第二节：平稳随机过程及其相关函数

主要内容：

- 平稳过程的概念；
- 相关函数；
- 复平稳过程；
- 循环平稳过程.

提纲

1. 平稳过程的概念
   - 严平稳随机过程
   - 宽平稳随机过程
2. 相关函数
3. 复平稳过程
4. 循环平稳过程

严平稳随机过程

定义

设$\{X(t), t \in T\}$是随机过程,如果对于任意的常数h和任意正整数n, 及任意的n维随机向量$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$和$(X(t_1 + h), X(t_2 + h), \ldots, X(t_n + h))$具有相同的分布,则称随机过程$\{X(t), t \in T\}$ 具有平稳性,并同时称此过程为严平稳过程。

参数集**T**一般为

$$(-\infty, +\infty), [0, +\infty) \text{ 或 } \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}, \{0, 1, 2, \ldots\}$$

当定义在离散参数集上时,也称过程为严平稳随机序列或严平稳时间序列。

例

设$\{X_n, n \geq 0\}$是独立同分布的随机变量序列,且$X_n \sim U(0,1), n = 1, 2, \ldots,$ 讨论$\{X_n, n \geq 0\}$是否为严平稳时间序列? 并求$E(X_n)$与$E(X_n X_m), n, m = 0, 1, 2, \ldots$.

解. 设X_n的分布函数为$F(x)$, 则对任意的正整数k, h及任意的$0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, 由于$(X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots, X_{n_k})$与$(X_{n_1+h}, X_{n_2+h}, \ldots, X_{n_k+h})$ 的联合分布为

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} F(x_k),$$

故$\{X_n, n \geq 0\}$是严平稳时间序列。

例

设$\{X_n, n \geq 0\}$是独立同分布的随机变量序列,且$X_n \sim U(0,1), n = 1, 2, \ldots,$ 讨论$\{X_n, n \geq 0\}$是否为严平稳时间序列? 并求E(X_n)与E$(X_nX_m), n, m = 0, 1, 2, \ldots$.

解. 设X_n的分布函数为$F(x)$, 则对任意的正整数k, h及任意的$0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, 由于$(X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots, X_{n_k})$与$(X_{n_1+h}, X_{n_2+h}, \ldots, X_{n_k+h})$ 的联合分布为

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} F(x_k),$$

故$\{X_n, n \geq 0\}$是严平稳时间序列。

$$E(X_n) = \frac{1}{2};$$

$m = n$时，

$$E(X_n X_m) = E(X_n^2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4},$$

$m \neq n$时，

$$E(X_n X_m) = E(X_n)E(X_m) = \frac{1}{4}.$$

定理

如果$\{X(t), t \in T\}$是严平稳过程，且对任意的$t \in T$，$\mathrm{E}[X^2(t)] < +\infty$，则有

(1) $\mathrm{E}[X(t)] =$常数，$\forall t \in T$；

(2) $\mathrm{E}[X(s)X(t)]$只依赖于$t-s$，而与$s, t \in T$的具体取值无关。

证. (1) 由Cauchy-Schwarze不等式，

$$(\mathrm{E}[X(t)])^2 \le \mathrm{E}[X^2(t)] < +\infty,$$

所以$\mathrm{E}[X(t)]$存在。

在严平稳过程的定义中，令$h = -t$，由定义知$X(t)$与$X(t+h) = X(0)$同分布，所以$\mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[X(0)]$为常数。

定理

如果$\{X(t), t \in T\}$是严平稳过程，且对任意的$t \in T$，$\mathrm{E}[X^2(t)] < +\infty$, 则有

(1) $\mathrm{E}[X(t)] =$常数，$\forall t \in T$;

