

北京邮电大学 2018-2019 学年

线性代数期末试题 (A)

注意：请将所有题（包括填空题）的答案写在答题纸上，否则无效.

一. 填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 已知 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的 3 个根，

$$\text{则 } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案：0

2. 已知 $\alpha = (1, -1, 1)^T$, $A = E + \alpha\alpha^T$, 则 $A^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\text{答案: } \begin{pmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

3. 已知直线 $L_1: x-1=y+2=-z-4$ 与直线 $L_2: \begin{cases} x=1+2t \\ y=at-3 \\ z=t-2 \end{cases}$ 共面，

则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $\frac{1}{2}$

4. 将 3 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 表示为两个初等矩阵相乘:

$A = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\text{答案: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注：可交换

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3 - 3\alpha_1$,

$\beta_3 = \alpha_1 + 6\alpha_2 + a\alpha_3$. 则当 $a =$ _____ 时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关.

答案: $a = 9$

6. 已知 A, A^*, B 都是 n 阶非零矩阵 (A^* 是 A 的伴随矩阵), 若 $AB = O$

(O 为零矩阵), 则 $r(B) =$ _____.

答案: 1

7. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的 3 个特征值为 1, 2, 3, 则 $x =$ _____.

答案: -1

8. 已知 A 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $|\lambda E - A| =$ _____.

答案: $(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 5)$

9. 已知 4 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2 + A = O$, 其中 O 为零矩阵, 若

$r(A) = 3$, 则 $f = x^T A x$ 在正交变换 $x = Oy$ 下的标准形为

_____. (其中 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$)

答案: $f = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

10. 空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ y - z = 1 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程

为_____.

答案:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y - 8 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

二. (10 分) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} (n \geq 2).$

解: 将 D_n 按第一行展开, 得

$$D_n = x \begin{vmatrix} 0 & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 0 & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix},$$

再将第二个行列式按第一列展开, 得

$$D_n = x^n - y^2(-1)^n \begin{vmatrix} y & \cdots & 0 & 0 \\ x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix} = x^n + (-1)^{n+1} y^n.$$

三. (10 分) 已知可逆矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix}$, 若矩阵 B 满足

$$A^{-1}BA = 2A^{-1}B + E, \text{ 求 } B.$$

解: 在等式 $A^{-1}BA = 2A^{-1}B + E$ 两端左乘 A , 得 $BA = 2B + A$,

$$B = A(A - 2E)^{-1},$$

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad (A - 2E)^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 4 & 4 \\ -8 & 1 & 2 \\ 12 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

四. (10 分) 设 $\alpha_1 = (1, -2, 3, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 0, 4, -3)^T$,

$\alpha_3 = (4, -4, 10, -1)^T$, $\alpha_4 = (3, -2, 5, -2)^T$, 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一组极大无关组, 并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解: 对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 作初等行变换, 化为行最简形, 得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 10 & 5 \\ 1 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为一组极大无关组, $\alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2$.

五. (12 分) 已知方程组
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = t \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$
 有解.

(1) 求 t ; (2) 求该方程组的通解.

解: (1) 对方程组的增广矩阵作初等行变换, 化为行阶梯形, 得

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -3 & t \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-2 \end{array}\right),$$

故 $t=2$.

(2) 继续对上述行阶梯形矩阵作初等行变换, 化为行最简形, 得

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{原方程}$$

$$\text{组同解于} \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -2 \end{cases}, \text{取特解 } \eta = (-3, 0, 1, -2)^T,$$

$$\text{对应齐次方程组} \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \text{的通解为}$$

$$x = x_2(2, 1, 0, 0)^T, \quad x_2 \text{ 为任意实数.}$$

所求方程组的通解为

$$x = k(2, 1, 0, 0)^T + (-3, 0, 1, -2)^T, \quad k \text{ 为任意实数.}$$

六. (10分) 设 $\alpha_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\alpha_2 = (-1, 2, 0, 1)$, $\alpha_3 = (-1, 1, 0, 0)$,

利用施密特正交化方法, 求与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等价的正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$,

其中 $\beta_1 = \alpha_1$.

$$\text{解:} \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

$$= (-1, 2, 0, 1) - \frac{-4}{4}(1, -1, 1, -1) = (0, 1, 1, 0);$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

$$= (-1, 1, 0, 0) - \frac{-2}{4}(1, -1, 1, -1) - \frac{1}{2}(0, 1, 1, 0) = -\frac{1}{2}(1, 0, 0, 1).$$

七. (12 分) 已知二次型 $f = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$ 在正交变

换 $x = Py$ 下化为标准形 $f = y_1^2 + ay_2^2 + by_3^2 (a < b)$, 其中

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad y = (y_1, y_2, y_3)^T.$$

(1) 求 a, b ; (2) 求正交矩阵 P .

解: (1) f 在 x 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$

依题意, $\lambda = 1$ 是 A 的特征值, 另两个特征值为 a, b , 则

$$a + b = \text{tr}A - 1 = 11, \quad |A| = 28 = ab \cdot 1,$$

求得 $a = 4, b = 7$.

(1) 求解 $(A - E)x = 0$, 得 A 的对应 $\lambda_1 = 1$ 的单位特征向量为

$p_1 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^T$; 求解 $(A - 4E)x = 0$, 得 A 的对应 $\lambda_2 = 4$ 的单位特

征向量为 $p_2 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T$; 求解 $(A - 7E)x = 0$, 得 A 的对应

$\lambda_3 = 7$ 的单位特征向量为 $p_3 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)^T$.

令 $P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 则在正交变换 $x = Py$ 下, f 化为标准形

$$f = y_1^2 + 4y_2^2 + 7y_3^2.$$

八. (6分) 已知 A 为 n 阶可逆矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵.

求证: $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$.

证明: 已知 A 可逆, 所以 $|A| \neq 0$.

$$\text{由 } AA^* = |A|E \text{ 可得 } A^* = |A|A^{-1},$$

在等式 $A^* = |A|A^{-1}$ 两端分别取逆、取行列式, 得

$$(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{A}{|A|}, \quad |A^*| = |A|^{n-1}.$$

再由 $A^* = |A|A^{-1}$, 可知 $(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \frac{A}{|A|} = |A|^{n-2} A$.