离散数学

课程介绍

基本信息

- 课程名称（包括英文名称）： 离散数学及其应用（ Discrete Mathematics And its Application ）
- 课程编号：**1A102**
- 课程类型： 必修
- 所属学科： 计算机科学与技术
- 学时和学分： 48学时
- 主讲教员： 荆琦 （**jingqi@pku.edu.cn**）

离散数学 vs. 连续数学

- 连续数学：以连续函数为研究对象
  - 极限，连续，导数，微分，积分，…
  - 几何，拓朴，…
- 离散数学：以离散数学结构为研究对象
  - 集合，逻辑，图论，群，…
  - 符合计算机处理对象的特点

课程主要目标

- 离散数学是软件工程专业的重要专业基础课程，为后继的专业课程（如程序设计、数据结构、数据库、操作系统、人工智能、计算机理论等）的学习奠定必要的数学基础。
- 为从事计算机软件、硬件的开发以及应用工作提供必要的数学工具。

通过离散数学课程的学习，能有效地培养学生分析问题和解决问题、计算思维和严格的逻辑推理能力。所以，本课程对学生毕业后继续学习或参加工作也都是非常有益的。

课件访问方式

- ftp://ftp.ss.pku.edu.cn
- 帐户：***student***
- 口令：***onlyforss***

教材与教学参考书

- 教材：
  - 耿素云、屈婉玲、张立昂，离散数学（第五版），清华大学出版社, 2013.
- 教学参考书：
  - 屈婉玲、耿素云、张立昂，离散数学题解（第五版），清华大学出版社，2013.

