



集合论

集合论部分

- 第3章 集合的基本概念和运算
- 第4章 二元关系和函数

第3章 集合的基本概念和运算

- 3.1 集合的基本概念
- 3.2 集合的基本运算
- 3.3 集合中元素的计数

3.1 集合的基本概念

- 集合的定义与表示
- 集合与元素
- 集合之间的关系
- 空集
- 全集
- 幂集

集合定义与表示

集合 没有精确的数学定义

理解：一些离散个体组成的全体

组成集合的个体称为它的元素或成员

集合的表示

列元素法 $A = \{ a, b, c, d \}$

谓词表示法 $B = \{ x / P(x) \}$

B 由使得 $P(x)$ 为真的 x 构成

常用数集

N, Z, Q, R, C 分别表示自然数、整数、有理数、实数和复数集合，注意 0 是自然数.

集合与元素

元素与集合的关系：隶属关系

属于 \in ，不属于 \notin

实例

$$A = \{ x \mid x \in \mathbf{R} \wedge x^2 - 1 = 0 \}, A = \{-1, 1\}$$

$$1 \in A, 2 \notin A$$

注意：

- 对于任何集合 A 和元素 x (可以是集合), $x \in A$ 和 $x \notin A$ 两者成立其一，且仅成立其一.
- 元素相异，无次序

隶属关系的层次结构

例 3.1

$$A = \{ a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\} \}$$

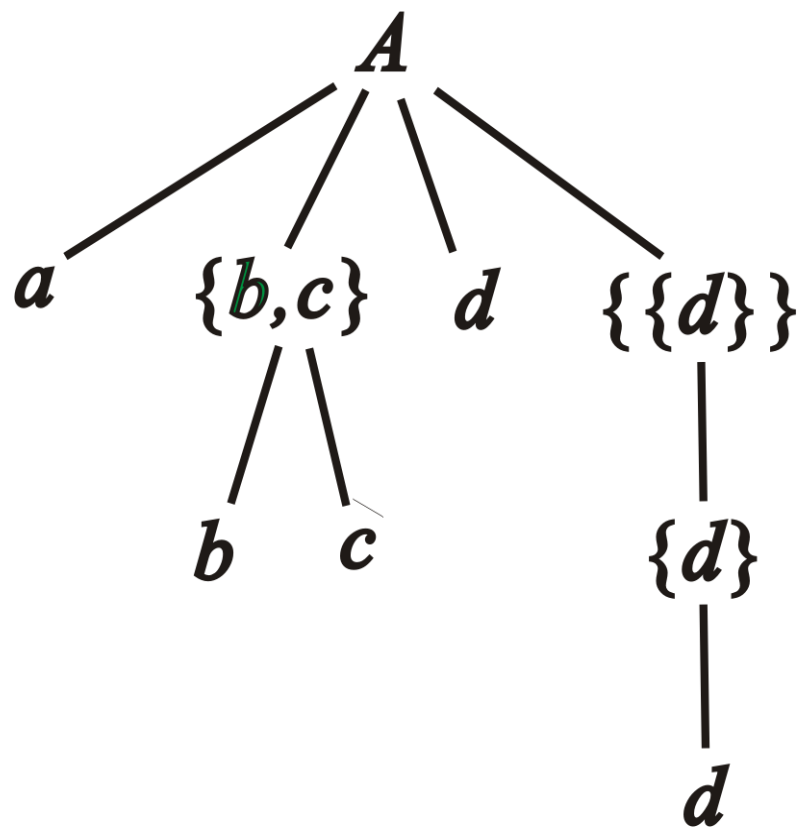
$$\{b, c\} \in A$$

$$b \notin A$$

$$\{\{d\}\} \in A$$

$$\{d\} \notin A$$

$$d \in A$$



集合之间的关系

包含（子集） $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$

不包含 $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)$

相等 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

不相等 $A \neq B$

真包含 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

不真包含 $A \not\subset B$

思考： \neq 和 $\not\subset$ 的定义

注意 \in 和 \subseteq 是不同层次的问题

空集与全集

空集 \emptyset 不含任何元素的集合

实例 $\{x \mid x^2+1=0 \wedge x \in \mathbf{R}\}$ 就是空集

定理 空集是任何集合的子集

$$\emptyset \subseteq A \Leftrightarrow \forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T$$

推论 空集是惟一的.

