第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）

一、 对坐标的曲线积分的概念与性质

实例:变力沿曲线所作的功

设一个质点在 xOy 面内在变力 $F(x, y)=P(x, y)i+Q(x, y)j$ 的作用下从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B，试求变力 $F(x, y)$所作的功.

(1) 把 L 分成 n 个小弧段: L_1, L_2, $\cdots$, L_n;

分点为 $A=M_0$, M_1, M_2, $\cdots$, M_{n-1}, $M_n=B$, 其中 $M_k=(x_k, y_k)$;

(2) 变力在 L_i 上所作的功近似为:

$$\boldsymbol{F}(\xi_i, \eta_i)\cdot\Delta\boldsymbol{s}_i=P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i ;$$

其中$\Delta\boldsymbol{s}_i=\{\Delta x_i,\Delta y_i\}$表示从 L_i 的起点 M_{i-1} 到其终点 M_i 的向量.

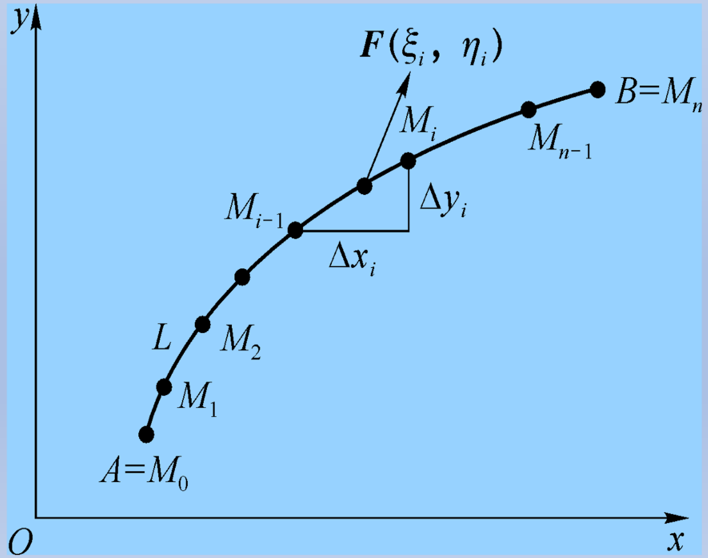
(3) 变力在 L 上所作的功近似为:

$$\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i];$$

(4) 变力在 L 上所作的功的精确值:

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i],$$

其中λ是各小弧段长度的最大值.



对坐标的曲线积分的定义:

定义 设函数$f(x, y)$在有向光滑曲线 L 上有界. 把 L 分成 n 个有向小弧段 L_1, L_2, · · ·, L_n; 小弧段 L_i 的起点为(x_{i-1}, y_{i-1}), 终点为(x_i, y_i), $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$; (ξ_i, η_i)为 L_i 上任意一点, λ 为各小弧段长度的最大值.

如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 总存在, 则称此极限为函数 $f(x, y)$在有向曲线 L 上**对坐标 x 的曲线积分**, 记作$\int_L f(x,y)dx$,

即 $\int_L f(x,y)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$,

如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$ 总存在，则称此极限为函数 $f(x, y)$在有向曲线 L 上**对坐标 y 的曲线积分**，记作 $\int_L f(x,y)dy$，即

$$\int_L f(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\,.$$

对坐标的曲线积分的简写形式:

$$\int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

对坐标的曲线积分也叫**第二类曲线积分**.

推广为空间曲线积分：设Γ为空间内一条光滑有向曲线，函数 $P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$在Γ上有定义．我们定义(假如各式右端的积分存在)

$$\int_L P(x,y,z)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i\ ,$$

$$\int_L Q(x,y,z)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i\ ,$$

$$\int_L R(x,y,z)dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i\ .$$

简写：

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx+\int_\Gamma Q(x,y,z)dy+\int_\Gamma R(x,y,z)dz = \int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

对坐标的曲线积分的性质:

(1) 如果把 L 分成 L_1 和 L_2, 则

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_{L_1} Pdx+Qdy+\int_{L_2} Pdx+Qdy .$$

(2) 设 L 是有向曲线弧, $-L$ 是与 L 方向相反的有向曲线弧, 则

$$\int_{-L} P(x,y)dx+Q(x,y)d=-\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

二、对坐标的曲线积分的计算

定理: 设 $P(x, y)$、$Q(x, y)$是定义在光滑有向曲线 $L: x=\varphi(t), y=\psi(t)$上的连续函数，当参数 t 单调地由α变到β时，点 $M(x, y)$从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B，则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt.$$

注意：下限α对应于 L 的起点，上限β 对应于 L 的终点，α不一定小于β.

类似地，若空间光滑曲线Γ由参数方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$ 给出，那么曲线积分

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt,$$

其中α对应于Γ的起点，β对应于Γ的终点.

