1. 评分标准

- 作业第一部分共30分,每题5分
- 作业第二部分共70分，每题14分
- 附加题每题10分

2. 情况汇总

- 整体情况较好
- 个别同学把domR 与ranR搞混了.
- 错误率相对较高的为第一部分的中的(3)(4)

第六次作业

必做题

1. 设$S=\{1,2,3,4\}$，R为S上的关系。若关系矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

，求下列问题。

(1) R的关系表达式是什么？

解：

$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle\}$

(2) $\mathrm{dom}R$与$\mathrm{ran}R$是什么？

解：$\mathrm{dom}R=\{1,2,3\}$；$\mathrm{ran}R=\{1,2,3,4\}$

(3) $R\circ R$的集合表达式是什么？

解：$R\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

(4) R^{-1}的关系图是什么？

解：$R^{-1}=\{\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$

(5) 求$R\upharpoonright\{1,2\}$。

解：$R\upharpoonright\{1,2\}=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle\}$

(6) 求$R[\{1,2\}]$。

解：$R[\{1,2\}]=\{1,2,3\}$

(1) 若R为A上的传递关系，证明R^{-1}也为A上的传递关系。

证明：

任取$<x,y>\in R^{-1}$且$<y,z>\in R^{-1}$

$\therefore <z,y>\in R \wedge <y,x>\in R$

$\because$ R具有传递性

$\therefore <z,x>\in R$

$\therefore <x,z>\in R^{-1}$

$\therefore <x,y>\in R^{-1} \wedge <y,z>\in R^{-1} \rightarrow <x,z>\in R^{-1}$

即R^{-1}在A上也有传递性

(2) 若R_1，R_2为A上的反自反关系，证明R_1-R_2也为A上的反自反关系。

证明：$\because R_1$，R_2为A上的反自反关系

$\therefore R_1\cap I_A=\phi$，$R_2\cap I_A=\phi$

$\therefore R_1\cap I_A-R_2\cap I_A=\phi-\phi=\phi$

$\therefore (R_1-R_2)\cap I_A=\phi$

$\therefore R_1-R_2$在A上也有反自反性。

(3) 若R_1，R_2为A上的自反关系，证明R_1...也是A上的自反关系。

证明：

$\because R_1$，R_2均为A上的自反关系

$\therefore \forall x\in A$，$<x,x>\in R_1$且$<x,x>$...

$\because R_1\circ R_2$后，$<x,x>\in R_1\circ R_2$

$\therefore R_1\circ R_2$在A上有反自反关系

(4) 举出 $R_1 \cup R_2$ 不具有反对称性的例子（R_1，R_2 具有反对称性）

解：

令 $A=\{1,2,3\}$，$R_1=\{\langle 1,2\rangle\}$，$R_2=\{\langle 2,1\rangle\}$

$\because$ R_1、R_2 在 A 上分别具有反对称性

$\because$ $R_1 \cup R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ 仍是 A 上的关系

$\therefore$ $R_1 \cup R_2$ 具有对称性，不具有反对称性

(5) 若 R_1，R_2 为 A 上的对称关系，则 $R_1 \circ R_2$ 是否也具有对称关系？

解：$R_1 \circ R_2$ 不具有对称关系。

令 $A=\{1,2,3\}$，$R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

$R_2=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

$\because$ R_1、R_2 在 A 上分别具有对称性

$\because$ $R_1 \circ R_2=\{\langle 1,3\rangle\}$ 仍是 A 上的关系

$\therefore$ $R_1 \circ R_2$ 不具有对称性

图论

图论部分

- 第5章 图的基本概念
- 第6章 特殊的图
- 第7章 树

第5章 图的基本概念

5.1 无向图及有向图

5.2 通路, 回路和图的连通性

5.3 图的矩阵表示

5.4 最短路径, 关键路径和着色

5.1 无向图及有向图

- 无向图与有向图
- 顶点的度数
- 握手定理
- 简单图
- 完全图
- 子图
- 补图

无向图与有向图

多重集合: 元素可以重复出现的集合

如{a,a,b,c,c,c}与{a,b,c}

- 作为集合是相同的
- 作为多重集是不同的

无序积: $A\&B=\{(x,y) \mid x\in A \wedge y\in B\}$

- 将无序对{a,b}记作(a,b)
- (a,b) = (b,a)

设A={a,b}, B={a,c}，求$A\&B$， $A\&A$？

$A\&B$ = {(a,a), (a,c), (b,c), (a,b)}

$A\&A$ = {(a,a), (b,b), (a,b)}

无向图

定义 无向图$G=\langle V,E\rangle$, 其中

(1) 顶点集V是非空有穷集合,

其元素称为顶点

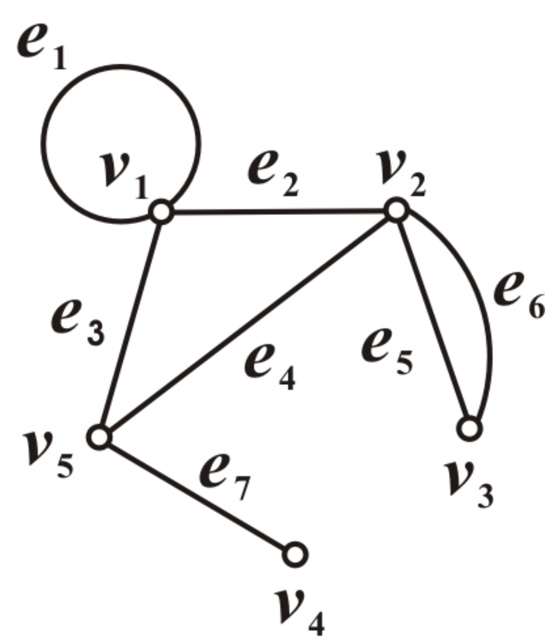
(2) 边集E为$V\&V$的多重子集,

其元素称为无向边，简称边.

例如, $G=\langle V,E\rangle$, 其中

$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$,

$E=\{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$



有向图

定义 有向图$D=<V,E>$, 其中

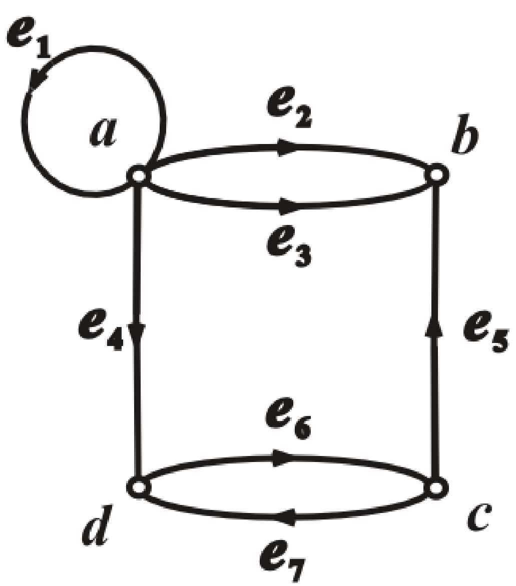
(1)顶点集V是非空有穷集合,

其元素称为顶点

(2) 边集E为$V\times V$的多重子集，其

元素称为有向边，简称边.

D的基图:用无向边代替有向边



如$D=<V,E>$, 其中

$V=\{a,b,c,d\}$

$E=\{<a,a>,<a,b>,<a,b>,<a,d>,<c,b>,<d,c>,<c,d>\}$

注意：图的数学定义与图形表示,在同构（待叙）的意义下是一一对应的

无向图与有向图(续)

通常用G表示无向图（有时简称为图），D表示有向图, 也常用G泛指无向图和有向图.

$V(G)$, $E(G)$, $V(D)$, $E(D)$: G和D的顶点集, 边集.

***n* 阶图**: n个顶点的图

零图: $E=\varnothing$

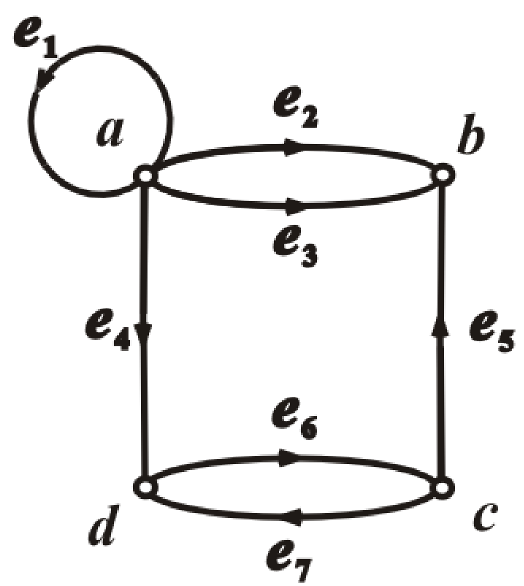
平凡图: 1 阶零图

空图: $V=\varnothing$

顶点和边的关联与相邻

定义（顶点与边） 设$e=(u,v)$是无向图$G=<V,E>$的一条边，称u,v为e的端点，e与$u(v)$关联．若$u\neq v$，则称e与$u(v)$的关联次数为1；若$u=v$，则称e为环，此时称e与u的关联次数为2；若w不是e端点，则称e与w的关联次数为0．无边关联的顶点称作孤立点．

定义 设无向图$G=<V,E>$，$u,v\in V$，$e,e'\in E$，若$(u,v)\in E$，则称u,v相邻；若e,e'至少有一个公共端点，则称e,e'相邻．



对有向图有类似定义．其中对于端点和相邻：设$e=\langle u,v\rangle$是有向图的一条边，又称u是e的始点，v是e的终点，u邻接到v，v邻接于u．

顶点的度数

设$G=<V,E>$为无向图, $v\in V$,

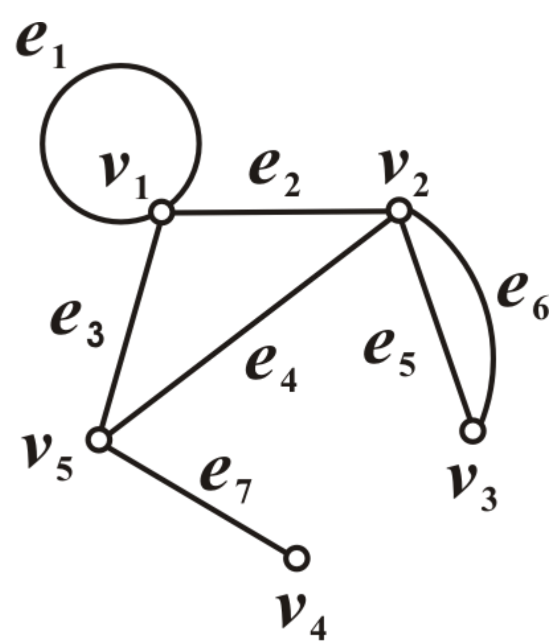
v的度数(度) $d(v)$: v作为边的端点次数之和

悬挂顶点: 度数为1的顶点

悬挂边: 与悬挂顶点关联的边

G的最大度$\Delta(G)=\max\{d(v)|\ v\in V\}$

G的最小度$\delta(G)=\min\{d(v)|\ v\in V\}$



例如 $d(v_5)=3$, $d(v_2)=4$, $d(v_1)=4$,

$\Delta(G)=4$, $\delta(G)=1$,

v_4是<u>悬挂顶点</u>, e_7是<u>悬挂边</u>, e_1是<u>环</u>

顶点的度数(续)

