第3次课

教学内容：

两个随机变量函数的分布。

教学目的及目标：

熟练掌握求随机变量函数的分布的基本方法，会求几种类型（三类——和、商、最大最小）函数的分布

教学重点：

分布函数法及其应用

教学难点：

分布函数法的正确使用，以及变换定理的理解和使用

3.5两个随机变量函数的分布

主要问题:

已知(X,Y)的分布,求 $Z=g(X,Y)$的分布。

一、离散型随机变量函数的分布

例1 设随机变量(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1) $X+Y$, (2) $|X-Y|$ 的分布律.

解

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

等价于

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$
$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
$\|X-Y\|$	1	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3

所以 $X+Y, |X-Y|$ 的分布律分别为

$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

$\lvert X-Y \rvert$	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

例2 设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布为

X	1	3
P	0.3	0.7

Y	2	4
P	0.6	0.4

求随机变量 $Z = X + Y$ 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立，所以

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\},$$

得

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

可得

P	(X,Y)	$Z=X+Y$
0.18	(1 , 2)	3
0.12	(1 , 4)	5
0.42	(3 , 2)	5
0.28	(3 , 4)	7

所以

$Z=X+Y$	3	5	7
P	0.18	0.54	0.28

例3 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律, 且 X 的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

试求 : $Z = \max(X, Y)$ 的分布律 .

解 因为X与Y相互独立,

所以 $P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j\}$,

于是

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$P\{\max(X,Y)=i\}$

$= P\{X=i, Y<i\}$

$+ P\{X \le i, Y=i\}$

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$\Rightarrow P\{\max(X,Y)=0\} = P\{0,0\} = \frac{1}{2^2},$$

$$P\{\max(X,Y)=1\} = P\{1,0\} + P\{0,1\} + P\{1,1\}$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^2}.$$

故 $Z=\max(X,Y)$ 的分布律为

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

一、离散型随机变量函数的分布

1、离散型随机变量和的分布

例1　若离散型随机变量X、Y独立，且$P(X=k)=a_k$，$k=0,1,2,\ldots$；　$P(Y=k)=b_k$，$k=0,1,2,\ldots$。求$Z=X+Y$的概率函数.

解:
$$P(Z=r)=P(X+Y=r)$$
$$=\sum_{i=0}^{r}P(X=i,Y=r-i)$$
由独立性
$$=\sum_{i=0}^{r}P(X=i)P(Y=r-i)$$
$$=a_0b_r+a_1b_{r-1}+\ldots+a_rb_0 \qquad r=0,1,2,\ldots$$

此即离散卷积公式

练1 若X和Y相互独立,它们分别服从参数为 λ_1,λ_2 的泊松分布，证明$Z=X+Y$服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布 .

解：依题意

$$P(X=i)=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!} \qquad i=0,1,2,\ldots$$

$$P(Y=j)=\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^j}{j!} \qquad j=0,1,2,\ldots$$

因此 $Z=X+Y$ 的可能取值为 0,1,2, …, 且

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$$
$$=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}$$
$$=\frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$$
$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}\quad k=0,1,2,\cdots$$

即Z服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布.

例2 设X和Y相互独立，$X \sim B(n_1, p), Y \sim B(n_2, p)$，求$Z=X+Y$的分布.

解：Z的全部可能取值为$0,1,\ldots, n_1+n_2$，而且当$k=0,1,\ldots,n_1+n_2$时，有

$$P\{Z=k\}=P\{X+Y=k\}=\sum_{i=0}^{k} P\{X=i, Y=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k} P\{X=i\} \cdot P\{Y=k-i\}=\sum_{i=0}^{k} C_{n_1}^{i} p^{i} q^{n_1-i} \cdot C_{n_2}^{k-i} p^{k-i} q^{n_2-k+i}$$

$$=p^{k} q^{n_1+n_2-k} \sum_{i=0}^{k} C_{n_1}^{i} \cdot C_{n_2}^{k-i}=p^{k} q^{n_1+n_2-k} C_{n_1+n_2}^{k}$$

$$=C_{n_1+n_2}^{k} p^{k} q^{n_1+n_2-k}$$

所以，$Z \sim b(n_1+n_2, p)$.

