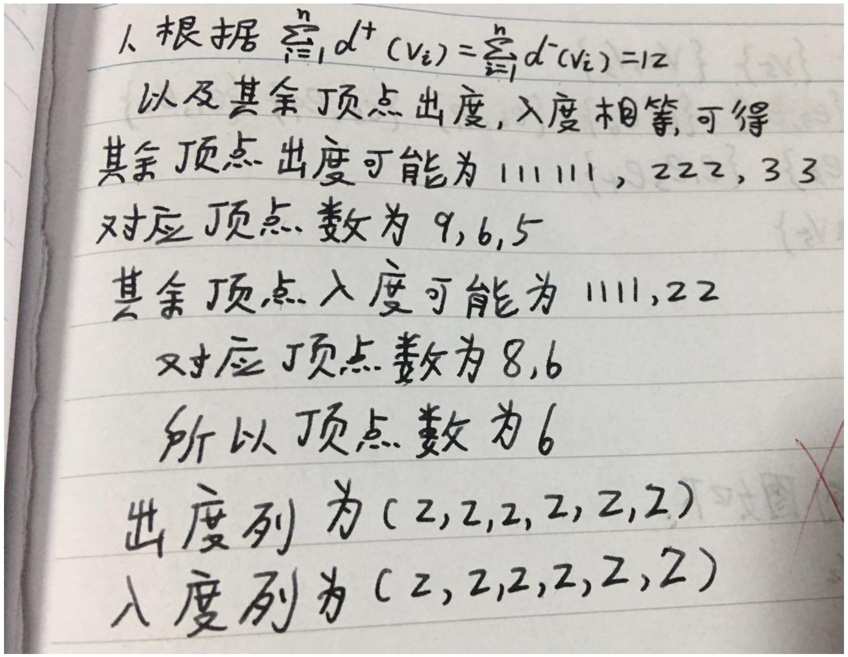
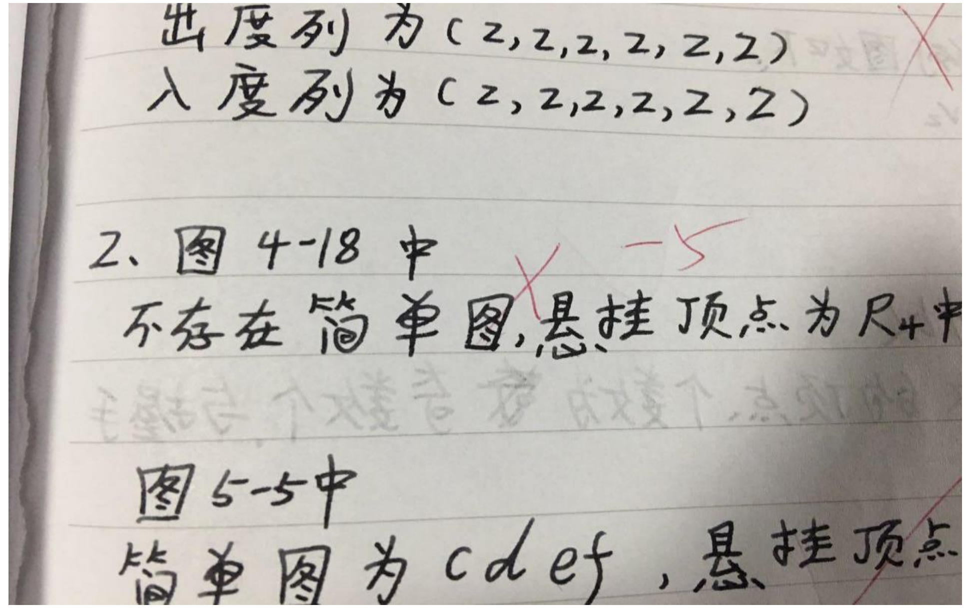
评分标准

- 第一题30分
- 第二题30分：每小问10分
- 第三题40分：每小问10分
- 附加题每题20分

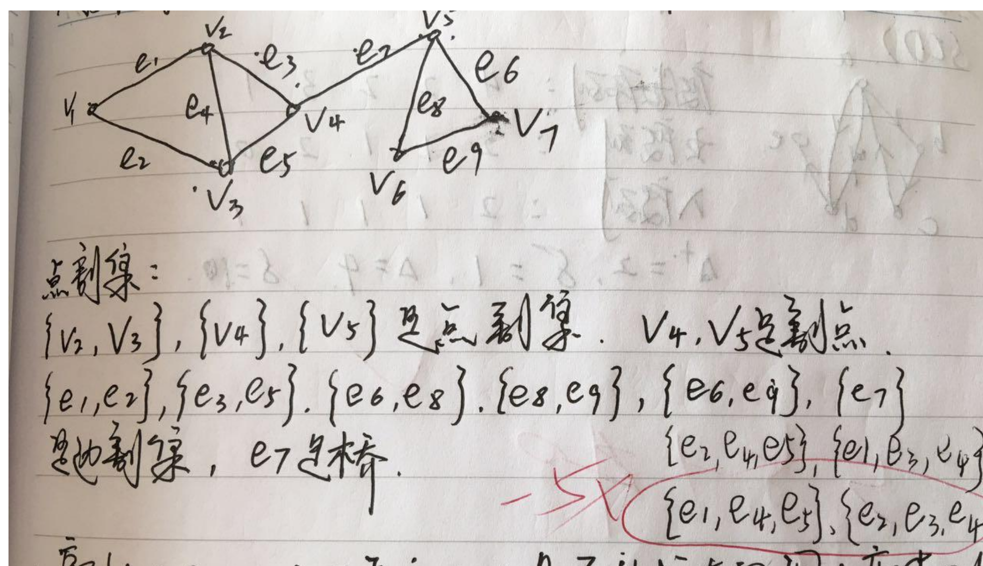
第一题，部分同学求解结果错误



第二题，一些同学对简单图的概念不清晰



第四题，边割集写不全，或者写多



- 这次几道附加题做的情况比较理想

范例

1. 有向图D，12条边，3个出度为2的顶点，其余顶点出度相等；4个入度为2的顶点，其余顶点入度相等；问其共有几个顶点，及其出度列与入度列。

解：设边数为$m=12$，剩于顶点出度为d_1，顶点数为v_1，
剩余顶点入度为d_2，顶点数为v_2.

则 $\begin{cases} d_1 \cdot v_1 + 3\times 2 = 12, & ① \\ d_2 \cdot v_2 + 4\times 2 = 12, & ② \end{cases}$ 其中，d_1，v_1，d_2，v_2为正整数，且 $d_1 \neq 2$，$d_2 \neq 2$

又 $v_1 + 3 = v_2 + 4$ ③

联立①，②，③解得 $d_1 = 3$，$v_1 = 2$，$d_2 = 4$，$v_2 = 1$

∴ 顶点数 $v = v_1 + 3 = 5$

出度列 $d^+(v) = \{2, 2, 2, 3, 3\}$

入度列 $d^-(v) = \{2, 2, 2, 2, 4\}$

2. 找出图4-18和图5-5中的简单图以及悬挂顶点，图5-3中(a)的$\{v_2, v_4\}$、$\{e_2, e_5\}$的导出子图

解：(1) ~~简单图~~ 图4-18 ：简单图：(c)R_3；悬挂顶点：(d)R_4中点2。

图5-5，简单图：(c)，(d)，(e)，(f)；悬挂顶点：(a)中的e，(b)中的v_5点。

(2)、$\{v_2, v_4\}$导出子图：$\circ v_2$ $\circ v_4$

$\{e_2, e_5\}$导出子图：$v_2 \circ \xrightarrow{e_5} \circ v_1$ $v_3 \circ \xrightarrow{e_2} \circ v_4$

4. 解：点割集：$\{v_2, v_3\}$，$\{v_4\}$，$\{v_5\}$.

边割集：$\{e_1, e_2\}$，$\{e_1, e_3, e_4\}$，$\{e_2, e_4, e_5\}$，$\{e_3, e_5\}$，$\{e_7\}$，
$\{e_8, e_9\}$，$\{e_6, e_8\}$，$\{e_6, e_9\}$

割点：$\{v_4\}$，$\{v_5\}$

桥：$\{e_7\}$

第6章 特殊的图

6.1 二部图

6.2 欧拉图

6.3 哈密顿图

6.4 平面图

6.1 二部图

- 二部图
- 完全二部图
- 匹配

  极大匹配,最大匹配,完美匹配,完备匹配
- **Hall**定理

二部图

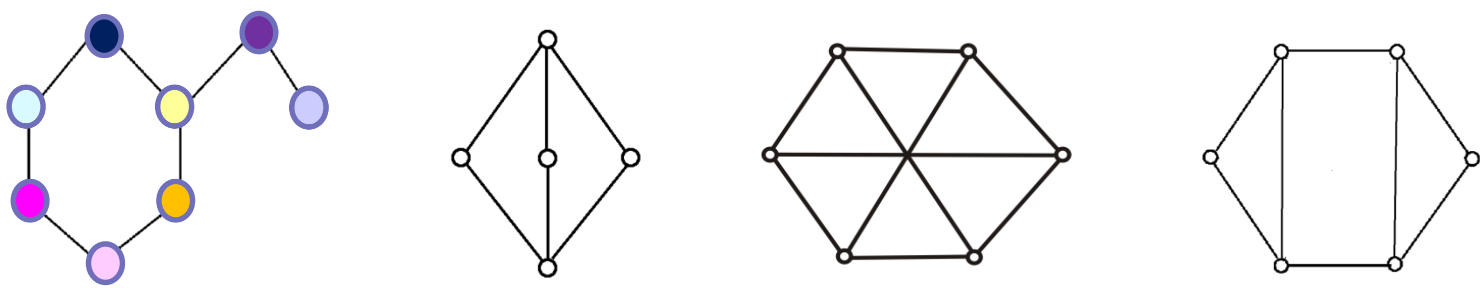
定义 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$, 若能将V 划分成V_1 和 V_2 ($V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$), 使得G中的每条边的两个端点都一个属于V_1, 另一个属于V_2, 则称G为二部图, 记为$\langle V_1,V_2,E\rangle$, 称V_1和V_2为互补顶点子集.

