§ 2.4 动量定理与动量守恒定律

力

空间累积 ⇨ 功 ⇨ **动能定理**

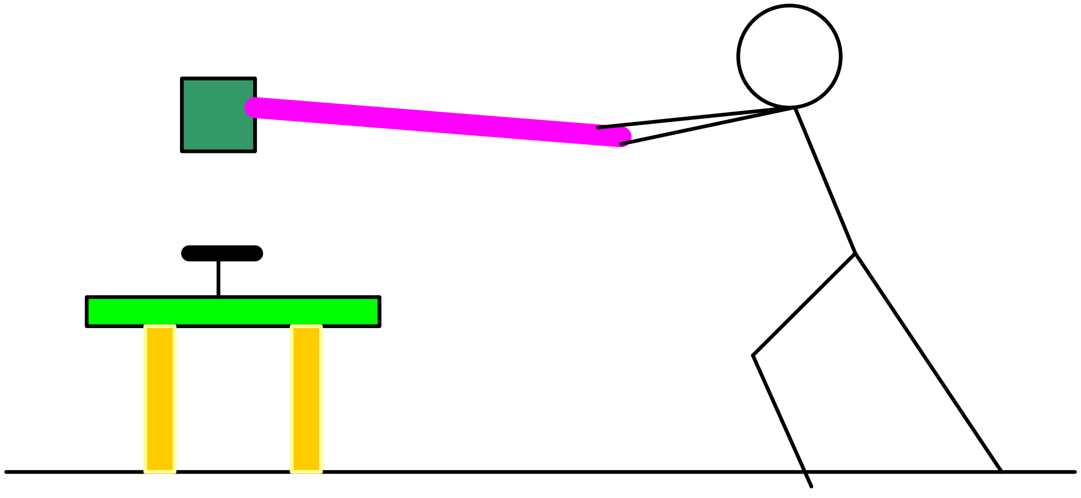
功能原理

机械能守恒定律

$\vec{F} \bullet d\vec{r}$

时间累积 ⇨ ? ⇨ ?

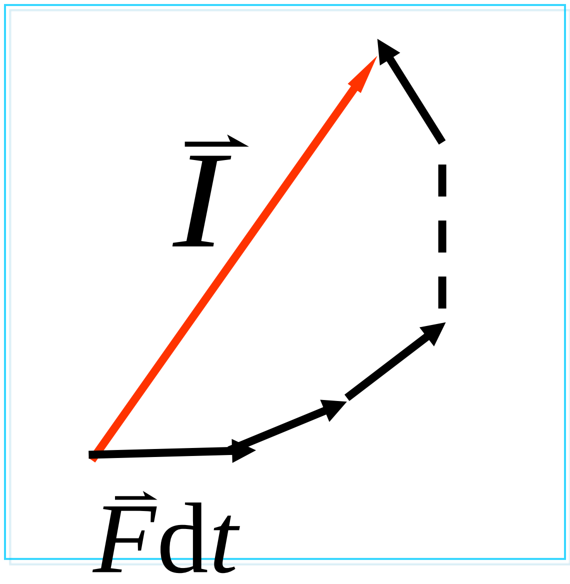
$\vec{F}dt$



一、冲量

由牛顿第二定律 $\vec{F}=\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ **有** $\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}$

冲量：(反映力对时间的累积效应)
作用力与作用时间的乘积。



元冲量： $\mathrm{d}\vec{I}=\vec{F}\mathrm{d}t$

力在t_1到t_2时间内的冲量为

$$\vec{I}=\int\mathrm{d}\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$$

冲量$\vec{I}$ 的方向是元冲量的矢量和（$\sum_i\vec{F}_i\mathrm{d}t$）的方向。

二、动量定理

牛顿第二定律 $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$

$$d\vec{I}=\vec{F}dt=d\vec{p}$$ **动量定理(微分)**

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}d\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1=\Delta\vec{p}$$

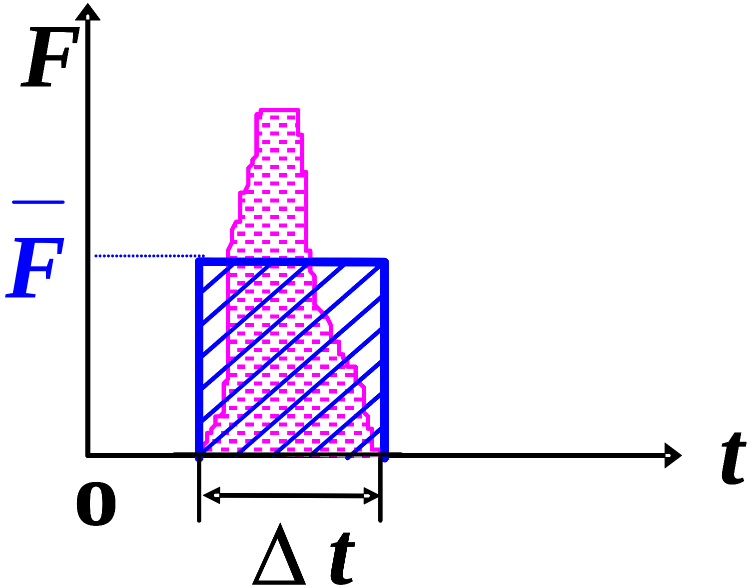
……**动量定理(积分)**

➢ 讨论

- **由动量定理可知，作用在质点上的合力的冲量由质点的始末状态决定而与中间过程无关。因此，动量定理对打击、碰撞等问题特别有效。**

●在碰撞、冲击等问题中，力的作用时间短而峰值很大，这种力称为**冲力**，为描述冲力，引入**平均力**

$$\overline{\vec{F}}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt}{t_2-t_1}=\frac{\vec{I}}{\Delta t}=\frac{m\vec{v}_2-m\vec{v}_1}{\Delta t}$$