证 假设存在 \emptyset_1 和 \emptyset_2 , 则 $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ 且 $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$, 因此 $\emptyset_1 = \emptyset_2$

全集 E

具有相对性

在给定问题中, 全集包含任何集合, 即 $\forall A (A \subseteq E)$

幂集

定义 $P(A) = \{ x \mid x \subseteq A \}$

实例

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\},$$

$$P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$P(\{1, \{2, 3\}\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, \{1, \{2, 3\}\}\}$$

计数

如果 $|A| = n$, 则 $|P(A)| = 2^n$

3.2 集合的基本运算

- 集合基本运算的定义

$$\cup \cap - \sim \oplus$$

- 文氏图 (John Venn)

- 例题

- 集合运算的算律

- 集合包含或恒等式的证明

集合基本运算的定义

并 $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

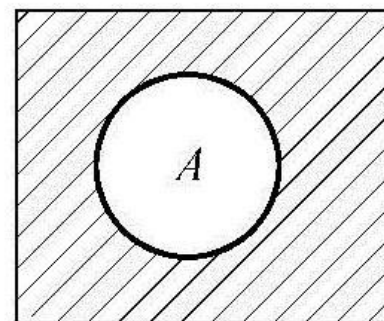
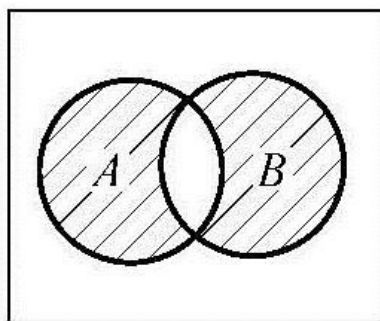
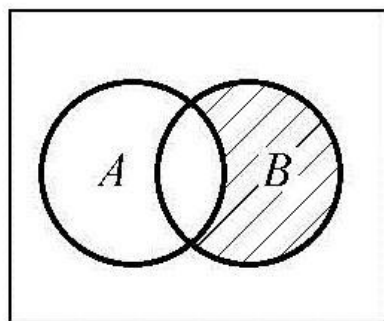
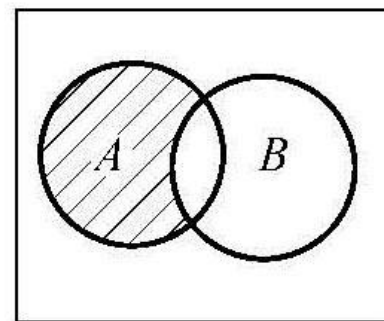
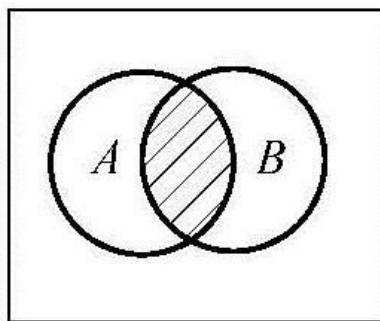
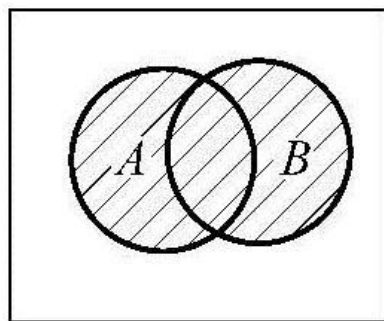
交 $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

相对补 $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

对称差
$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

绝对补 $\sim A = E - A$

文氏图表示



关于运算的说明

- 运算顺序：~和幂集优先，其他由括号确定
- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\}$$

- 某些重要结果

$$\emptyset \subseteq A - B \subseteq A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset \quad (\text{后面证明})$$

