基于快速贝叶斯FFT的桥梁结构模态识别

王琛[1]，苏亦芃[1]，李浩然[1]，沈越琦[1]，李宾宾[2]

1. 学生，浙江大学国际校区，海宁，314400，电子邮箱分别为：
chenw.18/yipeng.18/hanran.18/yueqi.18@intl.zju.edu.cn；
2. 研究员，浙江大学国际校区，海宁，314400，电子邮箱：bbl@zju.edu.cn

摘 要：运营模态分析旨在通过结构的随机振动响应识别其频率、振型、阻尼比等模态参数。由于其经济性和适应性在土木工程领域得到广泛的应用。运营模态分析的算法多样，本文将介绍快速贝叶斯FFT算法及其应用实例。不同于传统的识别算法，快速贝叶斯FFT算法以计算模态参数的后验概率分布为目标，在计算模态参数的贝叶斯估计的同时提供了其识别不确定性，具有重要的科学和工程意义。本文首先介绍了快速贝叶斯FFT算法的概率模型及其求解策略，然后以一座人行斜拉桥的模态参数识别为例展示了其实际应用。该斜拉桥的模态分布十分密集，在0-10Hz频段内共有17阶模态。本文发展的快速贝叶斯FFT算法成功识别出所有阶模态参数，且每阶求解仅需数秒，体现了该算法的优越性。

关键词：运营模态分析；快速贝叶斯FFT算法；不确定性度量；斜拉桥

1 引言

模态分析在土木工程领域有着广泛应用，例如其在损伤识别[1]、振动控制[2]、模型修正[3]等问题中发挥重要角色。传统的模态分析方法主要为试验模态分析，需要人为的对结构施加激励，通过建立结构的输入输出关系分析出结构的模态参数（如频率，阻尼比和振型等）。然而对于大型土木工程结构而言，为获得足够的结构响应往往需要极大的外界激励，另外加之测试过程耗时耗力，造成其实用性受到很大限制。与之相对应，运营模态分析仅需测量结构在运营状态下的随机振动响应便可识别出结构的模态参数，近年来在土木工程领域得到了广泛关注和迅速发展。

在运营模态分析中外界激励作用是未知的，通常假定为平稳随机过程。因此，与试验模态分析相比，运营模态分析更加复杂，同时识别的模态参数具有更大的不确定性。贝叶斯运营模态分析将模态识别问题转换为求解模态参数的后验概率估计，在模态参数识别的同时实现了模态参数的不确定性度量。快速贝叶斯FFT算法是贝叶斯运营模态分析的一种方法[4]，相较于其他贝叶斯算法，其平衡了建模假设过程中的鲁棒性和计算效率，可较好地应用于桥梁结构的模态参数识别。本文将首先介绍快速贝叶斯FFT算法的概率模型及其求解策略，然后以一座人行斜拉桥的模态参数识别为例展示其实际应用。

2 贝叶斯FFT算法

假设某桥梁结构在环境激励下的时程响应数据为$\{\hat{\mathbf{y}}_j \in \mathbb{R}^n : j = 0,1,\ldots,N-1\}$，简写为$\{\hat{\mathbf{y}}_j\}$，其中$N$为各数据通道的样本数量，$n$为数据通道的数目。将结构响应信号视为平稳随机过程，其快速傅里叶变换（FFT）可表示为

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k = \sqrt{\Delta t/N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{\mathbf{y}}_j e^{-2\pi \mathbf{i} jk/N} \tag{1}$$

其中Δt为采样时间间隔，$\mathbf{i}$为虚数单位。当$k \le \mathrm{int}[N/2]$时，$\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k$对应频率为$\mathrm{f}_k = k/N\Delta t$ (Hz)的FFT数据,用于所测结构的模态参数识别。

在实际计算中，需综合考虑用于模态识别的信息量和模型误差的风险，一般只选择包含所关心模态的窄带频段将用于模态识别。假定在所选频段内共有N_f个FFT数据点（简记为$\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k\}$）并同时假设

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k = \boldsymbol{\mathcal{F}}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k \tag{2}$$