设$D=<V,E>$为有向图, $v\in V$,

v的出度$d^+(v)$: v作为边的始点次数之和

v的入度$d^-(v)$: v作为边的终点次数之和

v的度数(度) $d(v)$: v作为边的端点次数之和

$$d(v)= d^+(v)+ d^-(v)$$

D的最大出度$\Delta^+(D)=\max\{d^+(v)|v\in V\}$

最小出度$\delta^+(D)=\min\{d^+(v)|v\in V\}$

最大入度$\Delta^-(D)=\max\{d^-(v)|v\in V\}$

最小入度$\delta^-(D)=\min\{d^-(v)|v\in V\}$

最大度$\Delta(D)=\max\{d(v)|v\in V\}$

最小度$\delta(D)=\min\{d(v)|v\in V\}$

例

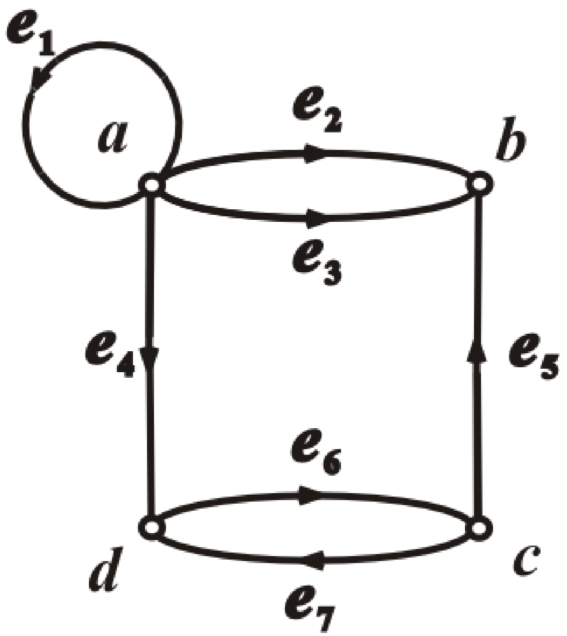
$d^+(a)=4$, $d^-(a)=1$, $d(a)=5$

$d^+(b)=0$, $d^-(b)=3$, $d(b)=3$

$\Delta^+(D)=4$, $\delta^+(D)=0$

$\Delta^-(D)=3$, $\delta^-(D)=1$

$\Delta(D)=5$, $\delta(D)=3$



图论基本定理——握手定理

定理（边和度数的关系） 任意无向图和有向图的所有顶点度数之和都等于边数的2倍，并且有向图的所有顶点入度之和等于出度之和等于边数.

证 *G*中每条边（包括环）均有两个端点，所以在计算*G*中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，*m*条边共提供2*m*度.

有向图的每条边提供一个入度和一个出度, 故所有顶点入度之和等于出度之和等于边数.

握手定理(续)

推论（顶点和度数的关系）任意无向图和有向图的奇度顶点个数必为偶数.

证 设$G=\langle V,E\rangle$为任意图，令

$V_1=\{v \mid v\in V\wedge d(v)为奇数\}$

$V_2=\{v \mid v\in V\wedge d(v)为偶数\}$

则$V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$，由握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{v\in V_1}d(v)+\sum_{v\in V_2}d(v)$$

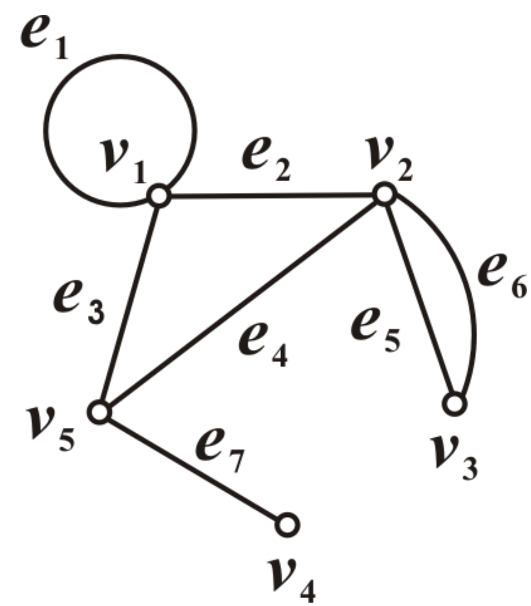
由于$2m$, $\sum_{v\in V_2}d(v)$均为偶数，所以 $\sum_{v\in V_1}d(v)$也为偶数, 但因为V_1中顶点度数都为奇数，所以$|V_1|$必为偶数.

图的度数列

设无向图G的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

G的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

如右图度数列:4,4,2,1,3



设有向图D的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

D的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

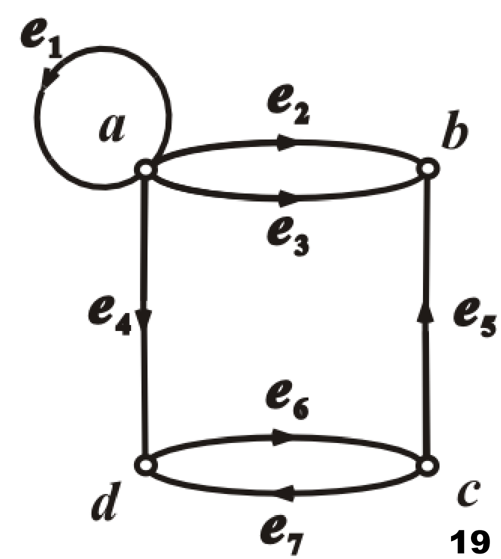
D的出度列: $d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D的入度列: $d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

如右图度数列:5,3,3,3

出度列:4,0,2,1

入度列:1,3,1,2



握手定理的应用

例1 (3,3,3,4), (2,3,4,6,8)能成为图的度数列吗?

解 不可能. 它们都有奇数个奇度顶点.

例2 已知图G有10条边, 4个3度顶点, 其余顶点的度数均小于等于2, 问G至少有多少个顶点?

解 设G有n个顶点. 由握手定理,

$$\underline{4\times3+2\times(n-4)}\geq\underline{2\times10}$$

解得 $n\geq8$

由题设计算G的度数的上限

握手定理得G的度数

握手定理的应用(续)

例3 证明不存在具有奇数个面且每个面都具有奇数条棱的多面体.

证 用反证法. 假设存在这样的多面体,

作无向图$G=\langle V,E\rangle$， 其中$V=\{v \mid v$为多面体的面$\}$,

$E=\{(u,v) \mid u,v\in V \wedge u$与$v$有公共的棱 $\wedge\ u\neq v\}$.

则题设中多面体的奇数个面对应于G的奇数个顶点；多面体的每个面具有奇数条棱对应于G中每个顶点具有奇数度

则根据假设, $|V|$为奇数且$\forall v\in V$, $d(v)$为奇数. 这与握手定理的推论矛盾（握手定理的推论是奇度顶点个数为偶数）.

多重图与简单图

定义 （1） 在无向图中, 如果有2条或2条以上的边关联同一对顶点， 则称这些边为平行边， 平行边的条数称为重数.

(2) 在有向图中, 如果有2条或2条以上的边具有相同的始点和终点， 则称这些边为有向平行边， 简称平行边， 平行边的条数称为重数.

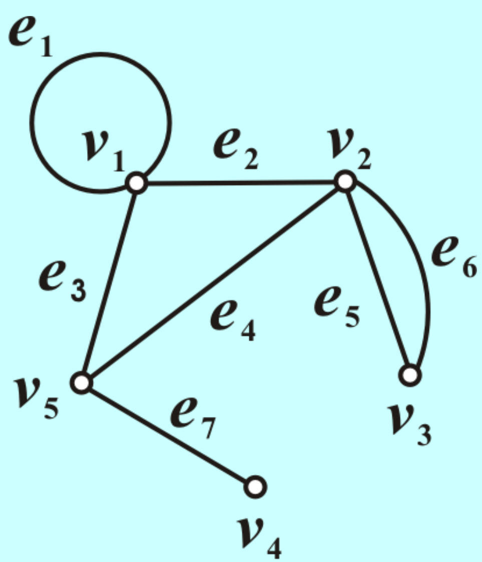
(3) 含平行边的图称为多重图.

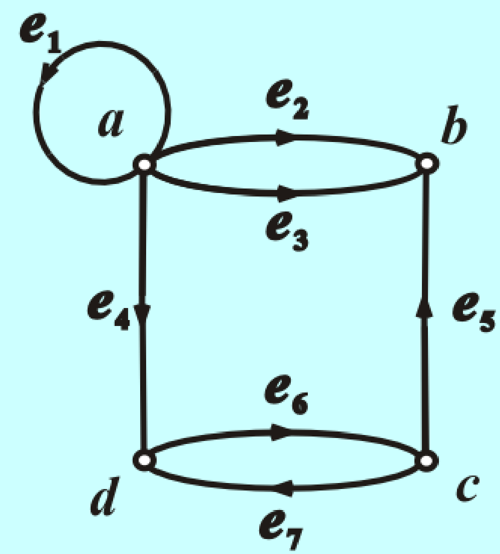
(4) 既无平行边也无环的图称为简单图.

注意:简单图是极其重要的概念

多重图与简单图(续)

例如





e_5和e_6是平行边
重数为2
不是简单图

e_2和e_3是平行边,重数为2
e_6和e_7不是平行边
不是简单图

图的同构

定义 设$G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$为两个无向图(有向图), 若存在双射函数 $f: V_1 \to V_2$, 使得对于任意的 $v_i,v_j \in V_1$, $(v_i,v_j) \in E_1$（$<v_i,v_j> \in E_1$）

当且仅当 $(f(v_i),f(v_j)) \in E_2$（$<f(v_i),f(v_j)> \in E_2$），
并且 (v_i,v_j)（$<v_i,v_j>$）与 $(f(v_i),f(v_j))$（$<f(v_i),f(v_j)>$）的重数相同,

则称G_1与G_2是同构的，记作$G_1 \cong G_2$.

图的同构(续)

几点说明：

图之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性.

