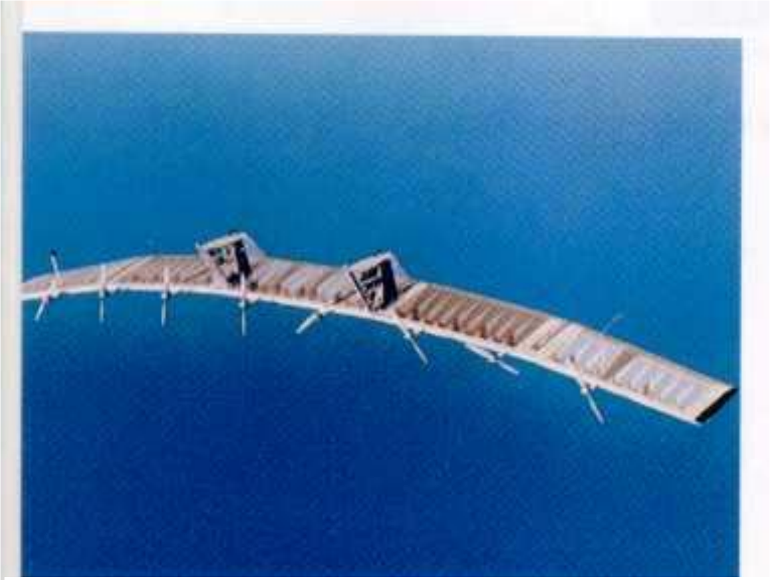
§ 2.3 功与能

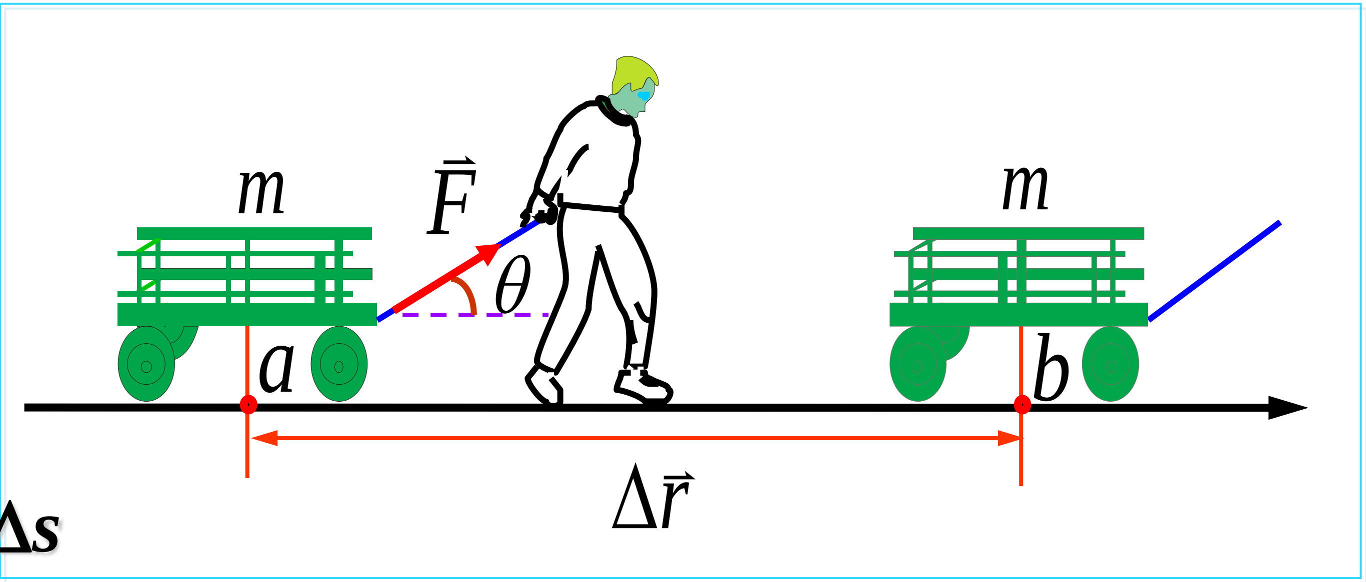
大海的能量 (冲浪)



太阳能飞机

一、功

1、恒力的功



恒力$\vec{F}$，夹角θ

位移$\Delta\vec{r}$，路程Δs

功 $A=(F\cos\theta)\Delta s=F\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\theta$

$$\boxed{A=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}}$$

- **注意**
  - **功是标量**
  - **功有正功、负功之分，功的正负功取决于θ。**
  - **力对物体作负功，也可以说物体反抗外力作功。**

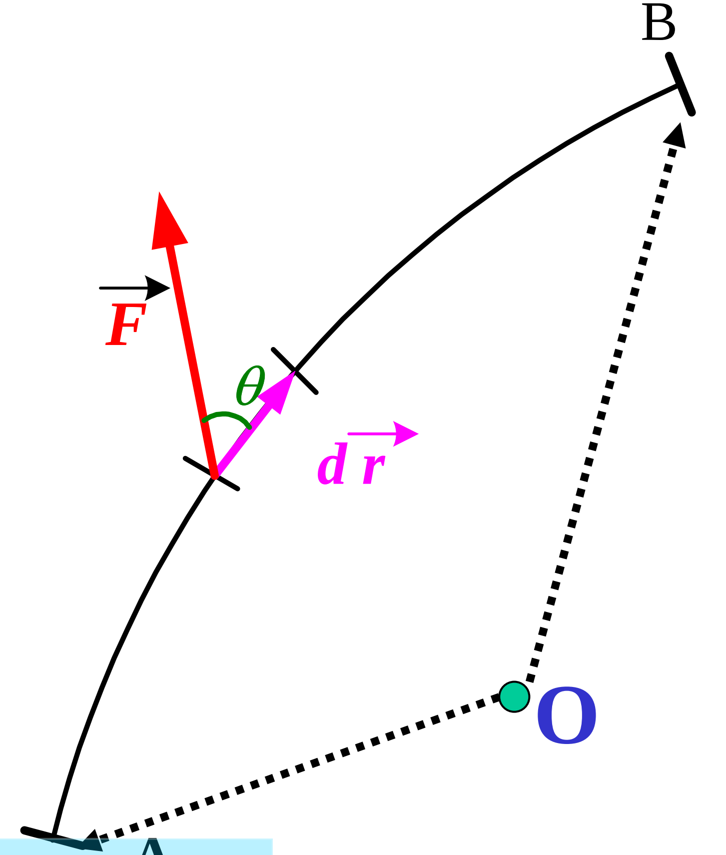
2、变力的功

$$dA=\vec{F}\bullet d\vec{r}=F\left|d\vec{r}\right|\cos\theta$$

元功等于力与元位移的标积

由a点移动到b点，总功

$$\boxed{\begin{aligned}A&=\int_A^B\vec{F}\cdot d\vec{r}\\&=\int_A^B F\cos\theta dr\end{aligned}}$$