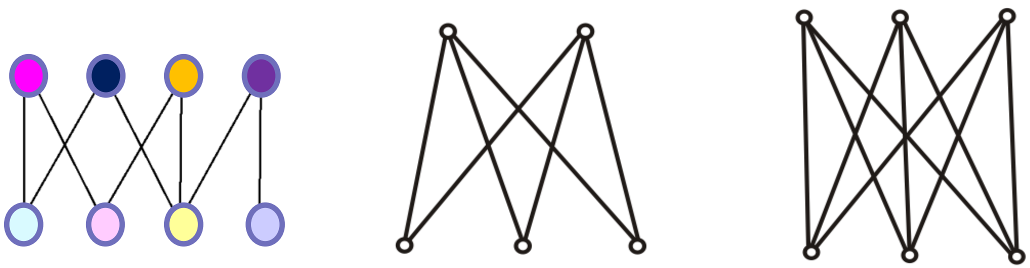
又若G是简单图, 且V_1中每个顶点都与V_2中每个顶点相邻,则称G为完全二部图, 记为$K_{r,s}$, 其中$r=|V_1|$, $s=|V_2|$.

注意: n 阶零图为二部图.

二部图(续)

例 下述各图是否是二部图?





不是

定理 无向图$G=<V,E>$是二部图当且仅当G中无奇圈

匹配

设$G=<V,E>$,

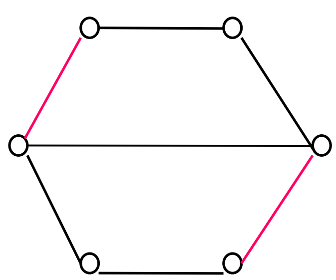
匹配(边独立集): 任2条边均不相邻的边子集

极大匹配: 添加任一条边后都不再是匹配的匹配

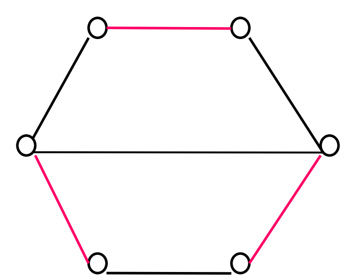
最大匹配: 边数最多的匹配

匹配数: 最大匹配中的边数, 记为β_1

例



极大匹配



最大匹配 $\beta_1=3$

最大匹配是极大匹配，反之不然

匹配 (续)

设M为G中一个匹配

v_i与v_j被M匹配: $(v_i,v_j)\in M$

v为M饱和点: M中有边与v关联

v为M非饱和点: M中没有边与v关联

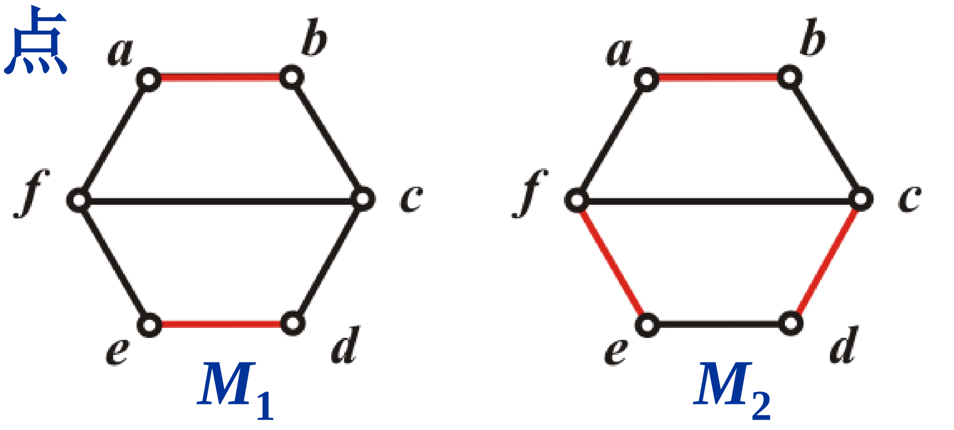
M为完美匹配: G的每个顶点都是M饱和点

例 关于M_1, a,b,e,d是饱和点

f,c是非饱和点

M_1不是完美匹配

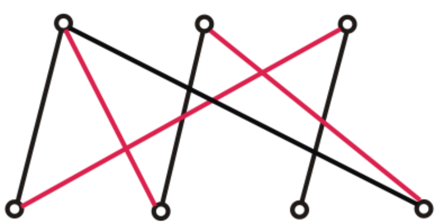
M_2是完美匹配



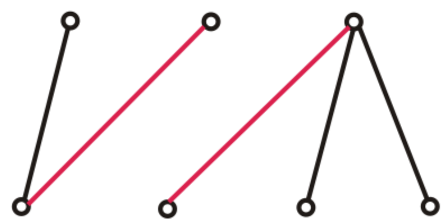
二部图中的匹配

定义 设$G=<V_1,V_2,E>$为二部图, $|V_1|\leq|V_2|$, M是G中最大匹配, 若V_1中顶点全是M饱和点, 则称M为G中V_1到V_2的完备匹配. 当$|V_1|=|V_2|$时, 完备匹配变成完美匹配.

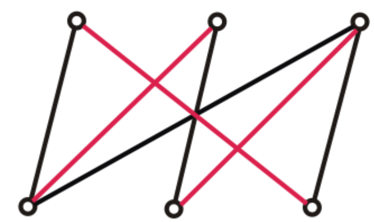
例



完备,不完美



不完备



完美

Hall定理

定理(Hall定理) 设二部图$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$中，$|V_1|\le|V_2|$. G中存在从V_1到V_2的完备匹配当且仅当V_1中任意k 个顶点至少与V_2中的k个顶点相邻($k=1,2,\ldots,|V_1|$). ——相异性条件

由Hall定理, 上一页第2个图没有完备匹配.

定理 设二部图$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$中, 如果存在$t\ge 1$, 使得$V_1$中每个顶点至少关联 t 条边, 而V_2中每个顶点至多关联t条边，则G中存在V_1到V_2的完备匹配. ——t 条件

证 V_1中任意k个顶点至少关联kt条边, 这kt条边至少关联V_2中的k个顶点, 即V_1中任意k个顶点至少邻接V_2中的k个顶点. 由Hall定理, G中存在V_1到V_2的完备匹配.

一个应用实例

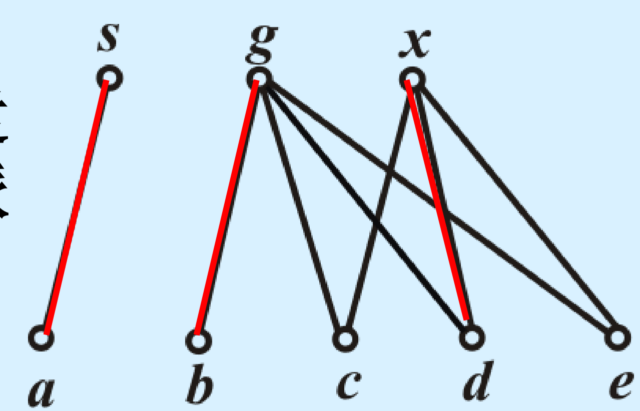
例 某课题组要从a, b, c, d, e 5人中派3人分别到上海、广州、香港去开会. 已知a只想去上海，b只想去广州，c, d, e都表示想去广州或香港. 问该课题组在满足个人要求的条件下，共有几种派遣方案?

解 令$G=<V_1,V_2,E>$, 其中$V_1=\{s, g, x\}$, $V_2=\{a, b, c, d, e\}$,

$$E=\{(u,v) \mid u\in V_1, v\in V_2, v\text{想去}u\},$$

其中s, g, x分别表示上海、广州和香港.

G如图所示.