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A - B = A$$

例1

F:一年级大学生的集合

R: 计算机系学生的集合

T: 选修离散数学的学生的集合

L: 爱好文学学生的集合

S: 二年级大学生的集合

M: 数学系学生的集合

P: 爱好体育运动学生的集合

所有计算机系二年级学生都选修离散数学

数学系一年级的学生都没有选修离散数学

数学系学生或爱好文学或爱好体育运动

只有一、二年级的学生才爱好体育运动

除去数学和计算机系二年级学生外都不选修离散数学

$$T \subseteq (M \cup R) \cap S$$

$$R \cap S \subseteq T$$

$$(M \cap F) \cap T = \emptyset$$

$$M \subseteq L \cup P$$

$$P \subseteq F \cup S$$

$$S - (M \cup R) \subseteq P$$

例2

分别对条件(1)到(5)，确定 X 集合与下述哪些集合相等。

$$S_1 = \{ 1, 2, \dots, 8, 9 \}, S_2 = \{ 2, 4, 6, 8 \}, S_3 = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \},$$

$$S_4 = \{ 3, 4, 5 \}, S_5 = \{ 3, 5 \}$$

(1) 若 $X \cap S_3 = \emptyset$, 则 $X = S_2$

(2) 若 $X \subseteq S_4, X \cap S_2 = \emptyset$, 则 $X = S_5$

(3) 若 $X \subseteq S_1, X \not\subseteq S_3$, 则 $X = S_1, S_2, S_4$

(4) 若 $X - S_3 = \emptyset$, 则 $X = S_3, S_5$

(5) 若 $X \subseteq S_3, X \not\subseteq S_1$, 则 X 与 S_1, \dots, S_5 都不等

集合运算的算律

	\cup	\cap	\oplus
交换	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	$A \oplus B = B \oplus A$
结合	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
幂等	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	

	\cup 与 \cap	\cap 与 \oplus
分配	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
吸收	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	

吸收律的前提： \cup 、 \cap 可交换

集合运算的算律（续）

	$-$	\sim
<i>D.M</i> 律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

	\emptyset	E
补元律	$A\cap\sim A=\emptyset$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\emptyset=\emptyset$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\emptyset=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\emptyset=E$	$\sim E=\emptyset$

集合包含或相等的证明方法

■ 证明 $X \subseteq Y$

- 命题演算法
- 包含传递法
- 等价条件法
- 反证法
- 并交运算法

■ 证明 $X=Y$

- 命题演算法
- 等式代入法
- 反证法
- 运算法

以上的 X, Y 代表集合公式

命题演算法证 $X \subseteq Y$

任取 x ,

$$x \in X \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in Y$$

例3 证明 $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

任取 x

$$x \in P(A) \Rightarrow x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq B \Rightarrow x \in P(B)$$

任取 x

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in P(A) \Rightarrow \{x\} \in P(B) \\ &\Rightarrow \{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B \end{aligned}$$

包含传递法证 $X \subseteq Y$

找到集合 T 满足 $X \subseteq T$ 且 $T \subseteq Y$, 从而有 $X \subseteq Y$

例4 $A - B \subseteq A \cup B$

证 $A - B \subseteq A$

$A \subseteq A \cup B$

所以 $A - B \subseteq A \cup B$

利用包含的等价条件证 $X \subseteq Y$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \phi$$

例5 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 $A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C$

$B \subseteq C \Rightarrow B \cup C = C$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C$$

$$(A \cup B) \cup C = C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$$

命题得证

反证法证 $X \subseteq Y$

欲证 $X \subseteq Y$, 假设命题不成立, 必存在 x 使得 $x \in X$ 且 $x \notin Y$. 然后推出矛盾.

例6 证明 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 假设 $A \cup B \subseteq C$ 不成立,

则 $\exists x (x \in A \cup B \wedge x \notin C)$

因此 $x \in A$ 或 $x \in B$, 且 $x \notin C$

若 $x \in A$, 则与 $A \subseteq C$ 矛盾;

若 $x \in B$, 则与 $B \subseteq C$ 矛盾.