功是过程量，是力的一种空间累积效应

讨论

(1) 在直角坐标系中

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b (F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z)$$

(2) 合力的功—等于各分力沿同一路径所作功的代数和

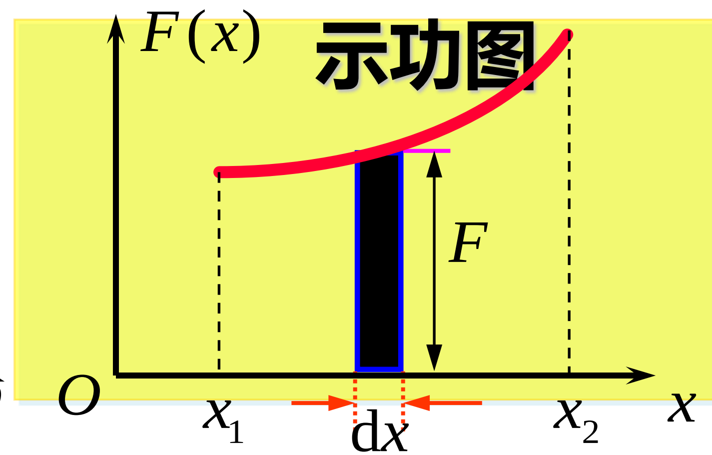
$$A=\int_{r_a}^{r_b} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b (\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_a^b \vec{F}_1\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_a^b \vec{F}_2\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\cdots+\int_a^b \vec{F}_n\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=A_1+A_2+\cdots+A_n$$

(3) 功在数值上等于示功图曲线下的面积

$$A=\int_{x_1}^{x_2} F(x)\mathrm{d}x$$



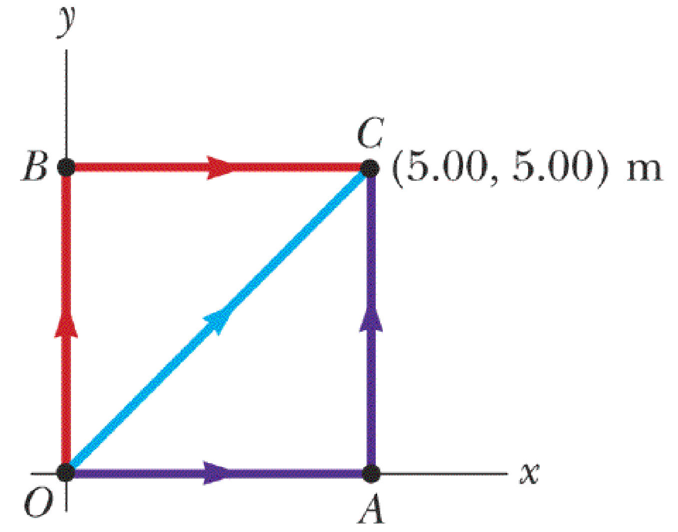
(4) 功率

$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

例1、力作用在物体上使得物体在xy面上运动，

$$\vec{F} = 2y\hat{i} + x^2\hat{j} \quad \textbf{(SI)}$$

物体从*O*点运动到*C*点，求物体沿*OAC*、*OBC*、*OC*路径时力所作的功。



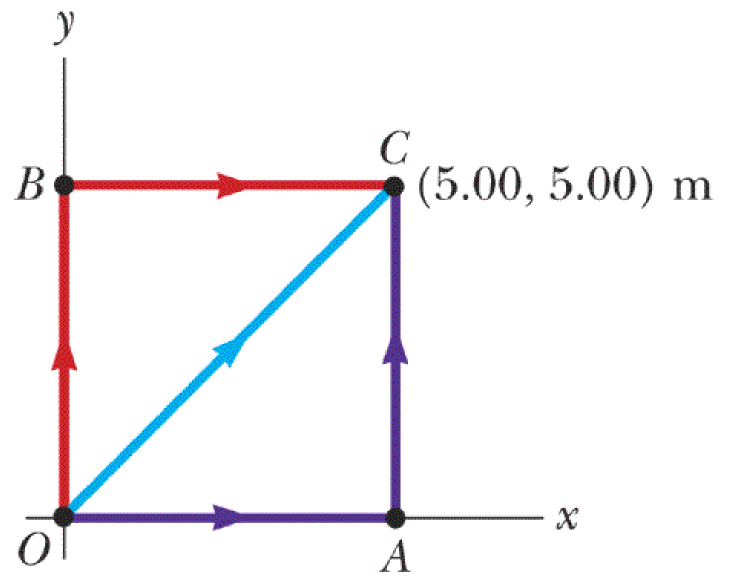
解：(1)沿路径OAC

$$\int_{OAC} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{OA} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{AC} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

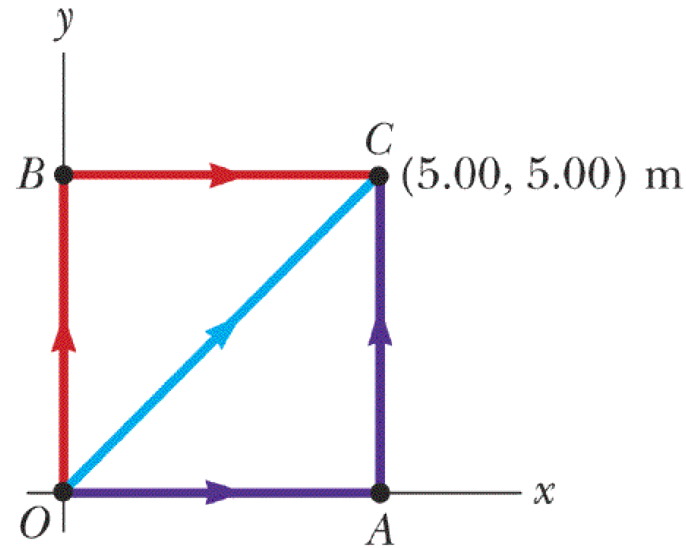
$$\int_{OAC} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{OA} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{AC} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \underbrace{\int_0^5 (2y\hat{i} + x^2 \hat{j})\cdot\left(dx\hat{i} + dy\,\hat{j}\right)}_{(y=0)} + \underbrace{\int_0^5 (2y\hat{i} + x^2 \hat{j})\cdot\left(dx\hat{i} + dy\,\hat{j}\right)}_{(x=5)}$$

