


第2章 一阶逻辑



第2章 一阶逻辑

2.1 一阶逻辑基本概念

2.2 一阶逻辑合式公式及解释

2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

2.1 一阶逻辑基本概念

- 个体词
- 谓词
- 量词
- 一阶逻辑中命题符号化

命题逻辑的局限性

苏格拉底三段论：

凡是人都要死的。

苏格拉底是人。

所以苏格拉底是要死的。

在命题逻辑中，只能用 p 、 q 、 r 表示以上3个命题，

上述推理可表成 $(p \wedge q) \rightarrow r$

这不是重言式

基本概念——个体词、谓词、量词

个体词（个体）：所研究对象中可以独立存在的具
体或抽象的客体

个体常项：具体的事物，用 a, b, c 表示

个体变项：抽象的事物，用 x, y, z 表示

个体域：个体变项的取值范围

有限个体域，如 $\{a, b, c\}, \{1, 2\}$

无限个体域，如 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}, \dots$

全总个体域：宇宙间一切事物组成

基本概念 (续)

谓词: 表示个体词性质或相互之间关系的词

谓词常项: $F: \dots$ 是人, $F(a): a$ 是人

谓词变项: $F: \dots$ 具有性质 F , $F(x): x$ 具有性质 F

一元谓词: 表示事物的性质

多元谓词(n 元谓词, $n \geq 2$): 表示事物之间的关系

如 $L(x,y): x$ 与 y 有关系 L , $L(x,y): x \geq y, \dots$

0元谓词: 不含个体变项的谓词, 即命题常项或命题变项

基本概念(续)

量词: 表示数量的词

全称量词 \forall : 表示任意的, 所有的, 一切的等

如 $\forall x$ 表示对个体域中所有的 x

存在量词 \exists : 表示存在, 有的, 至少有一个等

如 $\exists x$ 表示在个体域中存在 x

一阶逻辑中命题符号化

例1 用0元谓词将命题符号化

要求：先将它们在命题逻辑中符号化，再在一阶逻辑中符号化

(1) 墨西哥位于南美洲

在命题逻辑中, 设 p : 墨西哥位于南美洲
符号化为 p , 这是真命题

在一阶逻辑中, 设 a : 墨西哥, $F(x)$: x 位于南美洲
符号化为 $F(a)$

例1(续)

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数

在命题逻辑中, 设 $p: \sqrt{2}$ 是无理数, $q: \sqrt{3}$ 是有理数.

符号化为 $p \rightarrow q$, 这是假命题

在一阶逻辑中, 设 $F(x): x$ 是无理数, $G(x): x$ 是有理数,

符号化为 $F(\sqrt{2}) \rightarrow G(\sqrt{3})$

(3) 如果 $2>3$, 则 $3<4$

在命题逻辑中, 设 $p: 2>3$, $q: 3<4$.

符号化为 $p \rightarrow q$, 这是真命题

在一阶逻辑中, 设 $F(x,y): x>y$, $G(x,y): x<y$,

符号化为 $F(2,3) \rightarrow G(3,4)$

一阶逻辑中命题符号化(续)

例2 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美; (2) 有人用左手写字

分别取(a) D 为人类集合, (b) D 为全总个体域.

解: (a) (1) 设 $G(x)$: x 爱美, 符号化为 $\forall x G(x)$

(2) 设 $G(x)$: x 用左手写字, 符号化为 $\exists x G(x)$

(b) 设 $F(x)$: x 为人, $G(x)$: 同(a)中

(1) $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$

(2) $\exists x (F(x) \wedge G(x))$

这是两个基本公式, 注意它们的使用.

