§5 傅里叶(Fourier)级数

在科学技术中，常常会遇到各种各样的周期现象，周期现象在数学上可用周期函数来近似描述.最简单的周期函数是正弦（或余弦）函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$，它在物理中描述简谐振动问题，其中 A, ω 和 φ 分别叫做振幅、频率和初相.它的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$，又称为正弦波或谐波.

考虑正弦函数序列$\{A_n\sin(nx+\varphi_n)\}$:

$$A_1\sin(x+\varphi_1), A_2\sin(x+\varphi_2), \ldots, A_n\sin(nx+\varphi_n), \ldots$$

它们有共同周期2π，n个周期为2π的正弦函数与常数A_0之和

$$S_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(kx+\varphi_k)$$

仍是一个以2π为周期的周期函数.

如果$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$，也就是说，三角函数项级数$A_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx+\varphi_n)$收敛于和函数$S(x)$，那么$S(x)$也是以$2\pi$为周期的周期函数.

一个相反问题：给定以2π为周期的周期函数$f(x)$，能否将$f(x)$表示成一列正弦函数之和？也就是表达式

$$f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\varphi_n)$$

能否成立？如果能，那么可以通过简单的正弦函数来研究复杂的周期函数.

因为$A_n\sin(nx+\varphi_n)=A_n\sin\varphi_n\cos nx+A_n\cos\varphi_n\sin nx=a_n\cos nx+b_n\sin nx$，其中$a_n=A_n\sin\varphi_n, b_n=A_n\cos\varphi_n\ \ (n=1,2,\dots)$，记$A_0=\frac{a_0}{2}$，上述三角函数项级数变成

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

称为三角级数.

需解决两个问题:

(1) 周期函数$(T=2\pi)$ $f(x)$满足什么条件, $f(x)$才能展开为三角级数;

(2)如果$f(x)$能展开为三角级数,展开式

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

中的系数a_0,a_n,b_n如何计算?

一、三角级数

三角级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

周期为 2π，其中 $a_0, a_n, b_n\ (n=1, 2, \cdots)$都是常数.

三角函数系:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

三角函数系的正交性：三角函数系中任何两个不同的函数的乘积在区间$[-\pi, \pi]$上的积分等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = 0 \quad (n=1, 2, \cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0 \quad (n=1, 2, \cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = 0 \quad (k, n=1, 2, \cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx = 0 \quad (k, n=1, 2, \cdots, k \neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = 0 \quad (k, n=1, 2, \cdots, k \neq n).$$

三角函数系中任何两个相同的函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$上的积分不等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

一般地，若函数 f, g 在[a,b]上可积，且$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0$，则称函数 f, g 在[a,b]上正交;设$\{f_n\}$是区间[a,b]上的可积函数列，若其中任意两个不同的函数在[a,b]上正交，且$\int_a^b f_n^2(x)dx\neq 0\ (n=1,2,\ldots)$，则称$\{f_n\}$是[$a$,$b$]上的正交函数系.所以以上三角函数系在长为一个周期的任何区间$[a,a+2\pi]$上构成一个正交函数系.

二、函数展开成傅里叶级数

问题：设 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数，且能展开成三角级数:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

那么系数 $a_0, a_1, b_1, \cdots$ 与函数 $f(x)$之间存在着怎样的关系?

假定三角级数可逐项积分，对

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

两边乘 $\cos nx$，再逐项求积分，则有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos nx dx+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx dx].$$

根据三角函数系正交性，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=a_n\pi$$

类似可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=b_n\pi$$

傅里叶系数:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\ ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx\ ,\ (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\ ,\ (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

系数 $a_0, a_1, b_1, \cdots$ 叫做函数 $f(x)$的傅里叶系数.

傅里叶级数: 三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

称为 $f(x)$的傅里叶级数，其中 $a_0, a_1, b_1, \cdots$是傅里叶系数.