其中$\boldsymbol{\mathcal{F}}_k$代表理论计算的结构动力响应，$\boldsymbol{\varepsilon}_k$表示理论模态响应与所测数据之间的预测误差（包括建模误差、测试噪声等）。假定所需频段内共有m阶模态，根据模态叠加法有$\boldsymbol{\mathcal{F}}_k = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\eta}_k$，其中$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$为对应于传感器测点的阵型矩阵，$\boldsymbol{\eta}_k \in \mathbb{C}^{m\times 1}$为在频率$\mathrm{f}_k$处的模态响应的 FFT。另外，当用$\boldsymbol{p}_k \in \mathbb{C}^{m\times 1}$表示在频率$\mathrm{f}_k$处的模态力时，我们有$\boldsymbol{\eta}_k = \boldsymbol{h}_k\boldsymbol{p}_k$并且

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{h}_k\boldsymbol{p}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k \tag{3}$$

其中$\boldsymbol{h}_k = \mathrm{diag}(h_{1k}, h_{2k}, \dots, h_{mk})$表示由频响函数组成对角元的对角矩阵。另外，第$i$阶模态的频响函数可记为

$$h_{ik} = \frac{(2\pi\mathrm{i}\mathrm{f}_k)^{-q}}{(1-\beta_{ik}^2)-\mathrm{i}(2\zeta_i\beta_{ik})} \qquad \beta_{ik} = \frac{f_i}{\mathrm{f}_k} \qquad q = \begin{cases} 0, & \text{加速度数据} \\ 1, & \text{速度数据} \\ 2, & \text{位移数据} \end{cases} \tag{4}$$

其中f_i (Hz)和ζ_i分别为第i阶的频率和阻尼比。

在运营模态分析中，由于结构实际激励信息的缺失，模态荷载$\boldsymbol{p}_k$只能通过统计建模近似模拟。假定其满足零均值等稳态条件，同时数据长度足够大($N_f \gg 1$)，$\boldsymbol{p}_k$近似服从复数高斯分布且在不同的频率处相互统计独立[5]，其协方差矩阵（功率谱密度）在选定频段内为一未知常数$\boldsymbol{S} \in \mathbb{C}^{m\times m}$，即$\boldsymbol{p}_k \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{S})$。基于最大信息熵原理，假定预测误差$\boldsymbol{\varepsilon}_k$满足零均值协方差为$S_e\boldsymbol{I}_n$（$\boldsymbol{I}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 表示单位阵）的复数高斯分布。通过进一步假定$\boldsymbol{p}_k$和$\boldsymbol{\varepsilon}_k$相互独立，我们可推知$\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k\}$同样服从零均值复数高斯分布，其协方差矩阵为

$$\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} + S_e\boldsymbol{I}_n \tag{5}$$

其中$\boldsymbol{H}_k = \boldsymbol{h}_k\boldsymbol{S}\boldsymbol{h}_k^*$，‘$\cdot^{\mathrm{T}}$’表示实矩阵转置。协方差矩阵$\boldsymbol{E}_k$在模态识别中起关键作用，因为其包含所有未知参数$\boldsymbol{\theta} = \{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{S}, S_e\}$（$\boldsymbol{f} = [f_1, f_2, \dots, f_m]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\zeta} = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m]^{\mathrm{T}}$）。

基于以上模型假设并假定先验为均匀分布，根据贝叶斯定理，未知参数$\boldsymbol{\theta}$的后验概率分布为

$$p\big(\boldsymbol{\theta}\big|\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k\}\big) \propto p\big(\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k\}\big|\boldsymbol{\theta}\big) = \frac{\pi^{-nN_f}}{\prod_k|\boldsymbol{E}_k|}\exp\left[-\sum_k \widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k^*\boldsymbol{E}_k^{-1}\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k\right] \tag{6}$$

其中$|\cdot|$表示矩阵行列式。需要指出的是，为使模态参数可识别，一般还需引入振型的幅值约束，假定$\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}_i = 1$。

在数据长度比较大的条件下，未知参数$\boldsymbol{\theta}$的后验概率分布可用高斯分布近似逼近，

$$p\big(\boldsymbol{\theta}\big|\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k\}\big) \approx (2\pi)^{-n_\theta/2}|\widehat{\boldsymbol{C}}|^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\big(\boldsymbol{\theta}-\widehat{\boldsymbol{\theta}}\big)^{\mathrm{T}}\widehat{\boldsymbol{C}}^{-1}\big(\boldsymbol{\theta}-\widehat{\boldsymbol{\theta}}\big)\right] \tag{7}$$