回忆二项分布的实际背景，我们可给出本问题的一种直观解答。

考虑一个Bernoulli试验，设试验的结果为 $\overline{A}$ 和A，且A发生的概率为p。

因为$X \sim B(n_1, p)$,所以X是将上述Bernoulli试验独立重复进行n_1次时事件A出现的次数。

同样，Y是将上述Bernoulli试验独立重复n_2次时事件A出现的次数.

于是，$Z=X+Y$就是在n_1+n_2次独立重复试验中事件A出现的次数，故$Z \sim B(n_1+n_2, p)$.

这个结果很容易推广至多个的情形:

若$\mathbf{X}_i \sim b(n_{\mathrm{i}}, p)$, i=1,2,…,m, 且X_1,…,X_m独立, 则

$X_1+X_2+\ldots+X_m \sim \mathrm{b}(n_1+n_2+\ldots+n_m, p)$。

上两例的结果通常称为泊松分布与二项分布的可加性，即

- 若 $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, 且X,Y独立，

  则 $X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$

- 若 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$, 且X,Y独立，

  则 $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

2、离散型随机变量函数分布的其它例子

例3 设随机变量X_1,X_2相互独立,并且有相同的几何分布: $P(X_i=k)=p(1-p)^{k-1}$， $k=1,2,\ldots$ ($i=1,2$)

求$Y=\max(X_1,X_2)$的分布 .

解一:记$1-p=q$， 则$P(Y=n)= P(\max(X_1,X_2)=n)$

$$=P(X_1=n, X_2\le n)+P(X_2=n, X_1<n)$$

$$= pq^{n-1}\sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} + pq^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} pq^{k-1}$$

$$= p^2q^{n-1}\frac{1-q^n}{1-q} + p^2q^{n-1}\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$$

$$= pq^{n-1}(2-q^n-q^{n-1}) \qquad n=1,2,\ldots$$

*解二: $P(Y=n)=P(Y\leq n)-P(Y\leq n\text{-}1)$

$$=P(\max(X_1,X_2)\leq n)-P(\max(X_1,X_2)\leq n\text{-}1)$$

$$=P(X_1\leq n,\ X_2\leq n)-P(X_1\leq n\text{-}1,\ X_2\leq n\text{-}1)$$

$$=[\sum_{k=1}^{n}pq^{k-1}]^2-[\sum_{k=1}^{n-1}pq^{k-1}]^2$$

$$=p^2[\frac{1-q^n}{1-q}]^2-p^2[\frac{1-q^{n-1}}{1-q}]^2$$

$$=(1-q^n)^2-(1-q^{n-1})^2$$

$$=pq^{n-1}(2-q^n-q^{n-1})$$ $n=0,1,2,\ldots$

问题：如何求Y=min(X_1,X_2)的分布？

留作课下思考

练2：设(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

求(1)$V=\mathrm{Max}(X,Y)$；(2)$U=\mathrm{Min}(X,Y)$；(3)$W=X+Y$的分布律。

解: （1） $V=Max(X,Y)$可能取值为：0,1,2,3,4,5。

$P\{V=0\}=P\{X=0,Y=0\}=0$；

$P\{V=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}$
$=0.01+0.01+0.02=0.04$；

类似可求得V取其它值的概率，从而得到V的分布律为

V	0	1	2	3	4	5
P	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

	V=0	V=1	V=2	V=3	V=4	V=5
Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

(2) $U=\mathrm{Min}(X,Y)$的可能取值为：0，1，2，3

$P\{U=i\}=P\{X=i,Y\geqq i\}+P\{X>i,Y=i\},i=0,1,2,3.$

U的分布律为

U	0	1	2	3
P	0.28	0.30	0.25	0.17

$U=0$　$U=1$　$U=2$　$U=3$

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

（3）$W=X+Y$的可能取值为：0,1,2,3,4,5,6,7,8.