G 满足相异性条件，因而可给出派遣方案. 红边是一个完备匹配, 对应的派遣方案:

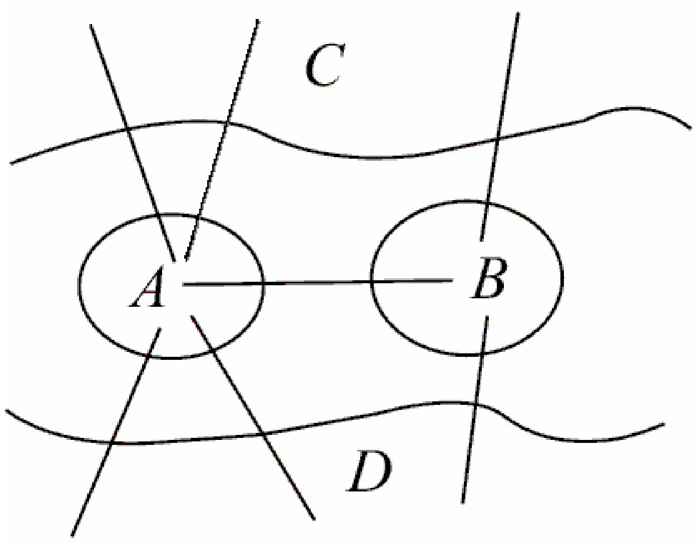
a–上海, b–广州, d–香港

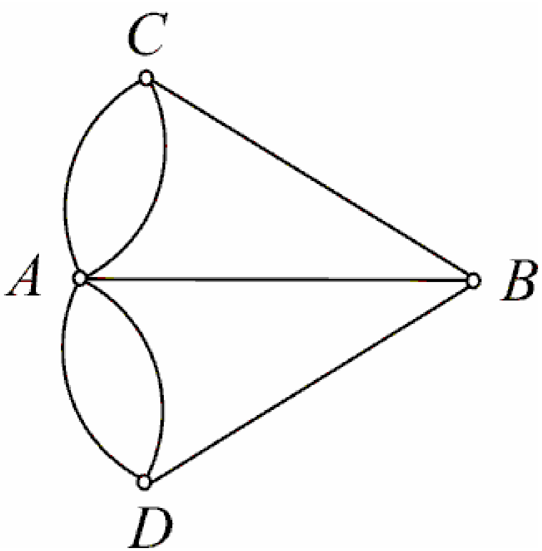
共有9种派遣方案(请给出这9种方案).

6.2 欧拉图

- 欧拉通路与欧拉回路
- 存在欧拉通路和欧拉回路的充分必要条件

哥尼斯堡七桥问题





要求边不重复地一笔画出整个图

欧拉图

欧拉通路：图中行遍所有顶点且恰好经过每条边一次的通路.

欧拉回路：图中行遍所有顶点且恰好经过每条边一次的回路.

欧拉图: 有欧拉回路的图.

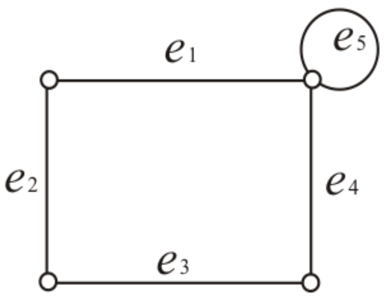
半欧拉图: 有欧拉通路,但无欧拉回路的图.

几点说明：

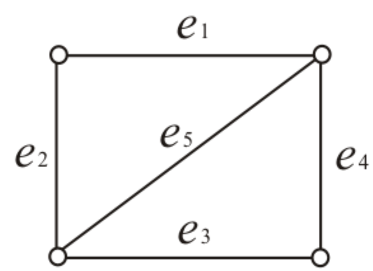
- 上述定义对无向图和有向图都适用.
- 规定平凡图为欧拉图.
- 欧拉通路是简单通路, 欧拉回路是简单回路.
- 环不影响图的欧拉性.

欧拉图实例

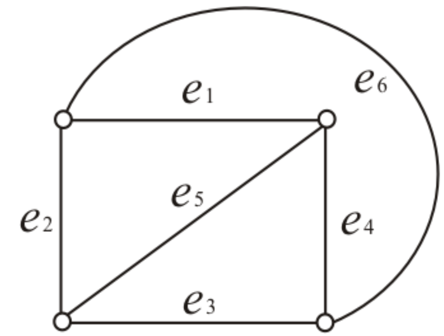
例 是否是欧拉图或半欧拉图?



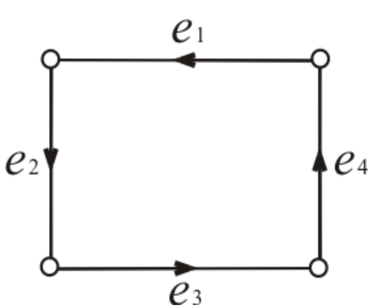
欧拉图



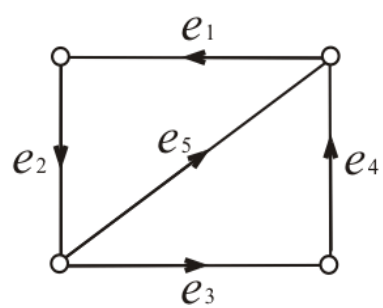
半欧拉图



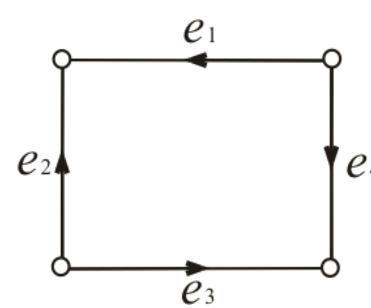
不是



欧拉图



半欧拉图



不是

欧拉图的判别法

定理 无向图*G*为欧拉图当且仅当*G*连通且无奇度顶点.

*G*是半欧拉图当且仅当*G*连通且恰有两个奇度顶点.

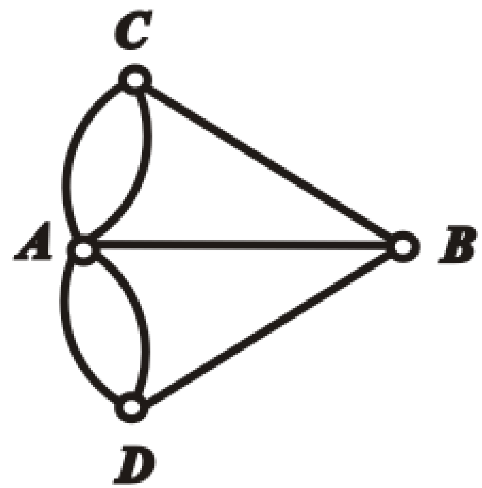
定理 有向图*D*是欧拉图当且仅当*D*连通且每个顶点的入度都等于出度.

*D*是半欧拉图当且仅当*D*连通且恰有两个奇度顶点, 其中一个入度比出度大1, 另一个出度比入度大1, 其余顶点的入度等于出度.

实例

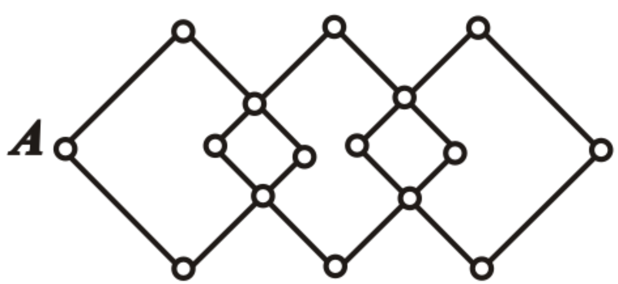
例1 哥尼斯堡七桥问题

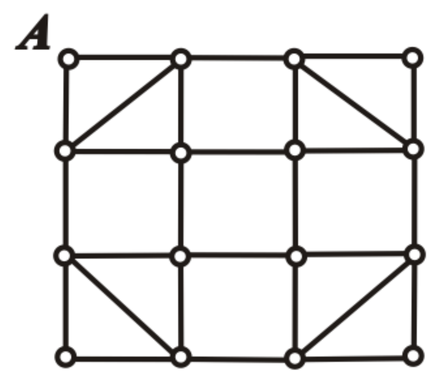
4个奇度顶点, 不存在欧拉通路, 更不存在欧拉回路,



例2 下面两个图都是欧拉图.

从*A*点出发, 如何一次成功地走出一条欧拉回路来?

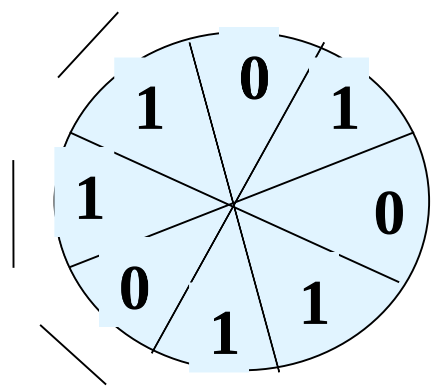




应用实例

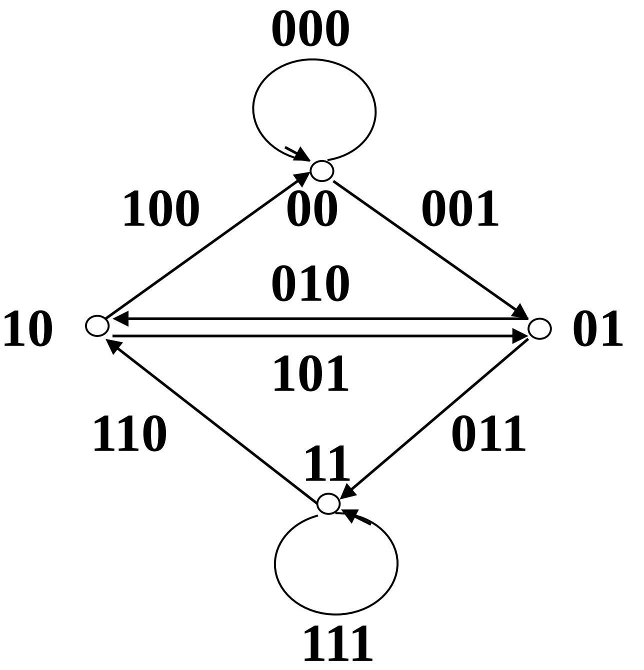
例 设旋转磁鼓分成8个扇区, 每个扇区标记一个0或1, 有3个探测器能够读出连续的3个扇区的标记. 如何赋给扇区标记, 使得能够根据探测器的读数确定磁鼓的位置.