能找到多条同构的必要条件, 但它们都不是充分条件:

① 边数相同

② 顶点数相同

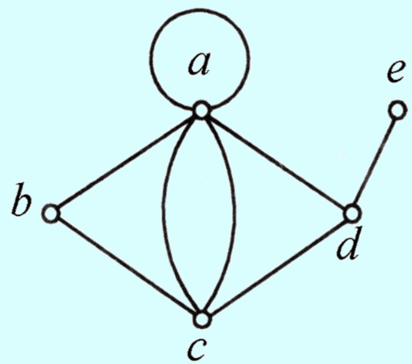
③ 度数列相同(不计度数的顺序)，等等

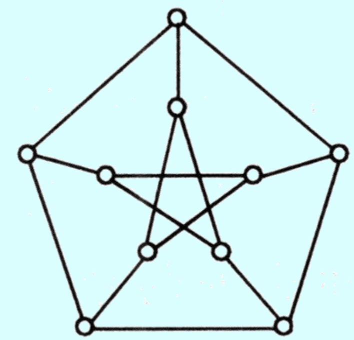
若两图不符合必要条件，则两图不同构

至今没有找到判断两个图同构的多项式时间算法（只能根据定义，找到顶点之间满足条件的双射）

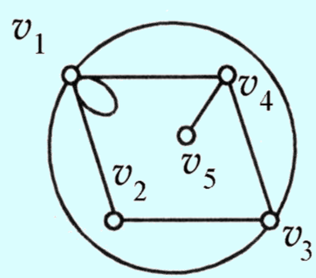
同构实例

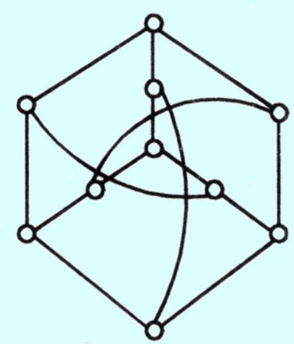
例1 证明下述2对图是同构的





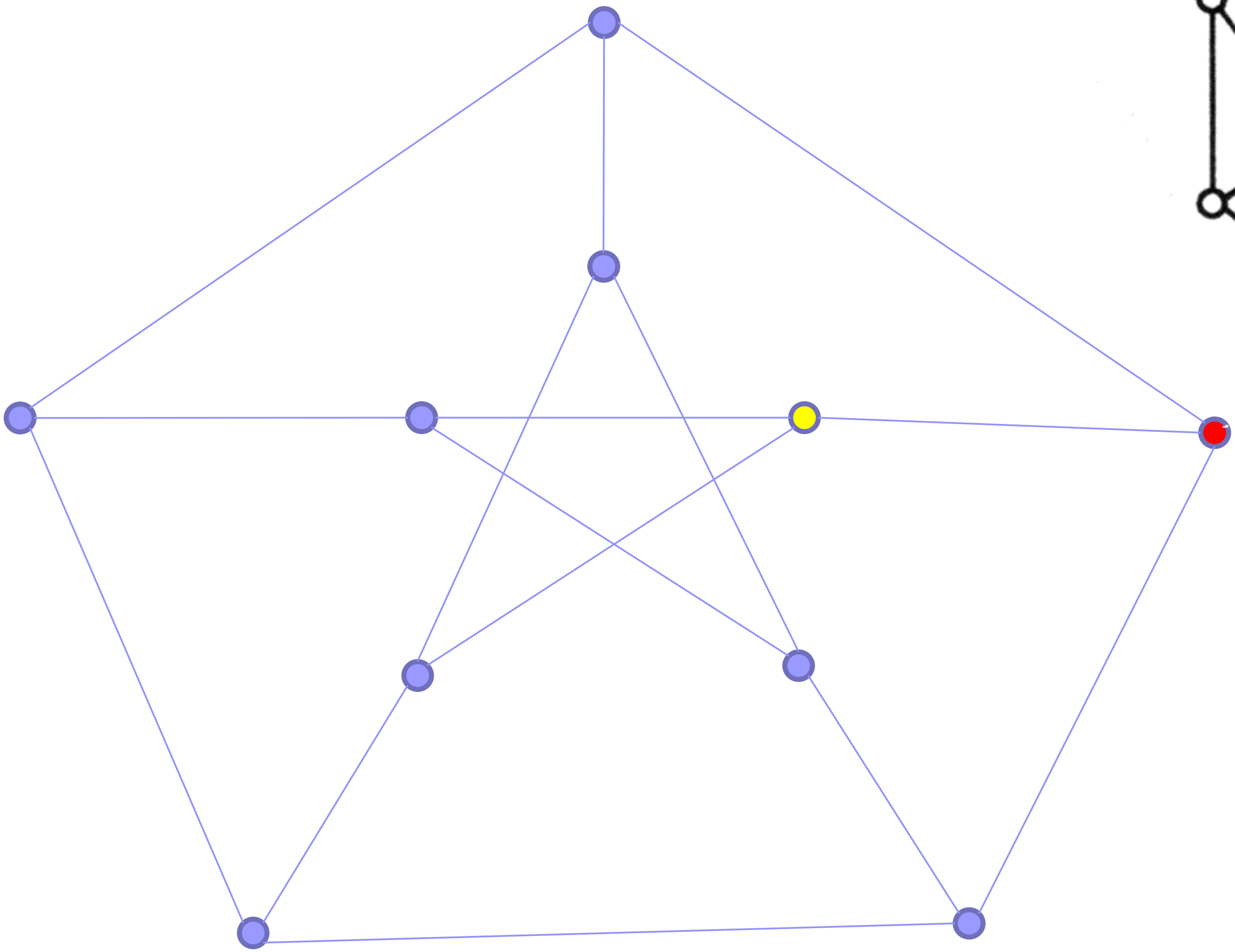
彼得森图

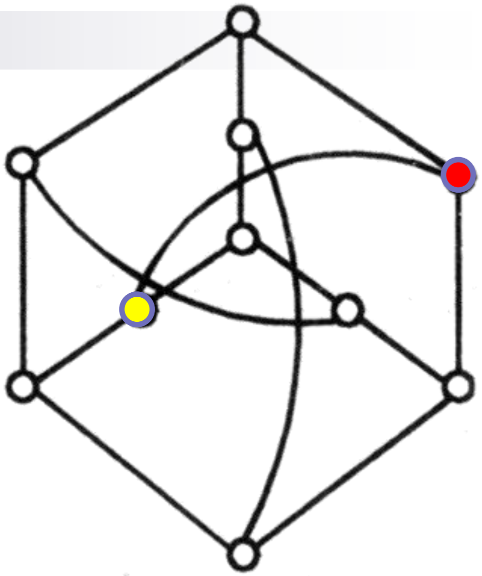


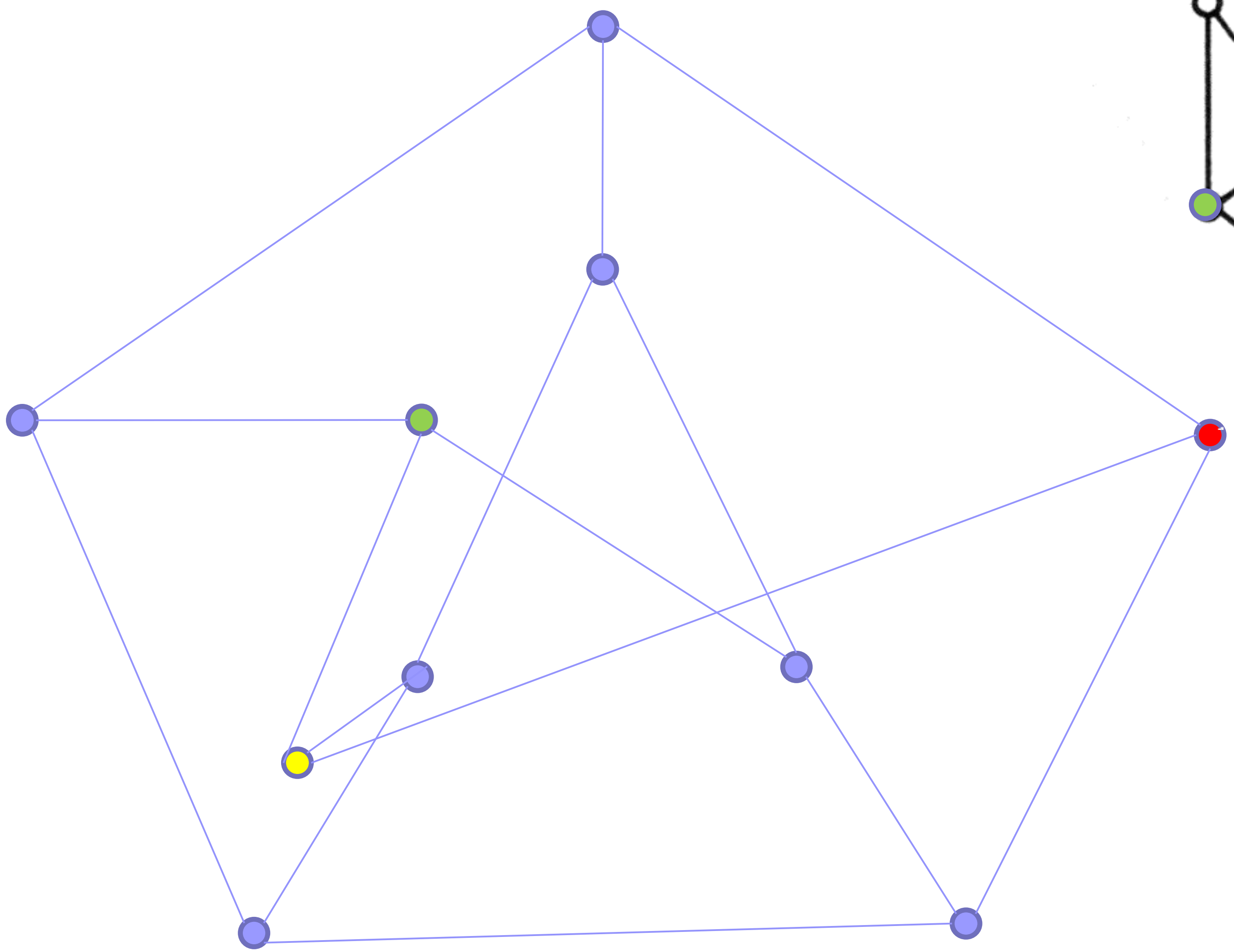


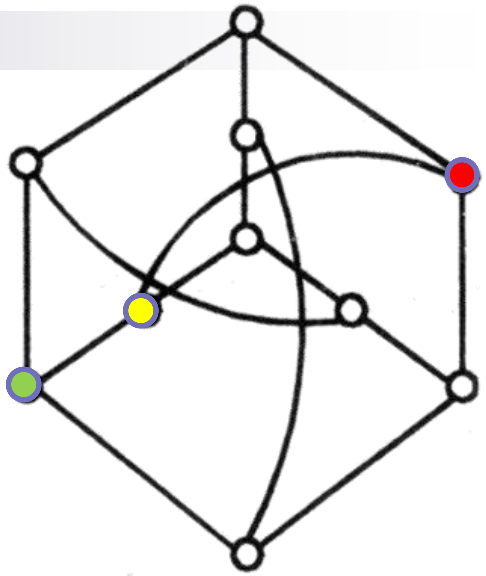
找到双射函数f：

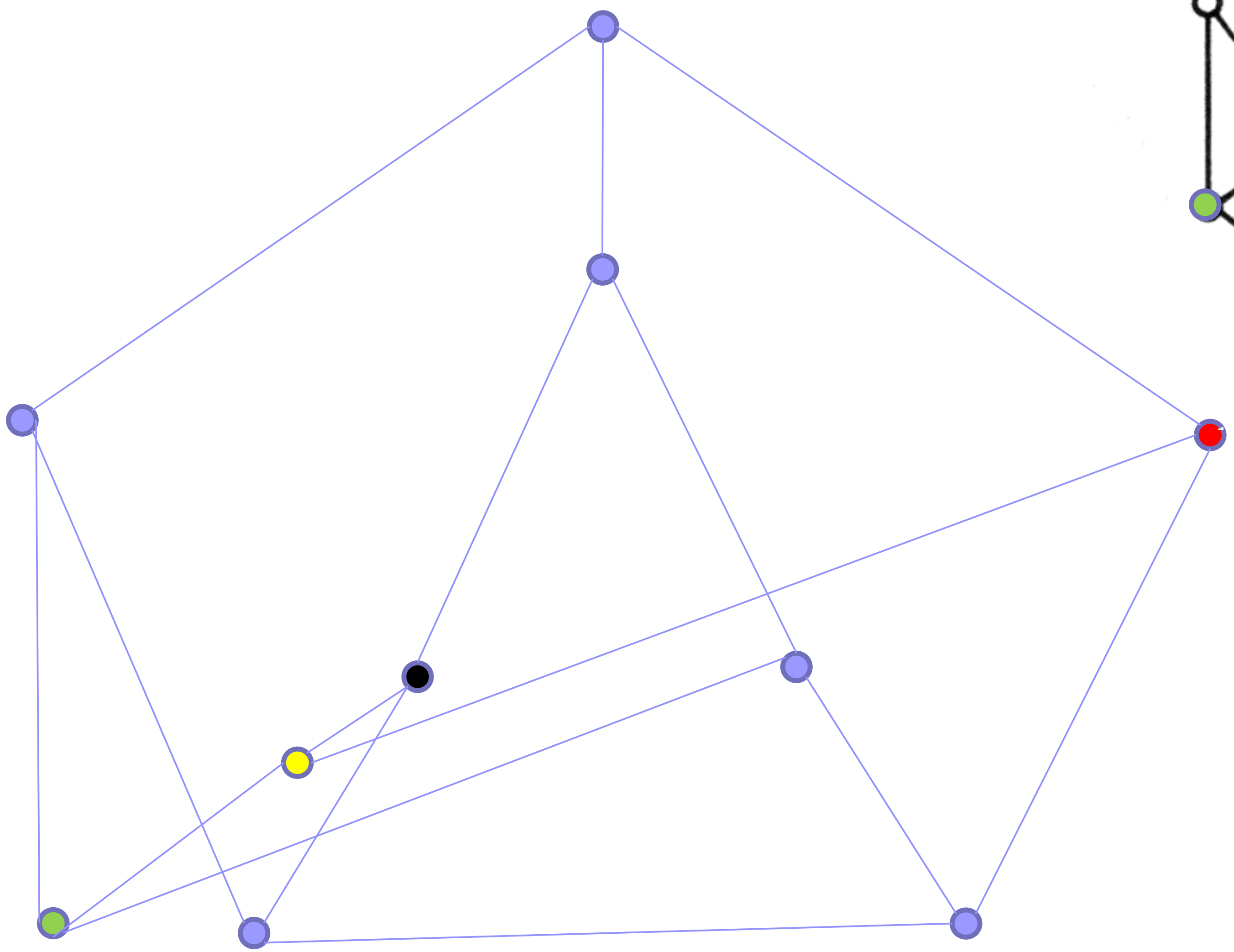
f(a)=v_1, f(b)=v_2, f(c)=v_3, f(d)=v_4, f(e)=v_5