(2) $\mathrm{E}[X(s)X(t)]$只依赖于$t-s$,而与$s, t \in T$的具体取值无关。

证. **(1)** 由**Cauchy-Schwarze**不等式,

$$(\mathrm{E}[X(t)])^2 \leq \mathrm{E}[X^2(t)] < +\infty,$$

所以$\mathrm{E}[X(t)]$存在。
在严平稳过程的定义中，令$h = -t$,由定义知$X(t)$与$X(t+h) = X(0)$同分布，所以$\mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[X(0)]$为常数。

(2) 由Cauchy-Schwarze不等式,

$$(\mathrm{E}[X(s)X(t)])^2 \leq \mathrm{E}[X^2(s)]\mathrm{E}[X^2(t)] < +\infty,$$

所以$\mathrm{E}[X(s)X(t)]$存在。
在严平稳过程的定义中，令$h = -s$, 由定义,
$(X(s), X(t))$与$(X(s+h), X(t+h)) =$
$(X(0), X(t-s))$ 同分布，即
有$\mathrm{E}[X(s)X(t)] = \mathrm{E}[X(0)X(t-s)]$,
即$R_X(t, t+\tau) = \mathrm{E}[X(0)X(\tau)] = R_X(\tau)$ 所
以，$R_X(s,t)$只依赖于$t-s$,而与$s, t \in T$的具体取
值无关。

进而，

$$\begin{aligned} C_X(t, t+\tau) &= C_X(\tau) \\ &= \mathrm{E}[X(t)-\mu_X][X(t+\tau)-\mu_X] \\ &= R_X(\tau)-\mu_X^2 \end{aligned}$$

只与τ 有关；

$$\sigma_X^2(t) = C_X(0) = R_X(0) - \mu_X^2$$

为常数. $\square$

在严平稳的定义中，要用到任意个随机变量的联合分布，给讨论带来很大的麻烦。由于随机变量的一二阶矩反映出了过程的许多特性，退而求其次，人们常去研究过程的二阶矩。

提纲

定义

设$\{X(t), t \in T\}$ 是二阶矩过程,如果

(1) $\mathrm{E}[X(t)] = \mu_X$常数，$\forall t \in T$；

(2) 对任意的$t, t+\tau \in T, \mathrm{E}[X(t)X(t+\tau)]$ 只依赖于τ，记作$R_X(\tau)$。

则称$\{X(t), t \in T\}$为宽平稳过程,简称为平稳过程。称μ_X为其均值，$R_X(\tau)$ 是自相关函数。

定义 (续)

特别地，当T为离散参数集时，若随机序列$\{X_n\}$满足$\mathrm{E}(X_n^2) < +\infty$，以及

(1) $\mathrm{E}[X_n] =$常数，$\forall n \in T$；

(2) 对任意的$m, n \in T$, $R_X(m) = \mathrm{E}[X_n X_{m+n}]$ 只依赖于m。

称$\{X_n\}$为宽平稳随机序列或宽平稳时间序列。

严平稳过程和宽平稳过程的关系

(1) 严平稳过程不一定是宽平稳过程，因为严平稳的过程的二阶矩不一定存在，即不一定是二阶矩过程,但当严平稳过程是二阶矩过程时,则它一定是宽平稳过程。

(2) 宽平稳过程不一定是严平稳过程,但对于正态过程,两者是等价的只依赖于m。

命题

$\{X(t)\}$为正态过程，则$\{X(t)\}$是严平稳过程当且仅当$\{X(t)\}$是宽平稳过程。

证明. $\Rightarrow$ 因高斯过程是二阶矩过程，由严平稳过程性质，显然成立。

$\Leftarrow$ 由已知：$\mu_X(t)=\mu_X$，$R_X(t,t+\tau)$只与τ有关。
由严平稳过程定义，对任意的正整数n及任意$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$，$t_1+h,t_2+h,\ldots,t_n+h\in T$，
只要证$(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n))$
和$(X(t_1+h),X(t_2+h),\ldots,X(t_n+h))$ 同分布。