$$P\{W=i\}=\sum_{k=0}^{i}P\{X=k,Y=i-k\}$$

W的分布律为

W	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

$W=0$ $W=1$ $W=2$ $W=3$ $W=4$ $W=5$

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

$W=6$

$W=7$

$W=8$

结论

若二维离散型随机变量　的分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

则随机变量函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X, Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{z_k = g(x_i, y_j)} p_{ij}, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

二、连续型随机变量函数的分布

问题： 设(X,Y)为连续型随机向量,其概率密度为$f(x,y)$,又$Z=g(X,Y)$为X与Y的函数（g连续）,若Z是连续型随机变量, 求Z的概率密度$f_Z(z)$ 。

一般方法：分布函数法——先求Z的分布函数$F_z(z)$。

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = P\{g(X,Y) \le z\} \\
&= P\{(X,Y) \in D \mid D: g(x,y) \le z\} \\
&= \iint\limits_{D:g(x,y)\le z} f(x,y)\,dxdy
\end{aligned}
$$

然后由$F_Z(z)$求出Z的概率密度$f_Z(z)$.

例4：设(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2+y^2)^2}$

$-\infty<x,\ y<+\infty$，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的概率密度。

解：　先求Z的分布函数$F_Z(z)$。

当$z\leqslant 0$时，$F_Z(z)=0$，当$z>0$时

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}=P\{X^2+Y^2\le z^2\}$$

$$=\iint\limits_{D:x^2+y^2\le z^2} f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{1}{\pi\left(1+r^2\right)^2}r\,dr$$

于是可得Z的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{2z}{(1+z^2)^2} & z>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

1. $Z=X+Y$ 的分布

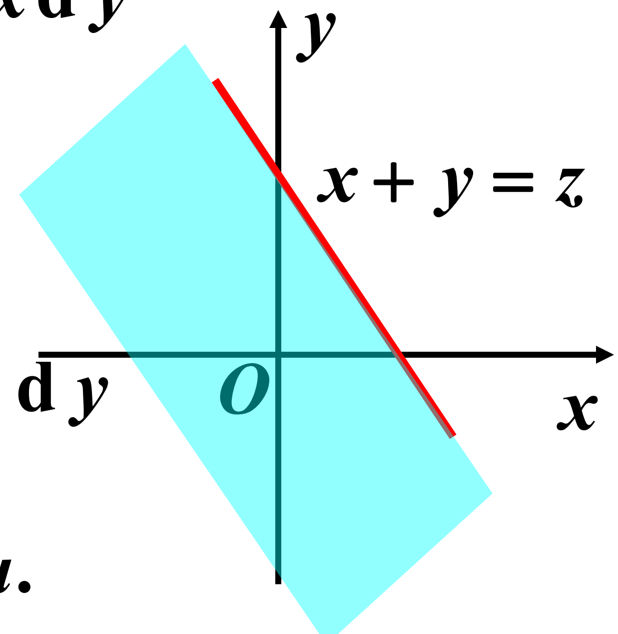
设 (X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$,则$Z=X+Y$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{x=u-y}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.$$



由此可得概率密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,\mathrm{d}y.$$

$f_X(z)$与$f_Y(z)$的卷积

由于 X 与 Y 对称, 所以也有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，当 X, Y 独立时，$f_Z(z)$ 也可表示为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y, \overset{\text{记作}}{=} f_X(z) * f_Y(z)$$

或 $$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

例5 设两个独立的随机变量 X 与 Y 都服从标准正态分布, 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由于 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty<x<+\infty,$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}, \quad -\infty<y<+\infty,$$

由公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x,$

得 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$\overset{t=x-\frac{z}{2}}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}.$$

即 $Z\sim N(0,2)$.