其中$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$为最大化后验估计，协方差矩阵$\widehat{\boldsymbol{C}}$等于对数后验概率分布函数在$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$值处海森矩阵的逆矩阵，其给出了参数的后验不确定度[4]。

最大化后验估计$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$和协方差矩阵$\widehat{\boldsymbol{C}}$都基于实测数据，因此当获得 FFT 数据$\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k\}$时二者都可以被确定下来，然而，其求解过程并不容易：由于未知参数数量众多且协方差矩阵$\boldsymbol{E}_k$接近奇异，直接优化求解（如最速梯度法、牛顿法等）并不实用。同时，在密集模态条件下，算法的收

敛性面临巨大挑战。针对这些难点，作者近期开发出一种基于期望最大化原理的快速优化算法，将模态响应$\boldsymbol{\eta}_k$视作隐变量，同时推导出期望步和最大化步的解析解，因此计算速度极快，算法的详细介绍请参加文献[6]。下面将采用某斜拉桥的实际模态测试来验证所提方法的优越性。

3 某桥梁结构模态识别

本文选取某斜拉桥作为实际算例，应用贝叶斯FFT方法对其进行模态分析，并评估贝叶斯FFT方法在实际应用中的适用性及其优缺点。

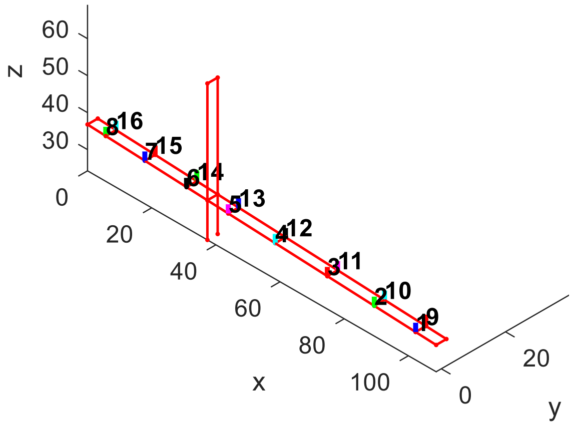

图1. 某斜拉桥现场图及其传感器放置图

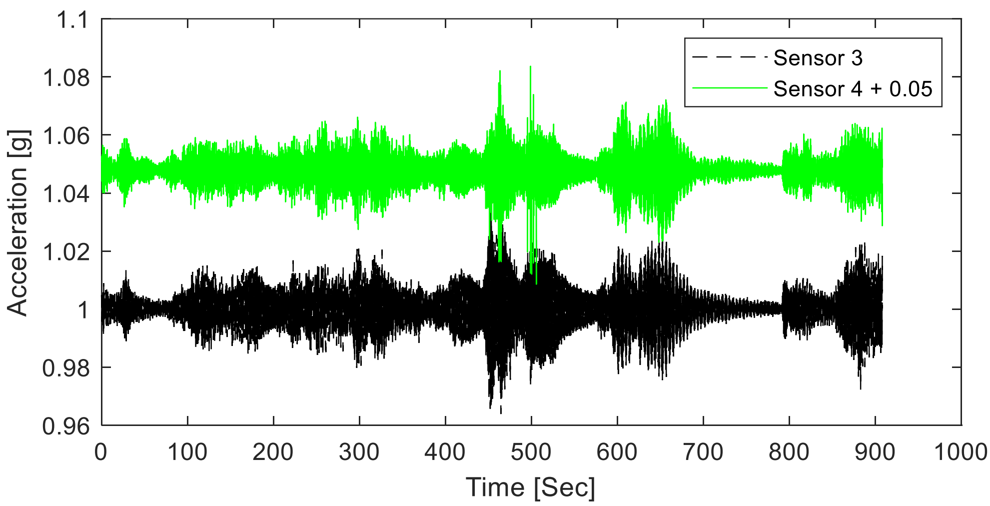

图2. 典型时域响应

该斜拉桥为跨越高速公路的人行桥，主塔高42米，主跨72米，边跨38米，主梁宽带4.5米，塔梁间通过7对斜拉索连接，如图1左图所示。为了解其振动特性，基于环境激励的随机振动测试被采用。如图1右图所示，全桥共布置16个力平衡式加速度传感器，用于测量主梁的竖向振动。根据主梁基频信息（约1Hz），加速度采样时间设定为15分钟（约1000个振动周期），典型的时程响应数据如图2所示。