$$\vec{I}=\vec{p}_{末}-\vec{p}_{初}=\overline{\vec{F}}\Delta t$$

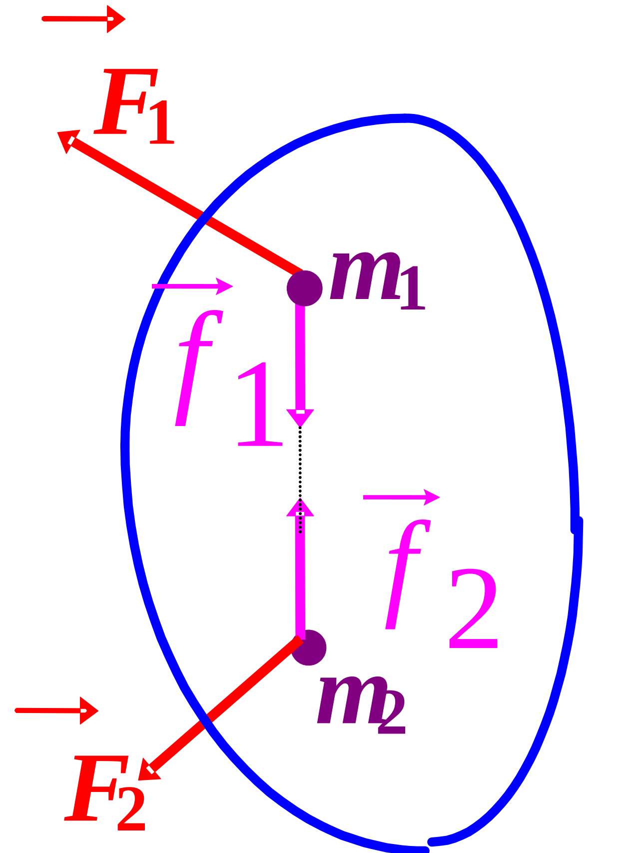
$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$$

●直角坐标系中

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \mathrm{d}t = m\upsilon_{2x} - m\upsilon_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{d}t = m\upsilon_{2y} - m\upsilon_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \mathrm{d}t = m\upsilon_{2z} - m\upsilon_{1z} \end{cases}$$

三、质点系的动量定理

外力：F_1、F_2　　内力：　$\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$



对m_1　$$\int_{初}^{末}\left(\vec{F}_1+\vec{f}_1\right)dt=\vec{P}_{1末}-\vec{P}_{1初}$$

对m_2　$$\int_{初}^{末}\left(\vec{F}_2+\vec{f}_2\right)dt=\vec{P}_{2末}-\vec{P}_{2初}$$

两式相加，得

$$\int_{初}^{末}\left(\vec{F}_2+\vec{F}_1\right)dt+\int_{初}^{末}\left(\vec{f}_2+\vec{f}_1\right)dt=\left(\vec{P}_{1末}+\vec{P}_{2末}\right)-\left(\vec{P}_{1初}+\vec{P}_{1初}\right)$$

$$\int_{初}^{末}\left(\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_1}\right)dt+\int_{初}^{末}\left(\overrightarrow{f_2}+\overrightarrow{f_1}\right)dt=\left(\overrightarrow{P}_{1末}+\overrightarrow{P}_{2末}\right)-\left(\overrightarrow{P}_{1初}+\overrightarrow{P}_{1初}\right)$$

$$\int_{初}^{末}\left(\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_1}\right)dt=\overrightarrow{P}_{末}-\overrightarrow{P}_{初}$$

或 $\vec{I}=\overrightarrow{P}_{末}-\overrightarrow{P}_{初}$ ……质点系的动量定理

注意：

a、外力可改变系统的动量，也可改变某一个质点的动量；

b、内力只改变某一个质点动量，不能改变系统动量；

c、质点系的动量定理可避开内力。

意义：系统所受的合外力的冲量等于系统动量的增量

四、动量守恒定律

$$\int_{初}^{末}\left(\vec{F_2}+\vec{F}_1+\cdots\vec{F}_n\right)dt=\vec{P}_{末}-\vec{P}_{初}$$

条件 $\sum\vec{F}_i=0$ **则** $\vec{P}_{末}=\vec{P}_{初}$

意义：若作用在质点系上所有外力的矢量和为零，则该质点系的动量保持不变。

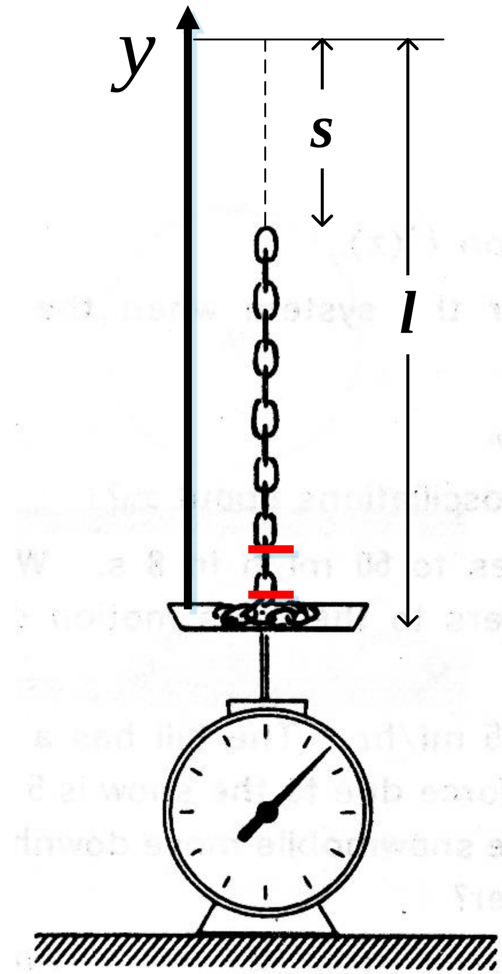
讨论:若系统的合外力不为零，但可能合外力在某一方向的分量等于零，则该方向的总动量守恒。