一般，设 X, Y 相互独立且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 则 $Z = X + Y$ 仍然服从正态分布，且有 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布. 即若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1,2,\cdots,n$ 则 $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} (c_i \sigma_i)^2)$

- 若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$

  则 $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$

练3 若X和Y独立,具有共同的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ 求$Z=X+Y$的概率密度 .

解：由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

为确定积分限,先找出使被积函数不为0的区域

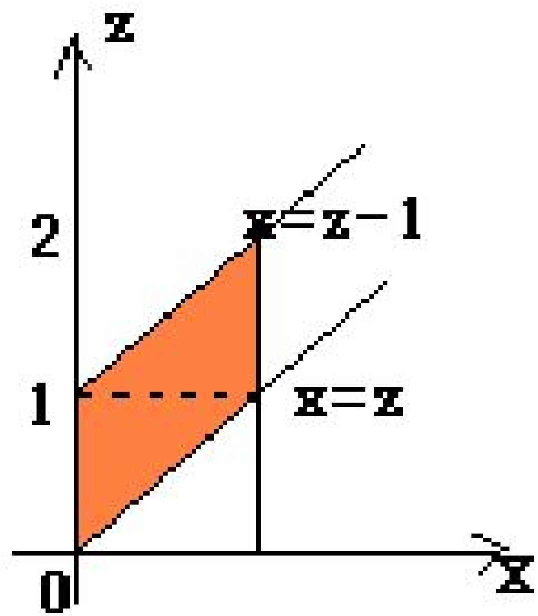
$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases} \quad \text{也即} \quad \begin{cases}0\le x\le 1\\ z-1\le x\le z\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

为确定积分限,先找出使被积函数不为0的区域

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z-x \le 1 \end{cases} \quad \text{也即} \quad \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ z-1 \le x \le z \end{cases}$$

如图示:



于是

$$f_Z(z)=\begin{cases} \int_0^z dx = z, & 0 \le z < 1 \\ \int_{z-1}^1 dx = 2-z, & 1 \le z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

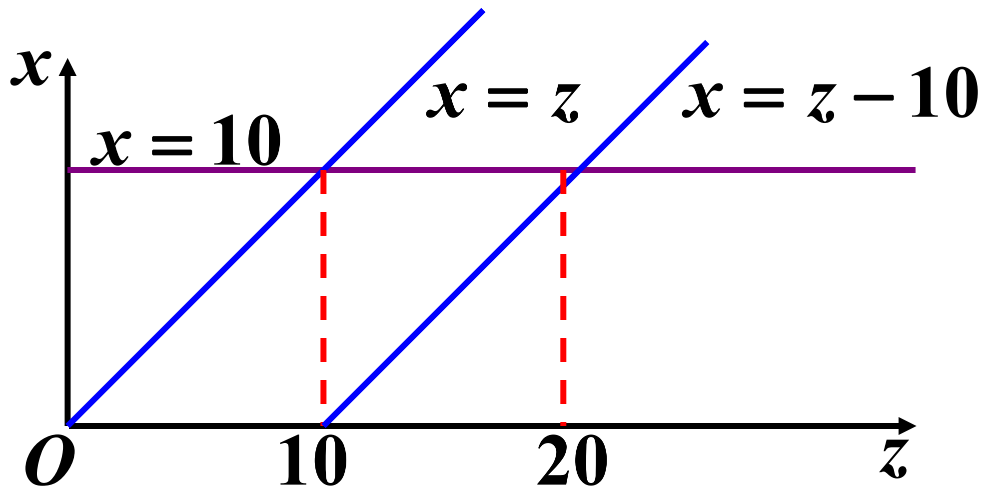
(*) 例 在一简单电路中，两电阻 R_1 和 R_2 串联联接，设 R_1, R_2 相互独立，它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求电阻 $R=R_1+R_2$ 的概率密度．

解 由题意知 R 的概率密度为

$$f_R(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x.$$



当$\begin{cases} 0 < x < 10, \\ 0 < z - x < 10, \end{cases}$ 即$\begin{cases} 0 < x < 10, \\ z - 10 < x < z, \end{cases}$时,

$f_R(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(z-x) \mathrm{d}\, x$ 中被积函数不为零.