而正态过程的分布由μ_X及$C_X(s,t)$决定，其中μ_X为常数。因为

$$R_X(t_1,t_2)=R_X(t_1+h,t_2+h),$$

所以

$$\begin{aligned}
& C_X(t_1+h,t_2+h) \\
= \;& R_X(t_1+h,t_2+h)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \\
= \;& R_X(t_1,t_2)-\mu_X^2 \\
= \;& C_X(t_1,t_2).
\end{aligned}$$

所以，结论成立。 $\square$

例 (10.10)

设$\{X_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是互不相关的时间序列，且$\mathrm{E}[Xn] = 0, \mathrm{E}(Xn) = \sigma^2 > 0$，则$\{X_n\}$为平稳时间序列。

解. 因为$\mathrm{E}[Xn] = 0$，

$$\mathrm{E}(X_m X_n) = \begin{cases} \sigma^2, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

则$\{X_n\}$为平稳时间序列。 $\square$

例 (10.11)

设$S(t)$是一周期为T的确值函数，,$\Theta \sim U(0, T)$。称$X(t) = S(t + \Theta)$ 为随机相位周期信号，讨论其平稳性。

解. 由题意，Θ的概率密度为

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 < \theta < T, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X(t)] &= \frac{1}{T}\int_0^T S(t+\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} S(\phi)\mathrm{d}\phi = \frac{1}{T}\int_0^T S(\phi)\mathrm{d}\phi \\ &= \text{常数} \end{aligned}$$

自相位函数

$$\begin{aligned} R_X(t,t+\tau) &= \mathrm{E}[S(t+\Theta)S(t+\tau+\Theta)] \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T S(t+\theta)S(t+\tau+\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} S(\phi)S(\tau+\phi)\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

同样利用$S(\phi)S(\tau+\phi)$ 的周期性（关于ϕ），所以

$$R_X(t,t+\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T S(\phi)S(\tau+\phi)\mathrm{d}\phi := R_X(\tau)$$

只与τ有关，所以随机相位周期信号过程是平稳的。

问题：怎么由这个例题来看随机相位正弦波过程的平稳性？

$$X(t) = acos(\omega t + \Theta), \ \ t \in (-\infty, +\infty)$$

其中a, ω是常数，Θ是在$(0, 2\pi)$上的均匀分布的随机变量

例 (10.12(省略))

考虑随机电报信号,信号$X(t)$由只取I 或$-I$的电流给出，满足

$$\mathrm{P}\{X(t)=I\}=\mathrm{P}\{X(t)=-I\}=\frac{1}{2}.$$

而正负号在区间$(t,t+l)$内变化的次数$N(t,t+l)$是随机的，且假设$N(t,t+l)$服从泊松分布，亦即事件

$$A_k:=\{N(t,t+l)=k\}$$

的概率

$$\mathrm{P}(A_k)=\frac{(\lambda l)^k}{k!}e^{-\lambda l},\quad k=0,1,\ldots.$$

其中$\lambda>0$是单位时间内变号次数的数学期望，试讨论$X(t)$的平稳性.

解.

(1) E[X(t)]=0

(2) 现在来计算$E[X(t)X(t+\tau)]$. 先设$\tau>0$. 如果电流在$(t,t+\tau)$内变号偶数次,则$X(t)$和$X(t+\tau)$必同号且乘积为I^2, 因为

$$P\{X(t)X(t+\tau)=I^2\}=P(A_0)+P(A_2)+P(A_4)+\dots$$

如果电流在$(t,t+\tau)$内变号奇数次,则$X(t)$和$X(t+\tau)$必异号且乘积为I^2, 因为事件

$$P\{X(t)X(t+\tau)=-I^2\}=P(A_1)+P(A_3)+P(A_5)+\dots$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X(t)X(t+\tau)] &= I^2\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}(A_{2k}) - I^2\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}(A_{2k+1}) \\
&= I^2 e^{-\lambda\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda\tau)^k}{k!} \\
&= I^2 e^{-2\lambda\tau}
\end{aligned}
$$