一阶逻辑中命题符号化(续)

例3 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

解 注意: 题目中没给个体域, 所以用全总个体域

(1) 令 $F(x)$: x 为正数, $G(y)$: y 为负数, $L(x,y)$: $x > y$

$\forall x(F(x) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow L(x,y)))$ 或

$\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow L(x,y))$ 两者等值

(2) 令 $F(x)$: x 是无理数, $G(y)$: y 是有理数,

$L(x,y)$: $x > y$

$\exists x(F(x) \wedge \exists y(G(y) \wedge L(x,y)))$

或 $\exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x,y))$ 两者等值

一阶逻辑中命题符号化(续)

几点注意:

- 1元谓词与多元谓词的区分
- 无特别要求, 应使用全总个体域, 引入特性谓词
- 量词顺序一般不能随便颠倒
- 两个基本形式 $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$ 和 $\exists x (F(x) \wedge G(x))$ 的使用
- 否定的表示

思考:

- ① 没有不呼吸的人
- ② 不是所有的人都喜欢吃糖
- ③ 不是所有的火车都比所有的汽车快

以上命题应如何符号化?

2.2 一阶逻辑公式及解释

- 字母表
- 合式公式(简称公式)
- 个体变项的自由出现和约束出现
- 解释与赋值
- 公式分类
永真式, 矛盾式, 可满足式

字母表

定义 字母表包含下述符号:

- (1) 个体常项: $a, b, c, \dots, a_i, b_i, c_i, \dots, i \geq 1$
- (2) 个体变项: $x, y, z, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, i \geq 1$
- (3) 函数符号: $f, g, h, \dots, f_i, g_i, h_i, \dots, i \geq 1$
- (4) 谓词符号: $F, G, H, \dots, F_i, G_i, H_i, \dots, i \geq 1$
- (5) 量词符号: \forall, \exists
- (6) 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- (7) 括号与逗号: $(,), ,$

项

定义 项的定义如下:

- (1) 个体常项和个体变项是项.
- (2) 若 $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是任意的 n 元函数, t_1, t_2, \dots, t_n 是任意的 n 个项, 则 $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是项.
- (3) 所有的项都是有限次使用 (1), (2) 得到的.

个体常项、变项是项, 由它们构成的 n 元函数和复合函数还是项

原子公式

定义 设 $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是任意的 n 元谓词, t_1, t_2, \dots, t_n 是任意的 n 个项, 则称 $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是**原子公式**.

原子公式是由项组成的 n 元谓词.

例如, $F(x, y), F(f(x_1, x_2), g(x_3, x_4))$ 等均为原子公式

合式公式

定义 合式公式（简称公式）定义如下：

- (1) 原子公式是合式公式.
- (2) 若 A 是合式公式, 则 $(\neg A)$ 也是合式公式
- (3) 若 A, B 是合式公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式
- (4) 若 A 是合式公式, 则 $\forall xA, \exists xA$ 也是合式公式
- (5) 有限次地应用(1)~(4)形成的符号串是合式公式.

如 $x \geq 0, \forall x (F(x) \rightarrow G(x)), \forall x \exists y (x + y = 1)$

个体变项的自由出现与约束出现

定义 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中, 称 x 为**指导变元**, A 为相应量词的**辖域**. 在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的**辖域**中, x 的所有出现都称为**约束出现**, A 中不是约束出现的其他变项均称为是**自由出现**.

例如, 在公式 $\forall x(F(x,y) \rightarrow G(x,z))$ 中,

$A=(F(x,y) \rightarrow G(x,z))$ 为 $\forall x$ 的辖域,

x 为指导变元, A 中 x 的两次出现均为约束出现,
 y 与 z 均为自由出现.

闭式: 不含自由出现的个体变项的公式.

公式的解释与分类

给定闭式 $A = \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

成真解释: 个体域 N , $F(x): x > 2$, $G(x): x > 1$
代入得 $A = \forall x(x > 2 \rightarrow x > 1)$ 真命题

成假解释: 个体域 N , $F(x): x > 1$, $G(x): x > 2$
代入得 $A = \forall x(x > 1 \rightarrow x > 2)$ 假命题

公式的解释与分类（续）

给定非闭式 $B = \forall x F(x, y)$

取个体域 \mathbf{N} , $F(x, y): x \geq y$

代入得 $B = \forall x (x \geq y)$

不是命题

令 $y=1$, $B = \forall x (x \geq 1)$

假命题

问: $\forall x F(x) \wedge \exists x \neg F(x)$ 有成真解释吗?

