第六节：独立增量过程

主要内容：

- 独立增量过程；
- 泊松过程；
- 维纳过程

本节约定 $T = [0, +\infty)$

主要内容：

- 独立增量过程；
- 泊松过程；
- 维纳过程

本节约定 $T = [0, +\infty)$

定义 (10.6.1)

如果对于任意的$0 \le s_1 < t_1 \le s_2 < t_2 \le \cdots \le s_n < t_n < \infty$，

$$X(t_1) - X(s_1), X(t_2) - X(s_2), \cdots, X(t_n) - X(s_n)$$

相互独立，则称随机过程$\{X(t); t \ge 0\}$ 是独立增量过程，进一步，如果$X(t+s) - X(s)$的分布独立于s，随机过程$\{X(t); t \ge 0\}$具有平稳增量，则称随机过程$\{X(t); t \ge 0\}$为平稳增量过程或齐次独立增量过程。

一般约定：$X(0) = 0$。

定义 (10.6.1)

如果对于任意的$0 \le s_1 < t_1 \le s_2 < t_2 \le \cdots \le s_n < t_n < \infty$，

$$X(t_1) - X(s_1), X(t_2) - X(s_2), \cdots, X(t_n) - X(s_n)$$

相互独立，则称随机过程$\{X(t); t \ge 0\}$ 是独立增量过程，进一步，如果$X(t+s) - X(s)$的分布独立于s，随机过程$\{X(t); t \ge 0\}$具有平稳增量，则称随机过程$\{X(t); t \ge 0\}$为平稳增量过程或齐次独立增量过程。

一般约定：$X(0) = 0$。

独立平稳增量的意义：

在概率意义下，过程在任何时刻都重新开始，即从任何时刻起过程独立于先前已发生的一切（由独立增量），且有与原过程一样的分布（由平稳增量）。换言之，过程具有无记忆性。

独立增量过程$\{X(t); t \geq 0\}$在$X(0)=0$的条件下,其有限维分布函数可以由增量$X(t)-X(s)$,
$0 \leq s < t$的分布确定.

事实上，令$Y_k = X(t_k) - X(t_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$.
$t_0 = 0$. 由于

$$\begin{aligned} X(t_1) &= Y_1, \\ X(t_2) &= Y_1 + Y_2, \\ &\vdots \\ X(t_n) &= Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \end{aligned}$$

即$X(t_k)$ 是$Y_1, \ldots, Y_n$的线性函数, 所以$Y_1, \ldots, Y_n$的联合分布确定了$\{X(t); t \geq 0\}$的有限维分布函数。

独立增量过程$\{X(t); t \geq 0\}$在$X(0) = 0$的条件下,其有限维分布函数可以由增量$X(t) - X(s)$, $0 \leq s < t$的分布确定.

事实上，令$Y_k = X(t_k) - X(t_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$. $t_0 = 0$. 由于

$$\begin{aligned} X(t_1) &= Y_1, \\ X(t_2) &= Y_1 + Y_2, \\ &\vdots \\ X(t_n) &= Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \end{aligned}$$

即$X(t_k)$ 是$Y_1, \ldots, Y_n$的线性函数, 所以$Y_1, \ldots, Y_n$的联合分布确定了$\{X(t); t \geq 0\}$的有限维分布函数。

独立增量过程

定理 (10.6.1)

设$\{X(t)\}$为独立增量过程：$X(0)=0$，则

$$C_X(s,t)=D_X[\min(s,t)].$$

证明. 令$Y(t)=X(t)-\mu_X(t)$, 则$Y(t)$具有独立增量，且$Y(0)=0, \mathrm{E}[Y(t)]=0, D_X(t)=\mathrm{E}[Y^2(t)]$.
设$0\le s<t$，则

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= \mathrm{E}[Y(s)Y(t)] \\ &= \mathrm{E}\{[Y(s)-Y(0)][Y(t)-Y(s)]\}+\mathrm{E}[Y^2(s) \\ &= \mathrm{E}[Y(s)-Y(0)]\mathrm{E}[Y(t)-Y(s)]+D_X(s) \\ &= D_X(s) \end{aligned}$$

独立增量过程

定理 (10.6.1)