注意到上述结果只与τ有关，故$\tau < 0$时，
令$t' = t + \tau$，则有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X(t)X(t+\tau)] &= \mathrm{E}[X(t')X(t'-\tau)] \\
&= \mathrm{E}[X(t')X(t'+|\tau|)] \\
&= I^2 e^{-2\lambda|\tau|}
\end{aligned}
$$

当$\tau = 0$时，

$$E[X(t)X(t+\tau)] = E[X(t)^2)] = I^2,$$

故

$$R_X(t, t+\tau) = I^2 e^{-2\lambda|\tau|}$$

只与τ有关，故随机电报信号是平稳的。 ∎

提纲

logo

自相关函数的性质

1 $R_X(0) \geq 0$;
证:

$$R_X(0) = \mathrm{E}[X^2(t)] \geq 0$$

2 $R_X(\tau)$为偶函数，即$R_X(-\tau) = R_X(\tau)$

证:

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \mathrm{E}[X(t)X(t+\tau)] \\ &= \mathrm{E}[X(t+\tau)X(t+\tau-\tau)] \\ &= R_X(-\tau) \end{aligned}$$

3 $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$

证：由柯西-施瓦兹不等式

$$\begin{aligned} |R_X(\tau)|^2 &= \{\mathrm{E}[X(t)X(t+\tau)]\}^2 \\ &\leq \mathrm{E}[X^2(t)]\mathrm{E}[X^2(t+\tau)] \\ &= R_X^2(0). \end{aligned}$$

4 若平稳过程$X(t)$满足

$$X(t) = X(t+T),$$

则称它为周期过程，其中为T过程的周期，周期平稳过程的自相关函数也是周期为T的周期函数，因为

$$\begin{aligned} R_X(\tau+T) &= \mathrm{E}[X(t)X(t+\tau+T)] \\ &= \mathrm{E}[X(t)X(t+\tau)] \\ &= R_X(\tau). \end{aligned}$$

自相关函数的性质

5 非负定性.即对任意n, 任意实数$a_1, a_2, \dots, a_n$,任意$t_1, t_2, \dots, t_n \in T$有$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_X(t_j - t_k)a_j a_k \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_X(t_j - t_k)a_j a_k \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E[X(t_k)X(t_k + t_j - t_k)]a_j a_k \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E[X(t_k)X(t_j)]a_j a_k
\end{aligned}
$$

5 非负定性.即对任意n，任意实数$a_1, a_2, \ldots, a_n$,任意$t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$有$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_X(t_j - t_k)a_j a_k \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_X(t_j - t_k)a_j a_k \\
=&\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[X(t_k)X(t_k + t_j - t_k)]a_j a_k \\
=&\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[X(t_k)X(t_j)]a_j a_k
\end{aligned}
$$

自相关函数的性质

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[X(t_k)X(t_j)]a_j a_k \\
&= \mathrm{E}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[X(t_k)X(t_j)]a_j a_k \\
&= \mathrm{E}\{[\sum_{j=1}^{n} a_j X(t_j)]^2\} \geq 0.
\end{aligned}
$$

提纲

1. 平稳过程的概念
2. 相关函数
    - 自相关函数的性质
    - 平稳相关与互相关函数
3. 复平稳过程
4. 循环平稳过程

定义

设$X(t), Y(t), t \in T$为两个平稳过程，

$$R_{XY}(t, t+\tau) = \mathrm{E}[X(t)Y(t+\tau)] = R_{XY}(\tau), \quad \forall t, t+\tau \in T$$