$$= \int_0^5 (x)^2 dy = \int_0^5 25 dy = 125 \text{ J}$$



(2)沿路径OBC



$$\int_{OBC} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{OB} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{BC} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_0^5 (2y\hat{i} + x^2\hat{j})\cdot dy\,\hat{j} + \int_0^5 (2y\hat{i} + x^2\hat{j})\cdot dx\,\hat{i}$$

$$= \int_0^5 \left(x(=0)\right)^2 dy + \int_0^5 2y(=5)dx = \int_0^5 2\times 5dx = 50\ \mathrm{J}$$

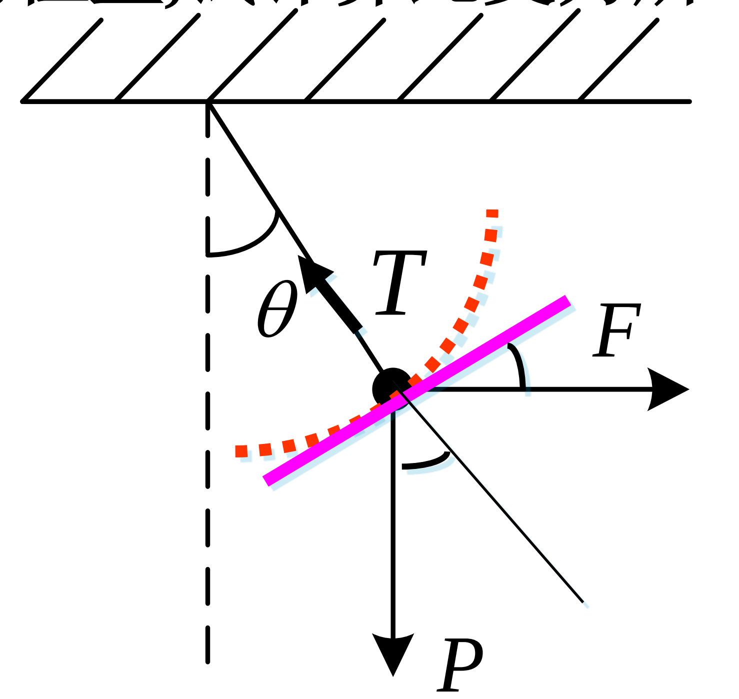
(3)沿路径OC:

$$y = x,\quad d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\,j$$

$$\int_{OC} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{OC} (2y\hat{i} + x^2 j)\cdot(dx\hat{i} + dy\,j) = \int_{OC} (2ydx + x^2 dy)$$

$$= \int_0^5 2xdx + \int_0^5 y^2 dy = 25 + \frac{125}{3} = 66.7\ \mathrm{J}$$

例2：重量为*P*的摆锤系于绳的下端，绳长为*l*，上端固定，如图所示，一水平变力大小为F从零逐渐增大，缓慢地作用在摆锤上，使摆锤虽然移动，但在所有时间内均无限接近力平衡，一直到绳子与竖直线成 θ_0 角的位置，试计算此变力所做的功.



解：在所有时间内摆锤无限接近力平衡，由受力情况可知

$$F = Ptg\theta$$

故变力所做的功

$$A = \int \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_0^{\theta_0} F\cos\theta l d\theta$$

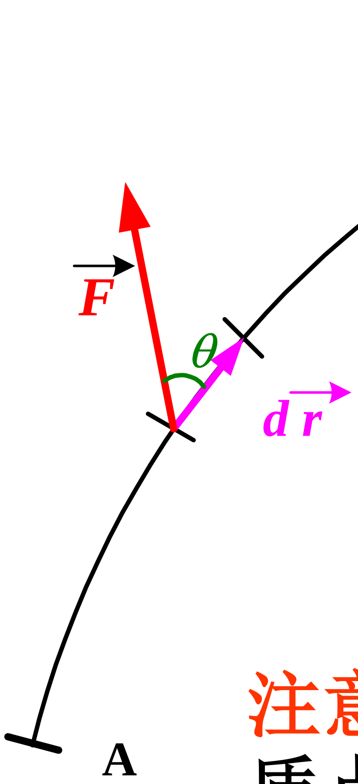
$$= \int_0^{\theta_0} P\sin\theta l d\theta = Pl\left(1 - \cos\theta_0\right)$$

二、动能定理

由牛顿运动定律 $\vec{F}=\dfrac{d\vec{P}}{dt}$

$$dA=\vec{F}\bullet d\vec{r}=\frac{d\vec{P}}{dt}\bullet d\vec{r}=\left[d\left(m\vec{v}\right)\right]\bullet\frac{d\vec{r}}{dt}=\left[d\left(m\vec{v}\right)\right]\bullet\vec{v}$$

$$=d\left(mv\right)v=d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$



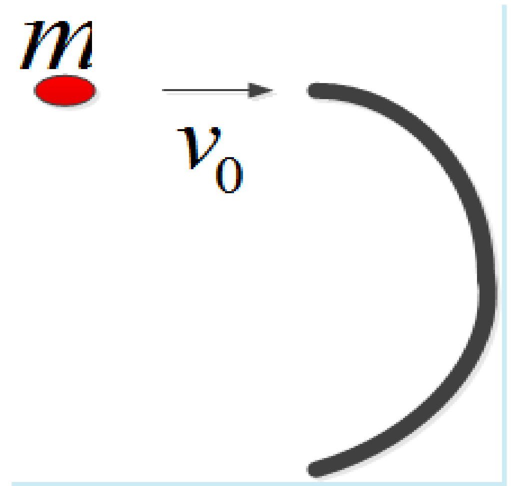
$$\boxed{dA=d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}$$ (动能定理的微分形式)

$$\boxed{A_{ab}=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2}$$ 质点的动能定理