此时

$$f_R(z)=\begin{cases}\int_0^z f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x, & 0\le z<10,\\ \int_{z-10}^{10} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x, & 10\le z\le 20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad(1)$$

将 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f(z-x)=\begin{cases}\dfrac{10-(z-x)}{50}, & 0\le z-x\le 10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

代入 (1) 式得

$$f_R(z)=\begin{cases}(600z-60z^2+z^3)/15000, & 0\le z<10,\\ (20-z)^3/15000, & 10\le z<20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

***例** 设 X_1, X_2 相互独立且分别服从参数为 $\alpha_1, \beta;$ α_2, β 的 Γ 分布 $(X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta), X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta))$, X_1, X_2 的概率密度分别为

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)}(\beta x)^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad \alpha_1 > 0, \beta > 0,$$

$$f_{X_2}(y) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha_2)}(\beta y)^{\alpha_2 - 1} e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad \alpha_2 > 0, \beta > 0,$$

试证明 $X_1 + X_2$ 服从参数为 $\alpha_1 + \alpha_2, \beta$ 的 Γ 分布.

证明 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x)\,\mathrm{d}x$

当 $z<0$ 时, 易知 $f_Z(z)=0.$

当 $z>0$ 时, $Z=X_1+X_2$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^z \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)}(\beta x)^{\alpha_1-1}\mathrm{e}^{-\beta x}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_2)}[\beta(z-x)]^{\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta(z-x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\mathrm{e}^{-\beta z}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1}\,\mathrm{d}x,\quad 令\quad x=zt,$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta z}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\triangleq A(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta z},$$

其中 $A = \dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\,\mathrm{d}t.$

由概率密度的性质可求 得 A,

$$1 = \int_0^{+\infty} f_Z(z)\,\mathrm{d}z = \frac{A}{\beta}\int_0^{+\infty}(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta z}\,\mathrm{d}(\beta z)$$

$$= \frac{A}{\beta}\Gamma(\alpha_1+\alpha_2),$$

即有 $$A=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

于是 $$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此有 X_1+X_2 服从参数为 $\alpha_1+\alpha_2,\beta$ 的 Γ 分布.

此结论可推广到 n 个相互独立的 Γ 分布变量之和的情况．

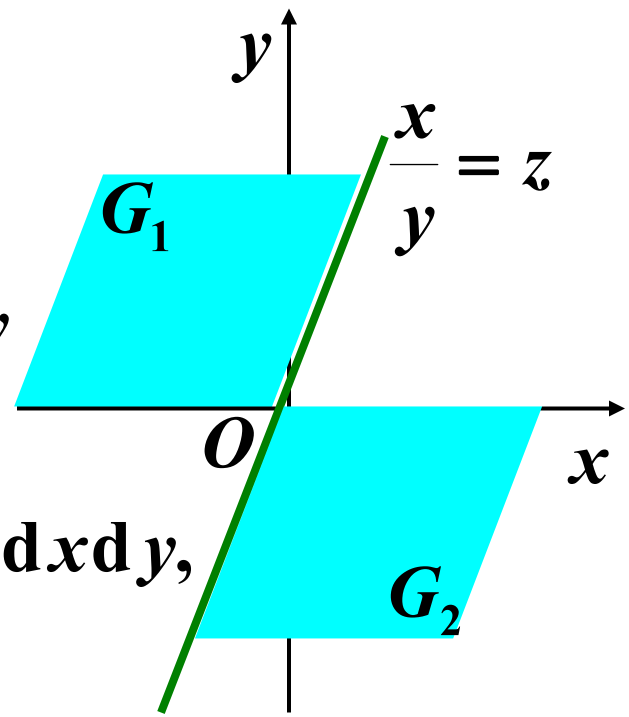
若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,且 X_i 服从参数为 $\alpha_i, \beta\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的Γ 分布,则

$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 服从参数为 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta$ 的 Γ 分布.