为初步了解该斜拉桥的模态参数，功率谱密度和奇异值谱分别绘制于图3中。奇异值谱显示功率谱密度矩阵的特征值随频率的变化，其中最大特征值的峰值指示了振动频率的大致位置，峰值的宽度表明了模态阻尼比的大小。在快速贝叶斯FFT算法中，我们依赖奇异值谱选取识别频段和计算频率的初始值。如图3奇异值谱所示，我们选定17个频段用于后续模态参数识别。

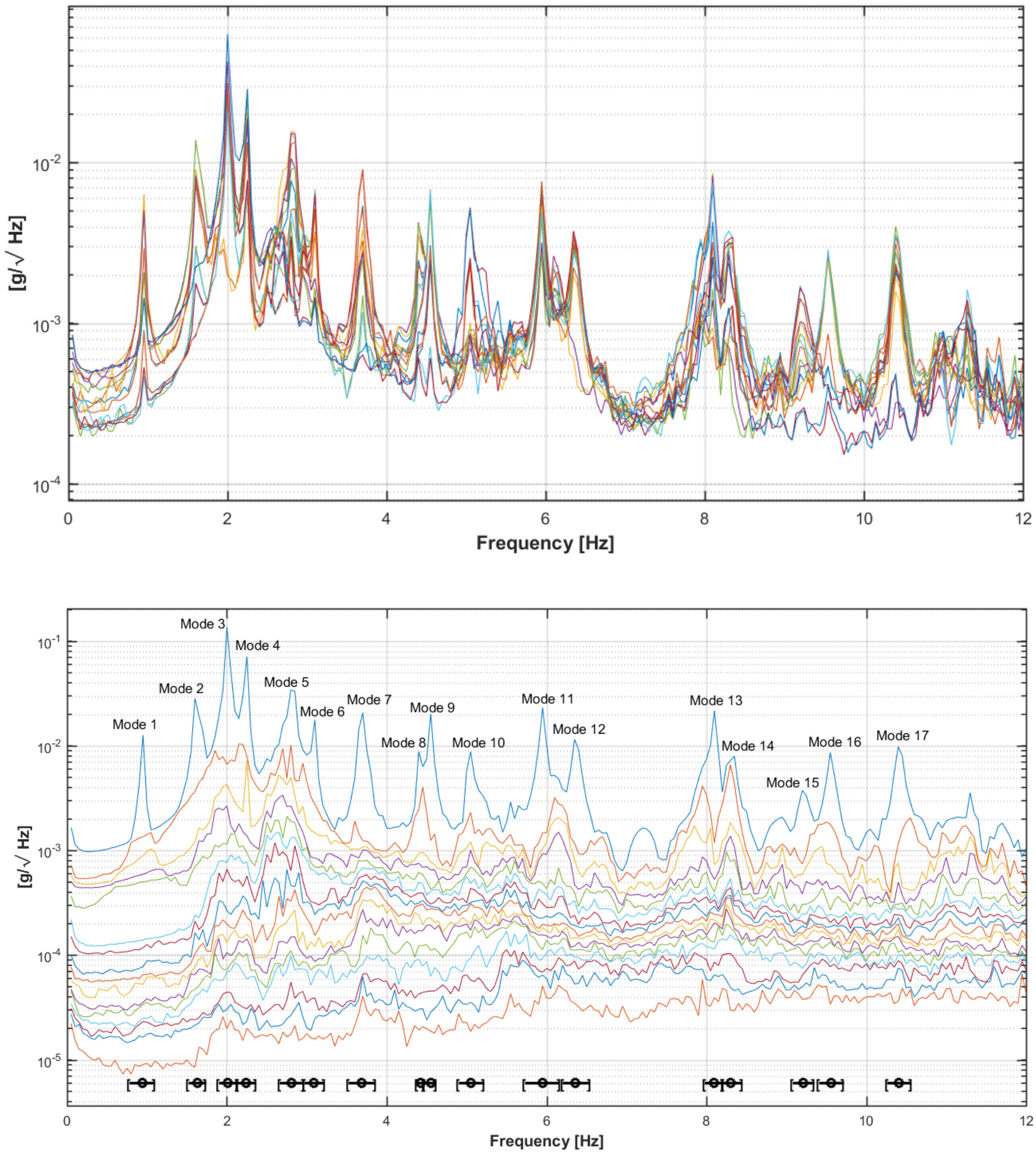

图3. 功率谱密度和奇异值谱的均方根

基于所选频段，我们应用期望最大化算法求解各模态参数的最大化后验估计$\hat{\boldsymbol{\theta}}$和并计算协方差矩阵$\hat{\boldsymbol{C}}$。该算法具有很高的计算效率，在普通配置个人笔记本电脑上每阶模态的计算时间不超过5秒。识别结果如图4所示，包括各阶模态的频率、阻尼比和振型，括号内数值表示相应识别参数的变异系数（标准差/均值）。从识别结果可以看出，该斜拉桥的模态分布十分密集，在约10Hz内共有17阶模态，第5、8、10阶为主梁扭转振型，其余为竖弯振型。在识别不确定性方面，可以看出阻尼比要远远大于频率，频率变异系数均小于千分之一，而阻尼比变异系数则可高达30%，说明阻尼比难以有效准确识别，这与我们的工程经验相符。通过对比各阶模态参数的变异系数可以看出，频率和阻尼比的识别不确定性均随频率的增加呈现递减趋势。这可以通过有效数据长度（=采样时长/振动周期）来解释：对各阶模态而言采样时长是相同的，但低阶模态振动周期较长，因此有效数据长度较小，故识别不确定性较高。