利用已知包含式并交运算

由已知包含式通过运算产生新的包含式

$$X \subseteq Y \Rightarrow X \cap Z \subseteq Y \cap Z, X \cup Z \subseteq Y \cup Z$$

例7 证明 $A \cap C \subseteq B \cap C \wedge A - C \subseteq B - C \Rightarrow A \subseteq B$

证 $A \cap C \subseteq B \cap C, A - C \subseteq B - C$

上式两边求并，得

$$(A \cap C) \cup (A - C) \subseteq (B \cap C) \cup (B - C)$$

$$\Rightarrow (A \cap C) \cup (A \cap \sim C) \subseteq (B \cap C) \cup (B \cap \sim C)$$

$$\Rightarrow A \cap (C \cup \sim C) \subseteq B \cap (C \cup \sim C)$$

$$\Rightarrow A \cap E \subseteq B \cap E$$

$$\Rightarrow A \subseteq B$$

命题演算法证明 $X=Y$

任取 x ,

$$x \in X \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in Y$$

$$x \in Y \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in X$$

或者

$$x \in X \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in Y$$

例8 证明 $A \cup (A \cap B) = A$ (吸收律)

证 任取 x ,

$$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \cap B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A$$

等式替换证明 $X=Y$

不断进行代入化简，最终得到两边相等

例9 证明 $A \cup (A \cap B) = A$ （吸收律）

证（假设交换律、分配律、同一律、零律成立）

$$\begin{aligned} & A \cup (A \cap B) \\ &= (A \cap E) \cup (A \cap B) && \text{同一律} \\ &= A \cap (E \cup B) && \text{分配律} \\ &= A \cap (B \cup E) && \text{交换律} \\ &= A \cap E && \text{零律} \\ &= A && \text{同一律} \end{aligned}$$

反证法证明 $X=Y$

假设 $X=Y$ 不成立，则存在 x 使得 $x \in X$ 且 $x \notin Y$ ，或者存在 x 使得 $x \in Y$ 且 $x \notin X$ ，然后推出矛盾。

例10 证明以下等价条件

$$\begin{array}{cccc} A \subseteq B & \Leftrightarrow & A \cup B = B & \Leftrightarrow & A \cap B = A & \Leftrightarrow & A - B = \emptyset \\ (1) & & (2) & & (3) & & (4) \end{array}$$

证明顺序：

$$(1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (4), (4) \Rightarrow (1)$$

$$(1) \Rightarrow (2) \quad A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

显然 $B \subseteq A \cup B$, 下面证明 $A \cup B \subseteq B$.

任取 x ,

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B$$

因此有 $A \cup B \subseteq B$. 综合上述 (2) 得证.

$$(2) \Rightarrow (3) \quad A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A$$

$$A = A \cap (A \cup B) \Rightarrow A = A \cap B$$

(将 $A \cup B$ 用 B 代入)

(3) \Rightarrow (4) $A \cap B = A \Rightarrow A - B = \emptyset$

假设 $A - B \neq \emptyset$, 即 $\exists x \in A - B$, 那么 $x \in A$ 且 $x \notin B$. 而

$$x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B.$$

从而与 $A \cap B = A$ 矛盾.

(4) \Rightarrow (1) $A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$

假设 $A \subseteq B$ 不成立, 那么

$$\exists x (x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow x \in A - B \Rightarrow A - B \neq \emptyset$$

与条件 (4) 矛盾.

集合运算法证明 $X=Y$

由已知等式通过运算产生新的等式

$$X=Y \Rightarrow X \cap Z = Y \cap Z, X \cup Z = Y \cup Z, X - Z = Y - Z$$

例11 证明 $A \cap C = B \cap C \wedge A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$

证 由 $A \cap C = B \cap C$ 和 $A \cup C = B \cup C$ 得到

$$(A \cup C) - (A \cap C) = (B \cup C) - (B \cap C)$$

从而有 $A \oplus C = B \oplus C$

因此

$$\begin{aligned} A \oplus C = B \oplus C &\Rightarrow (A \oplus C) \oplus C = (B \oplus C) \oplus C \\ &\Rightarrow A \oplus (C \oplus C) = B \oplus (C \oplus C) \Rightarrow A \oplus \emptyset = B \oplus \emptyset \Rightarrow A = B \end{aligned}$$

3.3 集合中元素的计数

- 集合的基数与有穷集合
- 包含排斥原理
- 有穷集的计数

集合的基数与有穷集合

集合 A 的**基数**：集合 A 中的元素数，记作 $\text{card}A$

有穷集 A ： $\text{card}A=|A|=n$ ， n 为自然数.