当 $\Sigma F_{ix}=0$ $\Sigma m_i\upsilon_{ix}=$ **常量**

当 $\Sigma F_{iy}=0$ $\Sigma m_i\upsilon_{iy}=$ **常量**

当 $\Sigma F_{iz}=0$ $\Sigma m_i\upsilon_{iz}=$ **常量**

例: 长度为l，质量为M的一个链子，垂直落到一个天平上，问当链子下落s时天平的读数是多少? (忽略单个链子的大小)



解法一

链子下落时自由落体，故下落高度s后的速度为

$$v = \sqrt{2gs}$$

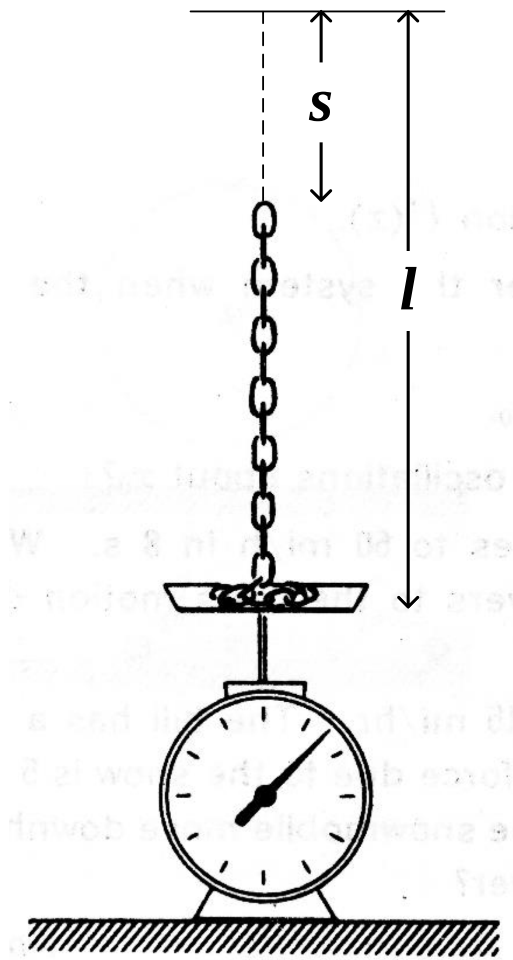
对dt间隔的元过程，应用动量定理

$$Fdt = 0 - (-dm\,v) = v\frac{M}{l}dy$$

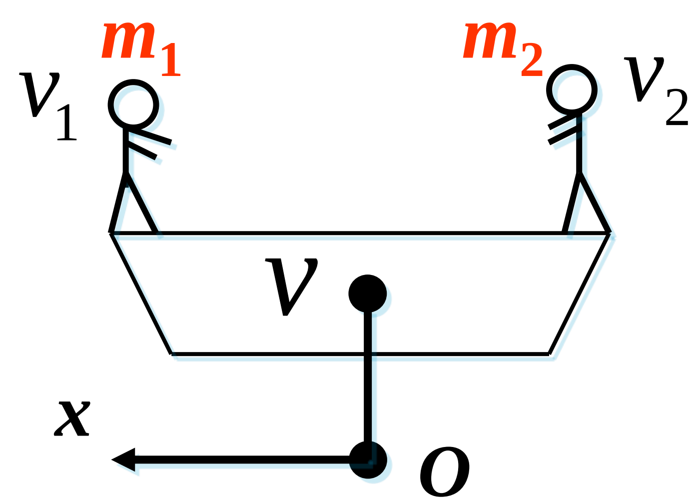
$$F = \frac{M}{l}v\frac{dy}{dt} = \frac{M}{l}v^2 = \frac{M}{l}(2gs) = 2Mg\frac{s}{l}$$

则天平的读数即冲力与下落链子的重力之和：

$$N = Mg\frac{s}{l} + 2Mg\frac{s}{l} = 3Mg\frac{s}{l}$$



例：质量为M，绳长为L的小船静浮于河中，小船的两头分别站着质量分别为m_1和m_2(m_1 〉m_2)的人，他们同时相对于船以相同的速率u走向开始位于船正中，但固定于河中的木桩，如图所示。若忽略水对船的阻力作用，试问
谁先走到木桩处?