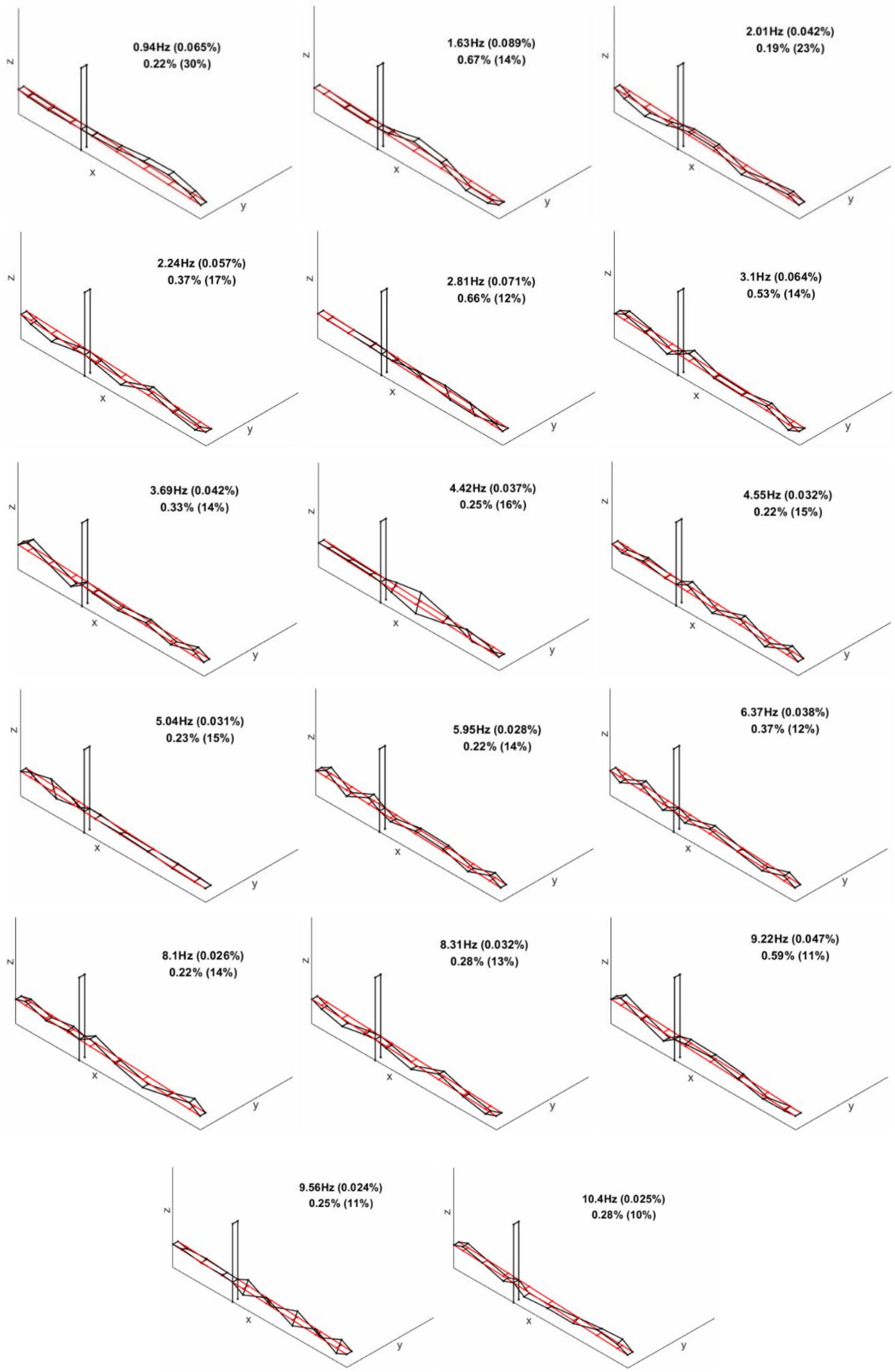
0.94Hz (0.065%)
0.22% (30%)
1.63Hz (0.089%)
0.67% (14%)
2.01Hz (0.042%)
0.19% (23%)
2.24Hz (0.057%)
0.37% (17%)
2.81Hz (0.071%)
0.66% (12%)
3.1Hz (0.064%)
0.53% (14%)
3.69Hz (0.042%)
0.33% (14%)
4.42Hz (0.037%)
0.25% (16%)
4.55Hz (0.032%)
0.22% (15%)
5.04Hz (0.031%)
0.23% (15%)
5.95Hz (0.028%)
0.22% (14%)
6.37Hz (0.038%)
0.37% (12%)
8.1Hz (0.026%)
0.22% (14%)
8.31Hz (0.032%)
0.28% (13%)
9.22Hz (0.047%)
0.59% (11%)
9.56Hz (0.024%)
0.25% (11%)
10.4Hz (0.025%)
0.28% (10%)
x
y
z

图4. 各阶模态振型图

4 结论

本文介绍了基于快速贝叶斯FFT的运营模态识别，并应用近期提出的期望最大化算法对某斜拉桥的模态参数进行了识别，并在0-10Hz频段成功识别出17阶模态，包括参数的最大化后验估计及其识别不确定性。相比其他方法，期望最大化算法具有识别精度高、计算速度快、收敛性能强等优点，可直接应用于桥梁结构的模态识别中；同时，由于可获得识别不确定性信息，可有效提高基于模态参数的损伤识别和模型修正等的可靠性。

参考文献:

[1] Ntotsios E., Papadimitriou C., Panetsos P., et al. Bridge health monitoring system based on vibration measurements [J]. Bulletin of Earthquake Engineering, 2008, 7(2):469–483.

[2] Spencer B. F., Nagarajaiah S., State of the art of structural control [J]. Journal of Structural Engineering, 2003, 129(7):845-856.

[3] Brownjohn J. M. W., Carden E. P., Goddard C. R., et al. Real-time performance monitoring of tuned mass damper system for a 183 m reinforced concrete chimney[J]. Journal of Wind Engineering & Industrial Aerodynamics, 2010, 98(3):169-179.

[4] Au S.-K., Operational Modal Analysis [M]. Singapore: Springer, 2017.

[5] Brillinger D. R., Time series: data analysis and theory [M]. Philadelphia: SIAM, 2001.

[6] Li B., Au S.-K. An expectation-maximization algorithm for Bayesian operational modal analysis with multiple (possibly close) modes [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 132:490-511.