2. $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{X}{Y}\le z\right\}$$



$$=\iint_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{0}\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

令 $u=x/y$,

$$\iint_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} yf(yu,y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{z}\int_0^{+\infty} yf(yu,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u$$

同理可得

$$\iint_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u,$$

故有 $F_Z(z) = P\{Z \le z\}$

$$= \iint_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_0^{+\infty} yf(yu,y)\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.$$

由此可得概率密度为

$$f(z) = \int_{0}^{+\infty} y f(yz, y) \,\mathrm{d}\, y - \int_{-\infty}^{0} y f(yz, y) \,\mathrm{d}\, y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) \,\mathrm{d}\, y.$$

当 X, Y 独立时,

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y) \,\mathrm{d}\, y.$$

例6 设 X,Y 分别表示两只不同型号 的灯泡的寿命，X,Y 相互独立，它们的概率密度分别为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度函数 .

解 当 $z>0$ 时，$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{+\infty}2y\mathrm{e}^{-y(2+z)}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{(2+z)^2},$$

当 $z\le 0$ 时，$f_Z(z)=0$,

所以 $$f_Z(z)=\begin{cases} \dfrac{2}{(2+z)^2}, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$

3. $M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机 变量，它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

则有 $F_{\max}(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$

$$=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z).$$

$$F_{\min}(z)=P\{N\le z\}=1-P\{N>z\}$$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}$$

$$= 1 - [1 - P\{X \le z\}] \cdot [1 - P\{Y \le z\}]$$

$$= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

生存函数

故有 $$F_{\max}(z) = F_X(z) F_Y(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)],$$

或 $$1 - F_{\min}(z) = [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

或 $$S_{\min}(z) = S_X(z) S_Y(z).$$

推广

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$

则 $M=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 及 $N=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数分别为

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)\cdot F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$

$$1-F_{\min}(z)=[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)].$$

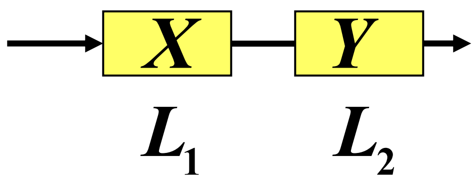
若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且具有相同的 分布函数 $F(x)$，则

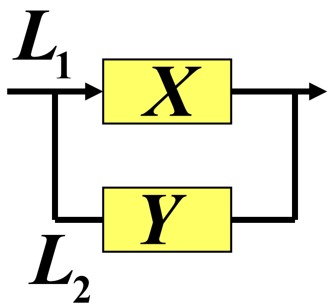
$$F_{\max}(z)=[F(z)]^n, \qquad 1-F_{\min}(z)=[1-F(z)]^n.$$

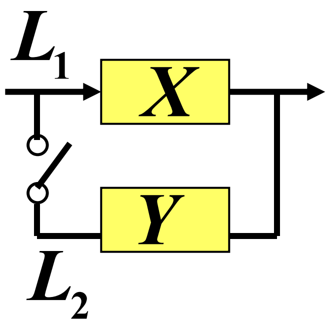
若$X_1,\ldots,X_n$是连续型随机变量，在求得$M=\max(X_1,\ldots,X_n)$和$N=\min(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数后，不难求得M和N的密度函数.

留作课下练习.

例7 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 联接而成，连接的方式分别为 (i) 串联，(ii) 并联，(iii) 备用（当系统 L_1 损坏时，系统 L_2 开始工作），如图所示.







设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y，已知概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0, \beta>0$ 且 $\alpha\ne\beta$. 试分别就以上三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度 .