$\exists x F(x) \vee \forall x \neg F(x)$ 有成假解释吗?

解释和赋值

定义 解释 I 由下面4部分组成:

- (a) 非空个体域 D_I
- (b) 对每一个个体常项 a 指定一个 $\bar{a} \in D_I$
- (c) 对每一个函数符号 f 指定一个 D_I 上的函数 \bar{f}
- (d) 对每一个谓词符号 F 指定一个 D_I 上的谓词 \bar{F}

赋值 σ : 对每一个个体变项 x 指定一个值 $\sigma(x) \in D_I$

公式 A 在解释 I 和赋值 σ 下的含义: 取个体域 D_I , 并将公式中出现的 a 、 f 、 F 分别解释成 \bar{a} 、 \bar{f} 、 \bar{F} , 把自由出现的 x 换成 $\sigma(x)$ 后所得到的命题.

在给定的解释和赋值下, 任何公式都成为命题.

解释和赋值（续）

- 被解释的公式不一定全部包含解释中的4部分
- 闭式在任何解释下都是命题
- 注意不是闭式的公式在某些解释下也可能是命题.

实例

例 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 $D=\mathbf{N}$

(b) $\bar{a} = 2$

(c) $\bar{f}(x, y) = x + y, \bar{g}(x, y) = xy$

(d) 谓词 $\bar{F}(x, y): x = y$

以及赋值 σ : $\sigma(x)=0, \sigma(y)=1, \sigma(z)=2$.

说明下列公式在 I 与 σ 下的涵义,并讨论真值

(1) $\forall x F(g(x, a), y)$

$\forall x (2x=1)$ 假命题

例(续)

$$(2) \forall x F(f(x,a),y) \rightarrow \forall y F(x,f(y,a))$$

$$\forall x (x+2=1) \rightarrow \forall y (0=y+2) \quad \text{真命题}$$

$$(3) \exists x F(f(x,y),g(x,z))$$

$$\exists x (x+1=2x) \quad \text{真命题}$$

$$(4) \forall x \forall y \exists z F(f(x,y),z)$$

$$\forall x \forall y \exists z (x+y=z) \quad \text{真命题}$$

$$(5) \exists x \forall y \forall z F(f(y,z),x)$$

$$\exists x \forall y \forall z (y+z=x) \quad \text{假命题}$$

闭式只需要解释, 如(4),(5)

量词顺序不能随意改变, 如(3), (5)

公式的分类

永真式 (逻辑有效式): 在任何解释和赋值下为真命题

矛盾式 (永假式): 在任何解释和赋值下为假命题

可满足式: 存在成真的解释和赋值

说明:

永真式为可满足式, 但反之不真

谓词公式的可满足性 (永真性, 永假性) 是不可判定的

代换

定义 设 A_0 是含命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n 的命题公式,
 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个谓词公式, 用 A_i 处处代替 A_0 中的 p_i
($1 \leq i \leq n$), 所得公式 A 称为 A_0 的**代换实例**.

例如:

$F(x) \rightarrow G(x), \forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$ 等都是 $p \rightarrow q$ 的换实例,
 $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$ 等不是 $p \rightarrow q$ 的代换实例.

定理 重言式的代换实例都是永真式, 矛盾式的代换实例都是矛盾式.

实例

例 判断下列公式的类型

(1) $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$;

设 I 为任意的解释, 若 $\forall xF(x)$ 为假, 则 $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ 为真. 若 $\forall xF(x)$ 为真, 则 $\exists xF(x)$ 也为真, 所以 $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ 也为真.
是逻辑有效式.

(2) $\forall xF(x) \rightarrow (\forall x\exists yG(x,y) \rightarrow \forall xF(x))$;

重言式 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ 的代换实例, 是逻辑有效式.