为了能够根据读数确定磁鼓的位置, 必须构造一个由8个0和1组成的圆环, 使得圆环上连续3个数字的序列都不相同.



应用实例(续)

构造一个4阶有向图，8条边的标记是不同的, 图中存在一条欧拉回路:000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100. 在这条回路上连续3条边的标记的第一位恰好与第一条边的标记相同. 顺着这条回路取每一条边标记的第一位得到00011101, 按照这个顺序标记磁鼓的扇区.

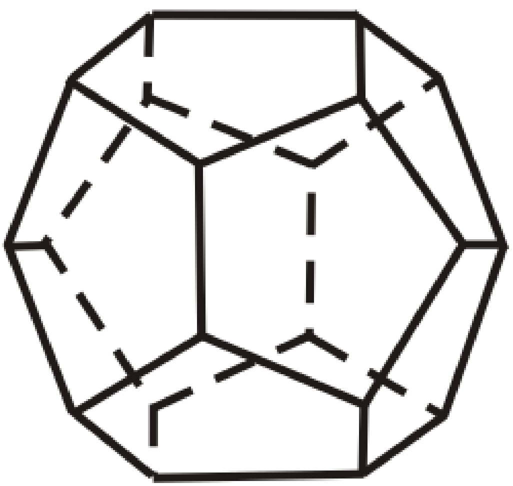


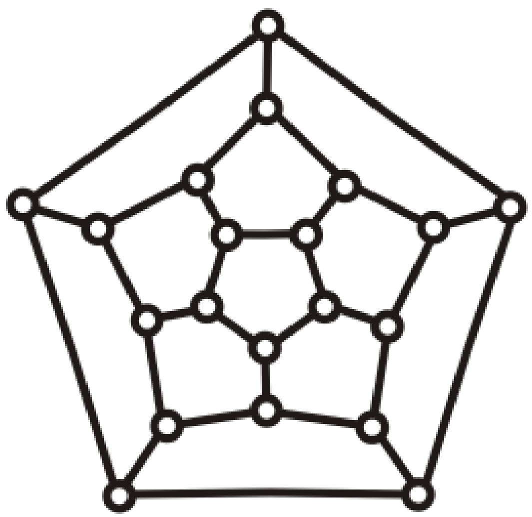
6.3 哈密顿图

- 哈密顿通路和哈密顿回路
- 存在哈密顿通路和哈密顿回路的充分条件与必要条件
- 格雷码

哈密顿周游世界问题

每个顶点是一个城市，有20个城市，要求从一个城市出发，恰好经过每一个城市一次，回到出发点.





哈密顿图的定义

哈密顿通路：经过图中所有顶点一次且仅一次的通路.

哈密顿回路：经过图中所有顶点一次且仅一次的回路.

哈密顿图：具有哈密顿回路的图.

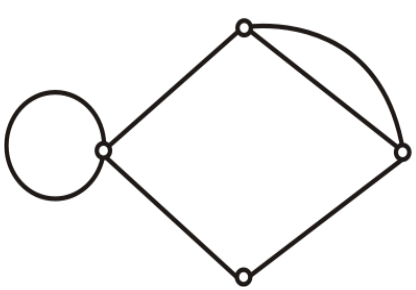
半哈密顿图：具有哈密顿通路而无哈密顿回路的图.

几点说明：

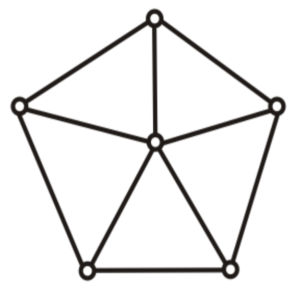
- 平凡图是哈密顿图.
- 哈密顿通路是初级通路，哈密顿回路是初级回路（圈）.
- 环与平行边不影响图的哈密顿性.

实例

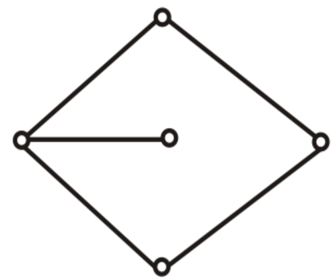
例 是否是哈密顿图,半哈密顿图?



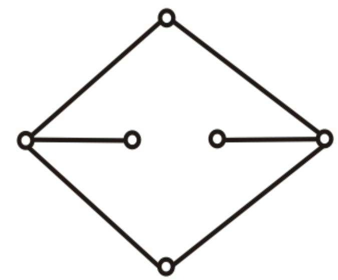
哈密顿图



哈密顿图



半哈密顿图



不是

无向哈密顿图的一个必要条件

定理 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图, 则对于任意$V_1\subset V$且$V_1\neq\varnothing$, 均有 $p(G-V_1)\leq|V_1|$.

证 设C为G中一条哈密顿回路, 有$p(C-V_1)\leq|V_1|$. 又因为$C\subseteq G$, 故 $p(G-V_1)\leq p(C-V_1)\leq|V_1|$.

几点说明

定理中的条件是哈密顿图的必要条件，但不是充分条件.（是哈密顿图一定满足条件，<u>不满足则不是哈密顿图</u>）

可利用该定理判断某些图不是哈密顿图.

由定理可知, $K_{r,s}$当$s\geq r+1$时不是哈密顿图.

当$r\geq2$时, $K_{r,r}$是哈密顿图, 而$K_{r,r+1}$是半哈密顿图.

实例

例 设G为n阶无向连通简单图, 若G中有割点或桥, 则G不是哈密顿图.

证 (1) 设v为割点, 则$p(G-v) \geq 2>|\{v\}|=1$. 根据定理, G不是哈密顿图.

(2) 若G是K_2(K_2有桥), 它显然不是哈密顿图. 除K_2外, 其他的有桥连通图均有割点. 由(1), 得证G不是哈密顿图.

无向哈密顿图的一个充分条件

定理 设G是n阶无向简单图, 若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于$n-1$, 则G中存在**哈密顿通路**. 当$n \geq 3$时, 若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于n, 则G中存在**哈密顿回路**.

由定理, 当$n \geq 3$时, K_n均为哈密顿图.

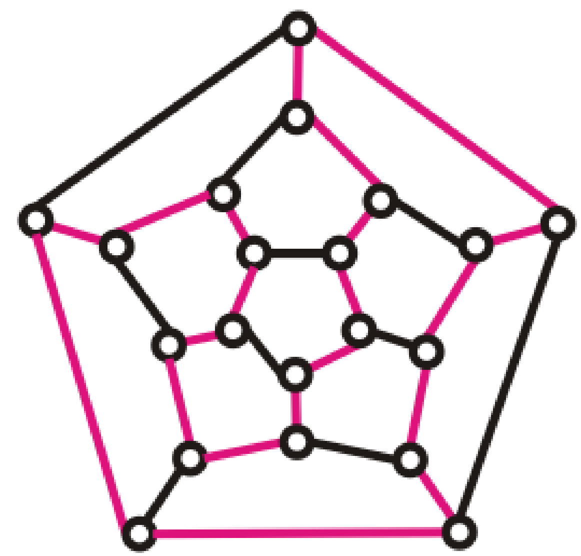
定理中的条件是充分条件, 但不是必要条件.（满足条件则一定是哈密顿图，哈密顿图不一定都满足条件）

例如, $n(\geq 6)$个顶点的路径存在哈密顿通路, 但不满足条件. $n(\geq 5)$个顶点的圈是哈密顿图, 不满足条件.

判断是否是哈密顿图的可行方法

1、观察出一条哈密顿回路

例如 右图(周游世界问题)中红边给出一条哈密顿回路, 故它是哈密顿图.



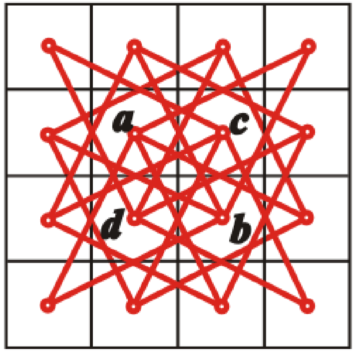
2、满足充分条件

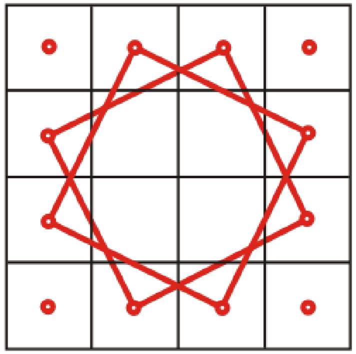
例如 当$n \geq 3$时, K_n中任何两个不同的顶点 u,v, 均有$d(u)+d(v) = 2(n-1) \geq n$, 所以$K_n$为哈密顿图.