解 (i)串联情况

由于当 L_1, L_2 中有一个损坏时，系统 L 就停止工作，所以这时 L 的寿命为 $Z=\min(X,Y)$.

由 $$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

$$\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

由 $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0;\end{cases} \Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}1-\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(ii) 并联情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时，系统 L 才停止工作，

所以这时 L 的寿命为 $Z=\max(X,Y)$.

$Z=\max(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-\alpha z})(1-\mathrm{e}^{-\beta z}), & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$f_{\max}(z)=\begin{cases}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha z}+\beta\mathrm{e}^{-\beta z}-(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(iii) 备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时，系统 L_2 才开始工作，因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1, L_2 两者之和，即

$$Z = X + Y$$

当 $z > 0$ 时，$Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^z \alpha \mathrm{e}^{-\alpha(z-y)} \beta \mathrm{e}^{-\beta y}\,\mathrm{d}y$$

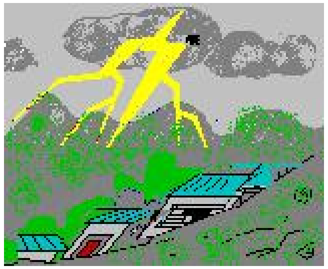
$$= \alpha\beta \mathrm{e}^{-\alpha z} \int_0^z \mathrm{e}^{-(\beta-\alpha)y}\,\mathrm{d}y = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z} - \mathrm{e}^{-\beta z}].$$

需要指出的是，当$X_1,\ldots,X_n$相互独立且具有相同分布函数$F(x)$时, 常称

$$M=\max(X_1,\ldots,X_n)，N=\min(X_1,\ldots,X_n)$$

为极值 .

由于一些灾害性的自然现象，如地震、洪水等等都是极值，研究极值分布具有重要的意义和实用价值.



三、随机变量变换的分布定理

设(X,Y)具有概率密度$f(x,y)$, $U=g(X,Y)$, $V=h(X,Y)$。

问题：如何由(X,Y)的密度求(U,V)的概率密度？

对此， 我们不加证明地给出如下定理：

定理. 设(X,Y)有联合密度$f(x,y)$,且区域A(可以是全平面)满足$P\{(X,Y)\in A\}=1$,在变换

$$\begin{cases} u = g(x,y) \\ v = h(x,y) \end{cases} \quad (\Delta)$$

中，当$(x,y)\in A$时，(u,v)的值域为G，且变换(Δ)满足

(i) $A \xrightarrow{(\Delta)} G$ 是一一对应；

(ii) g,h在A中有连续偏导数；

(iii)变换(Δ)的雅可比行列式J在A中处处不为0,

则$(U=g(X,Y),V=h(X,Y))$的概率密度为

$$\varphi(u,v)=\begin{cases} f(x(u,v),y(u,v))\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| & (u,v)\in G \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中$x(u,v),y(u,v)$是由变换(Δ)决定的反函数.

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix};$$

利用此法求 商的分布： $Z=X/Y$

例如 已知(X,Y)的联合$d.f.\ f(x,y)$，

令 $Z=X/Y$，求$f_Z(z)$

$$\begin{cases} Z=X/Y \\ V=\quad Y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X=ZV \\ Y=\quad V \end{cases} \Longrightarrow |J|=\begin{vmatrix} v & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=|v|$$

$$f_{ZV}(z,v)=f\big(zv,v\big)|v|$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{ZV}(z,v)dv=\int_{-\infty}^{+\infty} f(zu,v)|v|dv$$

例8: 设X,Y相互独立,都服从参数为$\lambda=1$的指数分布,而$U=X+Y,V=X/Y$.