例 2 计算$\int_L 2xydx+x^2dy$.

(1)抛物线 $y=x^2$ 上从 $O(0, 0)$到 $B(1, 1)$的一段弧;

(2)抛物线 $x=y^2$ 上从 $O(0, 0)$到 $B(1, 1)$的一段弧;

(3)从 $O(0, 0)$到 $A(1, 0)$，再到 $R\,(1, 1)$的有向折线 OAB .

解: (1)L: $y=x^2$, x 从 0 变到 1. 所以

$$\int_L 2xydx+x^2dy=\int_0^1(2x\cdot x^2+x^2\cdot 2x)dx=4\int_0^1 x^3dx=1.$$

(2)L: $x=y^2$, y 从 0 变到 1. 所以

$$\int_L 2xydx+x^2dy=\int_0^1(2y^2\cdot y\cdot 2y+y^4)dy=5\int_0^1 y^4dy=1.$$

(3) OA: $y=0$, x 从 0 变到 1; AB: $x=1$, y 从 0 变到 1.

$$\int_L 2xydx+x^2dy=\int_{OA}2xydx+x^2dy+\int_{AB}2xydx+x^2dy$$

$$=\int_0^1(2x\cdot 0+x^2\cdot 0)dx+\int_0^1(2y\cdot 0+1)dy=0+1=1.$$

例 4. 一个质点在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下从点 $A(a,\ 0)$沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 按逆时针方向移动到点 $B(0,\ b)$, $\boldsymbol{F}$ 的大小与质点到原点的距离成正比, 方向恒指向原点. 求力 F 所作的功 W.

解: 椭圆的参数方程为 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, t 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$.

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{F}=k\cdot|\boldsymbol{r}|\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\right)=-k(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}),$$

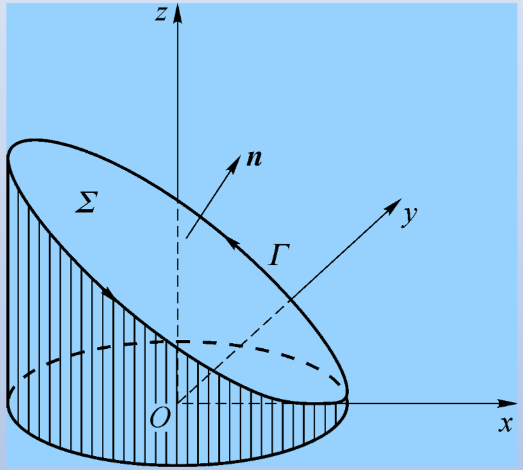
其中 $k>0$ 是比例常数.

于是 $$W=\int_{\overset{\frown}{AB}} -kxdx-kydy=-k\int_{\overset{\frown}{AB}} xdx+ydy.$$

$$=-k\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-a^2\cos t\sin t+b^2\sin t\cos t)dt$$

$$=k(a^2-b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t dt=\frac{k}{2}(a^2-b^2).$$

例5 计算空间曲线积分 $I=\int_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中曲线 Γ 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1\ (a>0,h>0)$ 的交线，从 x 轴正向看，曲线是逆时针方向；



解：积分曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=h(1-\cos t)\end{cases}$，参变量 t 从 0 变到 2π，

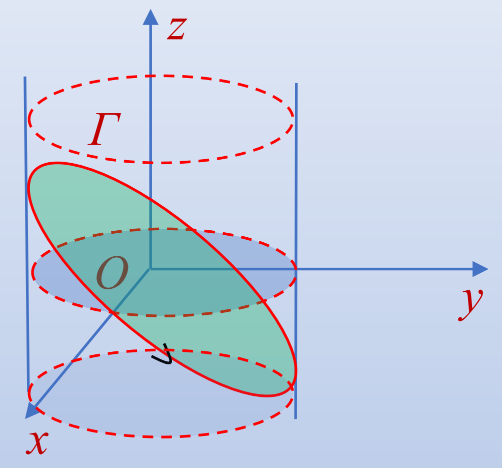
$$I=\int_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\{[a\sin t-h(1-\cos t)](-a\sin t)+[h(1-\cos t)-a\cos t](a\cos t)$$

$$+(a\cos t-a\sin t)(h\sin t)\}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}[-a(a+h)+ah\sin t+ah\cos t]dt=-2\pi a(a+h).$$

2.计算 $I=\int_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中 Γ 为椭圆 $x^2+y^2=1, y+z=0$，从 z 轴正向看去，Γ 的方向为逆时针.