解：选船、甲乙为整个系统，水平方向不受外力，故此方向系统动量守恒，选桩所在处为坐标原点，建立如图所示坐标系

令船对地的速度为v，m_1对地速度为$v1$，$m2$对地速度为$v2$

由动量守恒 $Mv + m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$

由 $v_{人地} = v_{人船} + v_{船地}$ 得

$$v_2 = u + v \qquad v_1 = -u + v$$

三式结合

$$Mv + m_1(-u + v) + m_2(u + v) = 0$$

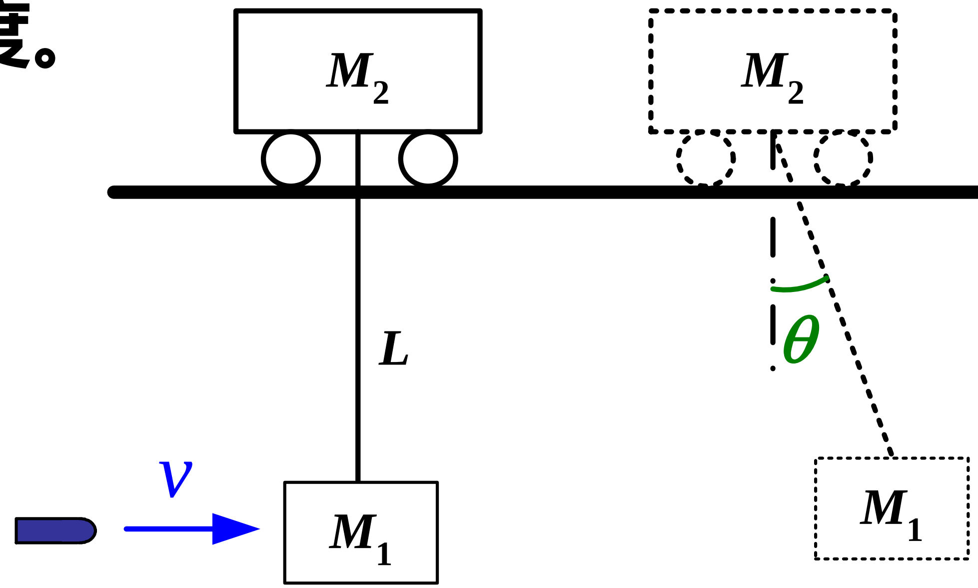
得 $v = \dfrac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2} u > 0$

故船沿x轴正方向运动

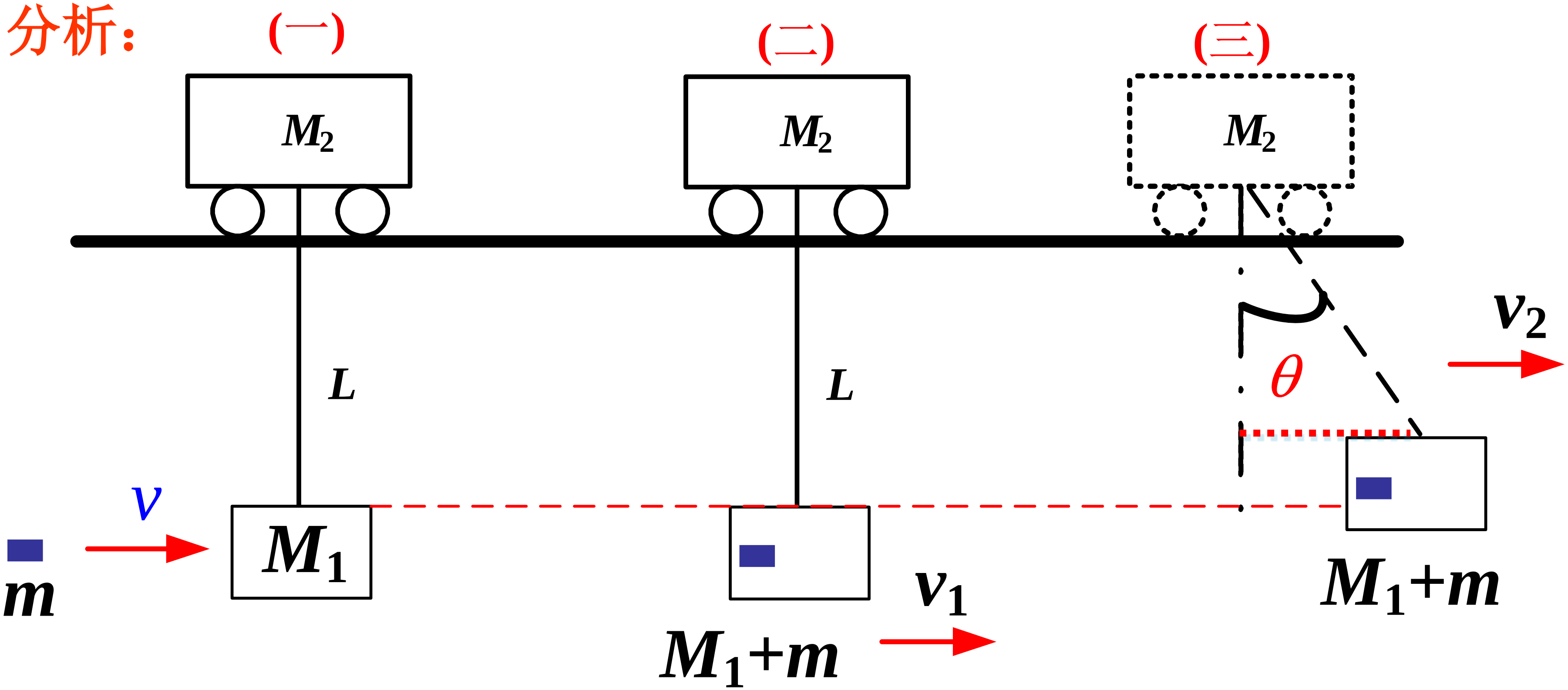
$$v_2 = \frac{M + 2m_1}{M + m_1 + m_2} u \quad v_1 = -\frac{M + 2m_2}{M + m_1 + m_2} u$$

可见，m_2先到达木桩

例1：光滑水平面上有一小车，质量为M_2，小车下吊着一质量为M_1的木块，绳长为L，质量为m的一发子弹从左
端水平方向射入木块，使得木块与竖直方向间最大夹角为θ，求子弹的初速度。



分析：



动量守恒　　　　机械能守恒

解：

第一步：子弹射入木块期间，两者组成的系统水平方向动量守恒

$$mv=(M_1+m)v_1$$

第一步：子弹射入后，子弹-木块系统有速度v_1，并一起摆动，当摆到最大角度时，小车具有和子弹-木块系统相同的速度v_2，并一起向右运动，这个过程中总系统的机械能守恒。