学期成绩的评定

- 1. 课程考察方式
  - 笔试（闭卷）
- 2. 学期成绩比例

① 作业成绩　**30%**

② 期末笔试　**70%**

作业

- 要求

1. 手写
2. 周五中午十二点之前提交（过时扣分）
3. 周三上课时讲解

**上课回答问题总成绩加分

主要内容

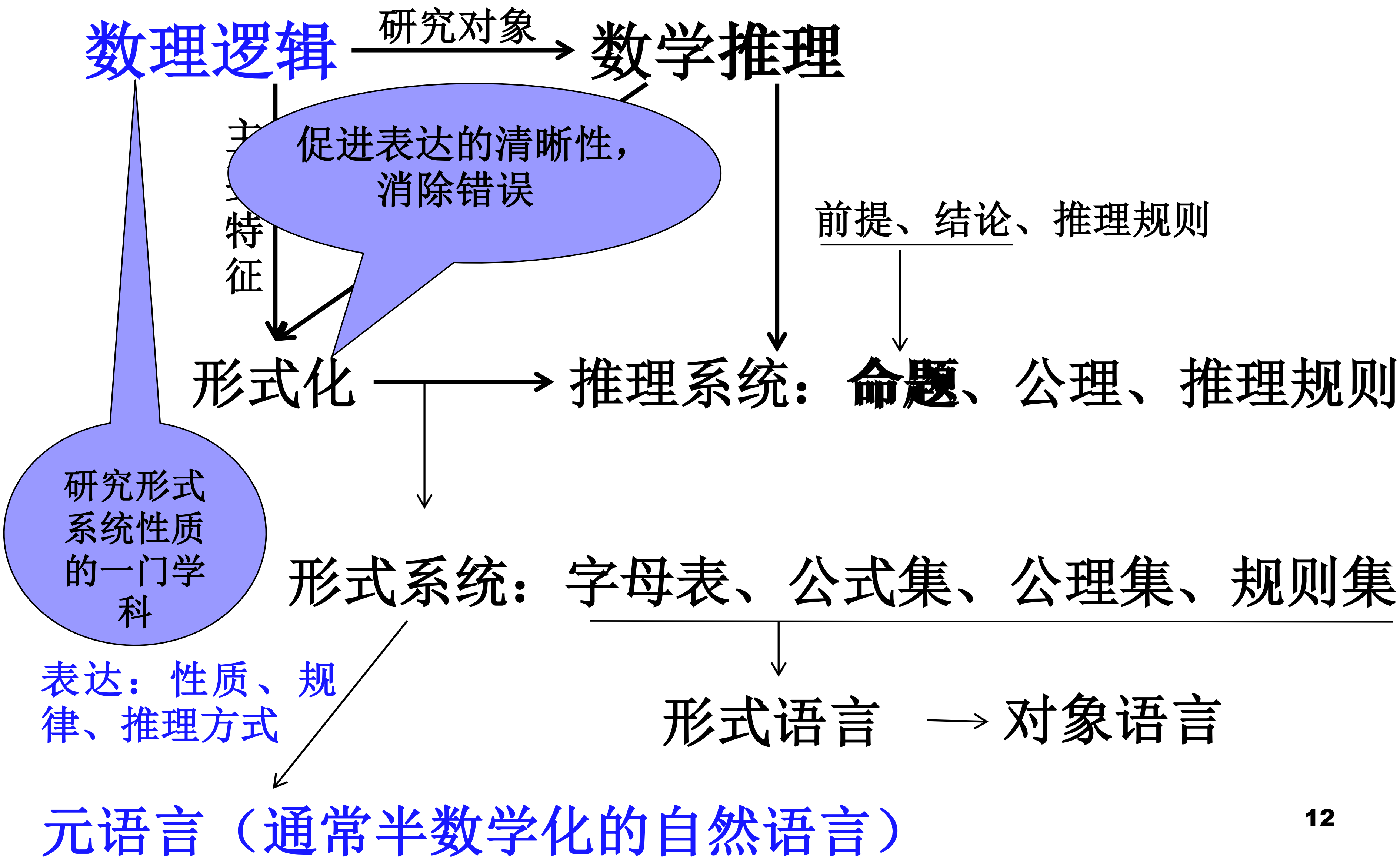
- 第一部分：数理逻辑，包括命题逻辑和一阶逻辑；（**12**学时）
- 第二部分：集合论，包括集合的基本概念和运算，二元关系和函数；（**12**学时）
- 第三部分：图论，包括图的基本概念和几种特殊的图。（**15**学时）
- 第四部分：组合分析初步，包括基本组合计数、递推方程（**5**学时）
- 第五部分：代数系统简介，包括二元运算及其性质、代数系统（**4**学时）

数理逻辑部分

- 第1章 命题逻辑
- 第2章 一阶逻辑

数理逻辑：用数学方法来研究推理的形式结构和推理规律的数学学科

概述



数理逻辑
研究对象
数学推理
特征
促进表达的清晰性，
消除错误
前提、结论、推理规则
形式化
推理系统：命题、公理、推理规则
研究形式系统性质的一门学科
形式系统：字母表、公式集、公理集、规则集
表达：性质、规律、推理方式
形式语言
对象语言
元语言（通常半数学化的自然语言）

第1章 命题逻辑

1.1 命题符号化及联结词

- 命题与真值
- 原子命题
- 复合命题
- 命题常项
- 命题变项
- 联结词

命题与真值

命题: 判断结果唯一的陈述句
命题的真值: 判断的结果
真值的取值: 真与假
真命题: 真值为真的命题
假命题: 真值为假的命题

注意：感叹句、祈使句、疑问句都不是命题
陈述句中的悖论以及判断结果不唯一确定的也不是命题

例 下列句子中那些是命题?