例(续)

$$(3) \forall x F(x) \rightarrow (\forall x F(x) \vee \exists y G(y));$$

重言式 $p \rightarrow (p \vee q)$ 的代换实例，是逻辑有效式.

$$(4) \neg (F(x,y) \rightarrow R(x,y)) \wedge R(x,y);$$

矛盾式 $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$ 的代换实例，是矛盾式.

例(续)

(5) $\forall x \exists y F(x, y) \rightarrow \exists x \forall y F(x, y)$.

取解释 I : 个体域 \mathbf{N} , $F(x, y)$ 为 $x=y$.

公式被解释为 $\forall x \exists y (x=y) \rightarrow \exists x \forall y (x=y)$, 其值为假.

解释 I' : 个体域 \mathbf{N} , $F(x, y)$ 为 $x \leq y$, 得到一个新的 在 I' 下,

公式被解释为 $\forall x \exists y (x \leq y) \rightarrow \exists x \forall y (x \leq y)$, 其值为真.

是非逻辑有效式的可满足式.

例(续)

(6) $\exists x F(x,y)$

取解释 I : 个体域 N , $F(x,y)$ 为 $x < y$. 赋值 σ_1 : $\sigma_1(y)=1$.

在 I 和 σ_1 下, $\exists x(x < 1)$, 真命题.

取解释 I : 个体域 N , $F(x,y)$ 为 $x < y$. 赋值 σ_2 : $\sigma_2(y)=0$.

在 I 和 σ_2 下, $\exists x(x < 0)$, 假命题

是非逻辑有效式的可满足式.

2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

- 等值式

- 基本等值式

 - 量词否定等值式

 - 量词辖域收缩与扩张等值式

 - 量词分配等值式

- 前束范式

等值式与基本等值式

定义 若 $A \leftrightarrow B$ 为逻辑有效式, 则称 A 与 B 是**等值**的, 记作 $A \Leftrightarrow B$, 并称 $A \Leftrightarrow B$ 为**等值式**.

基本等值式:

命题逻辑中16组基本等值式的代换实例

如, $\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y) \Leftrightarrow \neg \forall x F(x) \vee \exists y G(y)$

$\neg(\forall x F(x) \vee \exists y G(y)) \Leftrightarrow \neg \forall x F(x) \wedge \neg \exists y G(y)$ 等

基本等值式(续)

消去量词等值式

设 $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$$

$$\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$$

基本等值式(续)

量词否定等值式

设 $A(x)$ 是含 x 自由出现的公式

$$\neg \forall x(A(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x(A(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

基本等值式(续)

量词辖域收缩与扩张等值式

设 $A(x)$ 是含 x 自由出现的公式, B 中不含 x 的出现

关于全称量词的:

$$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$$

$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$$

$$\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$$

$$\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$$

关于存在量词的:

$$\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$$

$$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$$

$$\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$$

$$\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$$

基本的等值式(续)

量词分配等值式

$$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$$

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

注意： \forall 对 \vee 无分配律， \exists 对 \wedge 无分配律，即

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \not\Leftrightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$$

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \not\Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

基本的等值式(续)

例 将下面命题用两种形式符号化

(1) 没有不犯错误的人

(2) 不是所有的人都爱看电影

解 (1) 令 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 犯错误.

$$\neg \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

请给出演算过程, 并说明理由.

(2) 令 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: 爱看电影.

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$

给出演算过程, 并说明理由.

(3) 不是所有的火车都比所有的汽车快

令 $F(x)$: x 是火车, $G(x)$: x 是汽车,
 $H(x,y)$: x 比 y 跑得快.

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow H(x,y)))$$

存在比有的汽车跑的慢的火车
 $\exists x(F(x) \wedge \exists y(G(y) \wedge \neg H(x,y)))$

前束范式

定义 设 A 为一个一阶逻辑公式, 若 A 具有如下形式
 $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_kx_kB$, 则称 A 为**前束范式**, 其中 $Q_i (1\leq i\leq k)$
为 \forall 或 \exists , B 为不含量词的公式.