设$\{X(t)\}$为独立增量过程：$X(0)=0$，则

$$C_X(s,t)=D_X[\min(s,t)].$$

证明．令$Y(t)=X(t)-\mu_X(t)$，则$Y(t)$具有独立增量，且$Y(0)=0, \mathrm{E}[Y(t)]=0, D_X(t)=\mathrm{E}[Y^2(t)]$.
设$0\le s<t$，则

$$\begin{aligned}
C_X(s,t) &= \mathrm{E}[Y(s)Y(t)] \\
&= \mathrm{E}\{[Y(s)-Y(0)][Y(t)-Y(s)]\}+\mathrm{E}[Y^2(s)] \\
&= \mathrm{E}[Y(s)-Y(0)]\mathrm{E}[Y(t)-Y(s)]+D_X(s) \\
&= D_X(s)
\end{aligned}$$

定理 (10.6.1)

设$\{X(t)\}$为独立增量过程：$X(0)=0$，则

$$C_X(s,t)=D_X[\min(s,t)].$$

证明. 令$Y(t)=X(t)-\mu_X(t)$，则$Y(t)$具有独立增量，且$Y(0)=0, \mathrm{E}[Y(t)]=0, D_X(t)=\mathrm{E}[Y^2(t)]$.

设$0\le s<t$，则

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= \mathrm{E}[Y(s)Y(t)] \\ &= \mathrm{E}\{[Y(s)-Y(0)][Y(t)-Y(s)]\}+\mathrm{E}[Y^2(s)] \\ &= \mathrm{E}[Y(s)-Y(0)]\mathrm{E}[Y(t)-Y(s)]+D_X(s) \\ &= D_X(s) \end{aligned}$$

独立增量过程

定理 (10.6.1)

设$\{X(t)\}$为独立增量过程：$X(0)=0$，则

$$C_X(s,t)=D_X[\min(s,t)].$$

证明. 令$Y(t)=X(t)-\mu_X(t)$，则$Y(t)$具有独立增量，且$Y(0)=0, \mathrm{E}[Y(t)]=0, D_X(t)=\mathrm{E}[Y^2(t)]$.
设$0\le s<t$，则

$$\begin{aligned}
C_X(s,t) &= \mathrm{E}[Y(s)Y(t)] \\
&= \mathrm{E}\{[Y(s)-Y(0)][Y(t)-Y(s)]\}+\mathrm{E}[Y^2(s)] \\
&= \mathrm{E}[Y(s)-Y(0)]\mathrm{E}[Y(t)-Y(s)]+D_X(s) \\
&= D_X(s)
\end{aligned}$$

同理当$0 \le s < t$时，

$$C_X(s,t) = D_X(s).$$

即当$s, t \ge 0$时，有

$$C_X(s,t) = D_X[\min(s,t)].$$

同理当$0 \le s < t$时，

$$C_X(s,t) = D_X(s).$$

即当$s, t \ge 0$时，有

$$C_X(s,t) = D_X[\min(s,t)].$$

如果$N(t); t \geq 0$表示到时刻t为止已发生的“事件”的总数，称随机过程$N(t); t \geq 0$是一计数过程。所以计数过程$N(t)$满足：

- $N(t) \geq 0$;
- $N(t)$是整数值；
- $N(s) \leq N(t), \forall s < t$;
- 若$s < t$，$N(t) - N(s)$等于区间$(s, t]$内发生的事件次数。

身边的计数过程

- $[0, t]$内到达某商场的顾客数；
- $[0, t]$内某十字路口经过的电车数；
- $[0, t]$内某电话总机的呼叫次数。

泊松过程是最重要的计数过程之一。

定义 (10.6.2)

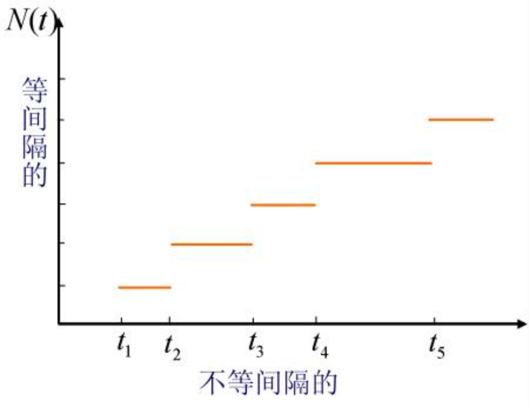
称计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$为具有参数λ的泊松过程，$\lambda > 0$，若