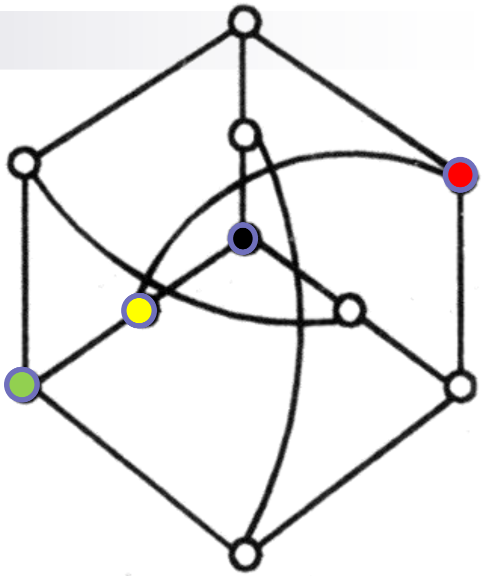


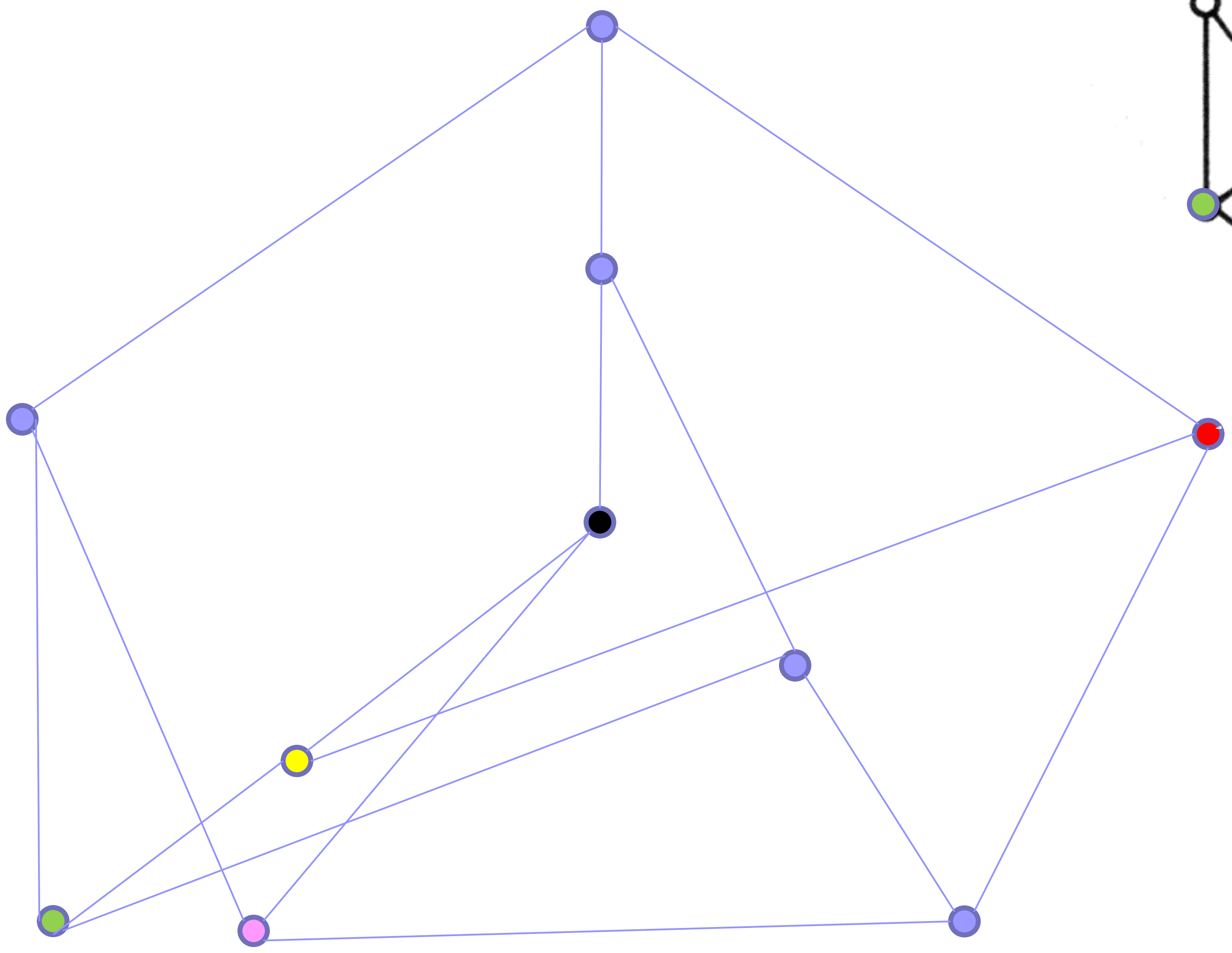


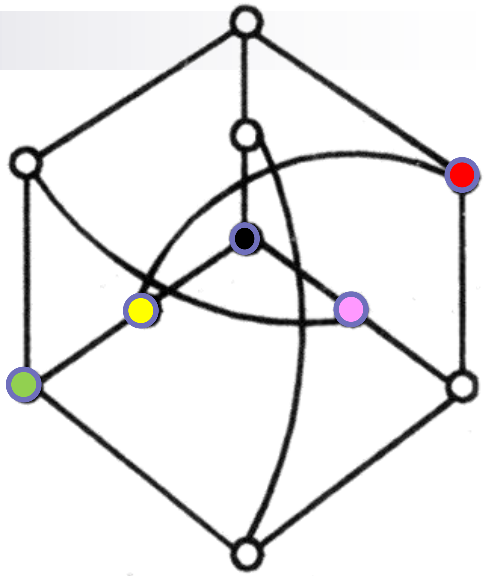


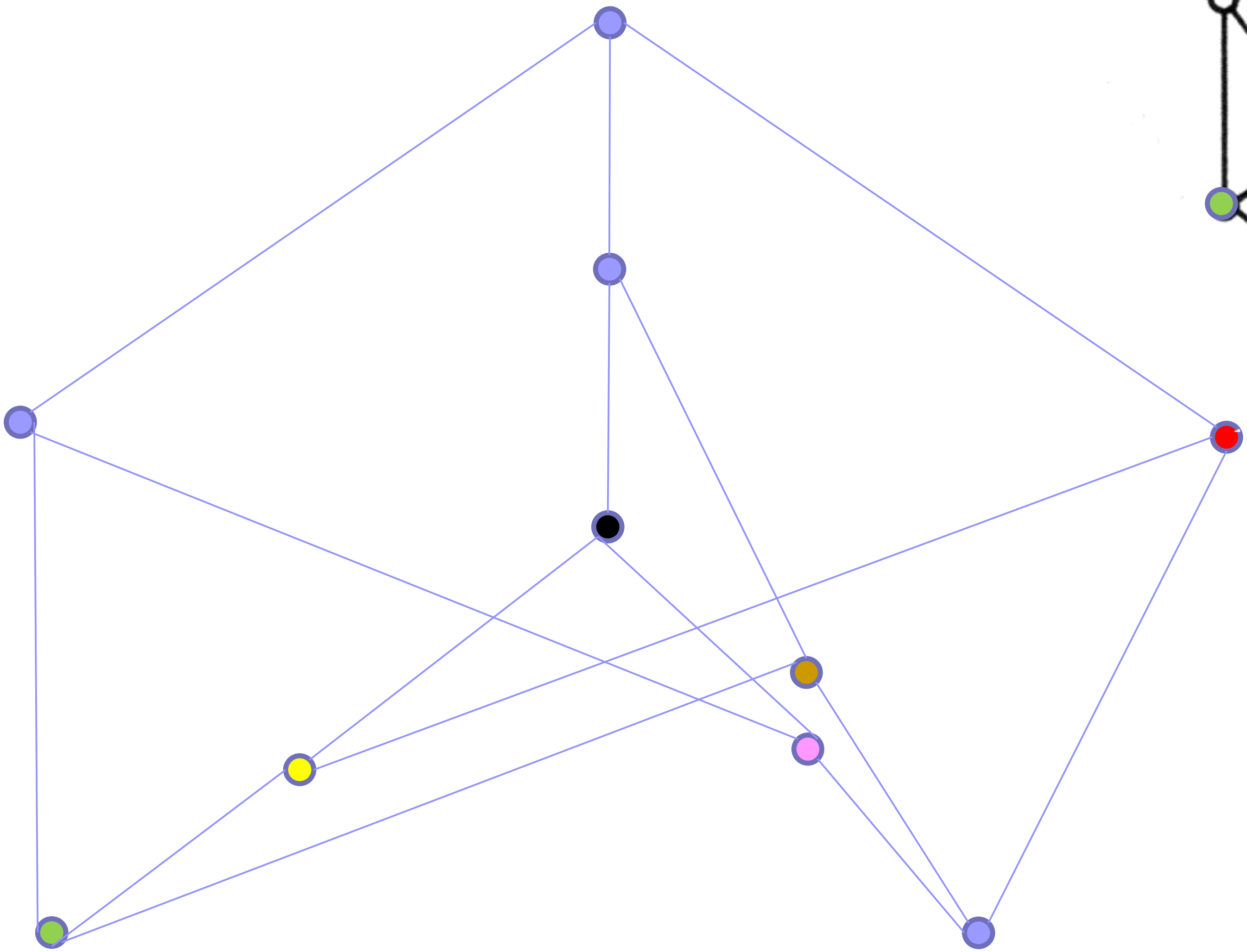


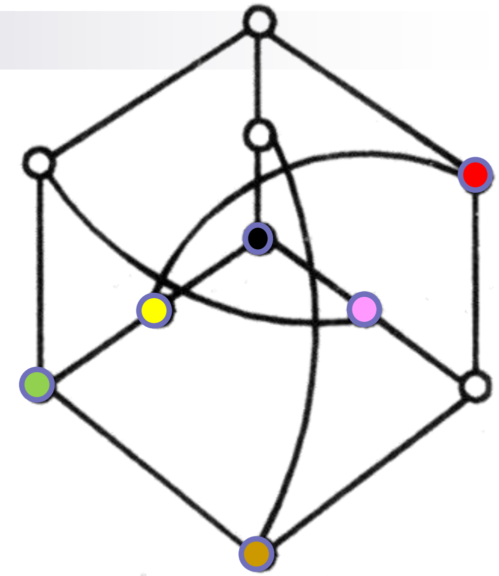


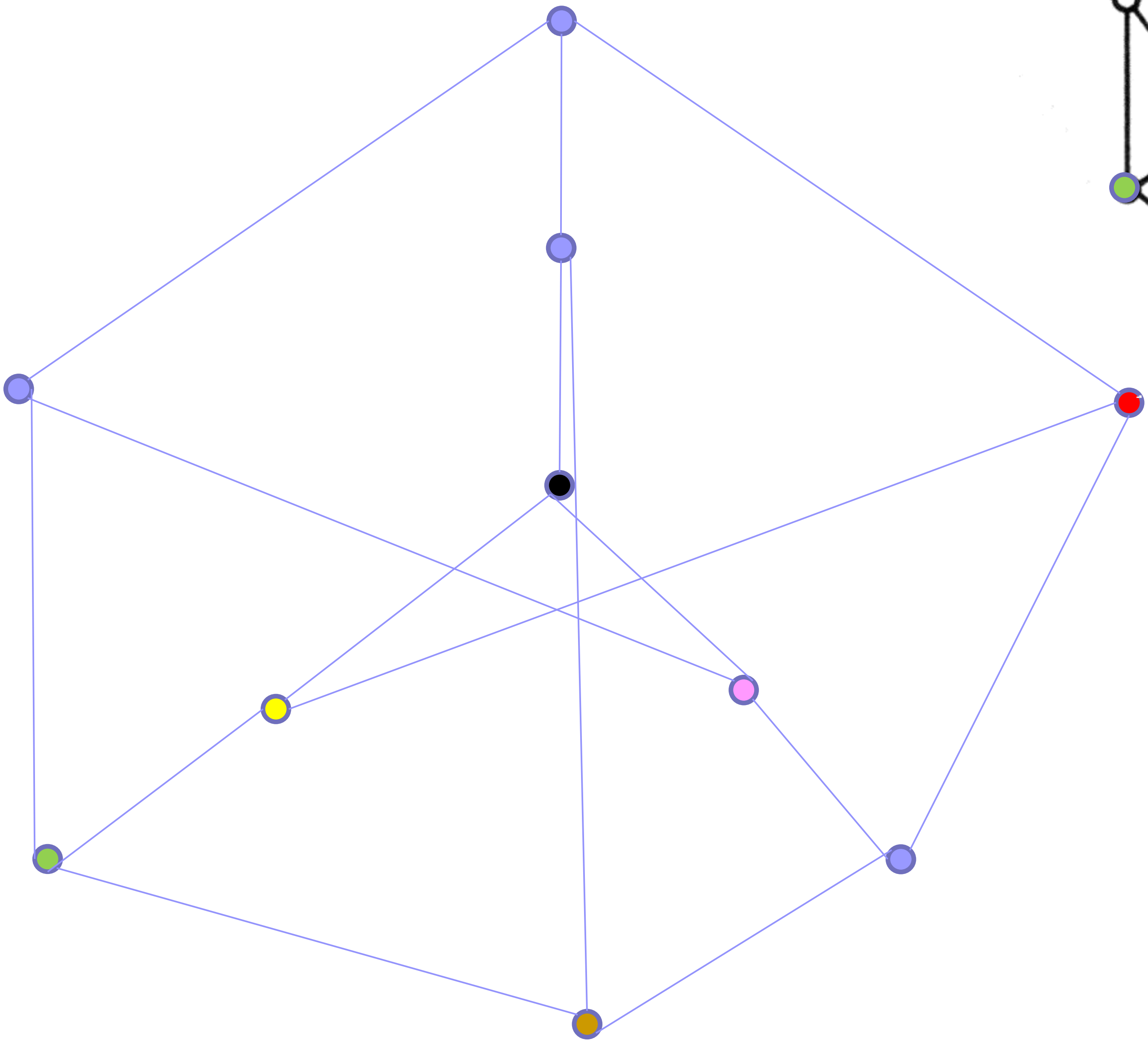


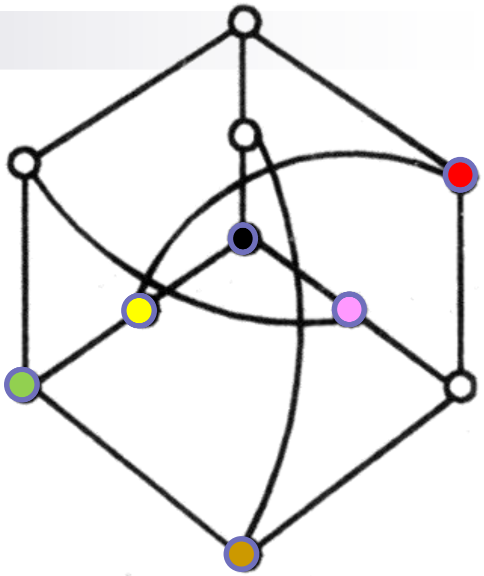


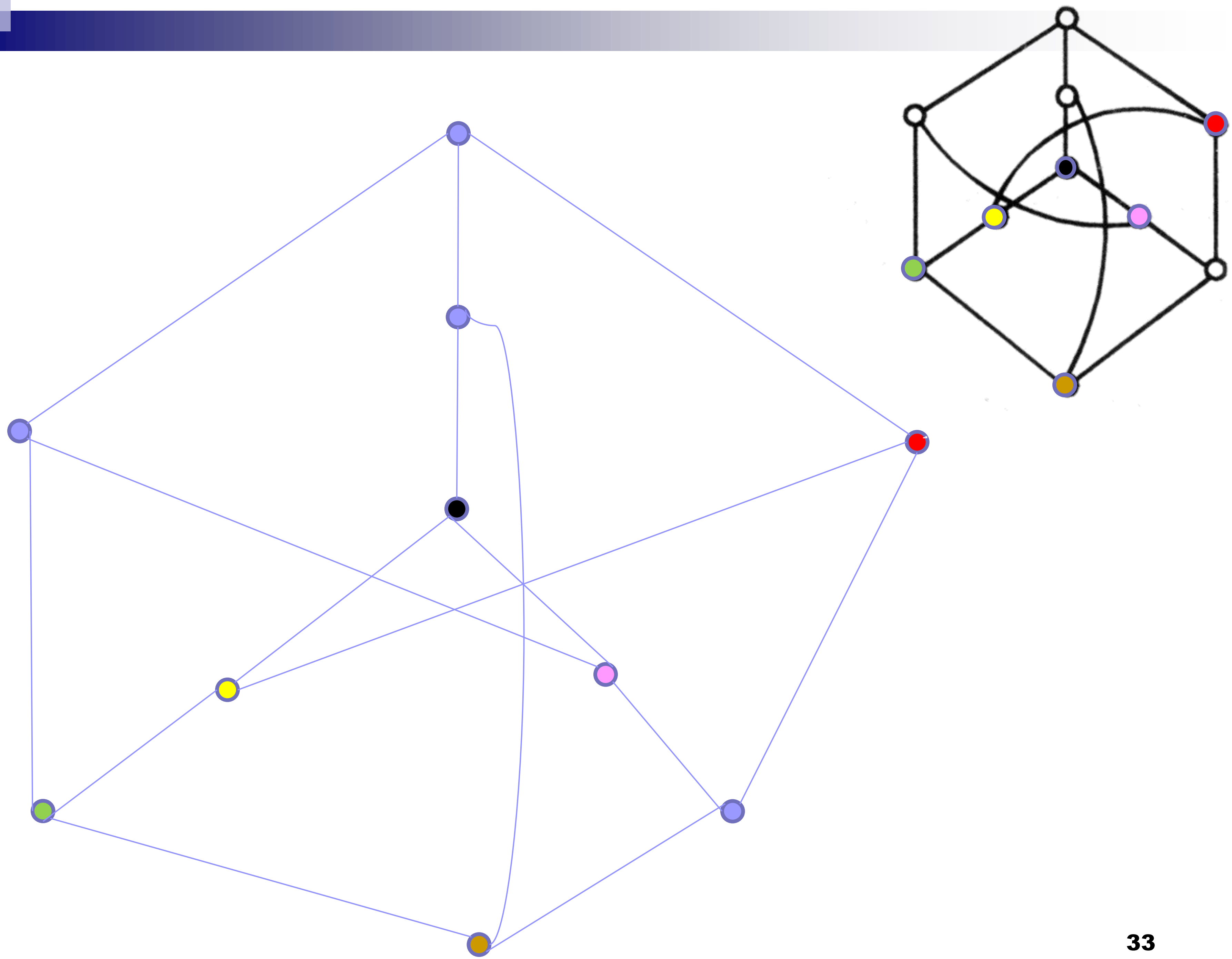


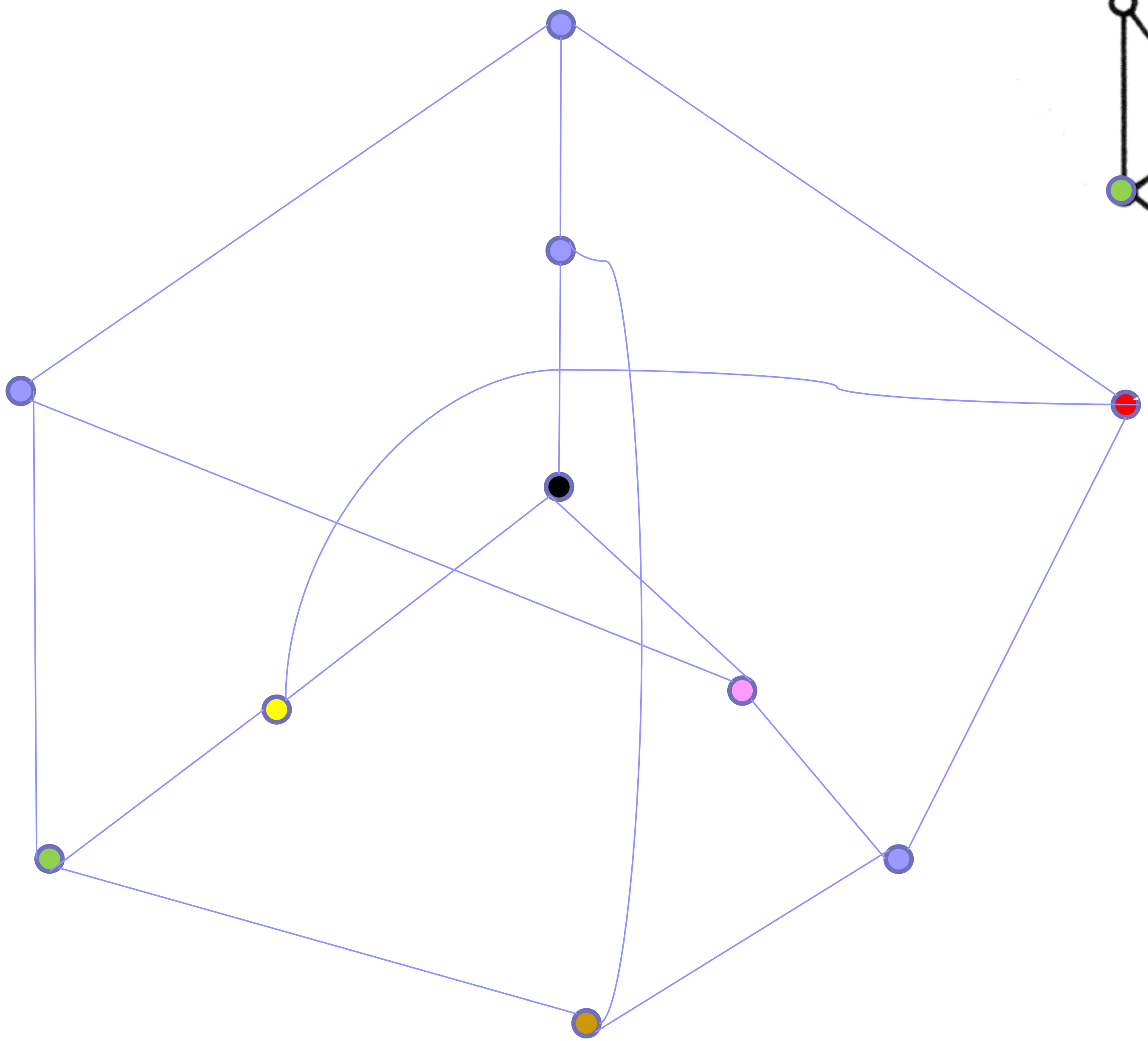


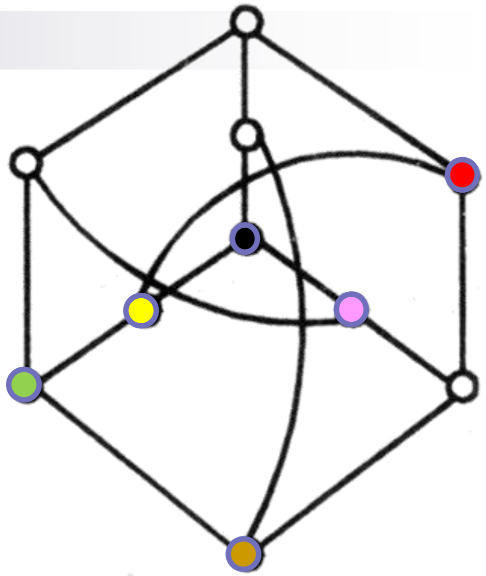






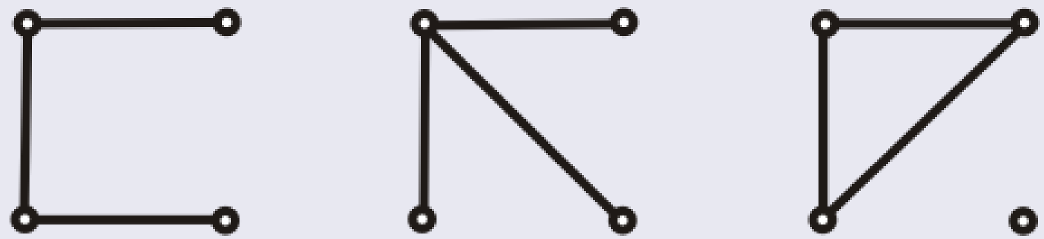






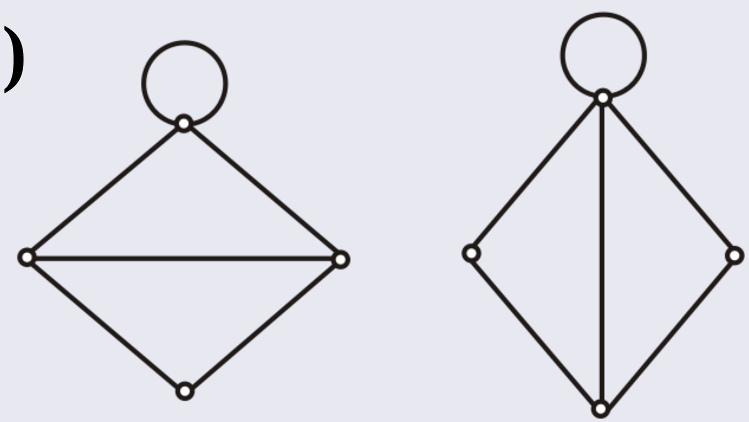
同构实例(续)

例2 试画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图



例3 判断下述每一对图是否同构:

(1)

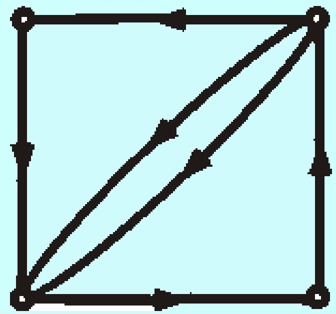