则称$\{X(t)\}, \{Y(t)\}$是平稳相关的，或联合平稳的.并称

$$R_{XY}(\tau) = \mathrm{E}[X(t)Y(t+\tau)]$$

为$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$的互相关函数。

互相关函数的性质

1. $R_{XY}(0) = R_{YX}(0)$;
2. $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$;
3. $|R_{XY}(\tau)|^2 \le R_X(0)R_Y(0)$,
   事实上，

$$
\begin{aligned}
|R_{XY}(\tau)|^2 &= \{\mathrm{E}[X(t)Y(t+\tau)]\}^2 \\
&\le \mathrm{E}[X^2(t)]\mathrm{E}[Y^2(t+\tau)] \\
&= R_X(0)R_Y(0).
\end{aligned}
$$

4. $|R_{XY}(\tau)| \le \frac{1}{2}[R_X(0) + R_Y(0)]$
   因为

$$
\sqrt{R_X(0)R_Y(0)} \le \frac{1}{2}[R_X(0) + R_Y(0)].
$$

互相关函数的性质

1 $R_{XY}(0) = R_{YX}(0)$;

2 $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$;

3 $|R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_X(0)R_Y(0)$,
事实上,

$$\begin{aligned} |R_{XY}(\tau)|^2 &= \{\mathrm{E}[X(t)Y(t+\tau)]\}^2 \\ &\leq \mathrm{E}[X^2(t)]\mathrm{E}[Y^2(t+\tau)] \\ &= R_X(0)R_Y(0). \end{aligned}$$

4 $|R_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2}[R_X(0) + R_Y(0)]$
因为

$$\sqrt{R_X(0)R_Y(0)} \leq \frac{1}{2}[R_X(0) + R_Y(0)].$$

互相关函数的性质

1. $R_{XY}(0) = R_{YX}(0)$;
2. $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$;
3. $|R_{XY}(\tau)|^2 \le R_X(0)R_Y(0)$,
   事实上，

$$\begin{aligned} |R_{XY}(\tau)|^2 &= \{\mathrm{E}[X(t)Y(t+\tau)]\}^2 \\ &\le \mathrm{E}[X^2(t)]\mathrm{E}[Y^2(t+\tau)] \\ &= R_X(0)R_Y(0). \end{aligned}$$

4. $|R_{XY}(\tau)| \le \frac{1}{2}[R_X(0) + R_Y(0)]$
   因为

$$\sqrt{R_X(0)R_Y(0)} \le \frac{1}{2}[R_X(0) + R_Y(0)].$$

互相关函数的性质

1. $R_{XY}(0) = R_{YX}(0)$;
2. $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$;
3. $|R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_X(0)R_Y(0)$,
   事实上,

$$
\begin{aligned}
|R_{XY}(\tau)|^2 &= \{\mathrm{E}[X(t)Y(t+\tau)]\}^2 \\
&\leq \mathrm{E}[X^2(t)]\mathrm{E}[Y^2(t+\tau)] \\
&= R_X(0)R_Y(0).
\end{aligned}
$$

4. $|R_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2}[R_X(0) + R_Y(0)]$
   因为

$$\sqrt{R_X(0)R_Y(0)} \leq \frac{1}{2}[R_X(0) + R_Y(0)].$$

互相关函数的性质

1. $R_{XY}(0) = R_{YX}(0)$;
2. $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$;
3. $|R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_X(0)R_Y(0)$,
   事实上,

$$\begin{aligned} |R_{XY}(\tau)|^2 &= \{\mathrm{E}[X(t)Y(t+\tau)]\}^2 \\ &\leq \mathrm{E}[X^2(t)]\mathrm{E}[Y^2(t+\tau)] \\ &= R_X(0)R_Y(0). \end{aligned}$$

4. $|R_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2}[R_X(0) + R_Y(0)]$
   因为

$$\sqrt{R_X(0)R_Y(0)} \leq \frac{1}{2}[R_X(0) + R_Y(0)].$$

互相关函数的性质

1. $R_{XY}(0) = R_{YX}(0)$;
2. $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$;
3. $|R_{XY}(\tau)|^2 \le R_X(0)R_Y(0)$,
   事实上,

$$\begin{aligned} |R_{XY}(\tau)|^2 &= \{\mathrm{E}[X(t)Y(t+\tau)]\}^2 \\ &\le \mathrm{E}[X^2(t)]\mathrm{E}[Y^2(t+\tau)] \\ &= R_X(0)R_Y(0). \end{aligned}$$