(1)求(U,V)的联合密度,(2)分别求U,V的概率密度,(3)讨论U,V的独立性.(教材p.136:30)

解: 首先(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0,y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

记 $A=\{(x,y)|x>0,y>0\}$,显然有$P\{(X,Y)\in A\}=1$,

对变换(Δ): $\begin{cases} u=x+y \\ v=x/y \end{cases}$

当$(x,y)\in A$时,(u,v)的值域为$G=\{(u,v)|u>0,v>0\}$

且此变换满足定理中的条件(i)(ii)(iii)。由变换(Δ)可解得

$$\begin{cases} x = \dfrac{uv}{1+v} \\ y = \dfrac{u}{1+v} \end{cases}$$

所以 $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2} \\ \dfrac{1}{1+v} & \dfrac{-u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = -\frac{u}{(1+v)^2}$$

由前述定理即得(U,V)的概率密度为

$$\varphi(u,v) = \begin{cases} e^{-u}\dfrac{u}{(1+v)^2} & u>0, v>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(2) 由(U,V)的联合密度可求出U,V的概率密度$f_U(u),f_V(v)$

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u,v)dv=\begin{cases}\int_0^{+\infty}e^{-u}\dfrac{u}{(1+v)^2}dv=ue^{-u} & u>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u,v)du=\begin{cases}\int_0^{+\infty}e^{-u}\dfrac{u}{(1+v)^2}du=\dfrac{1}{(1+v)^2} & v>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(3)容易看出,对于任意的u, v，恒有$f(u,v)=f_{\mathrm{U}}(u)\,f_{\mathrm{V}}(\mathrm{v})$，所以$U,V$相互独立.

练4: 设X,Y相互独立,服从同一分布$N(0,1)$,而 (R,Θ)是平面上随机点(X,Y)相应的极径,极角,即有关系

$$\begin{cases} X = R\cos\Theta \\ Y = R\sin\Theta \end{cases}$$

求(R,Θ)的联合密度（教材p.136:31）.

解:变换$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$ 的定义域$A=\{(x,y)|(x,y)\neq(0,0)\}$,

值域$G=\{(r,\theta)|r>0,0\leq\theta<2\pi\}$,满足定理的条件,并且

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

由定理得(R,Θ)的联合密度为

$$\varphi(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r & (r,\theta)\in G\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

顺便我们看出R,Θ的概率密度分别为

$$f_R(r)=\begin{cases}r\,e^{-\frac{r^2}{2}} & r>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases};\quad f_\Theta(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & 0\le\theta<2\pi\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

并且R与Θ是相互独立的。

注：

在求$Z=g(X,Y)$的概率密度时,可以再找一个X与Y的函数$W=h(X,Y)$使得变换$\begin{cases} z = g(x, y) \\ w = h(x, y) \end{cases}$满足定理的条件,于是利用定理的结论就可以求出（$Z,W$）的联合密度，再由联合密度便可求出$Z$的概率密度。

可以用此方法导出$X+Y$，X/Y，XY，$X-Y$等简单函数的概率密度的一般公式。

小结

本章以二维随机变量为主，讨论了多维随机变量的

(1)联合分布 **(2)**边缘分布 **(3)X,Y**的独立性 **(4)**条件分布

(5) 二维随机变量函数的分布。

这些内容不难推广到高维随机变量，请同学们自学.

本章中关于正态分布的一些结论请大家注意掌握：

1． 若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1);$$

2． 若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $$Y=k_1X+k_2\sim N(k_1\mu+k_2,(k_1\sigma)^2);$$

3． 若X_i服从二维正态分布 $N(\mu_i,\sigma_i^2)$, X_i相互独立，

$i=1,2,\ldots,n$. 则 $$Z=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}\sigma^2{}_i)$$

4．**(X,Y)服从二维正态分布，ρ=0 ⇔ X与Y相互独立（⇔X与Y不相关）；**

5．**(X,Y)服从二维正态分布⇒ X,Y也服从正态分布；(X,Y)服从二维正态分布⇒其条件分布也是正态分布；**

6．**若X,Y为正态同分布且相互独立⇒** $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ **服从瑞利分布；Z=X/Y服从柯西分布；**