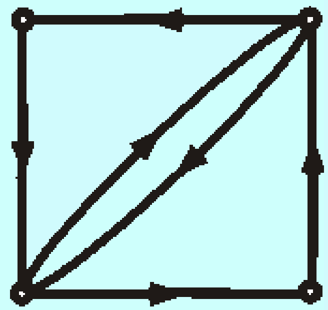
度数列不同

不同构

同构实例(续)

(2)

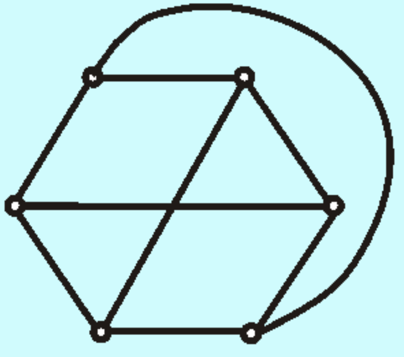


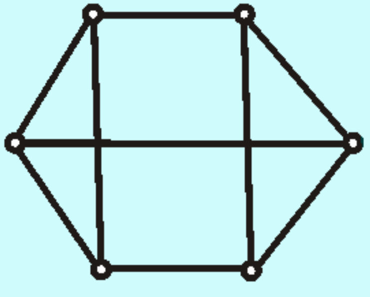


不同构

入(出)度列不同

(3)



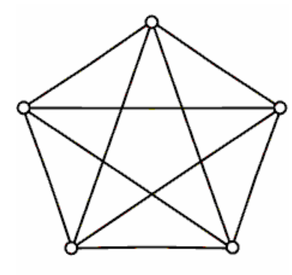


度数列相同
但不同构
为什么?

左边没有三角形,右边有三角形

完全图

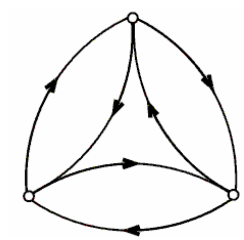
n阶无向完全图K_n：每个顶点都与其余顶点相邻的n阶无向简单图.



K_5

简单性质: 边数$m=n(n-1)/2$, $\Delta=\delta=n-1$

n阶有向完全图：每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的n阶有向简单图.



3阶有向完全图

简单性质: 边数$m=n(n-1)$, $\Delta=\delta=2(n-1)$,

$$\Delta^+=\delta^+=\Delta^-=\delta^-=n-1$$

子图

定义 设$G=\langle V,E\rangle$, $G'=\langle V',E'\rangle$是两个图