(1) $\sqrt{2}$是无理数.	真命题
(2) $2+5=8$.	假命题
(3) $x+5>3$.	真值不确定
(4) 你有铅笔吗?	疑问句
(5) 这只兔子跑得真快呀!	感叹句
(6) 请不要讲话!	祈使句
(7) 我正在说谎话.	悖论
(8)明年10月1日是晴天	命题

(3)~(7)都不是命题

命题的分类

简单命题(原子命题)：

简单陈述句构成的命题

复合命题：

由简单命题与联结词按一定规则复合而成的命题

简单命题符号化

用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i$ ($i\geqslant 1$）表示简单命题

用“1”表示真，用“0”表示假

例如，令

p: $\sqrt{2}$是有理数，则 p 的真值为 0

q：2 + 5 = 7，则 q 的真值为 1

联结词与复合命题

1.否定式与否定联结词“¬”

定义 设p为命题，复合命题 “非p”（或 “p的否定”）称为p的否定式，记作$\neg p$，符号$\neg$称作否定联结词，并规定$\neg p$ 为真当且仅当p为假

2.合取式与合取联结词“∧”

定义 设p, q为二命题, 复合命题 “p并且q”(或 “p与q”) 称为p与q的合取式，记作$p\wedge q$，$\wedge$称作合取联结词，并规定 $p\wedge q$为真当且仅当p与q同时为真

注意：描述合取式的灵活性与多样性

分清简单命题与复合命题

例 将下列命题符号化.

(1) 王晓既用功又聪明.

(2) 王晓不仅聪明，而且用功.

(3) 王晓虽然聪明，但不用功.

(4) 王晓不是不聪明，而是不用功.

(5) 张辉与王丽都是三好生.

(6) 张辉与王丽是同学.

解 令 p：王晓用功，q：王晓聪明，则

(1) $p \wedge q$

(2) $p \wedge q$

(3) $q \wedge \neg p$

(4) $\neg(\neg p) \wedge \neg q$

例 (续)

令 r : 张辉是三好学生，s :王丽是三好学生

(5) $r \wedge s$.

(6) 令 t : 张辉与王丽是同学，t 是简单命题 .

说明:

(1)~(5)说明描述合取式的灵活性与多样性.

(6) 中“与”联结的是句子的主语成分，因而(5)中句子是简单命题.

联结词与复合命题(续)

3.析取式与析取联结词“$\vee$”

定义 设 p,q为二命题，复合命题“p或q”称作p与q的**析取式**，记作$p\vee q$，$\vee$称作**析取联结词**，并规定$p\vee q$为假当且仅当p与q同时为假.

例 将下列命题符号化

(1) 2或4是素数.

(2) 2或3是素数.

(3) 4或6是素数.

(4) 小元元只能拿一个苹果或一个梨

(5) 王晓红生于1975年或1976年.

解 令 p:2是素数, q:3是素数, r:4是素数, s:6是素数,

则 (1), (2), (3) 均为**相容或**.

分别符号化为: $p \vee r$, $p \vee q$, $r \vee s$,

它们的真值分别为 1, 1, 0.

而 (4), (5) 为**排斥或**.

令 t:小元元拿一个苹果，u:小元元拿一个梨,

则 (4) 符号化为 $(t \wedge \neg u) \vee (\neg t \wedge u)$.

令v:王晓红生于1975年, w:王晓红生于1976年,

则 (5) 既可符号化为 $(v \wedge \neg w) \vee (\neg v \wedge w)$, 又可符号化为 $v \vee w$, 为什么?

联结词与复合命题(续)

4.蕴涵式与蕴涵联结词“→”

定义 设 p, q为两个命题，复合命题 “如果p, 则q” 称作p与q的**蕴涵式**，记作$p \to q$，并称p是蕴涵式的**前件**，q为蕴涵式的**后件**. →称作**蕴涵联结词**，并规定，$p \to q$为假当且仅当 p 为真 q 为假.

联结词与复合命题(续)

$p \to q$ 的逻辑关系： p 为 q 的充分条件，或者q 为 p 的必要条件

“如果 p，则 q ”的不同表述法很多：

若 p，就 q

只要 p，就 q

p 仅当 q

只有 q 才 p

除非 q, 才 p 或 除非 q, 否则非 p.

当 p 为假时，$p \to q$ 为真

常出现的错误：不分充分与必要条件

例 设 p:天冷，q:小王穿羽绒服，

将下列命题符号化

(1) 只要天冷，小王就穿羽绒服.