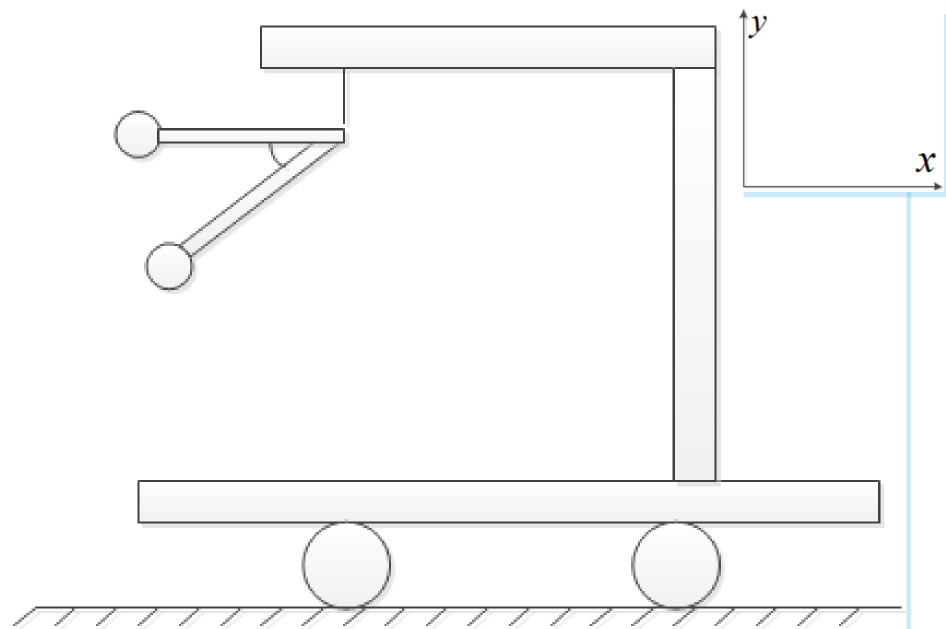
$$\frac{1}{2}(M_1+m)v_1^2=\frac{1}{2}(M_1+M_2+m)v_2^2+(M_1+m)gL(1-\cos\theta)$$

第三步：子弹-木块-小车三者组成的系统沿水平方向动量守恒

$$mv=(M_1+M_2+m)v_2$$

得 $$\boxed{v=\frac{M_1+m}{m}\sqrt{\frac{M_1+M_2+m}{M_1}2gL(1-\cos\theta)}}$$

例：如图，一小车停在光滑的水平面上，小车支架上用细杆悬挂一质量为m的钢球，细杆长L，细杆质量忽略不计，小车及支架质量M。开始时小车静止，把钢球拉到水平位置，由静止开始释放。求当钢球落到与水平方向夹角60度位置时，小车朝什么方向移动，移动了多少距离?



解：

小车、细杆和钢球组成的系统水平方向动量守恒

$$Mv + mv_x = 0$$

两边同时乘以dt后，积分 $\int_0^t Mvdt + \int_0^t mv_x dt = 0$

$$M\Delta x_M + m\Delta x_{mx} = 0$$

由相对位移公式，在x方向有 $\Delta x_{mx} = \Delta x_{mxM} + \Delta x_M$

即 $\Delta x_{mx} = L(1-\cos\theta) + \Delta x_M = L/2 + \Delta x_M$

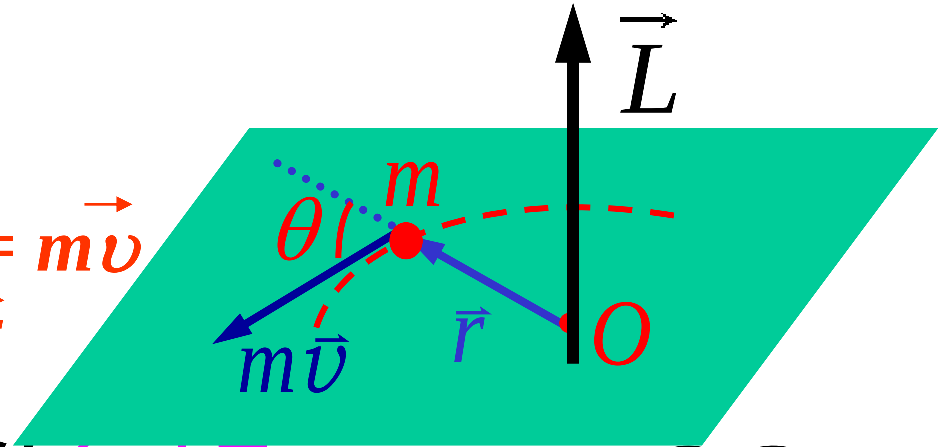
将此式带入上式

$$M\Delta x_M + m(L/2 + \Delta x_M)$$

$$\Delta x_M = -\frac{ml}{2(M+m)}$$

§2.5 角动量

一、质点的角动量



质点*m*在某时刻的动量为 $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$

该时刻对某定点*o*的位矢为 $\vec{r}$

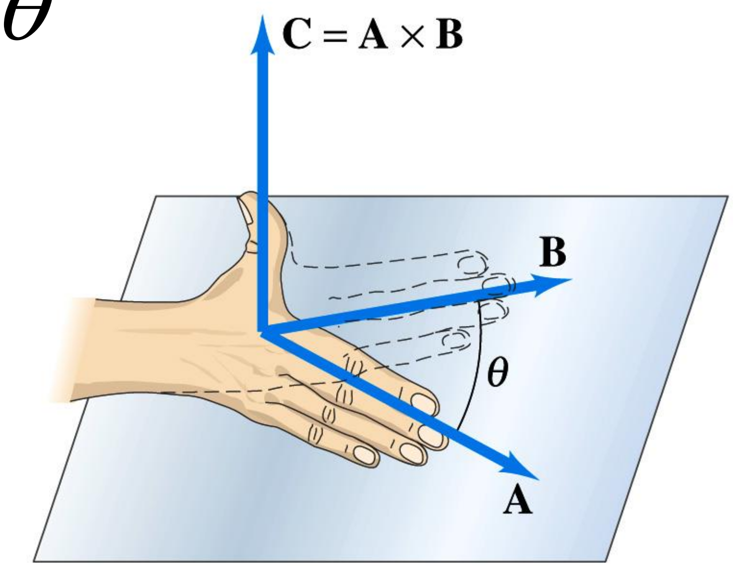
则此时刻质点*m* 对固定点 0的角动量

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

对某个
"固定点"

