## 三、正弦级数和余弦级数

当 $f(x)$为奇函数时，$f(x)\cos nx$ 是奇函数，$f(x)\sin nx$ 是偶函数，故傅里叶系数为

$$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\ (n=1,2,3,\cdots).$$

因此奇数函数的傅里叶级数是只含有正弦项的**正弦级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

当 $f(x)$为偶函数时, $f(x)\cos nx$ 是偶函数, $f(x)\sin nx$ 是奇函数, 故傅里叶系数为

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n=0, 1, 2, 3, \cdots),$$

$$b_n=0 \quad (n=1, 2, \cdots).$$

因此偶数函数的傅里叶级数是只含有余弦项的**余弦级数**

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx.$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$$

**例 6** 设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$. 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

**解** 首先，所给函数满足收敛定理的条件，它在点 $x=(2k+1)\pi(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 不连续，因此 $f(x)$ 的傅里叶级数在函数的连续点 $x\neq(2k+1)\pi$ 收敛于 $f(x)$，在点 $x=(2k+1)\pi(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 收敛于

$$\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)]=\frac{1}{2}[\pi+(-\pi)]=0.$$

其次，若不计 $x=(2k+1)\pi(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$，则 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的奇函数. 于是

$a_n=0(n=0, 1, 2, \cdots)$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx$$

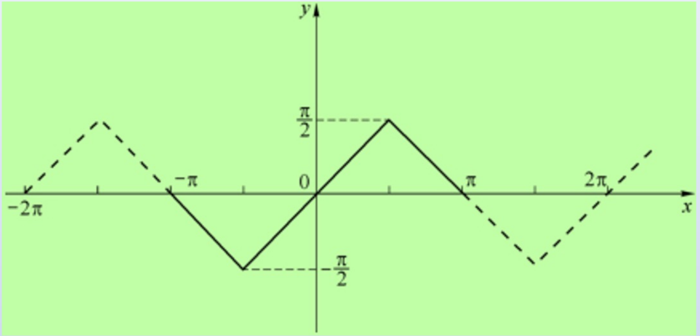
$$=\frac{2}{\pi}[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}]_0^{\pi}=-\frac{2}{n}\cos nx=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}(n=1, 2, 3, \cdots).$$

$f(x)$的傅里叶级数展开式为 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx$

$$f(x)=2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nx+\cdots$$

$(-\infty<x<+\infty, x\neq\pm\pi, \pm3\pi, \cdots)$.

**例 7**　将函数 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ $(-\pi\le x\le\pi)$ 展开成傅里叶级数.




解：所给函数

$$f(x)=\begin{cases}-\pi-x, -\pi\le x<-\dfrac{\pi}{2}\\ x, -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ \pi-x, \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$$

满足 Dirichlet 定理条件，周期延拓后的函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续，

因此傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

因为$f(x)$为奇函数，所以

$$a_n = 0\left(n = 0,1,2,\ldots\right),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(x\right)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\pi - x\right)\sin nxdx\right] = \frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x \qquad (-\pi\le x\le\pi).$$

**奇延拓与偶延拓**: 设函数 $f(x)$定义在区间$[0, \pi]$上并且满足收敛定理的条件, 我们在开区间$(-\pi, 0)$内补充函数 $f(x)$的定义, 得到定义在$(-\pi, \pi]$上的函数 $F(x)$, 使它在$(-\pi, \pi)$上成为奇函数(偶函数). 按这种方式拓广函数定义域的过程称为奇延拓(偶延拓). 限制在$(0, \pi]$上, 有 $F(x)=f(x)$.

因此,仅在$[0,\pi]$上定义的函数既可以展开成正弦级数,又可以展开成余弦级数.

**例 8** 将函数 $f(x)=x(0\le x\le\pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数.

（1） 作奇延拓 $a_n=0\,(n=0,1,2,\ldots)$,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx dx=\frac{2}{n}(-1)^{n+1},\quad (n=1,2,\ldots)$$

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx,x\in[0,\pi);$$

（2） 作偶延拓：$b_n=0\,(n=1,2,\ldots)$, $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right],\quad (n=1,2,\ldots)$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,x\in[0,\pi]$$

## 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数

前面所讨论的周期函数 $f(x)$都是以 $2\pi$ 为周期的. 但是实际问题中所遇到的周期函数，它的周期不一定是$2\pi$. 怎样把周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$展开成三角级数呢？

令 $x=\frac{l}{\pi}t$ 及 $f(x)=f(\frac{l}{\pi}t)=F(t)$，则 $F(t)$是以 $2\pi$ 为周期的函数.