判断是否是哈 密顿图的可行方法(续)

- 不满足必要条件

例 4×4国际象棋盘上的跳马问题: 马是否能恰好经过每一个方格一次后回到原处?





解 每个方格看作一个顶点, 2个顶点之间有边当且仅当马可以从一个方格跳到另一个方格, 得到16阶图G, 如左图红边所示. 取$V_1=\{a, b, c, d\}$, 则$p(G-V_1) = 6 >|V_1|$, 见右图. 由定理, 图中无哈密顿回路, 故问题无解.

在8×8国际象棋盘上, 跳马问题是否有解?

判断是否为哈密顿图是NP完全的

应用实例

例 某次国际会议8人参加，已知每人至少与其余7人中的4人有共同语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都能与两边的人交谈？

解 作无向图$G=\langle V,E\rangle$, 其中$V=\{v|v$为与会者$\}$,

$E=\{(u,v) \mid u,v\in V,\ u$与$v$有共同语言, 且$u\neq v\}$.

G为简单图. 根据条件, $\forall v\in V$, $d(v)\geq 4$. 于是, $\forall u,v\in V$, 有$d(u)+d(v)\geq 8$. 由定理可知G为哈密顿图. 服务员在G中找一条哈密顿回路C，按C中相邻关系安排座位即可.

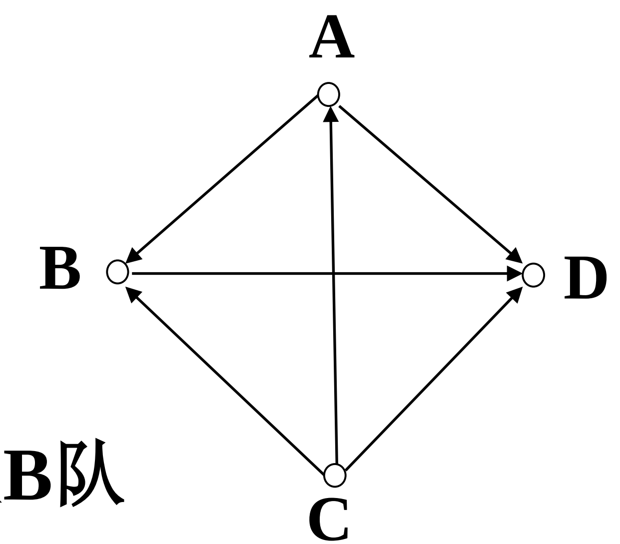
由本题想到的：哈密顿图的实质是能将图中所有的顶点排在同一个圈中.

竞赛图

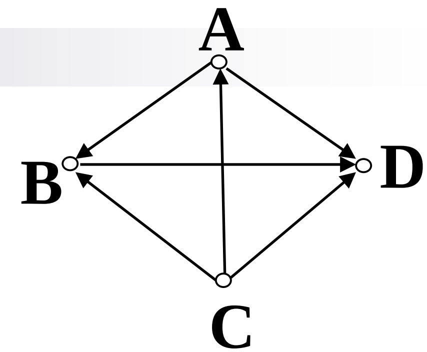
竞赛图: 任意两个顶点之间恰好有一条有向边.

在循环赛中, n个参赛队中的任意两个队比赛一次, 假设没有平局, 用有向图描述比赛结果:

- 顶点表示参赛队
- A到B有一条边当且仅当A队胜B队



竞赛图(续)



定理 在$n(n\geq 2)$阶有向图D中, 如果所有有向边均用无向边代替, 所得无向图中含生成子图K_n, 则有向图D中存在哈密顿通路.

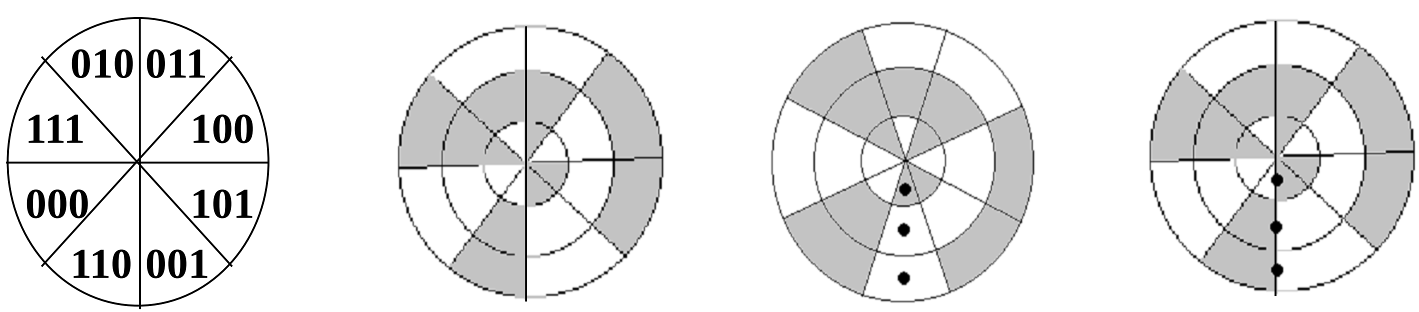
根据定理, 竞赛图中一定有哈密顿通路, 当然也可能有哈密顿回路. 当没有哈密顿回路时, 通常只有一条哈密顿通路, 这条通路给出参赛队的惟一名次.

例如, CABD是一条哈密顿通路, 它没有哈密顿回路, 比赛结果是C第一, A第二, B第三, D第四.

格雷码(gray code)

为了确定圆盘停止旋转后的位置, 把圆盘划分成2^n个扇区, 每个扇区分配一个n位0-1串. 要用某种电子装置读取扇区的赋值. 当圆盘停止旋转后, 如果电子装置处于一个扇区的内部, 它将能够正确的读出这个扇区的赋值, 如果电子装置恰好处于两个扇区的边界上, 就可能出问题.

如何赋值, 才能将可能出现的误差减少到最小?



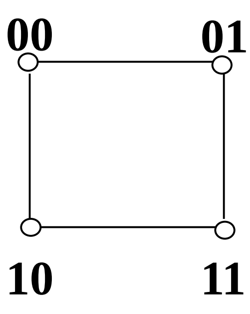
格雷码(续)

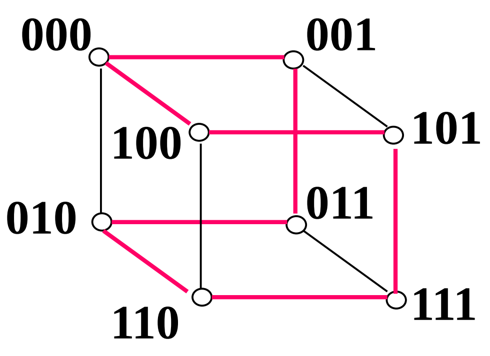
格雷码: 相邻的两个以及最后一个和第一个之间只有一位不同的n位0-1串序列

例如，000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100是一个格雷码

构造n维立方体图: 2^n个顶点, 每个顶点表示一个n位串, 两个顶点之间有一条边当且仅当它们的n位串仅相差一位.

当$n\geq 2$时, 图中一定存在哈密顿回路.





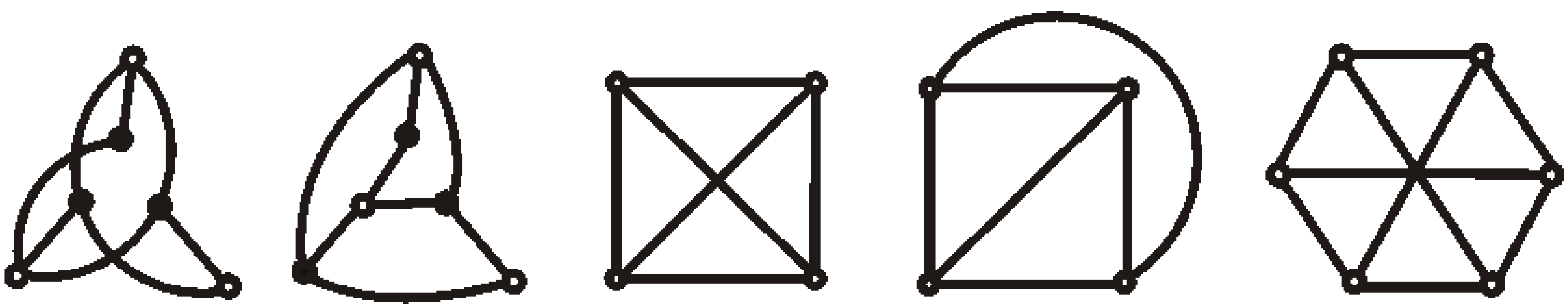
6.4 平面图

- 平面图与平面嵌入
- 平面图的面
- 极大平面图与极小非平面图
- 欧拉公式
- 平面图的对偶图
- 地图着色与四色定理

平面图和平面嵌入

定义 如果能将图G除顶点外边不相交地画在平面上，则称G是平面图. 这个画出的无边相交的图称作G的平面嵌入. 没有平面嵌入的图称作非平面图.

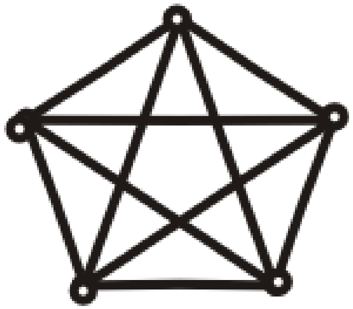
例如 下图中(1)~(4)是平面图, (2)是(1)的平面嵌入, (4)是(3)的平面嵌入. (5)是非平面图.