注意：在一空间过程中，合力对质点做的功等于质点动能的增量；动能定理只适用于惯性系

例： 在光滑水平面上固定一个半圆形滑槽，质量为**m**的滑块以初速率v_0沿切线方向进入滑槽一端，如图所示，设滑块与滑槽的摩擦系数为 μ ，试证明当滑块从滑槽另一端滑出时，摩擦力所做的功为

$$A=\frac{1}{2}mv_0^2\left(e^{-2\pi\mu}-1\right)$$



解：滑块收到摩擦力和正压力，正压力不做功，由动能定理

$$\boxed{A=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2}$$

由牛顿运动定律 $F_N=m\dfrac{v^2}{R}$

$$F=-\mu F_N=-m\mu\frac{v^2}{R}=m\frac{dv}{dt}$$

$$-\mu\frac{v^2}{R}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{v}{R}\frac{dv}{d\theta}$$

则有

$$\int_{v_0}^{v}\frac{1}{v}dv=-\int_0^{\pi}\mu d\theta$$

$$v=v_0e^{-\pi\mu}$$

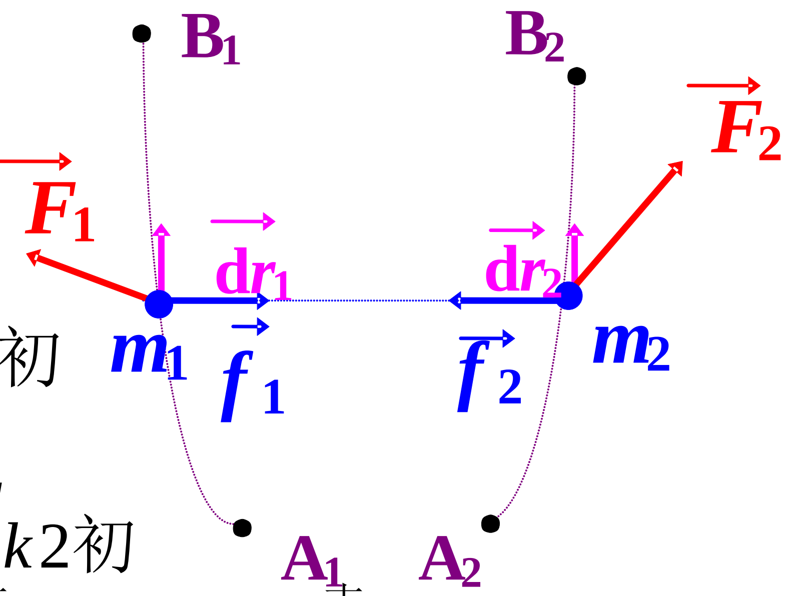
则有

$$A=\frac{1}{2}mv_0^2\left(e^{-2\pi\mu}-1\right)$$

三、质点系的动能定理

设质点系由质点 m_1、m_2组成

由质点的动能定理



对m_1 $$\int_{初}^{末}\left(\vec{F}_1+\vec{f}_1\right)\bullet d\vec{r}_1=E_{k1末}-E_{k1初}$$

对m_2 $$\int_{初}^{末}\left(\vec{F}_2+\vec{f}_2\right)\bullet d\vec{r}_2=E_{k2末}-E_{k2初}$$

两式相加 $$\int_{初}^{末}\vec{F}_1\bullet d\vec{r}_1+\int_{初}^{末}\vec{F}_2\bullet d\vec{r}_2+\int_{初}^{末}\vec{f}_1\bullet d\vec{r}_1+\int_{初}^{末}\vec{f}_2\bullet d\vec{r}_2$$

$$=\left(E_{k1末}+E_{k2末}\right)-\left(E_{k1初}+E_{k2初}\right)$$

$$\int_{初}^{末}\vec{F_1}\bullet d\vec{r_1}+\int_{初}^{末}\vec{F_2}\bullet d\vec{r_2}+\int_{初}^{末}\vec{f_1}\bullet d\vec{r}_1+\int_{初}^{末}\vec{f_2}\bullet d\vec{r}_2$$