例如, $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow(G(y)\wedge H(x,y)))$

$$\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$$

是前束范式, 而

$$\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$$

$$\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$$

不是前束范式.

公式的前束范式

定理（前束范式存在定理） 一阶逻辑中的**任何**公式都存在与之等值的前束范式

注意：

- 公式的前束范式**不惟一**
- 求公式的前束范式的方法：
利用**重要等值式**、**置换规则**、**换名规则**、**代替规则**进行等值演算。

换名规则与代替规则

换名规则：将量词辖域中出现的某个**约束出现**的个体变项及对应的指导变项，改成另一个辖域中未曾出现过的个体变项符号，公式中其余部分不变，则所得公式与原来的公式等值。

代替规则：对某**自由出现**的个体变项用与原公式中所有个体变项符号不同的符号去代替，则所得公式与原来的公式等值。

求公式的前束范式

求前束范式：使用重要等值式、置换规则、换名规则进行等值演算。

例 求下列公式的前束范式

$$(1) \neg \exists x(M(x) \wedge F(x))$$

解 $\neg \exists x(M(x) \wedge F(x))$

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x) \vee \neg F(x)) \quad (\text{量词否定等值式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$$

两步结果都是前束范式，说明前束范式不惟一。

例(续)

$$(2) \quad \forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$$

解 $\forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \neg G(x)$$

(量词否定等值式)

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge \neg G(x))$$

(量词分配等值式)

另有一种形式

$$\forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \neg G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall y \neg G(y)$$

(代替规则)

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge \neg G(y))$$

(量词辖域扩张)

两种形式是等值的

例 (续)

$$(3) \exists x F(x) \vee \neg \forall x G(x)$$

解 $\exists x F(x) \vee \neg \forall x G(x)$

$$\Leftrightarrow \exists x F(x) \vee \exists x \neg G(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (F(x) \vee \neg G(x)) \quad (\text{为什么?})$$

或 $\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \vee \neg G(y)) \quad (\text{为什么?})$

$$(4) \forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(x,y) \wedge \neg H(y))$$

解 $\forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(x,y) \wedge \neg H(y))$

$$\Leftrightarrow \forall z F(z) \rightarrow \exists y (G(x,y) \wedge \neg H(y)) \quad (\text{换名规则})$$

$$\Leftrightarrow \exists z \exists y (F(z) \rightarrow (G(x,y) \wedge \neg H(y))) \quad (\text{为什么?})$$

例(续)

或

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(z, y) \wedge \neg H(y)) \quad (\text{代替规则})$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \rightarrow (G(z, y) \wedge \neg H(y)))$$

$$(5) \forall x (F(x, y) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge H(x, z)))$$

解 用换名规则, 也可用代替规则, 这里用代替规则

$$\forall x (F(x, y) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge H(x, z)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x, u) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge H(x, z)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \exists y (F(x, u) \rightarrow G(x, y) \wedge H(x, z))$$

注意: $\forall x$ 与 $\exists y$ 不能颠倒

苏格拉底三段论的正确性

“凡是人都要死的. 苏格拉底是人. 所以苏格拉底是要死的.”

设 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 是要死的, a : 苏格拉底.

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \wedge F(a) \rightarrow G(a)$$

设前件为真, 即 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 与 $F(a)$ 都为真.

由于 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 为真, 故 $F(a) \rightarrow G(a)$ 为真.

由 $F(a)$ 与 $F(a) \rightarrow G(a)$ 为真, 根据假言推理得证 $G(a)$ 为真.

有兴趣的同学可以扩展看一阶逻辑的推理理论

作业

- **P51** 求例2.14的(4)(5)(7)(8)(11)的前束范式
- **P53** 将习题2.3中命题符号化，要求只使用全称量词