(2) 因为天冷，所以小王穿羽绒服.

(3) 若小王不穿羽绒服，则天不冷.

(4) 只有天冷，小王才穿羽绒服.

(5) 除非天冷，小王才穿羽绒服.

(6) 除非小王穿羽绒服，否则天不冷.

(7) 如果天不冷，则小王不穿羽绒服.

(8) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候.

注意：$p \to q$ 与 $\neg q \to \neg p$ 等值（真值相同）

例（符号化并讨论真值）：

- 如果今天是1号，则明天是2号
- 如果今天是1号，则明天是3号
- 除非天下大雨，否则他不乘公共汽车上班
- 不经一事，不长一智

联结词与复合命题(续)

5.等价式与等价联结词“$\leftrightarrow$”

定义 设p，q为二命题，复合命题 “p当且仅当q”称作p与q的等价式，记作$p\leftrightarrow q$，$\leftrightarrow$称作等价联结词. 并规定$\leftrightarrow$为真当且仅当p与q同时为真或同时为假.

说明:

(1) $p\leftrightarrow q$ 的逻辑关系:p与q互为充分必要条件

(2) $p\leftrightarrow q$为真当且仅当p与q同真或同假

例

例 求下列复合命题的真值

(1) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 3 + 3 ＝ 6. 1

(2) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 3 是偶数. 0

(3) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 太阳从东方升起. 1

(4) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 美国位于非洲. 0

(5) 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的充要条件是它在 x_0 连续. 0

一个讨论

（1） 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 太阳从东方升起.

（2） 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 美国位于非洲.

- 按联结词定义，（1）为真，（2）为假
- 前提、结论之间并无逻辑关系
- 数学抽象与现实的差距

例：将下列命题符号化

(1) 铁和氧化合, 但铁和氮不化合.

(2) 如果我下班早, 就去商店看看, 除非我很累.

(3) 李四是计算机系的学生, 他住在312室或313室.

解

（1）$p\wedge(\neg q)$，其中:

p代表“铁和氧化合”，

q代表“铁和氮化合”。

（2）$(\neg p) \rightarrow(q\rightarrow r)$，其中:

p代表“我很累”，

q代表“我下班早”，

r代表“我去商店看看”

还可表示为：$((\neg p)\wedge q))\rightarrow r$

解（续）

（3）$p\wedge((q\vee r)\wedge(\neg(q\wedge r)))$，其中：

p代表“李四是计算机系学生”，

q代表“李四住312室”，

r代表“李四住313室”.

还可表示为：

$$p\wedge((q\wedge(\neg r))\vee((\neg q)\wedge r))$$

联结词与复合命题(续)

以上给出了5个联结词：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$，组成一个联结词集合$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

联结词的优先顺序为：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$; 如果出现的联结词同级，又无括号时，则按从左到右的顺序运算；若遇有括号时，应该先进行括号中的运算.

注意：本书中使用的 括号全为园括号.

1.2 命题公式及分类

- 命题变项与合式公式
- 公式的赋值
- 真值表
- 命题的分类
  - 重言式
  - 矛盾式
  - 可满足式
- 真值函数

命题变项与合式公式

命题常项：简单命题

命题变项：真值不确定的陈述句

定义 合式公式 (命题公式, 公式) 递归定义如下：

(1) 单个命题常项或变项 $p,q,r,\ldots, p_i,q_i,r_i,\ldots,0,1$ 是合式公式

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式

(4) 只有有限次地应用(1)~(3)形成的符号串才是合式公式

说明: 元语言与对象语言, 外层括号可以省去

括号省略规则

1. 外层括号可以省去
2. 联结词的优先顺序为：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
3. 如果出现的联结词同级，又无括号时，则按从左到右的顺序运算;
4. 若遇有括号时，应该先进行括号中的运算.