$$=\left(E_{k1末}+E_{k2末}\right)-\left(E_{k1初}+E_{k2初}\right)$$

$$\boxed{A_{外}+A_{内}=E_{k末}-E_{k初}}$$

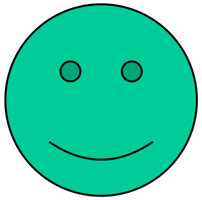
质点系的动能定理

注意： 适用于惯性系；

内力做功也可以改变动能；

内力虽成对出现，但内力做功之和不一定为0

意义： 外力对质点系做的功与内力对质点系做的功之和等于质点系动能的增量。



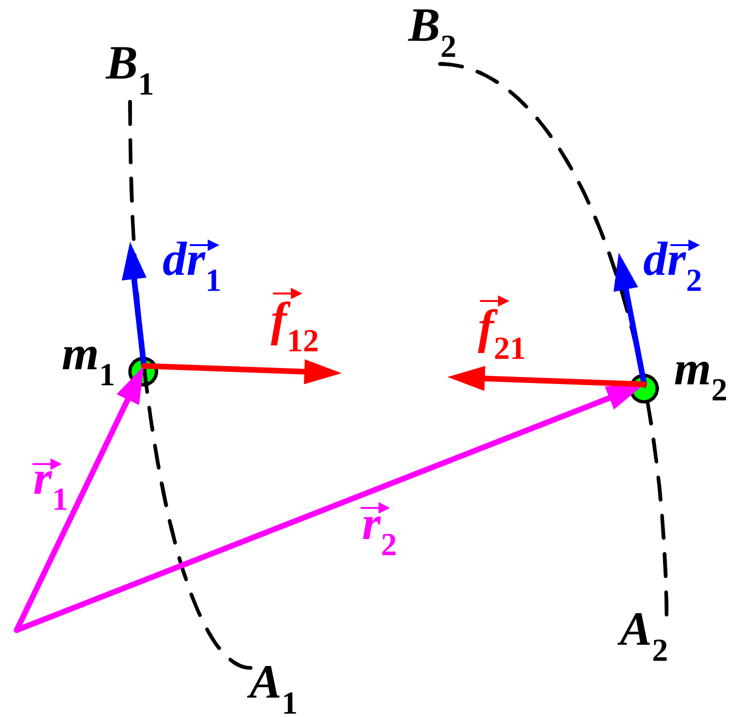
一对内力做的功

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

则 $dA = \vec{f}_{12}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_2$

$$= \vec{f}_{21}\cdot(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1)$$

$$= \vec{f}_{21}\cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_{21}$$



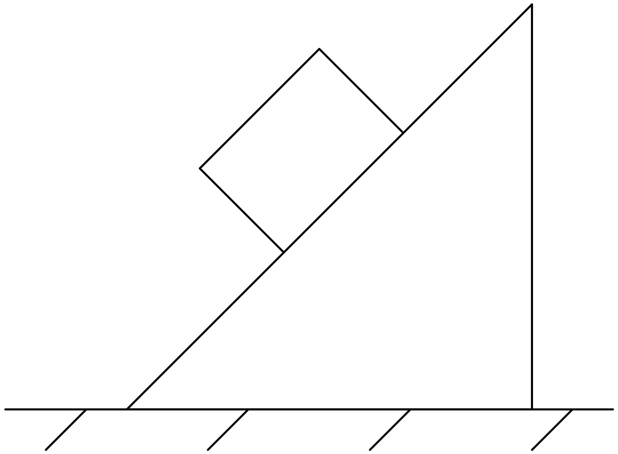
$$\boxed{dA_{对} = \vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_{21}}$$

m_2相对于m_1的元位移

意义：一对力元功之和等于一个质点受的力和此质点相对于另一质点元位移的点积

例、桌面上有一三角形物体，物体与桌面间摩擦忽略，物体斜面上有一木块，斜面光滑摩擦忽略。

解：



$$\boxed{\mathrm{d}A_{对} = \vec{f}_{21} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{21}}$$

木块对物体的正压力和物体对木块的支持力是一对内力，其做功之和为 零

四、保守力和势能

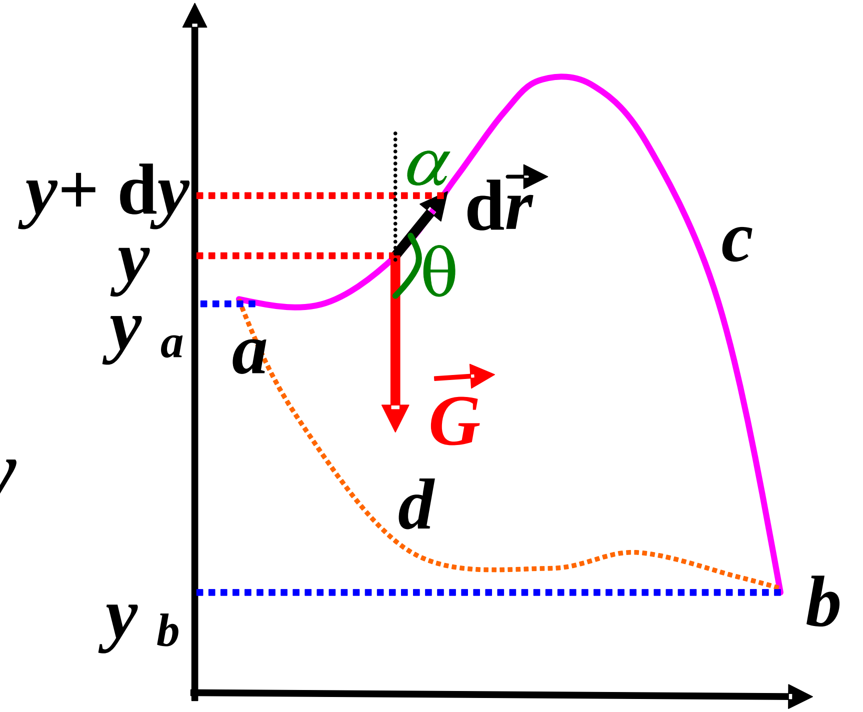
1、保守力

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

● 重力做功 $\vec{G}=m\vec{g}$

$$dA=\vec{G}\cdot d\vec{r}=G\cos\theta\, ds$$
$$=-mgds\cos\alpha=-mg\,dy$$

$$A=\int_a^b dA=\int_{y_a}^{y_b}-mg\,dy$$
$$=-(mgy_b-mgy_a)$$



重力做功仅依赖于初始的位置函数，而跟路径无关

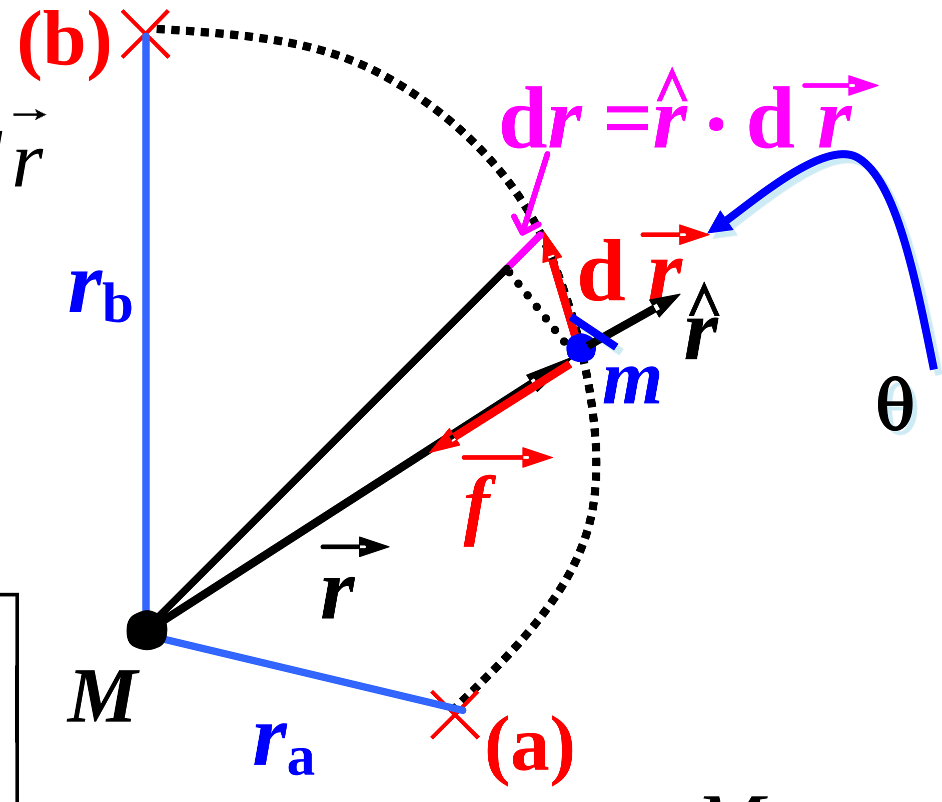
●万有引力做功

$$A=\int_a^b \vec{f}\cdot d\vec{r}=-\int_{r_a}^{r_b} G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r}$$