解：Γ 的参数方程 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=-\sin t \end{cases}$，参数 t 从 $t=0$ 到 $t=2\pi$.

$$I=\int_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(\sin t+\sin t)(-\sin t)+(-\sin t-\cos t)\cos t+(\cos t-\sin t)(-\cos t)\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(-2)\,dt=-4\pi.$$

三、两类曲线积分之间的联系

两类曲线积分之间的联系公式：

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L (P\cos\tau+Q\sin\tau)ds$$

$$=\int_L \{P,Q\}\cdot\{\cos\tau,\sin\tau\}ds=\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}\ ,$$

或

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L [P(x,y)\cos\left(\hat{T,x}\right)+Q(x,y)\cos\left(\hat{T,y}\right)]ds$$

其中 $\boldsymbol{F}=\{P, Q\}$, $\boldsymbol{T}=\{\cos\tau, \sin\tau\}$为有向曲线弧 L 上点(x, y)处单位切向量（方向与曲线走向一致）, $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{T}ds=\{dx, dy\}$.

简要证明： 设 $P(x, y)$、$Q(x, y)$是定义在光滑有向曲线

$$L: x=\varphi(t), y=\psi(t),$$

上的连续函数，当参数 t 单调地由α变到β时，点 $M(x, y)$从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B;

不妨设$\alpha<\beta$.

对应于 t 点与曲线 L 的方向一致的切向量为$\{\varphi'(t), \psi'(t)\}$,

所以 $\cos\tau=\dfrac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$, $\sin\tau=\dfrac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$.

于是

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\,dt$$

$$\int_L \left[P(x,y)\cos\tau + Q(x,y)\sin\tau\right] ds$$

$$= \int_\alpha^\beta \left\{P[\varphi(t),\psi(t)]\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}} + Q[\varphi(t),\psi(t)]\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right\}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\,dt$$

所以

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L \left[P(x,y)\cos\tau + Q(x,y)\sin\tau\right] ds$$

类似地有

$$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\Gamma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

$$=\int_\Gamma \{P,Q,R\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}ds=\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}\,.$$

其中 $\boldsymbol{F}=\{P, Q, R\}$, $\boldsymbol{T}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$为有向曲线弧$\Gamma$上点 (x, y, z)处单位切向量, $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{T}ds=\{dx, dy, dz\}$.

例 6. 将第二型曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 化为第一型曲线积分，其中 L 是 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的一段弧.

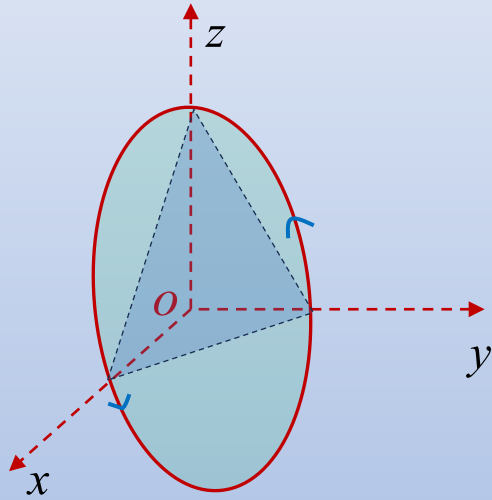
解： L 上任一点 (x,y) 处的切向量 $T=\left(1,\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)$，

单位切向量 $e_T=(\cos\tau,\sin\tau)=\left(\sqrt{2x-x^2},1-x\right)$，

根据两类曲线积分的联系公式，有

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L\left[\sqrt{2x-x^2}P(x,y)+(1-x)Q(x,y)\right]ds.$$

例 7. 计算曲线积分 $I=\int_\Gamma ydx+zdy+xdz$,其中Γ是 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x+y+z=1$ 的交线，从 x 轴正向看去，Γ取逆时针方向。



解：令 $F=x^2+y^2+z^2-1$, $G=x+y+z-1$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2(y-z),\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}2z & 2x\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2(z-x),$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2(x-y).$$

依题意，Γ 上任一点(x, y, z)处切向量 $T=(z-y,x-z,y-x)$

$$\sqrt{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}=\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)-(x+y+z)^2}=\sqrt{2}$$

单位切向量$T^0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{z-y,x-z,y-x\}$，于是

$$\cos\alpha=\frac{z-y}{\sqrt{2}},\cos\beta=\frac{x-z}{\sqrt{2}},\cos\gamma=\frac{y-x}{\sqrt{2}}$$

$$I=\int_\Gamma ydx+zdy+xdz=\int_\Gamma\frac{1}{\sqrt{2}}\left[y(z-y)+z(x-z)+x(y-x)\right]ds$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_\Gamma\left(yz+zx+xy-x^2-y^2-z^2\right)ds=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_\Gamma ds$$

积分曲线Γ是一个圆周，其半径为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}/\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故

$$I=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\pi\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi.$$