4. $|R_{XY}(\tau)| \le \frac{1}{2}[R_X(0) + R_Y(0)]$
   因为

$$\sqrt{R_X(0)R_Y(0)} \le \frac{1}{2}[R_X(0) + R_Y(0)].$$

复平稳过程

定义

若复随机过程$Z(t) = X(t) + iY(t)$满足

- $\mu_Z(t) = \mu_X + i\mu_Y$;
- $R_Z(\tau) := R_Z(t, t+\tau)$ 只与τ有关,

则称为$Z(t)$复平稳过程

复平稳过程的性质(省略)

- 若$\{X(t)\}, \{Y(t)\}$为平稳的且联合平稳的实随机过程，则$Z(t) = X(t) + iY(t)$为复平稳过程。
- $R_Z(\tau) = \overline{R_Z(-\tau)}$

复平稳过程的性质(省略)

- 若$\{X(t)\}, \{Y(t)\}$为平稳的且联合平稳的实随机过程，则$Z(t) = X(t) + iY(t)$为复平稳过程。

- $R_Z(\tau) = \overline{R_Z(-\tau)}$

例

将两个平稳过程$X(t)Y(t)$同时输入加法器中，加法器输出随机过程$W(t)=X(t)+Y(t)$，若$X(t)$与$Y(t)$平稳相关，则$W(t)$为平稳过程.

证明.

(1) $\mu_W(t)=\mu_X+\mu_Y$为常数.

(2)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[w(t)w(t+\tau)] \\
&=\mathrm{E}\{[x(t)+y(t)][x(t+\tau)+y(t+\tau)]\} \\
&=E[x(t)x(t+\tau)]+E[x(t)y(t+\tau)] \\
&\quad+E[y(t)x(t+\tau)]+E[y(t)y(t+\tau)] \\
&=R_X(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{XY}(-\tau)+R_Y(\tau)
\end{aligned}
$$

可见$W(t)$的互相关函数$R_W(t,t+\tau)$只依赖于τ。所以$W(t)$为平稳过程.

例

*将两个平稳过程$X(t)Y(t)$同时输入加法器中，加法器输出随机过程$W(t)=X(t)+Y(t)$,
若$X(t)$与$Y(t)$平稳相关，则$W(t)$为平稳过程.*

证明.

(1) $\mu_W(t)=\mu_X+\mu_Y$**为常数.**

(2)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[w(t)w(t+\tau)]\\
&=\mathrm{E}\{[x(t)+y(t)][x(t+\tau)+y(t+\tau)]\}\\
&=E[x(t)x(t+\tau)]+E[x(t)y(t+\tau)]\\
&\quad+E[y(t)x(t+\tau)]+E[y(t)y(t+\tau)]\\
&=R_X(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{XY}(-\tau)+R_Y(\tau)
\end{aligned}
$$

可见$W(t)$的互相关函数$R_W(t,t+\tau)$只依赖于τ。
所以$W(t)$为平稳过程.

例

将两个平稳过程$X(t)Y(t)$同时输入加法器中，加法器输出随机过程$W(t)=X(t)+Y(t)$，若$X(t)$与$Y(t)$平稳相关，则$W(t)$为平稳过程.

证明.

(1) $\mu_W(t)=\mu_X+\mu_Y$为常数.