$$=-\int_{r_a}^{r_b} G\frac{Mm}{r^2}|d\vec{r}|\cos\theta$$

$$=-\int_{r_a}^{r_b} G\frac{Mm}{r^2}dr$$

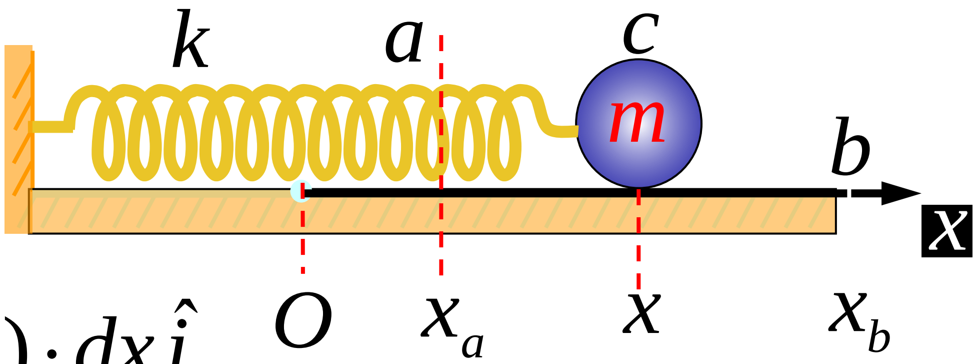
$$=-\left[\left(-G\frac{Mm}{r_b}\right)-\left(-G\frac{Mm}{r_a}\right)\right]$$



$$\vec{f}=-G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

万有引力力做功仅依赖于初始的位置函数，而跟路径无关

●弹力做功



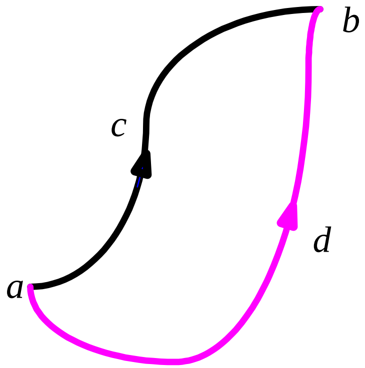
$$\vec{F}_s = -kx\,\hat{i}$$

$$A = \int_{x_a}^{x_b} \vec{F}_s \cdot d\vec{r} = \int_{x_a}^{x_b} (-kx\,\hat{i}) \cdot dx\,\hat{i}$$

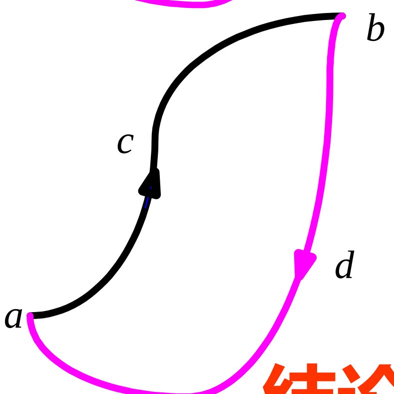
$$= -\int_{x_a}^{x_b} kx\,dx = -\left(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2\right)$$

万有引力力做功仅依赖于初始的位置函数，而跟路径无关

保守力：做功与相对路径无关，只决定于质点的始末位置的力。 如：重力、万有引力、弹力等



$$\int_{acb} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{adb} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

结论：保守力沿任意闭合路径一周所作的功为0

非保守力：做功与相对路径有关的力。

如：摩擦力(耗散力)、爆炸力(作功为正)

2、势能

重力做功 $$A=\int_{y_a}^{y_b}-mg\,dy=-(mgy_b-mgy_a)$$

万有引力做功 $$A=\int_a^b\vec{f}\cdot d\vec{r}=-\left[\left(-G\frac{Mm}{r_b}\right)-\left(-G\frac{Mm}{r_a}\right)\right]$$

弹力做功 $$A=\int_{x_a}^{x_b}\overrightarrow{F}_s\cdot d\vec{r}=-\left(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2\right)$$

统一表示为 $$\boxed{A=\int_a^b\overrightarrow{F}\cdot d\vec{r}=-\left[E_p(\vec{r}_b)-E_p(\vec{r}_a)\right]}$$

E_p 称为势能 $$\boxed{E_p(\vec{r}_b)-E_p(\vec{r}_a)=-A_{保守}}$$

在保守力场中，势能增量等于保守力所作功的负值。

◆ 势能的讨论

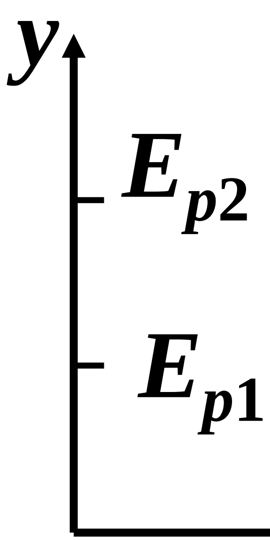
$$E_p(\vec{r}_b)-E_p(\vec{r}_a)=-W_{保守}$$

注意:

(1)只有在保守力时才引入势能,非保守力无此概念;

(2)选定势能零点

$$E_p(\vec{r})=E_p(\vec{r})-0=-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$



重力势能 $E_p(y)=mgy$ 零点，y=0处

引力势能 $E_p(r)=-G\dfrac{Mm}{r}$ 零点,$E_p(r_0=\infty)=0$ 处

弹性势能 $E_p(x)=\dfrac{1}{2}kx^2$ 零点，x=0处

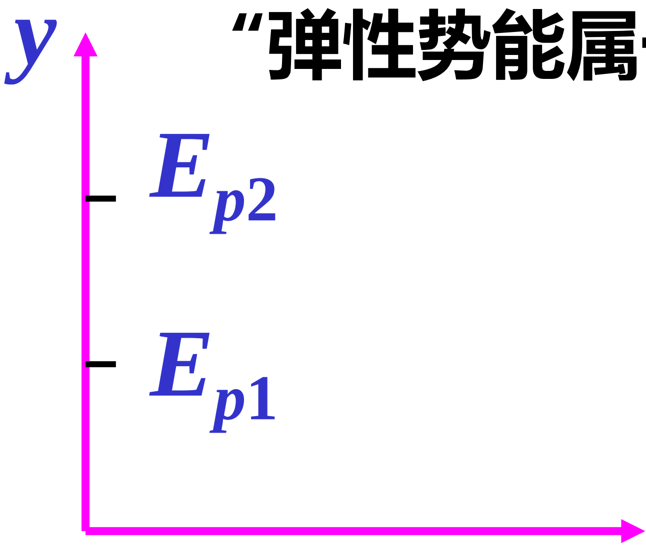
$$E_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}) - 0 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \overrightarrow{F} \cdot d\vec{r}$$