记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

其中傅里叶系数 a_n , b_n 为

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1, 2, \cdots).$$

问题：一个定义在$(-\infty, +\infty)$上周期为 2π 的函数 $f(x)$，如果它在一个周期上可积，则一定可以作出 $f(x)$的傅里叶级数．然而，函数 $f(x)$的傅里叶级数是否一定收敛？如果它收敛，它是否一定收敛于函数 $f(x)$？一般来说，这两个问题的答案都不是肯定的．

定理(狄利克雷 Direchlet 充分条件、收敛定理) 设 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：(1)在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点,(2) 在一个周期内至多只有有限个极值点，则$f(x)$的傅里叶级数在$(-\infty, +\infty)$上处处收敛，并且

当 x 是 $f(x)$的连续点时，级数收敛于 $f(x)$;

当 x 是 $f(x)$的间断点时，级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$

例 1 设 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x & -\pi \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

解: 所给函数满足收敛定理的条件，它在点 $x=(2k+1)\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$)处不连续，因此, $f(x)$的傅里叶级数在 $x=(2k+1)\pi$ 处收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]=\frac{1}{2}(0-\pi)=-\frac{\pi}{2}.$$

在连续点 x ($x\neq(2k+1)\pi$)处级数收敛于 $f(x)$.

傅里叶系数计算如下:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}xdx=-\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}]_{-\pi}^{0}=\frac{1}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{n^2\pi} & n=1,3,5,\cdots\\ 0 & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}]_{-\pi}^{0}=-\frac{\cos n\pi}{n}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\ (n=1,2,\cdots).$$

$f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x) \sim -\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2\pi}[1-(-1)^n]\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right\}$$

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+(\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x)-\frac{1}{2}\sin 2x+(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x)$$

$$-\frac{1}{4}\sin 4x+(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x+\frac{1}{5}\sin 5x)-\cdots$$

$$(-\infty<x<+\infty\ ;\ x\neq\pm\pi,\ \pm 3\pi,\ \cdots).$$

如果$f(x)$是周期为 2π 的周期函数，它在**[0,2π)**上给出表达式，则**傅里叶系数**：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx, \ (n=1, 2, \cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx, \ (n=1, 2, \cdots).$$

例2. 设$f(x)$是周期为2π的函数，周期$[0, 2\pi)$上的表达式为

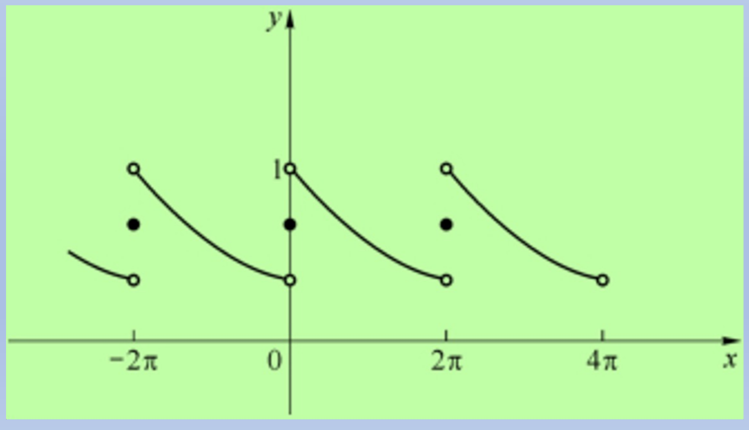
$f(x)=e^{-x}$，将$f(x)$ 展开成傅里叶级数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$的和.