大小： $L = rp\sin\theta = rmv\sin\theta$

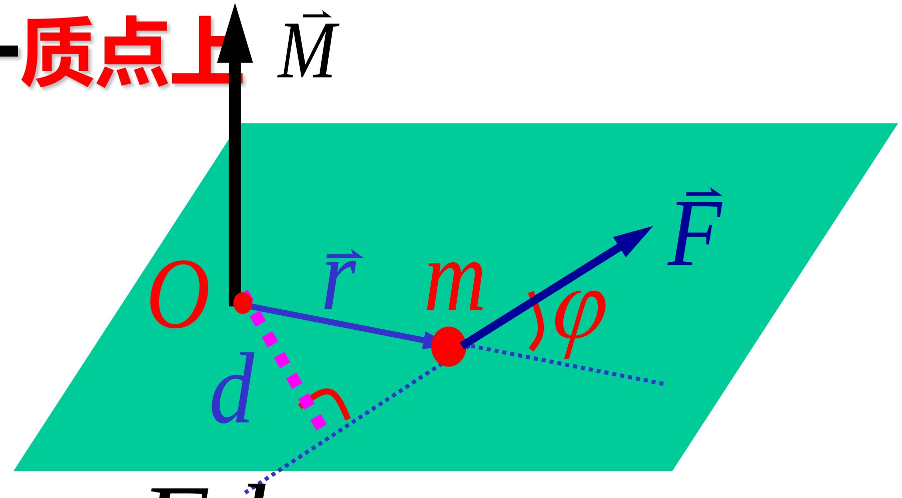
方向：右手螺旋法则



二、力对参考点的力矩

作用力$\vec{F}$作用于位矢为$\vec{r}$的某一**质点上**

作用力$\vec{F}$对参考点O的力矩



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

➤ 讨论

- **力矩的大小：** $M = Fr\sin\varphi = Fd$

  力臂d：作用力线到参考点O的垂直距离 $d = r\sin\varphi$

- **力矩的方向：位矢$\vec{r}$和力$\vec{F}$的矢积方向。**

- **同一力对不同参考点的力矩是不相同的。**

三、质点的角动量定理

由角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$

两边对时间求导

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$=\vec{v}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$$

$$\boxed{\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$ ……（**角动量定理**）

- **积分形式** $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1$ （$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t$ 为冲量矩）

力矩是使角动量发生变化的原因

四、质点的角动量守恒定律

由角动量定理 $\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

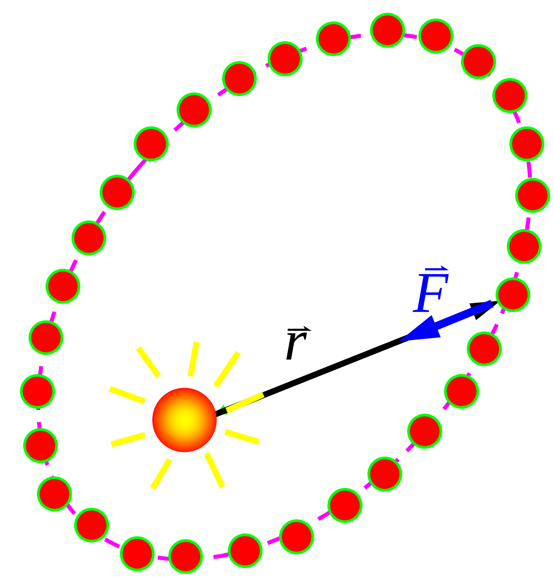
若 $\vec{M}=0$ 则 $\dfrac{d\vec{L}}{dt}=0$

$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{V}=$ 常数 ……质点的角动量守恒定律

- 力的作用线始终通过一固定点（力心），对力心的力矩为零。

质点在有心力作用下运动，角动量守恒。

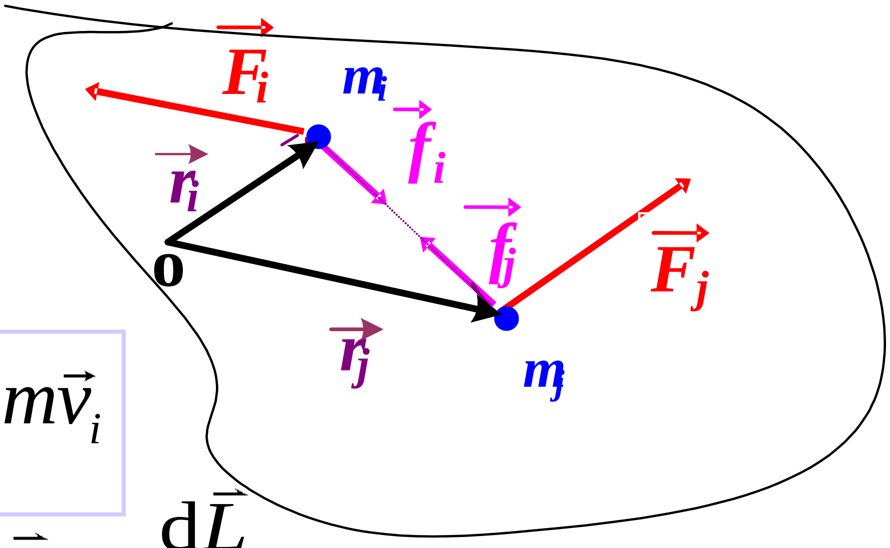
$L=pr=m\upsilon r=$ 常量



五、质点系的角动量

质元 i：质量 Δm_i

外力 $\vec{F}_i$　内力 $\vec{f}_i$



$$\boxed{\vec{L}=\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i=\sum_i \vec{r}_i\times m\vec{v}_i}$$