(3)势能数值跟势能零点的选择有关，但势能增量与零点选择无关；

(4)势能属于系统；

如“重力势能属于物体和地球整个系统”

“弹性势能属于小球和弹簧整个系统”



五、功能原理与机械能守恒定律

1、功能原理

由质点系动能定理 $\boxed{A_{外}+A_{内}=A_{k末}-A_{k初}}$

内力分为保守内力与非保守内力

$$A_{外}+A_{保内}+A_{非保内}=E_{k末}-E_{k初}$$

而保守力与势能之间 $A_{保内}=-(E_{p末}-E_{p初})$

则有 $A_{外}-(E_{p末}-E_{p初})+A_{非保内}=E_{k末}-E_{k初}$

$$A_{外} - (E_{p末} - E_{p初}) + A_{非保内} = E_{k末} - E_{k初}$$

$$A_{外} + A_{非保内} = (E_{p末} - E_{p初}) + E_{k末} - E_{k初}$$

$$= (E_{p末} + E_{k\ 末}) - (E_{p初} + E_{k初})$$

引入**机械能** $E=E_p+E_k$

$$\boxed{A_{外} + A_{非保内} = E_{末} - E_{初}}$$

功能原理(积分形式)

作用于质点系内各质点上的所有外力和非保守内力在某一过程中作功的总和，等于质点系机械能的增量。

$$A_{外}+A_{非保内} = E_{末} - E_{初}$$

2、机械能守恒定律

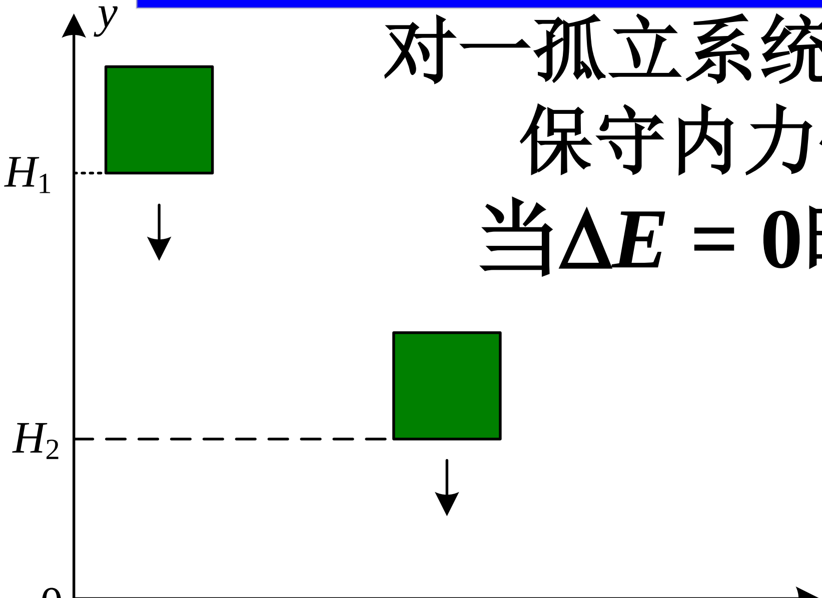
$A_{外}+A_{非保内}=0$ 则有 $E_{末}=E_{初}$

或 $E=E_p+E_k=$恒量

机械能守恒定律：当系统只有保守内力作功时，系统的机械能保持不变。

◆ 普遍的能量守恒定律

在一个孤立系统内，能量可以由一种形式转换为另一种形式，但系统的总能量保持不变。



$Ep=0$

对一孤立系统 (不受外界作用的系统)

保守内力作功 ⇒ 机械能守恒

当$\Delta E = 0$时，$\Delta E_k = -\Delta E_p = A_{保内}$

$A_{保内}>0$

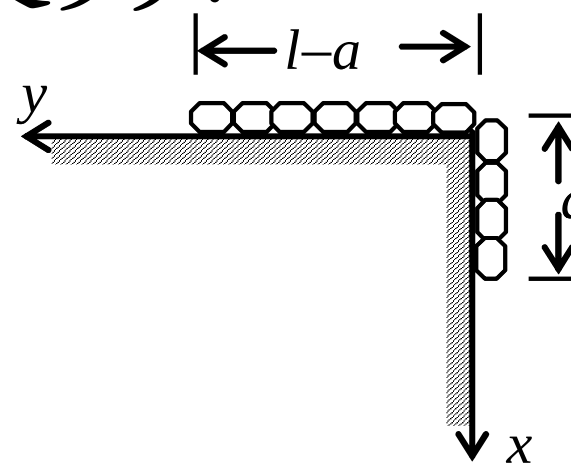
$E_p \rightleftarrows E_k$

$A_{保内}<0$

例、一链条总长为l，质量为m，放在桌面上，并使其部分下垂，下垂一段的长度为a，设链条与桌面之间的滑动摩擦系数为μ，令链条由静止开始运动，则

(1)到链条刚离开桌面的过程中，摩擦力对链条作了多少功?

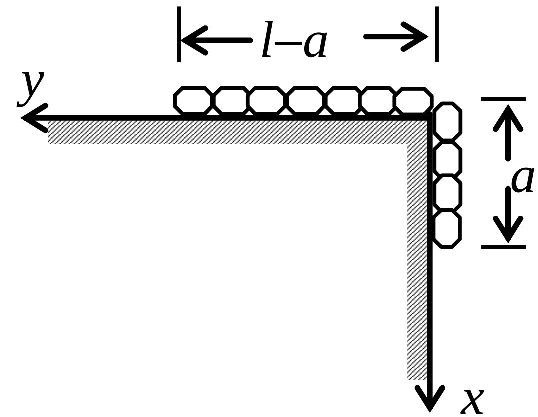
(2)链条刚离开桌面时的速率是多少?