- $N(0) = 0$;
- 过程具有独立增量;
- $\forall s, t, 0 \leq s < t, X(t) - X(s) \sim Poisson(\lambda)$，即

$$\mathrm{P}\{N(t) - N(s) = k\} = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}, k = 0, 1, .$$

称$\{N(t), t \geq 0\}$为强度为λ的泊松过程。

泊松过程



泊松过程的一条样本轨道

由泊松过程的定义及泊松分布的数学期望与方差都是λ，得

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= \lambda t \\ C_X(s,t) &= D_X[\min(s,t)] = \lambda \min(s,t) \\ R_X(s,t) &= \lambda \min(s,t) + \lambda^2 st \end{aligned}$$

常用公式

$$\min(s,t) = \frac{s+t-|s-t|}{2}$$

下面给出**Poisson**过程的另外一个等价定义。

定义 (10.6.3(省略))

称计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$为具有参数λ的泊松过程，$\lambda > 0$，若

(1) $N(0) = 0$，

(2) $\{N(t) : t \geq 0\}$有独立平稳增量，

(3) $\mathrm{P}(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$，

(4) $\mathrm{P}(N(h) \geq 2) = o(h)$。

泊松过程

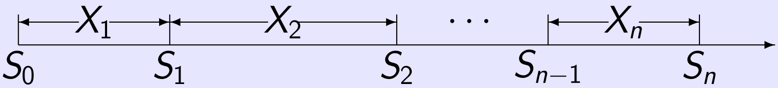


图10.1: 泊松过程$N(t)$

考虑以泊松过程,

- X_1 表示第一个事件的来到时刻,
- $X_n, n > 1$ 表示第$n-1$个事件到第n个事件之间的时间,服从依λ为参数的指数分布,
- $S_n, n \geq 1$表示第n个事件的发生时刻。

命题 (省略)

$X_n, n = 1, 2, \ldots$ 为独立同分布的均值为$\frac{1}{\lambda}$的负指数随机变量。

证明. (1)

$$\mathbf{P}\{X_1 > t\} = \mathbf{P}\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t};$$

(2)

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{X_2 > t | X_1 = s\} \\ &= \mathbf{P}\{\text{在}(s, t]\text{内没有发生事件} | X_1 = s\} \\ &= \mathbf{P}\{\text{在}(s, t]\text{内没有发生事件}\} \quad \text{(由独立增量)} \\ &= e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

$\cdots$

命题 (省略)

$X_n, n = 1, 2, \ldots$ 为独立同分布的均值为$\frac{1}{\lambda}$的负指数随机变量。

证明. **(1)**

$$\mathbf{P}\{X_1 > t\} = \mathbf{P}\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t};$$

(2)

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{X_2 > t | X_1 = s\} \\ = & \mathbf{P}\{\text{在}(s, t]\text{内没有发生事件} | X_1 = s\} \\ = & \mathbf{P}\{\text{在}(s, t]\text{内没有发生事件}\} \quad \textbf{(由独立增量)} \\ = & e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

$\ldots$

命题 (省略)

$X_n, n = 1, 2, \ldots$ 为独立同分布的均值为$\frac{1}{\lambda}$的负指数随机变量。

证明. **(1)**

$$\mathbf{P}\{X_1 > t\} = \mathbf{P}\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t};$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{X_2 > t | X_1 = s\} \\
&= \mathbf{P}\{\text{在}(s, t]\text{内没有发生事件} | X_1 = s\} \\
&= \mathbf{P}\{\text{在}(s, t]\text{内没有发生事件}\} \quad \textbf{(由独立增量)} \\
&= e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

...

