______________ **2018-2019 学年第二学期**

《高等数学（下）》期末考试试题（A1）

考试注意事项：学生必须将答题内容做在答题纸上，做在试题纸上均无效

一．填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1/n)^n}$ 是__________，(填收敛或发散).

2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n\cdot 4^n}$ 的收敛域为 __________.

3. 已知 $f(x)=x^2+x, x\in[0,1]$，$S(x)$ 是 $f(x)$ 的周期为 1 的三角级数的和函数，则 $S(0), S\left(1/2\right)$ 分别是______，______.

4. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+2y^2)\sin\frac{1}{xy}=$__________.

5. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}\right)=0$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$___.

6. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为__________.

7. 曲线 $x=\frac{t^3}{3}, y=\frac{t^2}{2}, z=2t$ 上 $t=1$ 对应点处的切线方程为________.

8. 设 $f(r)$ 可微，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathbf{grad}f(r)=$__________.

9. 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx=$__________.

10. 设 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的周长为 a，则 $\oint_C(3x^2+4y^2+y)ds=$______.

二（8 分）. 已知 $z=f(u,v),u=x+y,v=xy$，且 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

三（10 分）. 在椭球面 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ 的第一卦限部分上求一点，使椭球面在该点处的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和最小，并求出最小值.

四（12 分）求幂级数的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的收敛区域及和函数，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{2^1}+\dfrac{2^2}{2^2}+\dfrac{3^2}{2^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{2^n}\right)$ 的值.

五(10 分). 设 Ω 由 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2},0\le x\le y\le\sqrt{3}x$ 所确定. $f(x,y,z)$ 为连续函数. $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz$.

(1) 分别把上述三重积分 I 表示成柱面坐标和球面坐标下的累次积分;

(2) 设 $f(x,y,z)=z^3$，求出 I 的值.

六(10 分). 设 $P(x,y)=\dfrac{axy^2}{(x^2+y^2)^2},Q(x,y)=-\dfrac{4x^{\lambda}y}{(x^2+y^2)^2}$.

(1) 求常数 a,λ 的值，使 $\int_C Pdx+Qdy$ 在 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>1\}$ 内与路径无关; (2) 求 $Pdx+Qdy$ 在 D 中的原函数.

七(10分). 求球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 被平面 $z=\dfrac{1}{2}$ 与 $z=1$ 所夹部分 Σ 的面积.

八(10 分). 设积分曲面是 $\Sigma: z=4-x^2-y^2$ 位于 xoy 平面上方部分的上侧，求曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2yz^2dydz-xy^2z^2dzdx+x(1+xyz)dxdy$.