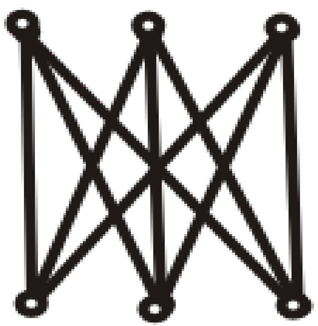
(1) (2) (3) (4) (5)

平面图和平面嵌入(续)

- 今后称一个图是平面图, 可以是指定义中的平面图, 又可以是指平面嵌入, 视当时的情况而定. 当讨论的问题与图的画法有关时, 是指平面嵌入.
- K_5和$K_{3,3}$是非平面图， $K_n(n\geq5)$, $K_{n,m}(n,m\geq3)$都是非平面图
- 设$G'\subseteq G$, 若G为平面图, 则G'也是平面图; 若G'为非平面图, 则G也是非平面图.
- 平行边与环不影响图的平面性.



K_5



$K_{3,3}$

平面图的面与次数

设G是一个平面嵌入

G的面: 由G的边将平面划分成的每一个区域

无限面(外部面): 面积无限的面, 用R_0表示

有限面(内部面): 面积有限的面, 用$R_1, R_2, \ldots, R_k$表示

面R_i的边界: 包围R_i的所有边构成的回路组

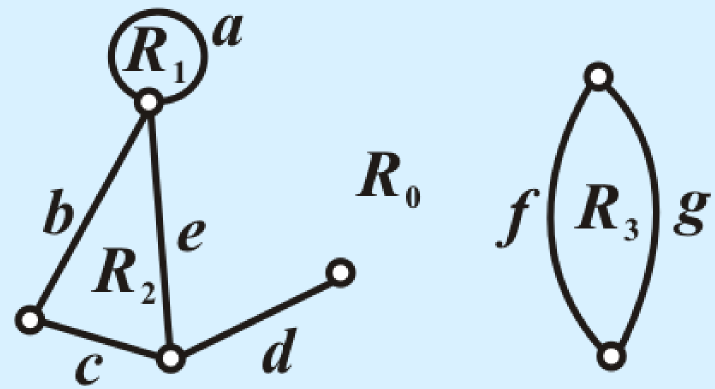
面R_i的次数: R_i边界的长度，用$\deg(R_i)$表示

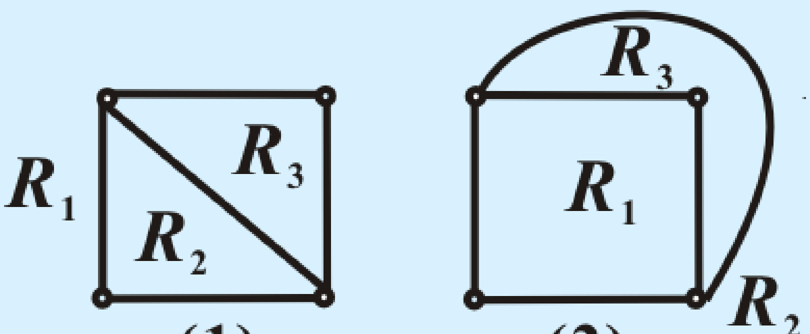
定理　平面图各面的次数之和等于边数的2倍.

证 每条边可能在两个面的公共边界上，也可能只在一个面的边界上. 前者, 在每个面的边界上这条边出现一次, 共计算两次. 后者, 它在这个面的边界上出现2次, 也计算两次.

平面图的面与次数(续)

例1 右图有4个面, deg(R_1)=1, deg(R_2)=3, deg(R_3)=2, deg(R_0)=8. 请写各面的边界.





(1) (2)

例2 左边2个图是同一个平面图的平面嵌入. R_1在(1)中是外部面, 在(2)中是内部面; R_2在(1)中是内部面, 在(2)中是外部面. 其实, 在平面嵌入中可把任何面作为外部面.

极大平面图

定义 若G是简单平面图, 并且在任意两个不相邻的顶点之间加一条新边所得图为非平面图, 则称G为极大平面图.

例如, K_5, $K_{3,3}$若删去一条边是极大平面图.

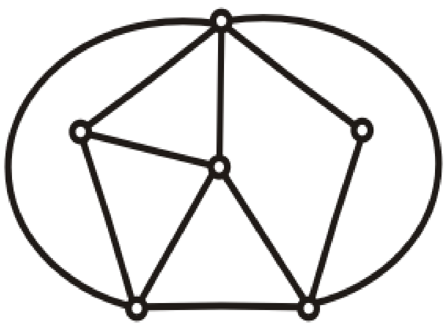
K_1, K_2, K_3, K_4都是极大平面图(它们已无不相邻顶点).

- 若简单平面图中已无不相邻顶点，则是极大平面图.
- 极大平面图必连通.
- 任何$n(n\geq 3)$阶极大平面图中不可能有割点和桥.
- 任何$n(n\geq 4)$阶极大平面图G均有$\delta(G)\geq 3$.

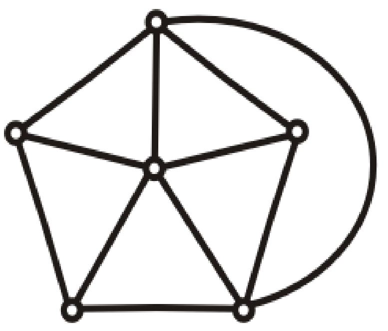
定理 $n(n\geq 3)$阶简单平面图是极大平面图当且仅当它连通且每个面的次数都为3.

实例

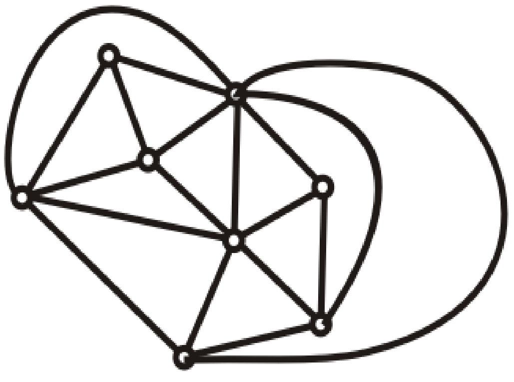
例 是否是极大平面图?



不是



不是



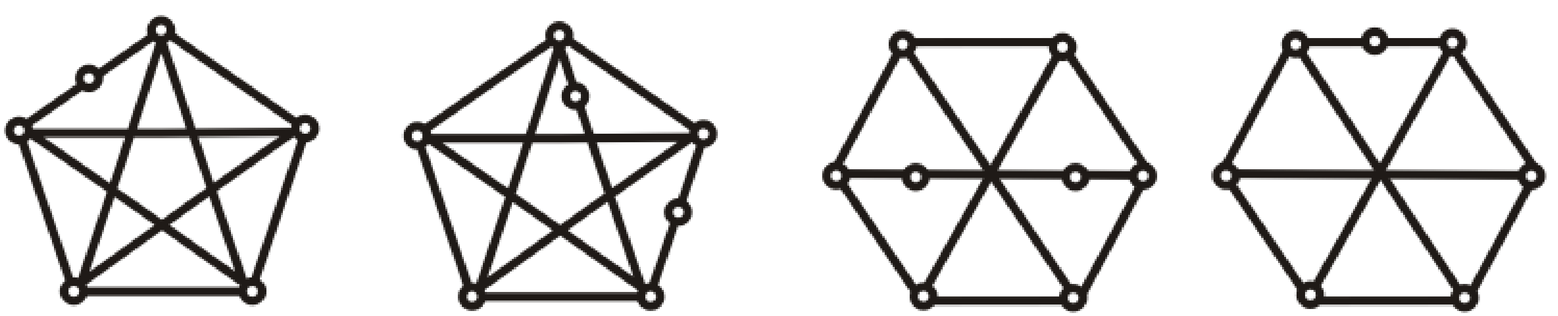
是

极小非平面图

定义 若G是非平面图, 并且任意删除一条边所得图都是平面图, 则称G为极小非平面图.

极小非平面图必为简单图

例如, K_5, $K_{3,3}$是极小非平面图, 下面4个图都是极小非平面图



欧拉公式

定理 (欧拉公式) 设G为n阶m条边r个面的连通平面图, 则

$$n-m+r=2.$$

证 对边数m做归纳证明.

$m=0$, G为平凡图, 结论为真.

设$m=k(k\geq 0)$结论为真($n-m+r=2$), $m=k+1$时分情况讨论如下:

(1) 若G中有一个1度顶点v, 则$G'=G-v$ 连通, 有n-1个顶点, k条边和r个面. 由归纳假设, $(n-1)-k+r=n-(k+1)+r=2$, 得证$m=k+1$时结论成立.

(2) 否则, G中必有圈. 删除一个圈上的一条边,记作G'. G' 连通, 有n个顶点,k条边和r-1个面. 由归纳假设, $n-k+(r-1)=2$, 即$n-(k+1)+r=2$, 得证$m=k+1$时结论也成立.