解：(1)建立如图坐标. 某一时刻桌面上全链条长为y,则摩擦力大小为：$f=\mu m\dfrac{y}{l}g$

摩擦力的功：

$$W_f=\int_{l-a}^{0} f\mathrm{d}y=\int_{l-a}^{0}\mu\frac{m}{l}gy\mathrm{d}y=\frac{\mu mg}{2l}y^2\Big|_{l-a}^{0}=-\frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2$$



(2)以链条为对象，应用质点的动能定理：

$$\sum W=\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2-\frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2$$

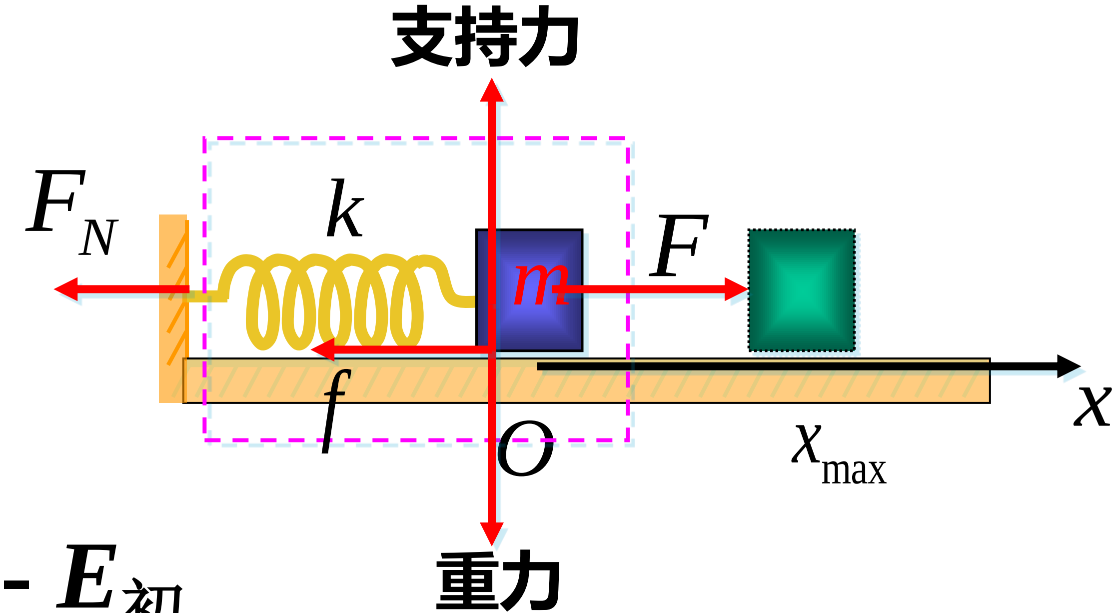
其中　$\sum W=W_P+W_f$，$v_0=0$

$$W_p=\int_a^l\frac{mg}{l}x\mathrm{d}x=\frac{mg(l^2-a^2)}{2l}$$

所以　$$\frac{mg(l^2-a^2)}{2l}-\frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2=\frac{1}{2}m\upsilon^2$$

得　$$\upsilon=\sqrt{g/l}\left[(l^2-a^2)-\mu(l-a)^2\right]^{1/2}$$

例：　墙壁上固定一水平放置的轻弹簧，弹簧的另一端连一质量为*m*的物体，弹簧的弹性系数为*k*，物体*m*与水平面间的摩擦系数为μ，开始时，弹簧没有伸长，现以恒力*F*将物体自平衡位置开始向右拉动，试求此系统所具有的最大势能。



$$A_{外}+A_{非保内}=E_{末}-E_{初}$$

解：设最远处坐标为x_{max}，设平衡点为弹性势能零点，

以物体和弹簧为系统，受力为重力、支持力、拉力F、摩擦力f，墙壁对系统的拉力；

在移动过程中，只有拉力F和摩擦力f做功；

系统初态机械能为零，末态时只有弹性势能。

则由功能原理

$$Fx_{\max} - fx_{\max} = \frac{1}{2}kx_{\max}^2$$

即

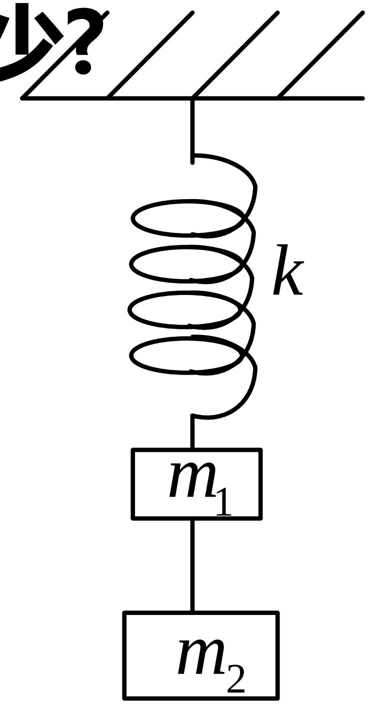
$$Fx_{\max} - \mu mgx_{\max} = \frac{1}{2}kx_{\max}^2$$

可得 $$x_{\max} = \frac{2}{k}\left(F - \mu mg\right)$$

则系统所具有的最大势能

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2{}_{\max} = \frac{2}{k}\left(F - \mu mg\right)^2$$

例 如图所示,倔强系数为k的弹簧悬挂着质量为m_1,m_2两个物体,开始时处于静止,突然把两物体间的连线剪断,求m_1的最大速度为多少?



解：末剪断前,系统处于平衡态,设弹簧伸长量为x_1,则有

$$kx_1=\left(m_1+m_2\right)g$$

$$x_1=\frac{m_1+m_2}{k}g$$

剪断线后,m_1不再静止,因为它受到向上的力kx_1大于向下的重力,故向上加速运动,当它所受合力为零时,速度达到最大值.此时弹簧伸长量为

$$x_2=\frac{m_1g}{k}$$

m1,弹簧与地球为一系统,向上运动过程中机械能守恒.选择开始向上运动时为重力势能零点,则有

$$\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}kx_2^2+m_1g\left(x_1-x_2\right)+\frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{m_2^2}{km_1}g}$$