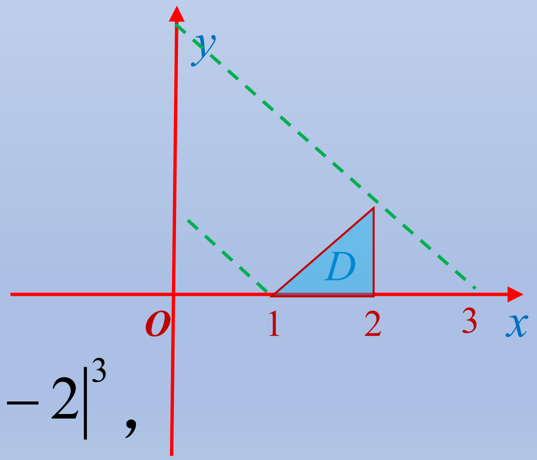
(1) $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$， 其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2 \le 2$ ；

(2) $\iint\limits_D |x+y-2| d\sigma$ 与 $\iint\limits_D |x+y-2|^3 d\sigma$， 其中 D 是三角形区域，三顶点分别为 $(1,0),(1,1),(2,0)$.



解：(1) $\forall\ (x,y)\in D:(x-2)^2+(y-1)^2 \le 2$ （如图），

有 $x+y\ge 1$， $(x+y)^2 \le (x+y)^3$，从而 $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma \le \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$.



(2) $\forall\ (x,y)\in D$（如图）， $1\le x+y\le 3, |x+y-2|\le 1$，故 $|x+y-2| \ge |x+y-2|^3$，

从而 $\iint\limits_D |x+y-2| d\sigma \ge \iint\limits_D |x+y-2|^3 d\sigma$.

例 3 判断积分 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的正负号.

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$<\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{2\le x^2+y^2\le 4}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$<\pi-\pi[2^2-(\sqrt{2})^2]<0.$$