欧拉公式(续)

推论(欧拉公式的推广) 设G是有 p ($p \geq 2$) 个连通分支的平面图, 则

$$n - m + r = p + 1$$

证　设第 i 个连通分支有 n_i个顶点, m_i条边和 r_i个面. 对各连通分支用欧拉公式,

$$n_i - m_i + r_i = 2, \qquad i = 1, 2, \ldots, p$$

求和并注意 $r = r_1 + \ldots + r_p - p + 1$, 即得

$$n - m + r = p + 1$$

平面图的性质

定理 设G为n阶m条边的连通平面图, 每个面的次数不小于l ($l \geq 3$), 则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

设G为有 p ($p\geq 2$) 个连通分支的平面图, 且每个面的次数不小于l ($l \geq 3$), 则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-p-1)$$

证 由各面次数之和等于边数的2倍及欧拉公式得

$$2m \geq lr = l\,(2+m-n)$$

可解得所需结论.

对 p ($p\geq 2$) 个连通分支的情况类似可证.

平面图的性质(续)

推论 K_5 和 $K_{3,3}$不是平面图.

证 用反证法, 假设它们是平面图,

则 K_5 : n=5, m=10, l=3

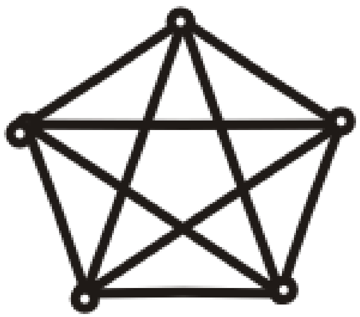
$$10 \le \frac{3}{3-2} \times (5-2) = 9$$

矛盾.

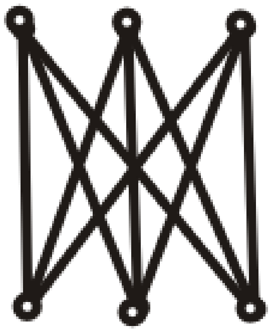
$K_{3,3}$: n=6, m=9, l=4

$$9 \le \frac{4}{4-2} \times (6-2) = 8$$

矛盾.



K_5

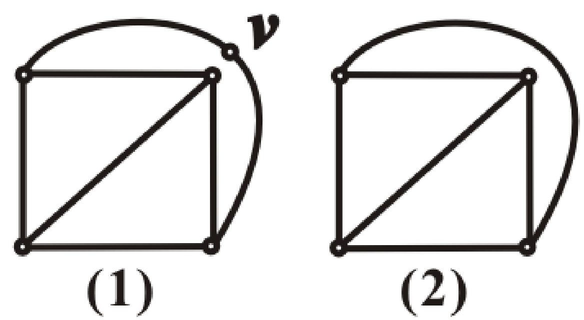


$K_{3,3}$

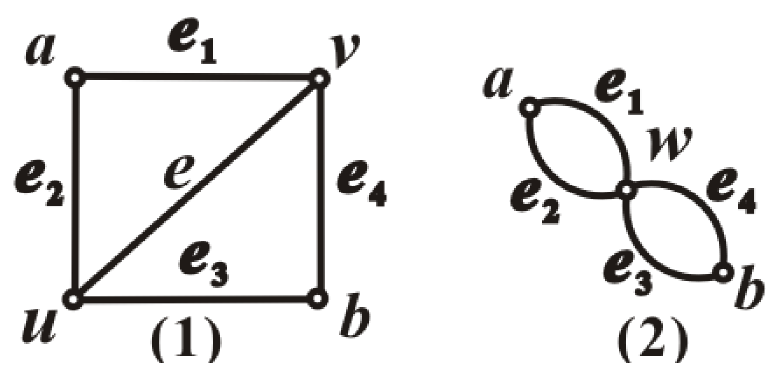
同胚与收缩

消去2度顶点v 如上图从(1)到(2)

插入2度顶点v 如上图从(2)到(1)



G_1与G_2同胚: G_1与G_2同构, 或经过反复插入、或消去2度顶点后同构



收缩边e 如下图从(1)到(2)

- 删除边e
- 用顶点w取代u，v
- w与所有与u，v关联的边相关联（除了e）

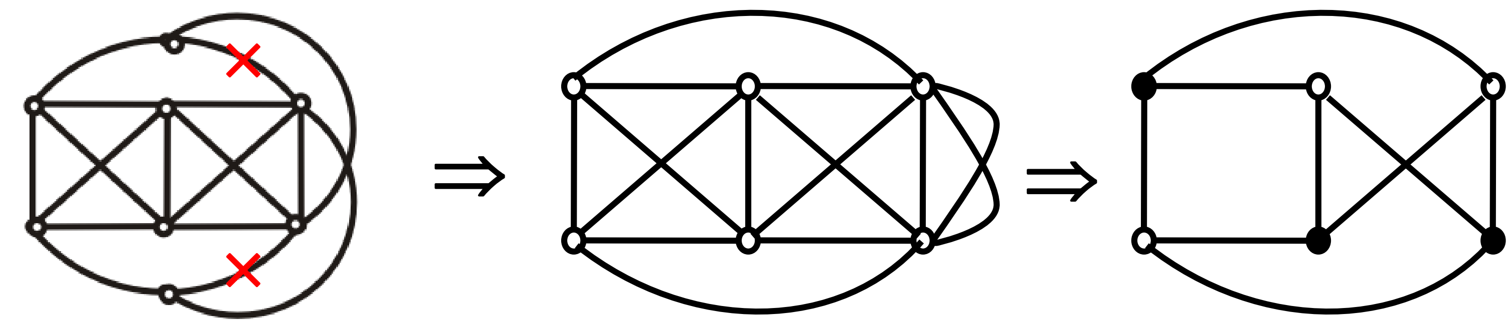
库拉图斯基定理

定理 G是平面图$\Leftrightarrow G$中不含与K_5同胚的子图, 也不含与$K_{3,3}$同胚的子图.

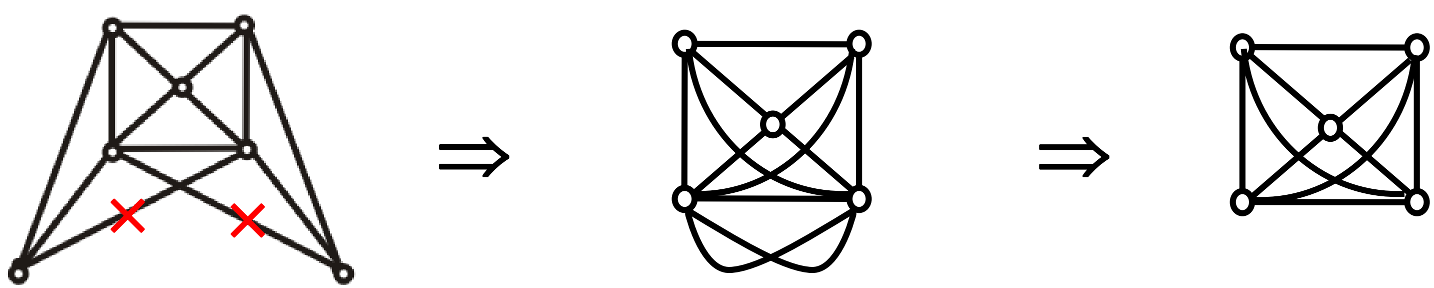
定理 G是平面图$\Leftrightarrow G$中无可收缩为K_5的子图, 也无可收缩为$K_{3,3}$的子图.

非平面图证明

例 证明下述2个图均为非平面图.



收缩2条边　　　　取子图　$K_{3,3}$



收缩2条边　　　　取子图　K_5

平面图的对偶图

定义 设平面图G, 有n个顶点, m条边和r个面, G的对偶图$G^*=\langle V^*,E^*\rangle$如下：

在G的每一个面R_i中任取一个点v_i^*作为G^*的顶点,

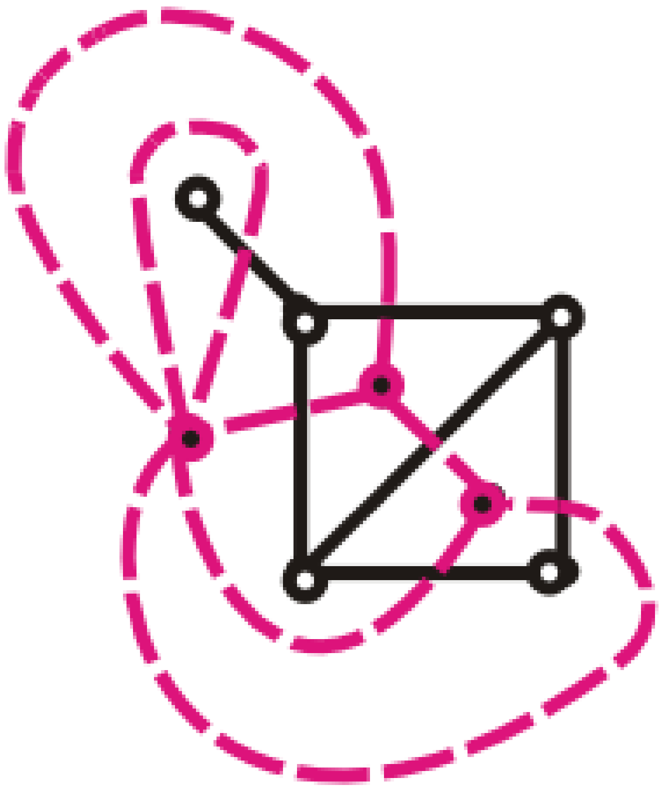
$$V^*=\{\, v_i^* \mid i=1,2,\ldots,r \,\}.$$