命题 (省略)

$X_n, n = 1, 2, \ldots$ 为独立同分布的均值为$\frac{1}{\lambda}$的负指数随机变量。

证明. **(1)**

$$\mathbf{P}\{X_1 > t\} = \mathbf{P}\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t};$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{X_2 > t | X_1 = s\} \\
&= \mathbf{P}\{\text{在}(s, t]\text{内没有发生事件} | X_1 = s\} \\
&= \mathbf{P}\{\text{在}(s, t]\text{内没有发生事件}\} \quad \textbf{(由独立增量)} \\
&= e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

$\ldots$

"布朗运动的数学模型"

定义 (10.6.4)

设随机过程$\{W(t), t \geq 0\}$是取实数值的独立增量过程，且对任意的$s, t, 0 \leq s < t$，$W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s))$，$W(0) = 0$，则称$\{W(t), t \geq 0\}$为参数为$\sigma^2$的维纳过程，其中$\sigma^2$为常数。

由定义，维纳过程的均值函数与自相关函数为

$$\begin{aligned} \mu_W(t) &= 0 \\ C_W(s,t) &= R_W(s,t) = \sigma^2 \min(s,t), \quad s, t \geq 0. \end{aligned}$$

"布朗运动的数学模型"

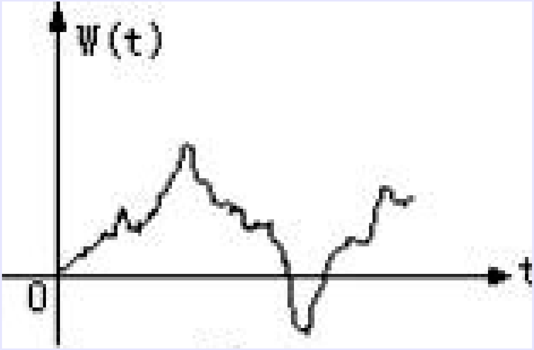
定义 (10.6.4)

设随机过程$\{W(t), t \geq 0\}$是取实数值的独立增量过程，且对任意的$s, t, 0 \leq s < t$，$W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s))$，$W(0) = 0$，则称$\{W(t), t \geq 0\}$为参数为$\sigma^2$的维纳过程，其中$\sigma^2$为常数。

由定义，维纳过程的均值函数与自相关函数为

$$\begin{aligned} \mu_W(t) &= 0 \\ C_W(s,t) &= R_W(s,t) = \sigma^2 \min(s,t), \quad s,t \geq 0. \end{aligned}$$

维纳过程



布朗运动

例

设$\{W(t), t \geq 0\}$为维纳过程，且下列随机过程的自相关函数：

(1) $Y(t) = W(t+l) - W(t), t \geq 0, l > 0$ (l为常数)，

(2) $Z(t) = e^{-\beta t} W(e^{2\beta t}), -\infty < t < +\infty$，($\beta > 0$为常数).

解. (1)

$$
\begin{aligned}
& R_Y(s,t) \\
= \ & \mathrm{E}[Y(s)Y(t)] \\
= \ & \mathrm{E}\{[W(s+l)-W(s)][W(t+l)-W(t)]\} \\
= \ & R_W(s+l,t+l)-R_W(s,t+l)-R_W(s+l,t) \\
& +R_W(s,t) \\
= \ & \sigma^2[\min(s+l,t+l)-\min(s,t+l)-\min(s+l,t) \\
& +\min(s,t)] \\
= \ & \cdots \quad (\text{利用公式}\min(s,t)=\tfrac{s+t-|s-t|}{2}) \\
= \ & \begin{cases} \sigma^2(l-|s-t|), & |s-t|\le l \\ 0, & |s-t|\ge l. \end{cases}
\end{aligned}
$$

解. (1)

$$
\begin{aligned}
& R_Y(s,t) \\
= \ & \mathrm{E}[Y(s)Y(t)] \\
= \ & \mathrm{E}\{[W(s+l)-W(s)][W(t+l)-W(t)]\} \\
= \ & R_W(s+l,t+l)-R_W(s,t+l)-R_W(s+l,t) \\
& +R_W(s,t) \\
= \ & \sigma^2[\min(s+l,t+l)-\min(s,t+l)-\min(s+l,t) \\
& +\min(s,t)] \\
= \ & \cdots \quad (\text{利用公式}\min(s,t)=\tfrac{s+t-|s-t|}{2}) \\
= \ & \begin{cases} \sigma^2(l-|s-t|), & |s-t|\le l \\ 0, & |s-t|\ge l. \end{cases}
\end{aligned}
$$