合式公式的层次

定义

(1) 若公式A是单个的命题变项, 则称A为0层公式.

(2) 称A是n+1(n≥0)层公式是指下面情况之一:

(*a*) $A=\neg B$, B是n层公式;

(*b*) $A=B\wedge C$, 其中B,C分别为i层和j层公式，且 $n=\max(i, j)$;

(*c*) $A=B\vee C$, 其中B,C的层次及n同(*b*);

(*d*) $A=B\rightarrow C$, 其中B,C的层次及n同(*b*);

(*e*) $A=B\leftrightarrow C$, 其中B,C的层次及n同(*b*).

合式公式的层次 (续)

例如 公式

p	0层
$\neg p$	1层
$\neg p \rightarrow q$	2层
$\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$	3层
$((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$	4层

公式的赋值

定义 给公式A中的命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$指定一组真值称为对A的一个赋值或解释

成真赋值: 使公式为真的赋值

成假赋值: 使公式为假的赋值

说明:

- 赋值$\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$之间不加标点符号， α_i=0或1.
- A中仅出现 $p_1, p_2, \ldots, p_n$， 给A赋值$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$是指 $p_1=\alpha_1, p_2=\alpha_2, \ldots, p_n=\alpha_n$
- A中仅出现 $p, q, r, \ldots$, 给A赋值$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$是指 $p=\alpha_1, q=\alpha_2, r=\alpha_3 \ldots$
- 含n个变项的公式有2^n个赋值.

真值表

真值表: 公式A在所有赋值下的取值情况列成的表

例 给出公式的真值表

$A = (q \to p) \land q \to p$ 的真值表

p　q	$q \to p$	$(q \to p) \land q$	$(q \to p) \land q \to p$
0　0	1	0	1
0　1	0	0	1
1　0	1	0	1
1　1	1	1	1

实例

例 $B = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$ 的真值表

p q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg(\neg p \vee q) \wedge q$
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	1	0	0

例 $C=(p\vee q)\rightarrow\neg r$ 的真值表

$p\quad q\quad r$	$p\vee q$	$\neg r$	$(p\vee q)\rightarrow\neg r$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

(p→q)→r与p→(q→r)

p	q	r	p→q	q→r	(p→q)→r	p→(q→r)
0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

公式的类型

定义 设A为一个命题公式

(1) 若A无成假赋值，则称A为重言式(也称永真式)

(2) 若A无成真赋值，则称A为矛盾式(也称永假式)

(3) 若A不是矛盾式，则称A为可满足式

注意：重言式是可满足式，但反之不真.

上例中A为重言式，B为矛盾式，C为可满足式

$A = (q \to p) \land q \to p$，$B = \neg(\neg p \lor q) \land q$，$C = (p \lor q) \to \neg r$

真值函數

问题：含n个命题变项的所有公式共产生多少个互不相同的真值表？

定义 称定义域为{00…0, 00…1, …, 11…1}，值域为{0,1}的函数是n元真值函数，定义域中的元素是长为n的0,1串. 常用$F:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ 表示F是n元真值函数.

共有 2^{2^n} 个n元真值函数.

例如 $F:\{0,1\}^2\to\{0,1\}$，且$F(00)=F(01)=F(11)=0$，$F(01)=1$，则F为一个确定的2元真值函数.

命题公式与真值函数

- 对于任何一个含n个命题变项的命题公式A，都存在惟一的一个n元真值函数F为A的真值表.
- 等值的公式对应的真值函数相同.

下表给出所有2元真值函数对应的真值表, 每一个含2个命题变项的公式的真值表都可以在下表中找到.

例如：$p \to q$, $\neg p \vee q$, $(\neg p \vee q) \vee (\neg(p \to q) \wedge q)$ 等都对应表中的 $F_{13}^{(2)}$

2元真值函数对应的真值表

p	q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

p	q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

作业

- 课件P25命题符号化
- 用真值表法判断教材习题1.12中公式的类型