这是因为

$$F(t+2\pi)=f[\frac{l}{\pi}(t+2\pi)]=f(\frac{l}{\pi}t+2l)=f(\frac{l}{\pi}t)=F(t).$$

当 $F(t)$满足收敛定理的条件时，$F(t)$可展开成傅里叶级数:

$$F(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad ,$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi}t)\cos nt dt \quad (n = 0,1,2,\ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin nt dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi}t)\sin nt dt \quad (n = 1,2,\ldots).$$

令 $t = \frac{\pi}{l}x$，有如下定理:

**定理** 设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$满足收敛定理的条件，则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

其中系数 $a_n$，$b_n$ 为

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n=1, 2, \cdots).$$

当 $f(x)$为奇函数时,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中 $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 1, 2, \cdots).$

当 $f(x)$为偶函数时,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

其中 $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$

**函数展开为傅立叶级数的几种方式：**

（1） $f(x)$是周期为 $2l$ 的函数，在$[-l,l)$或$[0,2l)$给出表达式；

（2） $f(x)$仅在$[-l,l]$或$[0,2l]$给出表达式，需以周期为 $2l$ 作周期延拓；

（3） $f(x)$仅在$[0,l]$给出表达式，需先作奇延拓或偶延拓将函数定义拓广到$[-l,l]$，再以 $T=2l$ 为周期作周期延拓：

若作奇延拓，傅立叶级数为正弦级数；

若作偶延拓，傅立叶级数为余弦级数.

其中偶延拓函数$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le l \\ f(-x), & -l\le x<0 \end{cases}$，奇延拓函数$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x\le l \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & -l\le x<0 \end{cases}$.

最后注明傅立叶级数和函数等于 $f(x)$的自变量 $x$ 的范围

**例 9** 设 $f(x)$是周期为 4 的周期函数，它在$[-2, 2)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0 & -2\le x<0\\ k & 0\le x<2\end{cases}\quad (\text{常数 } k\neq 0).$$

将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

**解** 这里 $l=2$. 所给函数 $f(x)$ 满足 Dirichlet 条件，它在 $x=2k$ $(k=0, \pm1, \pm2,\cdots)$处不连续，在其它点处连续，当 $x=2k$ 时，傅里叶级数收敛于 $\frac{k}{2}$.

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}kdx=k\ ;$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}k\cos\frac{n\pi x}{2}dx=[\frac{k}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}]_0^2=0\ (n=1,2,\ldots);$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2 k\sin\frac{n\pi x}{2}dx=[-\frac{k}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}]_0^2=\frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\dfrac{2k}{n\pi} & n=1,3,5,\cdots\\ 0 & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

于是

$$f(x)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots)$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq 0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \cdots)$$

**例 10.** 设 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数，它在 $[-3,3)$ 上的表达式为

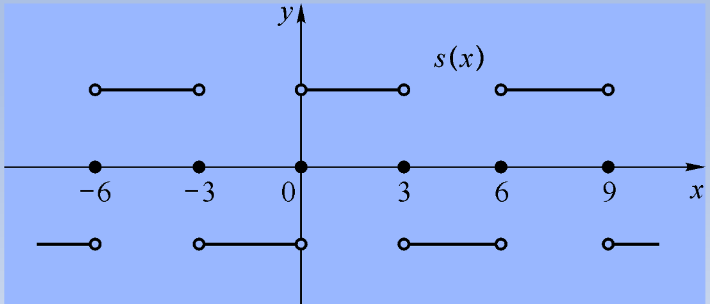
$$f(x)=\begin{cases}-1, & -3\le x<0 \\ 1, & 0\le x<3\end{cases},$$

将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数，并作傅里叶级数的和函数图形.