有穷集的实例：

$$A=\{a,b,c\}, \text{card}A=|A|=3;$$

$$B=\{x \mid x^2+1=0, x \in R\}, \text{card}B=|B|=0$$

无穷集的实例：

N, Z, Q, R, C 等

包含排斥原理

定理 设 S 为有穷集, P_1, P_2, \dots, P_m 是 m 种性质, A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集, $i=1, 2, \dots, m$. 则 S 中不具有性质 P_1, P_2, \dots, P_m 的元素数为

$$\begin{aligned} & | \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m} | \\ &= | S | - \sum_{i=1}^m | A_i | + \sum_{1 \leq i < j \leq m} | A_i \cap A_j | - \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} | A_i \cap A_j \cap A_k | + \dots \\ &+ (-1)^m | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m | \end{aligned}$$

证明

证明要点：任何元素 x ，如果不具有任何性质，则对等式右边计数贡献为 1，否则为 0

证 设 x 不具有性质 P_1, P_2, \dots, P_m ,

$$x \notin A_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x \notin A_i \cap A_j, 1 \leq i < j \leq m$$

...

$$x \notin A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m,$$

x 对右边计数贡献为

$$1 - 0 + 0 - 0 + \dots + (-1)^m \cdot 0 = 1$$

$$|S| - \sum_{i=1}^m |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|$$

证明（续）

设 x 具有 n 条性质, $1 \leq n \leq m$

x 对 $|S|$ 贡献为 1

x 对 $\sum_{i=1}^m |A_i|$ 贡献为 C_n^1

x 对 $\sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j|$ 贡献为 C_n^2

....

x 对 $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|$ 贡献为 C_n^m

x 对右边计数贡献为

$$1 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^m C_n^m = \sum_{i=0}^n C_n^i 1^{n-i} (-1)^i = (1 - 1)^n = 0$$

推论

S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m|$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ &+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned}$$

证明 $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m|$

$$= |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m}|$$

$$= |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m}|$$

将定理 1 代入即可

应用

例1 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6整除，也不能被8整除的数有多少个？

解： $S = \{ x \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 1000 \}$,
如下定义 S 的 3 个子集 A, B, C :
 $A = \{ x \mid x \in S, 5 \mid x \}$,
 $B = \{ x \mid x \in S, 6 \mid x \}$,
 $C = \{ x \mid x \in S, 8 \mid x \}$

例1（续）

对上述子集计数：

$$|S|=1000,$$

$$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor =200, \quad |B|=\lfloor 1000/6 \rfloor =133,$$

$$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor =125,$$

$$|A \cap B|=\lfloor 1000/30 \rfloor =33, \quad |A \cap C|=\lfloor 1000/40 \rfloor =25,$$

$$|B \cap C|=\lfloor 1000/24 \rfloor =41,$$

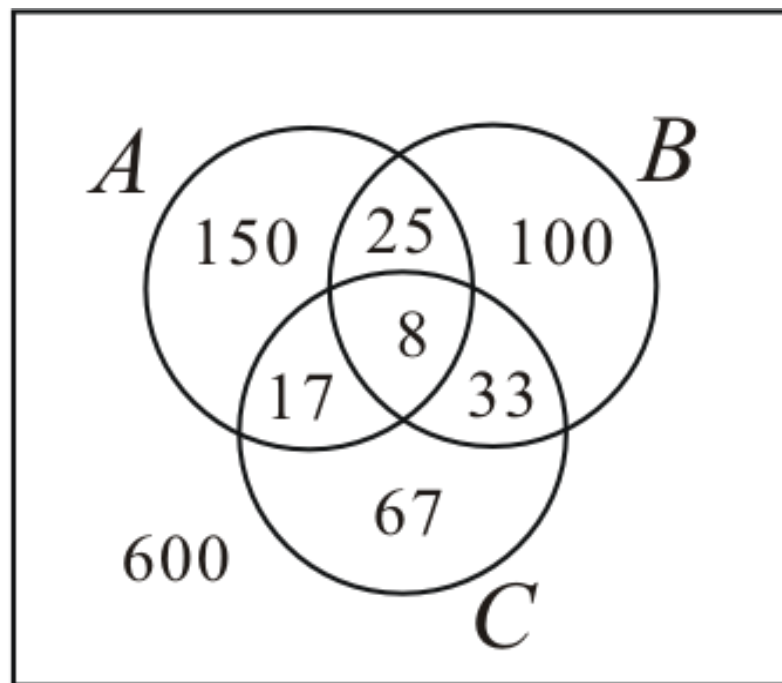
$$|A \cap B \cap C|=\lfloor 1000/120 \rfloor =8,$$