(2)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[w(t)w(t+\tau)]\\
&=\mathrm{E}\{[x(t)+y(t)][x(t+\tau)+y(t+\tau)]\}\\
&=E[x(t)x(t+\tau)]+E[x(t)y(t+\tau)]\\
&\quad+E[y(t)x(t+\tau)]+E[y(t)y(t+\tau)]\\
&=R_X(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{XY}(-\tau)+R_Y(\tau)
\end{aligned}$$

可见$W(t)$的互相关函数$R_W(t,t+\tau)$只依赖于τ。所以$W(t)$为平稳过程.

例

将两个平稳过程$X(t)Y(t)$同时输入加法器中，加法器输出随机过程$W(t) = X(t) + Y(t)$，若$X(t)$与$Y(t)$平稳相关，则$W(t)$为平稳过程.

证明.

(1) $\mu_W(t) = \mu_X + \mu_Y$**为常数.**

(2)

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}[w(t)w(t+\tau)] \\ & = \mathrm{E}\{[x(t)+y(t)][x(t+\tau)+y(t+\tau)]\} \\ & = E[x(t)x(t+\tau)] + E[x(t)y(t+\tau)] \\ & \quad + E[y(t)x(t+\tau)] + E[y(t)y(t+\tau)] \\ & = R_X(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{XY}(-\tau) + R_Y(\tau) \end{aligned}$$

可见$W(t)$的互相关函数$R_W(t, t+\tau)$只依赖于τ。所以$W(t)$为平稳过程.

例

将两个平稳过程$X(t)Y(t)$同时输入加法器中，加法器输出随机过程$W(t)=X(t)+Y(t)$，若$X(t)$与$Y(t)$平稳相关，则$W(t)$为平稳过程.

证明.
(1) $\mu_W(t)=\mu_X+\mu_Y$**为常数.**
(2)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[w(t)w(t+\tau)]\\
&=\mathrm{E}\{[x(t)+y(t)][x(t+\tau)+y(t+\tau)]\}\\
&=E[x(t)x(t+\tau)]+E[x(t)y(t+\tau)]\\
&\quad+E[y(t)x(t+\tau)]+E[y(t)y(t+\tau)]\\
&=R_X(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{XY}(-\tau)+R_Y(\tau)
\end{aligned}$$

可见$W(t)$的互相关函数$R_W(t,t+\tau)$只依赖于τ。
所以$W(t)$为平稳过程.

例

将两个平稳过程$X(t)Y(t)$同时输入加法器中，加法器输出随机过程$W(t)=X(t)+Y(t)$，若$X(t)$与$Y(t)$平稳相关，则$W(t)$为平稳过程.

证明.

(1) $\mu_W(t)=\mu_X+\mu_Y$**为常数.**

(2)

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}[w(t)w(t+\tau)] \\
& = \mathrm{E}\{[x(t)+y(t)][x(t+\tau)+y(t+\tau)]\} \\
& = E[x(t)x(t+\tau)]+E[x(t)y(t+\tau)] \\
& \quad + E[y(t)x(t+\tau)]+E[y(t)y(t+\tau)] \\
& = R_X(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{XY}(-\tau)+R_Y(\tau)
\end{aligned}
$$

可见$W(t)$的互相关函数$R_W(t,t+\tau)$只依赖于τ。所以$W(t)$为平稳过程.

例

将两个平稳过程$X(t)Y(t)$同时输入加法器中，加法器输出随机过程$W(t)=X(t)+Y(t)$，若$X(t)$与$Y(t)$平稳相关，则$W(t)$为平稳过程.

证明. (1) 检查 二阶矩

(1) 2 $\mu_W(t)=\mu_X+\mu_Y$为常数.

(2) 3

$$
\begin{aligned}
R_w(t,t+\tau) = \mathrm{E}[w(t)w(t+\tau)] \\
&= \mathrm{E}\{[x(t)+y(t)][x(t+\tau)+y(t+\tau)]\} \\
&= E[x(t)x(t+\tau)]+E[x(t)y(t+\tau)] \\
&\quad + E[y(t)x(t+\tau)]+E[y(t)y(t+\tau)] \\
&= R_X(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{XY}(-\tau)+R_Y(\tau)
\end{aligned}
$$

可见$W(t)$的互相关函数$R_W(t,t+\tau)$只依赖于τ。所以$W(t)$为平稳过程.