由质点的角动量定理 $\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

则质点系的角动量定理

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{L}_i\right)=\sum_i \vec{M}_i=\sum_i \vec{M}_{i外}+\sum_i \vec{M}_{i内}$$

其中的内力矩

内力矩 $\sum \vec{M}_{i内} = \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i$

对i和j两个质点的一对内力来说

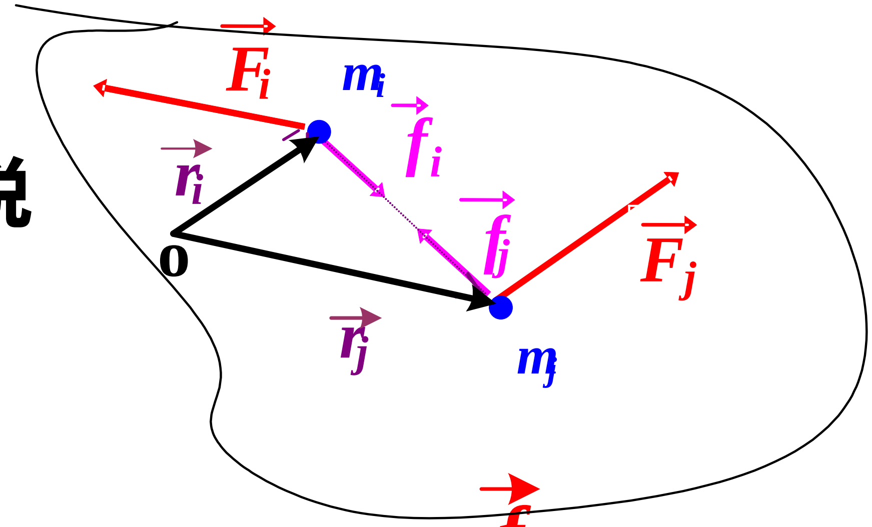
$$\vec{r}_i \times \vec{f}_i + \vec{r}_j \times \vec{f}_j$$

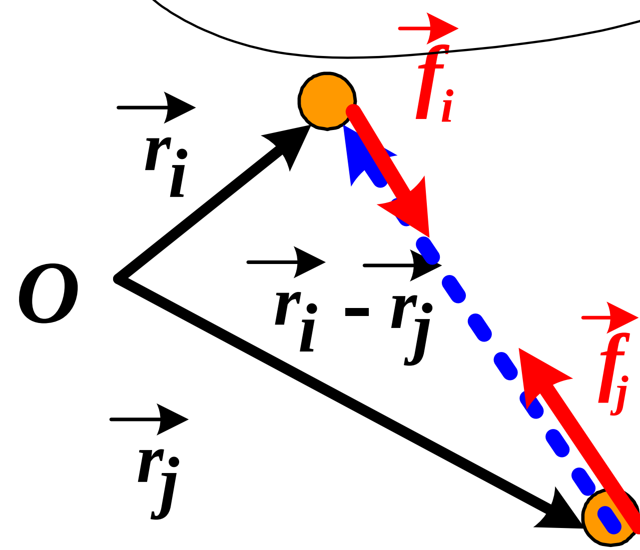
$$= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_i$$

$$= 0$$

系统的内力总是成对出现，故

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i = 0$$





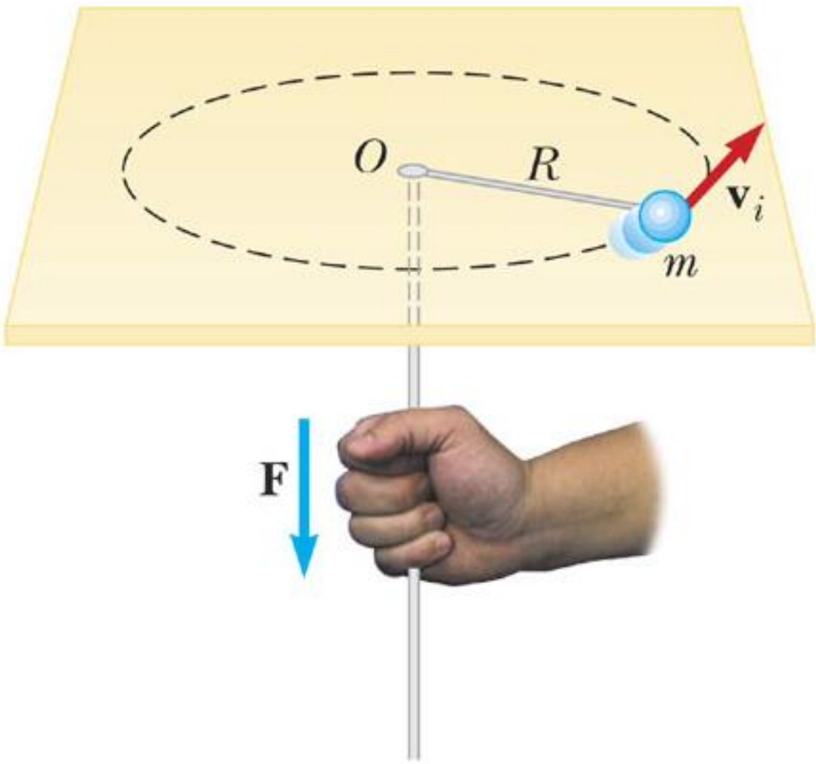
$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{L}_i\right)=\sum_i \vec{M}_i=\sum_i \vec{M}_{i外}+\sum_i \vec{M}_{i内}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{L}_i\right)=\sum_i \vec{M}_{i外}$$ ……质点系的角动量定理