代入公式

$$N = 1000 - (200 + 133 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600$$

文氏图法

求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个？



例2

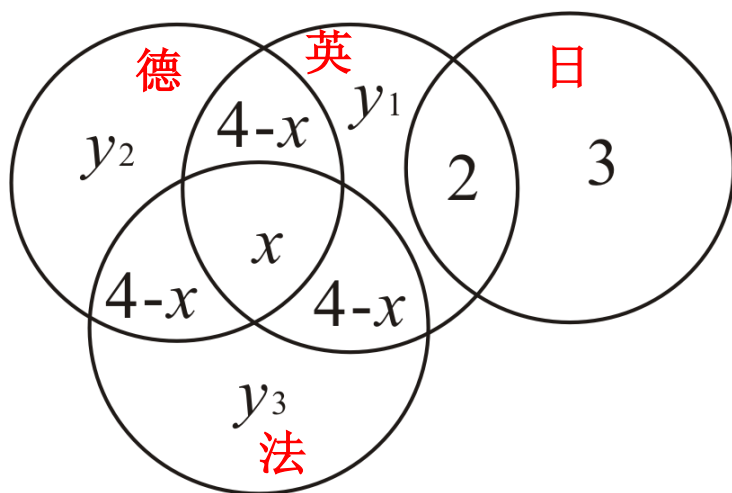
24名科技人员，每人至少会1门外语。

英语：13； 日语：5； 德语：10； 法语：9

英日：2； 英德：4； 英法：4； 法德：4

会日语的不会法语、德语

求：只会1种语言人数，会3种语言人数



$$x+2(4-x)+y_1+2=13$$

$$x+2(4-x)+y_2=10$$

$$x+2(4-x)+y_3=9$$

$$x+3(4-x)+y_1+y_2+y_3=19$$

$$x=1, y_1=4, y_2=3, y_3=2$$

例3 求欧拉函数的值

欧拉函数: $\phi(n)$

表示 $\{0,1,\dots,n-1\}$ 中与 n 互素的数的个数.

$\phi(12)=4$, 与12互素的数有1, 5, 7, 11.

解: n 的素因子分解式

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

$$A_i = \{ x \mid 0 \leq x < n-1 \text{ 且 } p_i \text{ 整除 } x \}$$

$$\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k}|$$

不能被任意素因子整除的数的个数

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad 1 \leq i < j \leq k$$

...

$$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| = \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k}$$

$$\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k}|$$

$$= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \dots + \frac{n}{p_k} \right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \dots + \frac{n}{p_{k-1} p_k} \right)$$

$$- \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k}$$

$$= n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k} \right)$$

实例

与 60 互素的正整数有 16 个：

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,
31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59.

$$\begin{aligned}\phi(60) &= 60\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= 60 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 16\end{aligned}$$

作业

■ P71 3.1

- (1) 只有数学专业的一年级学生去听音乐会了
- (2) 除了选修离散的同学之外的一年级学生以及所有的二年级学生都去听音乐会
- (3) 除了计算机系的学生以及周一晚上去听音乐会的学生之外周一晚上都没有晚睡
- (4) 所有数学专业一年级的学生都没有听周一晚的音乐会

■ 选做:

- 证明: $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
- P75 3.19