解. (1)

$$
\begin{aligned}
& R_Y(s,t) \\
= \ & \mathrm{E}[Y(s)Y(t)] \\
= \ & \mathrm{E}\{[W(s+l)-W(s)][W(t+l)-W(t)]\} \\
= \ & R_W(s+l,t+l)-R_W(s,t+l)-R_W(s+l,t) \\
& +R_W(s,t) \\
= \ & \sigma^2[\min(s+l,t+l)-\min(s,t+l)-\min(s+l,t) \\
& +\min(s,t)] \\
= \ & \cdots \quad (\text{利用公式}\min(s,t)=\tfrac{s+t-|s-t|}{2}) \\
= \ & \begin{cases} \sigma^2(l-|s-t|), & |s-t|\le l \\ 0, & |s-t|\ge l. \end{cases}
\end{aligned}
$$

上式中第四个等号来自于下面，当$s < t$时，

$$
\begin{aligned}
& R_W(s,t) \\
= \; & \mathrm{E}[W(s)W(t)] \\
= \; & \mathrm{E}\{[W(s)-W(0)][W(t)-W(s)]\} + \mathrm{E}[W^2(s)] \\
= \; & \mathrm{E}[W(s)-W(0)]\mathrm{E}[W(t)-W(s)] + \mathrm{E}[W^2(s)] \\
= \; & \mathrm{E}[W^2(s)] \\
= \; & \sigma^2 s
\end{aligned}
$$

同理当$s > t$时，

$$R_W(s,t) = \sigma^2 t.$$

上式中第四个等号来自于下面，当$s < t$时，

$$
\begin{aligned}
& R_W(s,t) \\
= \ & \mathrm{E}[W(s)W(t)] \\
= \ & \mathrm{E}\{[W(s) - W(0)][W(t) - W(s)]\} + \mathrm{E}[W^2(s)] \\
= \ & \mathrm{E}[W(s) - W(0)]\mathrm{E}[W(t) - W(s)] + \mathrm{E}[W^2(s)] \\
= \ & \mathrm{E}[W^2(s)] \\
= \ & \sigma^2 s
\end{aligned}
$$

同理当$s > t$时，

$$R_W(s,t) = \sigma^2 t.$$

(2) 当$s < t$时，

$$
\begin{aligned}
& R_Z(s,t) \\
= \; & e^{-\beta(s+t)}\mathrm{E}[W(e^{2\beta s})W(e^{2\beta t})] \\
= \; & e^{-\beta(s+t)}\mathrm{E}\left\{[W(e^{2\beta s}) - W(0)][W(e^{2\beta t}) - W(e^{2\beta s})]\right. \\
& \left. +\mathrm{E}[W^2(e^{2\beta s})]\right\} \\
= \; & e^{-\beta(s+t)}\mathrm{E}[W^2(e^{2\beta s})] \\
= \; & e^{-\beta(s+t)}\mathrm{E}\{[W(e^{2\beta s}) - W(0)]^2\} \\
= \; & e^{-\beta(s+t)}\sigma^2 e^{2\beta s}
\end{aligned}
$$

同理当$s > t$时，$R_Z(s,t) = e^{-\beta(s+t)}\sigma^2 e^{2\beta t}$.

(2) 当$s<t$时，

$$
\begin{aligned}
& R_Z(s,t) \\
= \ & e^{-\beta(s+t)} \mathrm{E}[W(e^{2\beta s})W(e^{2\beta t})] \\
= \ & e^{-\beta(s+t)} \mathrm{E}\left\{[W(e^{2\beta s}) - W(0)][W(e^{2\beta t}) - W(e^{2\beta s})]\right. \\
& \left. + \mathrm{E}[W^2(e^{2\beta s})]\right\} \\
= \ & e^{-\beta(s+t)} \mathrm{E}[W^2(e^{2\beta s})] \\
= \ & e^{-\beta(s+t)} \mathrm{E}\{[W(e^{2\beta s}) - W(0)]^2\} \\
= \ & e^{-\beta(s+t)} \sigma^2 e^{2\beta s}
\end{aligned}
$$

同理当$s>t$时，$R_Z(s,t)=e^{-\beta(s+t)}\sigma^2 e^{2\beta t}$.

维纳过程

所以，

$$\begin{aligned} R_Z(s,t) &= e^{-\beta(s+t)}\sigma^2 e^{2\beta\min(s,t)} \\ &= \sigma^2 e^{-\beta(s+t)-2\min(s,t)} \\ &= \sigma^2 e^{-\beta|s-t|} \end{aligned}$$