(1) 若$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$, 则称G'为G的子图, G为G'的母图，记作$G'\subseteq G$

(2) 若$G'\subseteq G$ 且$V'=V$，则称G'为G的生成子图

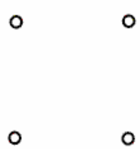
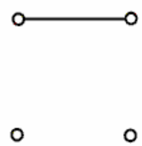
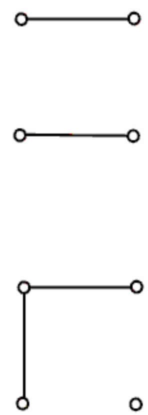
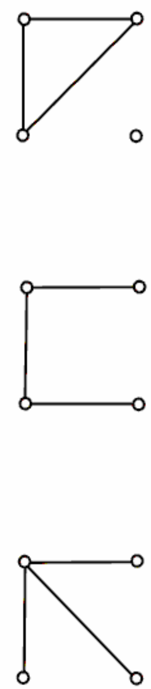
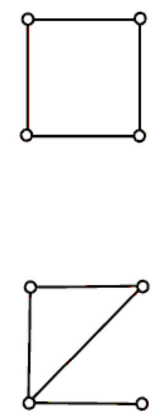
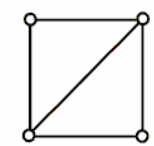
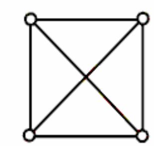
(3) 若$V'\subset V$ 或$E'\subset E$，称G'为G的真子图

(4) 设$V'\subseteq V$ 且$V'\neq\varnothing$, 以V'为顶点集, 以两端点都在V'中的所有边为边集的G的子图称作V'的导出子图，记作 $G[V']$

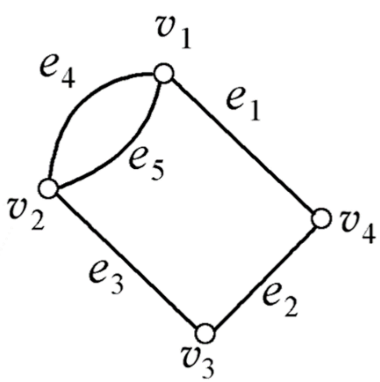
(5) 设$E'\subseteq E$且$E'\neq\varnothing$, 以E'为边集, 以E'中边关联的所有顶点为顶点集的G的子图称作E'的导出子图, 记作 $G[E']$