循环平稳过程（只看定义与性质）

定义

随机过程

$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n}=-\infty}^{\mathbf{n}=\infty} \mathbf{a}_{\mathbf{n}}\mathbf{g}(\mathbf{t}-\mathbf{n}\mathbf{T}), \quad \mathbf{t} \in (-\infty, +\infty)$$

其中$\{\mathbf{a}_\mathbf{n}\}$为平稳序列，均值为$\mu_\mathbf{a}$，自相关函数为$\mathbf{R}_\mathbf{a}(\mathbf{n})$，$\mathbf{g}(\mathbf{t})$为确定性信号，$\mathbf{T}$为常数，称此类随机过程为循环平稳过程或周期平稳过程。

平稳性

$$\mu_X(t) = \mu_a \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(t - nT),$$

$$\begin{aligned}
& R_X(t, t+\tau) \\
= \ & \mathrm{E}[X(t)X(t+\tau)] \\
= \ & \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \mathrm{E}[a_n a_m] g(t - nT) g(t + \tau - mT) \\
= \ & \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_a(n - m) g(t - nT) g(t + \tau - mT)
\end{aligned}$$

所以，$\mu_X(t)$与$R_X(t, t+\tau)$均与t有关，所以并不是平稳过程。

平稳性

$$\mu_X(t) = \mu_a \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(t - nT),$$

$$\begin{aligned} & R_X(t, t+\tau) \\ = & \mathrm{E}[X(t)X(t+\tau)] \\ = & \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \mathrm{E}[a_n a_m] g(t - nT) g(t + \tau - mT) \\ = & \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_a(n - m) g(t - nT) g(t + \tau - mT) \end{aligned}$$

所以，$\mu_X(t)$与$R_X(t, t+\tau)$均与t有关，所以并不是平稳过程。

平稳性

$$\mu_X(t) = \mu_a \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(t - nT),$$

$$\begin{aligned}
& R_X(t, t+\tau) \\
= \ & \mathrm{E}[X(t)X(t+\tau)] \\
= \ & \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \mathrm{E}[a_n a_m] g(t - nT) g(t + \tau - mT) \\
= \ & \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_a(n - m) g(t - nT) g(t + \tau - mT)
\end{aligned}$$

所以，$\mu_X(t)$与$R_X(t, t+\tau)$均与t有关，所以并不是平稳过程。

但

$$\begin{aligned}\mu_X(t+\tau) &= \mu_a \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(t+\tau-nT)\\ &= \mu_a \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(t-nT) = \mu_X(t),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&R_X(t+T, t+\tau+T) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_a(n-m) g(t+T-nT) \cdot \\
&\qquad \cdot g(t+\tau+T-mT) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_a(n-m) g(t-nT) g(t+\tau-mT) \\
&= R_X(t, t+\tau)
\end{aligned}
$$

即$\mu_X(t)$与$R_X(t, t+\tau)$均有周期平稳性。

$$
\begin{aligned}
&R_X(t+T, t+\tau+T) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_a(n-m) g(t+T-nT) \cdot \\
&\qquad \cdot g(t+\tau+T-mT) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_a(n-m) g(t-nT) g(t+\tau-mT) \\
&= R_X(t, t+\tau)
\end{aligned}
$$

即$\mu_X(t)$与$R_X(t, t+\tau)$均有周期平稳性。

练习

设$X(t)=A\sin(\omega t+\Theta)$，$Y(t)=B\sin(\omega t+\Theta-\Phi)$，其中$A,B,\omega,\Phi$ 为常数，Θ在$(0,2\pi)$上服从均匀分布，求$R_{XY}(\tau)$。

小结