解:所给函数$f(x)$满足收敛定理的条件，

$x=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$是$f(x)$的间断点,而在其他点处

$f(x)$连续.因此,$f(x)$的傅里叶级数在$x=2k\pi$处收敛于

$$\frac{f(0^+)+f(2\pi^-)}{2}=\frac{1+e^{-2\pi}}{2}.$$



傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-x}dx=\frac{1}{\pi}\left(1-e^{-2\pi}\right)\quad,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-x}\cos nxdx=\frac{1}{n^2\pi}\left(1-e^{-2\pi}\right)-\frac{1}{n^2}a_n$$

$$a_n=\frac{1}{(n^2+1)\pi}\left(1-e^{-2\pi}\right),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-x}\sin nxdx=na_n=\frac{n}{(n^2+1)\pi}\left(1-e^{-2\pi}\right)$$

于是,$f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi}+\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\left(\cos nx+n\sin nx\right)$$

其中, $x\neq 2k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots.$

若令 $x=0$,则有

$$\frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi}+\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{1+e^{-2\pi}}{2},$$

于是可得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{\pi}{2}\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}-\frac{1}{2}$

周期延拓： 设 $f(x)$只在$[-\pi,\pi]$或$[0,2\pi]$上有定义，我们可以在$[-\pi,\pi)$或$(-\pi,\pi]$，$[0,2\pi)$或$(0,2\pi]$外补充函数 $f(x)$的定义，使它拓广成周期为 2π 的周期函数 $F(x)$，在$(-\pi,\pi)$或$(0,2\pi)$内，$F(x)=f(x)$.

例 3 将函数

$$f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ x & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

展开成傅里叶级数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和

解. 所给函数在区间$[-\pi, \pi]$上满足收敛定理的条件，并且拓广为周期函数时，它在每一点 x 处都连续，因此拓广的周期函数的傅里叶级数在$[-\pi, \pi]$上收敛于$f(x)$.

傅里叶系数为:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx=\pi\ ;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi} & n=1, 3, 5, \cdots \\ 0 & n=2, 4, 6, \cdots\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx dx=0 \quad (n=1, 2, \cdots).$$

于是 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right) \qquad (-\pi\le x\le\pi).$$

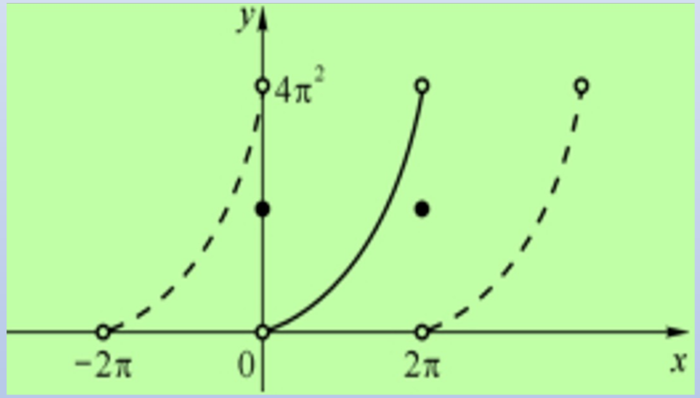
取 $x=0$ 得到

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

例 4 将函数 $f(x)=x^2(0\le x\le 2\pi)$ 展开成傅里叶级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8}{3}\pi^2;\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nxdx=\frac{4}{n^2};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nxdx=-\frac{4\pi}{n}$$



$f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right),\ x\in(0,2\pi).$$

在 $x=0,2\pi$ 处,傅里叶级数收敛于 $\frac{f(0+0)+f(2\pi-0)}{2}=2\pi^2$，即

$$2\pi^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

例 5 求函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le\pi\\ 0\ \ , & -\pi\le x<0\end{cases}$ 的傅立叶展开式。

解：对 $f(x)$ 作周期延拓，周期延拓后的函数处处连续;

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{\pi}\quad ,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nxdx$$

$$=-\frac{1+(-1)^n}{\pi\left(n^2-1\right)}=\begin{cases}\dfrac{-2}{\pi(4k^2-1)}, & n=2k\\ 0, & n=2k+1\end{cases}\qquad n\ne1,\quad k=1,2,\cdots$$

另求a_1：

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos xdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\cos xdx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\sin nxdx=0,n\neq 1$$

另求b_1：

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin xdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\sin xdx=\frac{1}{2},$$

所以函数$f(x)$的傅立叶级数为：

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx,x\in[-\pi,\pi].$$