生成子图实例

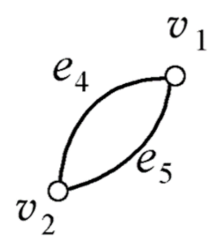
K_4的所有非同构的生成子图

m	0	1	2	3	4	5	6
							

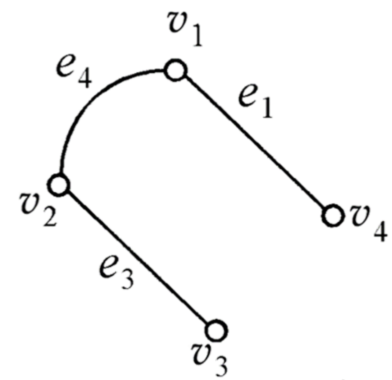
导出子图实例



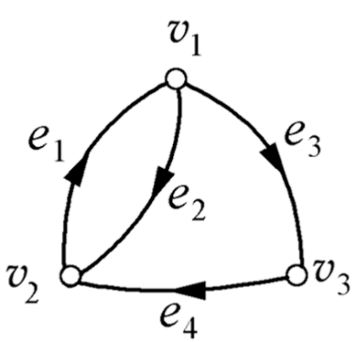
G



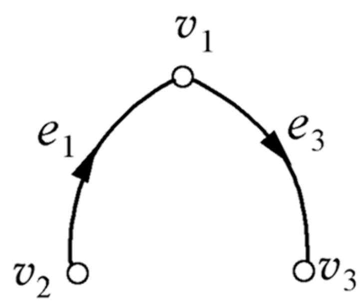
$G[\{v_1,v_2\}]$



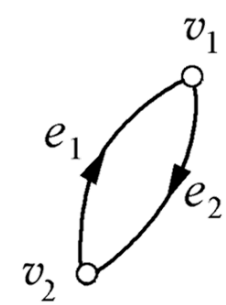
$G[\{e_1,e_3,e_4\}]$



D



$D[\{e_1,e_3\}]$



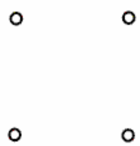
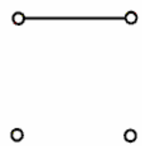
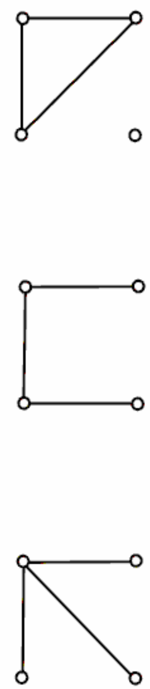
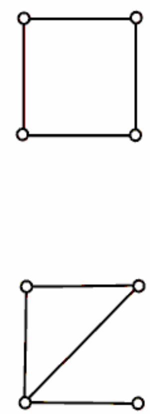
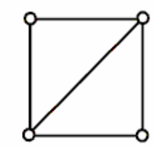
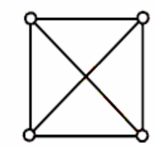
$D[\{v_1,v_2\}]$

补图

定义 设$G=\langle V,E\rangle$为n阶无向简单图，以V为顶点集,所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G的补图，记作$\overline{G}$.

若$G\cong\overline{G}$, 则称G是自补图.

例 对K_4的所有非同构子图，指出互为补图的每一对子图，并指出哪些是自补图.

m	0	1	2	3	4	5	6
							

5.2 通路、回路、图的连通性

- 简单通(回)路, 初级通(回)路, 复杂通(回)路
- 无向图的连通性

  无向连通图, 连通分支
- 有向连通图

  弱连通图, 单向连通图, 强连通图
- 点割集与割点
- 边割集与割边(桥)

通路与回路

定义 给定图$G=<V,E>$（无向或有向的），G中顶点与边的交替序列$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$,

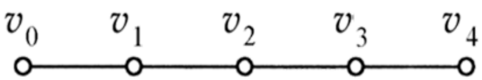
(1) 若$\forall i(1\le i\le l)$, v_{i-1}, v_i是e_i的端点(对于有向图, 要求v_{i-1}是始点, v_i是终点), 则称Γ为通路, v_0是通路的起点, v_l是通路的终点, l为通路的长度. 又若$v_0=v_l$，则称Γ为回路.

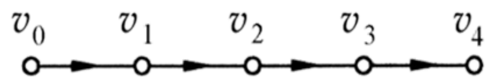
(2) 若通路(回路)中所有边各异, 则称为简单通路(简单回路), 否则称为复杂通路(复杂回路).

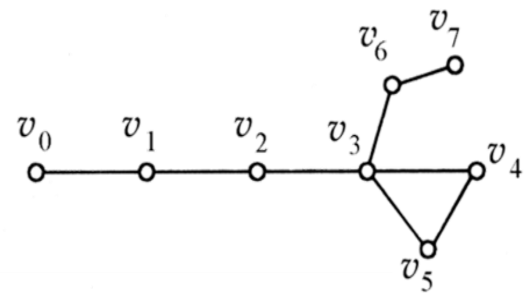
(3) 若通路(回路)中所有顶点(对于回路, 除$v_0=v_l$)各异，则称为初级通路(初级回路).初级通路又称作路径, 初级回路又称作圈.

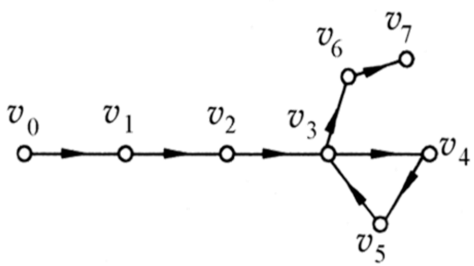
思考：简单通路（回路）和初级通路（回路）的关系？

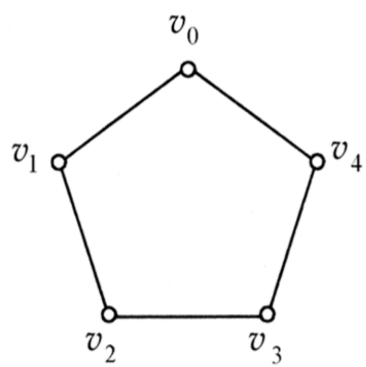
通路与回路实例

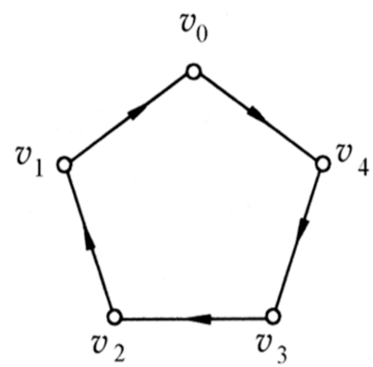

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4

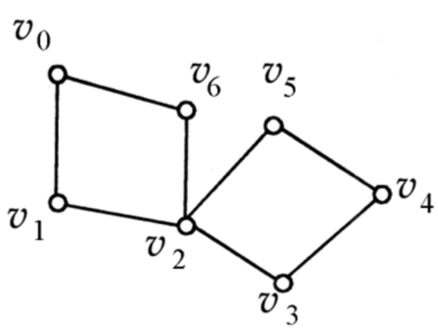

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4

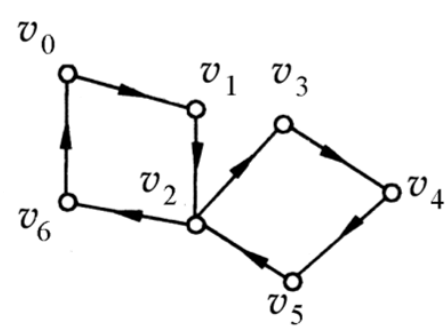

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6

通路与回路(续)

说明:

- 表示方法

  ① 用顶点和边的交替序列(定义), 如$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$

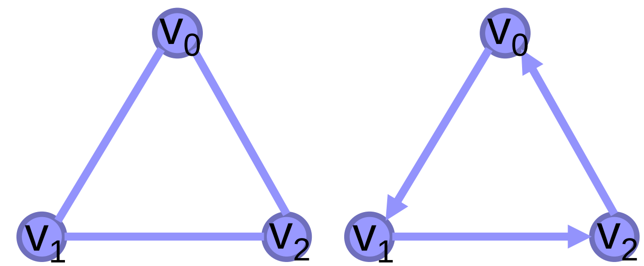
  ② 用边的序列, 如$\Gamma=e_1e_2\ldots e_l$

  ③ 简单图中, 用顶点的序列, 如$\Gamma=v_0v_1\ldots v_l$

  ④ 非简单图中,可用混合表示法,如$\Gamma=v_0v_1e_2v_2e_5v_3v_4v_5$

- 环是长度为1的圈, 两条平行边构成长度为2的圈.
- 在无向简单图中, 所有圈的长度≥3; 在有向简单图中, 所有圈的长度≥2.

通路与回路(续)



- 在两种意义下的计算

① 定义意义下

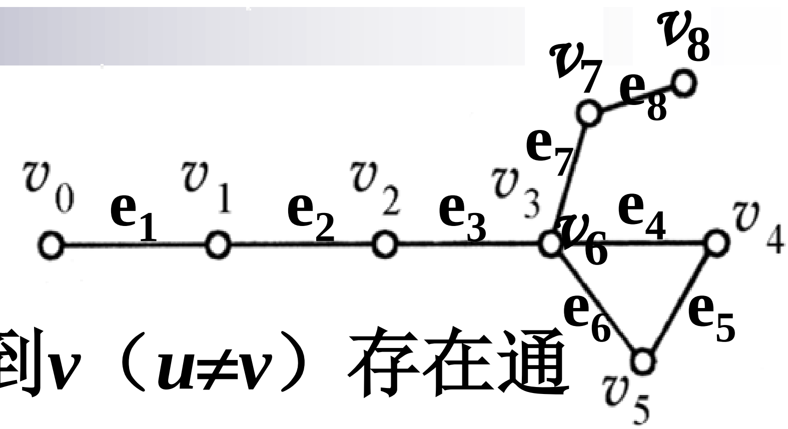
在无向图中，一个长度为$l(l\geq 3)$的圈看作$2l$个不同的圈. 如$v_0v_1v_2v_0$，$v_1v_2v_0v_1$，$v_2v_0v_1v_2$, $v_0v_2v_1v_0$，$v_1v_0v_2v_1$，$v_2v_1v_0v_2$看作6个不同的圈.

在有向图中，一个长度为$l(l\geq 3)$的圈看作l个不同的圈.

② 同构意义下

所有长度相同的圈都是同构的, 因而是1个圈.

通路与回路(续)



定理 在n阶图G中，若从顶点u到v（$u\neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的通路.

证明　设$v_0e_1v_1e_2v_2\ldots e_lv_l$是从$u=v_0$到$v=v_l$的一条通路，如果$l>n-1$，由于图中只有n个顶点，在$v_0,v_1,\ldots,v_l$中一定有2个是相同的.

设$v_i=v_j$，$i<j$，那么，$v_ie_{i+1}v_{i+1}\ldots e_jv_j$是一条回路，删去这条回路，得到$v_0e_1v_1\ldots v_ie_{j+1}\ldots e_lv_l$仍是从$u=v_0$到$v=v_l$的一条通路，其长度减少$j-i$.

如果它的长度仍大于n-1，则可重复上述做法，直到得到长度不超过n-1的通路为止.

通路与回路(续)

定理 在n阶图G中，若从顶点u到v（$u \neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的通路.

推论 在n阶图G中，若从顶点u到v（$u \neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的初级通路.

定理 在一个n阶图G中，若存在v到自身的回路，则一定存在v到自身长度小于等于n的回路.

推论 在一个n阶图G中，若存在v到自身的简单回路，则存在v到自身长度小于等于n的初级回路.

无向图的连通性

设无向图$G=\langle V,E\rangle$,

u与v连通: 若u与v之间有通路. 规定u与自身总连通.

连通关系 $R=\{\langle u,v\rangle \mid u,v\in V$且$u\sim v\}$是$V$上的等价关系

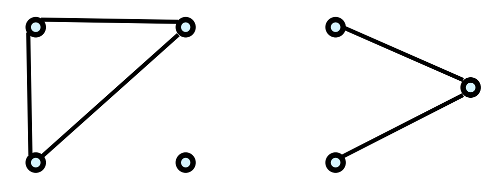
连通图:任意两点都连通的图. 平凡图是连通图.