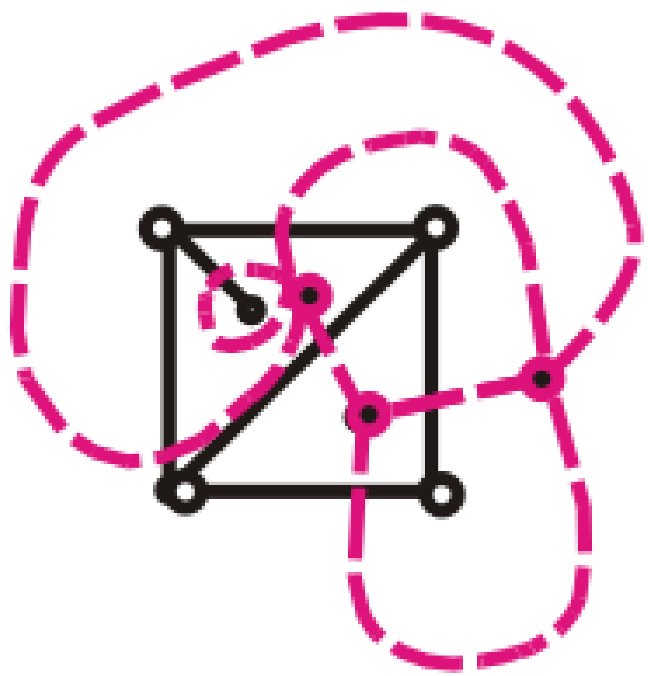
对G每一条边e_k, 若e_k在G的面R_i与R_j的公共边界上, 则作边$e_k^*=(v_i^*,v_j^*)$, 且与e_k相交; 若e_k为G中的桥且在面R_i的边界上, 则作环$e_k^*=(v_i^*,v_i^*)$.

$$E^*=\{\, e_k^* \mid k=1,2,\ldots,m \,\}.$$

平面图的对偶图的实例

例 黑色实线为原平面图, 红色虚线为其对偶图





平面图的对偶图的性质

性质：

- 对偶图是平面图，而且是平面嵌入.
- 对偶图是连通图
- 若边e为G中的环，则G^*与e对应的边e^*为桥；若e为桥，则G^*中与e对应的边e^*为环.
- 同构的平面图的对偶图不一定同构.

  上页两个平面图同构, 它们的对偶图不同构.

地图着色

地图: 连通无桥平面图的平面嵌入, 每一个面是一个国家.若两个国家有公共边界,则称它们是相邻的.

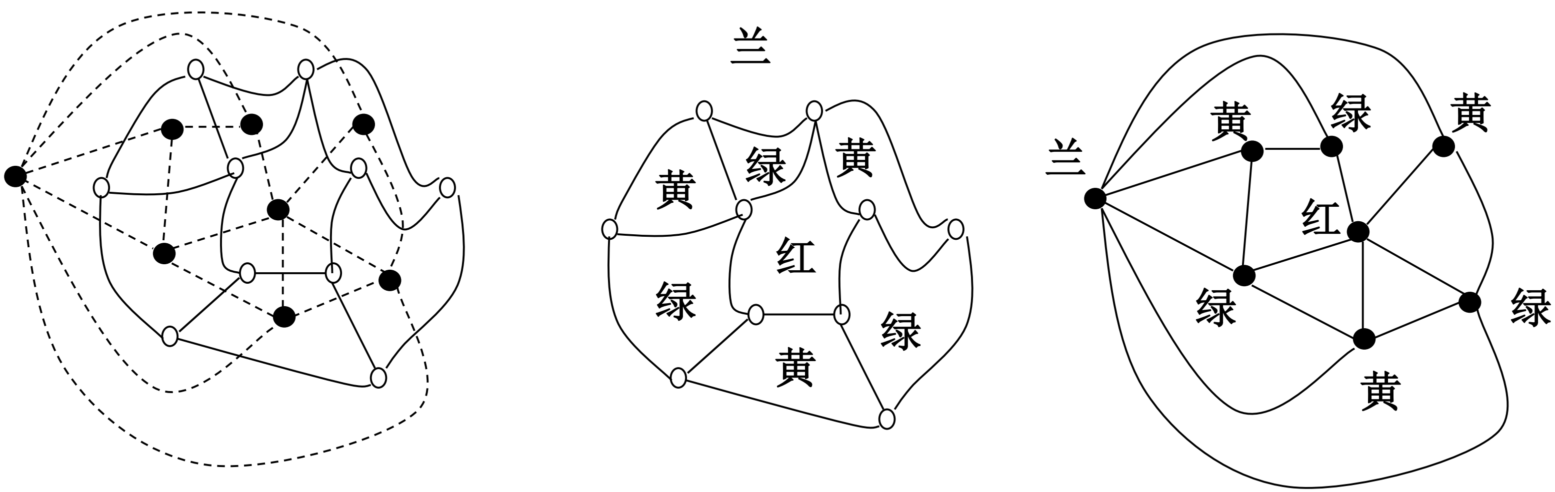
地图着色(面着色): 对地图的每个国家涂一种颜色,使相邻的国家涂不同的颜色.

地图着色问题: 用尽可能少的颜色给地图着色.

地图着色可以转化成平面图的点着色. 当G中无桥时, G^*中无环. G的面与G^*的顶点对应, 且G的两个面相邻当且仅当G^*对应的两个顶点相邻, 从而G的面着色等同于G^*的点着色.

地图着色与平面图的点着色

例



四色定理

四色猜想(100多年前): 任何地图都可以用4种颜色着色, 即任何平面图都是4-可着色的.

1890年希伍德证明五色定理: 任何平面图都是5-可着色的.

1976年美国数学家阿佩尔和黑肯证明, 如果四色猜想不成立, 则存在一个反例, 这个反例大约有2000种可能(后来有人简化到600多种), 他们用计算机分析了所有这些可能, 都没有导致反例.

四色定理 任何平面图都是4-可着色的.

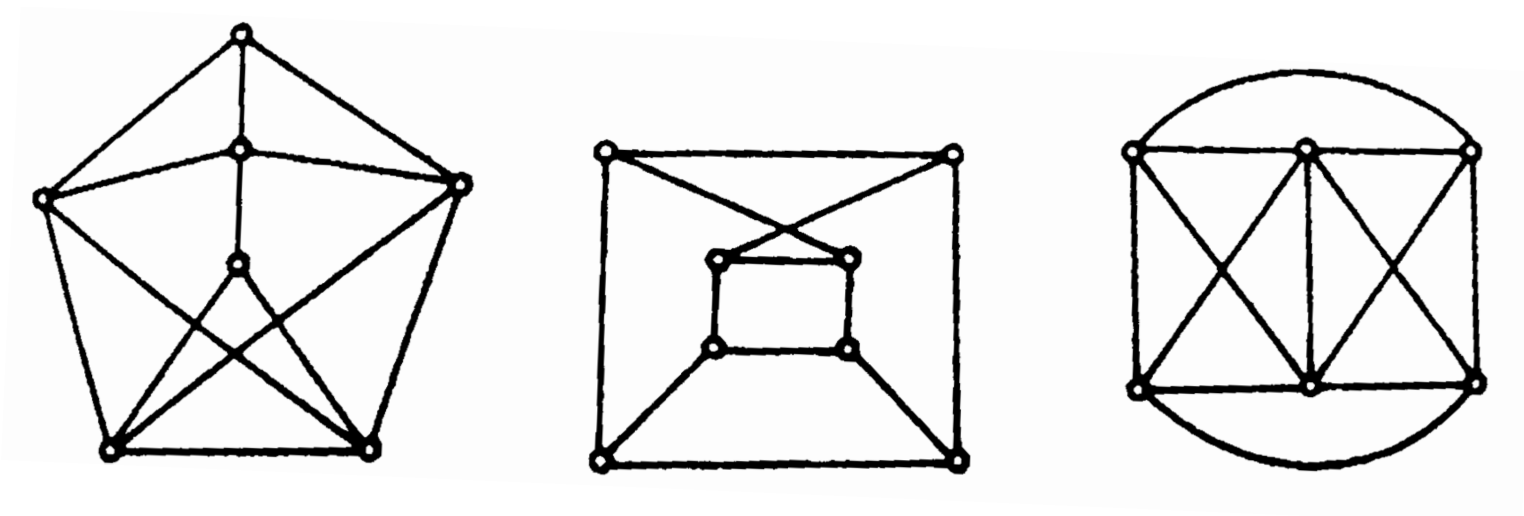
作业

1、**P151**例**6.8**，问题为在二部图中存在完备匹配的是哪几个图，分别画出其完备匹配，并求出匹配数。

2、如何将**16**个二进制数字排成一个圆形，使得**16**个长为**4**的二进制数在其中各出现且仅出现一次？

作业

3、证明下面各图为非平面图



4、7阶15条边的图G为简单连通平面图，证明其为极大平面图。

附加题：证明下图不是哈密顿图