**解:** 所给函数 $f(x)$ 满足 Dirichlet 条件，它在 $x=3k$ $(k=0, \pm1, \pm2,\ldots)$ 处不连续，在其它点处连续，当 $x=3k$ 时，傅里叶级数收敛于

$$\frac{-1+1}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0,$$

当 $x\neq3k$ 时，傅里叶级数收敛于 $f(x)$，傅里叶级数的和函数 $s(x)$ 图形如下



$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi}{3}xdx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(-1)\cdot\cos\frac{n\pi}{3}x+\int_{0}^{3}1\cdot\cos\frac{n\pi}{3}xdx\right]=0\ (n=0,1,2,\dots),$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi}{3}xdx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(-1)\cdot\sin\frac{n\pi}{3}x+\int_{0}^{3}1\cdot\sin\frac{n\pi}{3}xdx\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3}x\Big|_{-3}^{0}-\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3}x\Big|_{0}^{3}=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\ (n=1,2,\dots),$$

于是$f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{3}x+b_n\sin\frac{n\pi}{3}x\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\sin\frac{n\pi}{3}x$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{3}x\qquad(x\neq 3k,k=0,\pm1,\pm2,\dots).$$

**例 11** 将函数

$$M(x)=\begin{cases}\dfrac{px}{2} & 0\le x<\dfrac{l}{2}\\ \dfrac{p(l-x)}{2} & \dfrac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$$

展开成正弦级数.

**解** 对 $M(x)$进行奇延拓. 则

$a_n=0(n=0, 1, 2, 3, \cdots)$,

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l M(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}[\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{px}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}\frac{p(l-x)}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx]$$

令 $t=l-x$, 则

$$b_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{px}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{0}\frac{pt}{2}\sin\frac{n\pi(l-t)}{l}(-dt)\right]$$

$$=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{px}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx+(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{pt}{2}\sin\frac{n\pi t}{l}dt\right].$$

当 $n=2, 4, 6, \cdots$时, $b_n=0$;

当 $n=1, 3, 5, \cdots$时,

$$b_n=\frac{4p}{2l}\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2pl}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

于是得

$$M(x)=\frac{2pl}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{2pl}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi}{l}x$$

$$=\frac{2pl}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{l}-\cdots\right)\quad(0\le x\le l).$$

**例 12** 求函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{2\pi}{T}x, & 0\le x\le\dfrac{T}{2}\\ 0\ , & -\dfrac{T}{2}\le x<0\end{cases}$ 的傅立叶展开式。

**解**：以 $T$ 为周期作周期延拓，周期延拓后的函数在 $x$ 轴处处连续，

$$a_0=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi}{T}xdx=\frac{2}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}xdx=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi}{T}x\cos\frac{2\pi n}{T}xdx$$

$$=-\frac{\left(1+(-1)^n\right)}{\pi\left(n^2-1\right)}=\begin{cases}\dfrac{-2}{\pi\left(4k^2-1\right)}, & n=2k\\ 0 & ,n=2k+1\end{cases}\qquad n\ne1,\quad k=1,2,\cdots$$

另求$a_1$：

$$a_1=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi x}{T}\cos\frac{2\pi x}{T}dx=-\frac{1}{4\pi}\cos\frac{4\pi x}{T}\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}dx=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi x}{T}\sin\frac{2\pi nx}{T}dx=0,\quad n\neq 1$$

另求$b_1$：

$$b_1=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi x}{T}\sin\frac{2\pi x}{T}dx=\frac{1}{2}$$

所以函数$f(x)$的傅立叶级数为：

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{T}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos\frac{4\pi nx}{T},x\in\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$$

课堂练习

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}-1, -\pi \le x \le 0 \\ 1+x^2, 0 < x \le \pi\end{cases}$，则 $f(x)$以 $2\pi$ 为周期的傅里叶级数在 $x=3\pi$ 处收敛于______；

(2) 设 $f(x)=x^2\ (0 \le x \le 1)$, $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，

则 $s(\frac{3}{2})=$______；

(3) 设 $f(x)=x \quad (0 \le x \le \pi)$, $f(x)$ 的余弦级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=$______；

(4) 写出 $f(x)=\begin{cases}-1, -\pi \le x \le 0 \\ 1, 0 < x \le \pi\end{cases}$ 在$[-\pi,\pi]$上傅里叶级数的和函数;

(5) 设 $f(x)=x-x^2\ (0<x<1)$, $s(x)$ 是$f(x)$在$(0,1)$内以 2 为周期的正弦级数的和函数，求当 $x\in(1,2)$ 时 $s(x)$ 的表达式.