连通分支: V关于连通关系R的等价类的导出子图

设$V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$, $G[V_1]$, $G[V_2]$, …,$G[V_k]$是G的连通分支, 其个数记作$p(G)=k$.

G是连通图$\Leftrightarrow p(G)=1$

例



点割集

记 $G-v$: 从G中删除v及关联的边

$G-V'$: 从G中删除V'中所有的顶点及关联的边

$G-e$: 从G中删除e

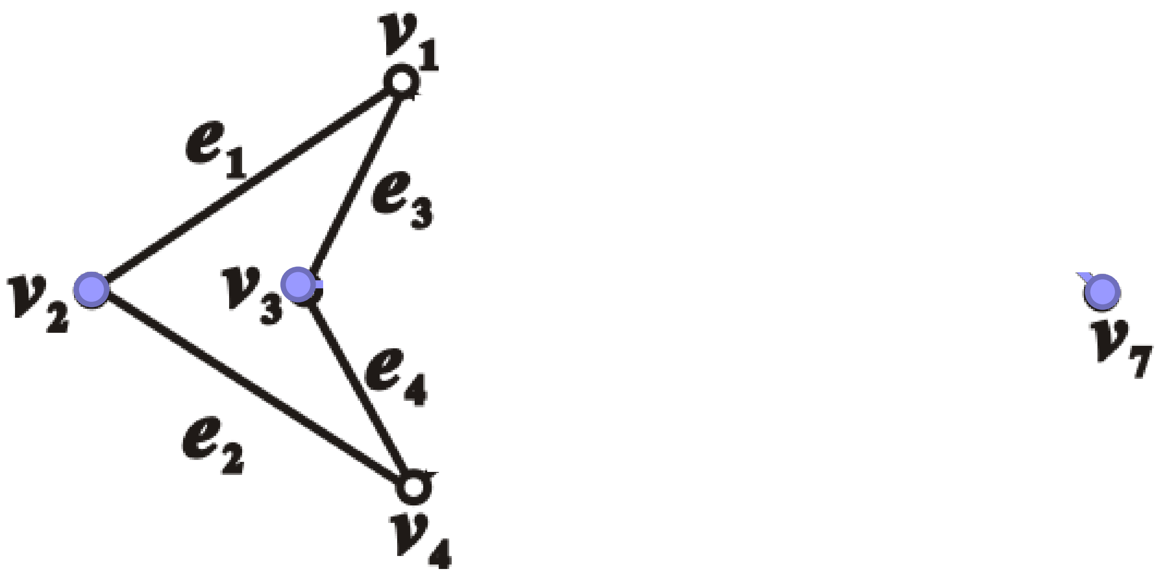
$G-E'$: 从G中删除E'中所有边

定义 设无向图$G=\langle V,E\rangle$, $V'\subset V$, 若$p(G-V')>p(G)$且$\forall V''\subset V'$, $p(G-V'')=p(G)$, 则称V'为G的点割集. 若$\{v\}$为点割集, 则称v为割点.

点割集实例

例 $\{v_1,v_4\}$, $\{v_6\}$是点割集, v_6是割点.

$\{v_2,v_5\}$不是点割集



边割集

定义 设无向图$G=\langle V,E\rangle$, $E'\subseteq E$, 若$p(G-E')>p(G)$且$\forall E''\subset E'$, $p(G-E'')=p(G)$, 则称E'为G的边割集. 若$\{e\}$为边割集, 则称e为割边或桥.

说明:

K_n无点割集

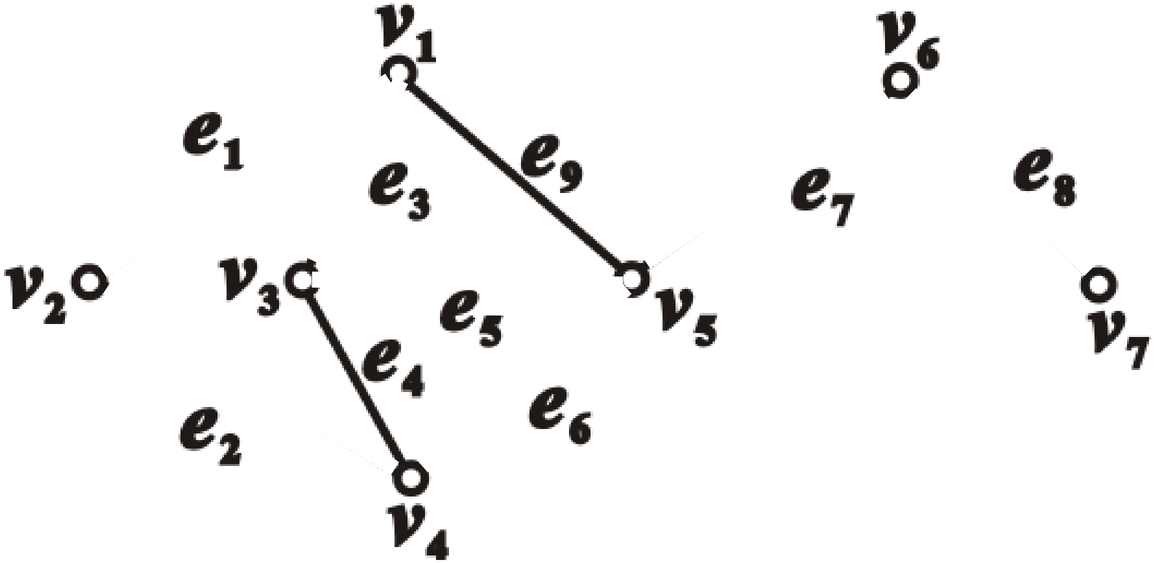
n阶零图既无点割集，也无边割集.

若G连通，E'为边割集，则$p(G-E')=2$

若G连通，V'为点割集，则$p(G-V')\geq 2$

边割集实例

$\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥，$\{e_7,e_9,e_5,e_6\}$不是边割集



有向图的连通性

设有向图$D=<V,E>$

u可达v: u到v有通路. 规定u到自身总是可达的.

可达具有自反性和传递性

D弱连通(连通): 基图为无向连通图

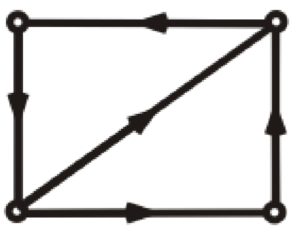
D单向连通: $\forall u,v\in V$，u可达v 或v可达u

D强连通: $\forall u,v\in V$，u与v相互可达

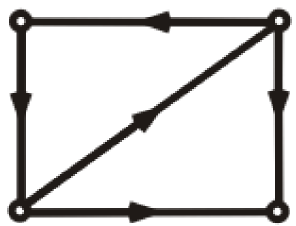
强连通$\Rightarrow$单向连通$\Rightarrow$弱连通

有向图的连通性(续)

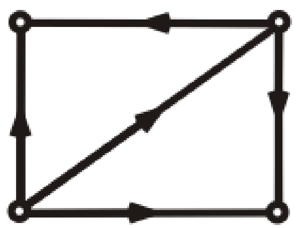
例



强连通



单向连通



弱连通

定理(强连通判别法) *D*强连通当且仅当*D*中存在经过每个顶点至少一次的回路

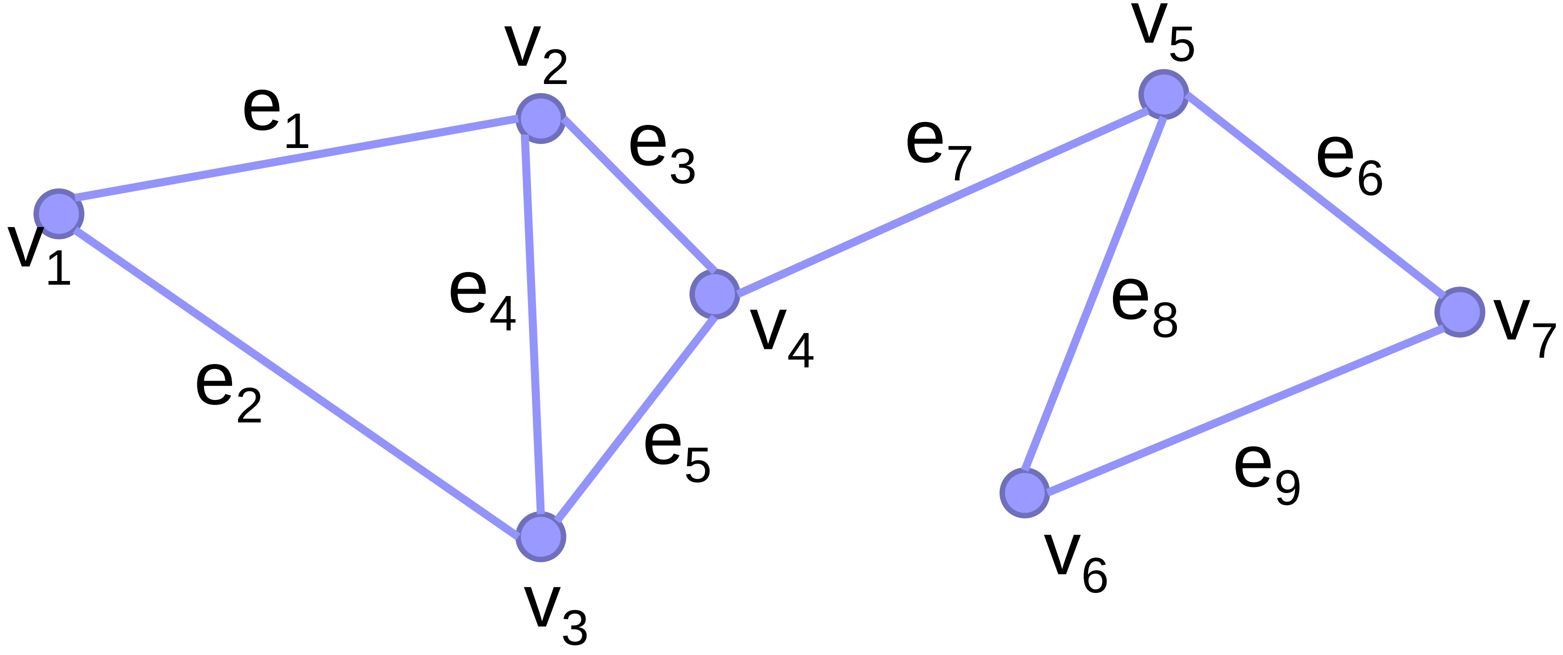
定理(单向连通判别法) *D*单向连通当且仅当*D*中存在经过每个顶点至少一次的通路

作业

1. 有向图D，12条边，3个出度为2的顶点，其余顶点出度相等；4个入度为2的顶点，其余顶点入度相等；问其共有几个顶点，及其出度列与入度列。
2. 找出图4-18和图5-5中的简单图以及悬挂顶点，图5-3中(a)的$\{v_2,v_4\}$、$\{e_2,e_5\}$的导出子图

作业（续）

4. 求下图的点割集、边割集、割点、桥



作业(选做)

5. 序列1,2,3、1,3,5和2,3,4是否构成有向图的度数列？如果能构成则画出一个示例图，否则说明原因。

6. 证明P136例5.12中(5)、(7)不是简单图的度数列

7. P134例5.7，写出图(d)的度数序列、出度列、入度列、$\Delta^{+}(D)$、$\delta^{-}(D)$、$\Delta(D)$、$\delta(D)$