当 $\sum_i \vec{M}_{i外}=0$ 有 $\sum_i \vec{L}_i=常量$ ……质点系的角动量守恒定理

意义：当质点系相对于某一定点所受的和外力矩为零时，该质点系相对于该定点的角动量不随时间变化。

例：桌面上一小球作圆周运动，一端用绳牵着，绳经过桌上的圆孔拉到桌子的下面，开始时圆周的半径为*R*，小球速度为V_i，现在有力拉动绳的另一端，使得圆周半径为r，则此时小球的速度V_f是多少?



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

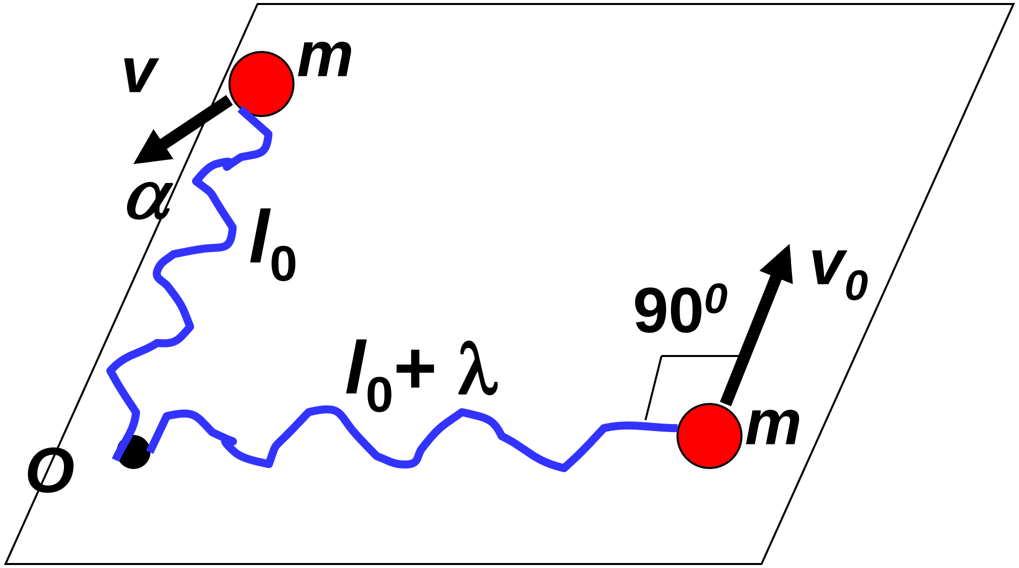
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{恒量}$$

$$Rmv_i = rmv_f$$

$$v_f = \frac{v_i R}{r} > v_i$$

例：原长为l_0，劲度系数为k的弹簧，一端固定在一光滑水平面上的O点，另一端系一质量为m的小球。开始时，弹簧被拉长λ，并给于小球一个与弹簧垂直的初速度v_0，如图所示试求当弹簧恢复其原长l_0时，小球速度v的大小和方向（即夹角α）



解：小球在向心力的作用下运动，角动量守恒，运动动过程只有弹性力作功，机械能守恒，则有

$$mv_0\left(l_0+\lambda\right)=ml_0 v\sin(\pi-\alpha)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}k\lambda^2=\frac{1}{2}mv^2$$

则有

$$v=\sqrt{v_0^2+\frac{k}{m}\lambda^2}$$

$$\alpha=\arcsin\frac{v_0\left(l_0+\lambda\right)}{l_0 v}$$

复习

$$A_{外}+A_{内}=E_{k末}-E_{k初}$$

$$A_{外}+A_{非保内}=E_{末}-E_{初}$$

若 $A_{外}+A_{非保内}=0$ 则有 $E_{末}=E_{初}$ 机械能守恒定律

$$\int_{初}^{末}\left(\vec{F}_2+\vec{F}_1+\cdots\vec{F}_n\right)dt=\vec{P}_{末}-\vec{P}_{初}$$

若 $\sum_i \vec{F}_i=0$ 则有 $\vec{P}_{末}=\vec{P}_{初}$ 动量守恒

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$ 角动量守恒

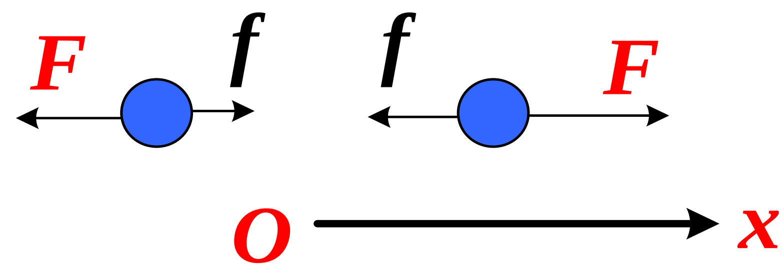
若 $\vec{M}=0$ 则有 $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=$常数

例：一个力学系统由两个质点组成，他们之间只有引力作用。若两质点所受外力的矢量和为零，则系统：

动量守恒？　机械能守恒？角动量守恒？

$$\int F dt = mv_{末} - mv_{初}$$

$$W_{外} + W_{非保内} = E_{末} - E_{初}$$



$$\int \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

$$\int_{初}^{末} \vec{M} dt = \vec{L}_{末} - \vec{L}_{初}$$

$$\vec{r} \times \vec{F}$$