1.7 推理理论

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法
- 推理定律与推理规则
- 构造证明

  直接证明法, 附加前提证明法, 归缪法

推理的形式结构—问题的引入

推理举例:

(1) 正项级数收敛当且仅当部分和有上界.

(2) 若$A\cup C\subseteq B\cup D$，则$A\subseteq B$且$C\subseteq D$.

推理: 从前提出发推出结论的思维过程

上面(1)是正确的推理，而(2)是错误的推理.

前提：已知的命题公式;

结论：由前提出发应用推理规则推出的命题公式

证明: 描述推理正确或错误的过程.

推理的形式结构

定义 若对于每组赋值，或者$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 均为假，或者当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时，$B$也为真，则称由$A_1$, A_2, …, A_k推B的推理正确（B是$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 的逻辑结论或有效结论），否则推理不正确（错误）.

"A_1, A_2, …, A_k 推B" 的推理正确

当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式.

推理的形式结构: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$ 或

前提： $A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论： B

若推理正确，则记作：$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$.

判断推理是否正确的方法

- 真值表法
- 等值演算法
- 主析取范式法
- 构造证明法

判断推理是否正确

判断$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$是否为重言式

证明推理正确

说明：当命题变项比较少时，用前3个方法比较方便, 此时采用形式结构

“ $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$”.

用构造证明时, 采用

“前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$, 结论: B”.

实例

例 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号. 今天是1号. 所以明天是5号.

解 设 p：今天是1号，q：明天是5号.

推理的形式结构为: $(p\to q)\wedge p\to q$

证明（用等值演算法）

$$(p\to q)\wedge p\to q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \Leftrightarrow 1$$

得证推理正确

实例 (续)

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以今天是1号.

解 设p：今天是1号，q：明天是5号.

推理的形式结构为：$(p\to q)\wedge q\to p$

证明（用主析取范式法）

$$(p\to q)\wedge q\to p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge q\to p$$

$$\Leftrightarrow \neg\ ((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q\vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3$$

结果不含m_1,故01是成假赋值，所以推理不正确.

推理定律——重言蕴涵式

重要的推理定律

$A \Rightarrow (A \vee B)$	附加律
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	化简律
$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$	假言推理
$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$	假言三段论
$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$	构造性二难

推理定律 (续)

$(A \to B) \land (\neg A \to B) \Rightarrow B$　构造性二难（特殊形式）

$(A \to B) \land (C \to D) \land (\neg B \lor \neg D) \Rightarrow (\neg A \lor \neg C)$

破坏性二难

说明:

A, B, C为元语言符号

若某推理符合某条推理定律，则它自然是正确的

$A \Leftrightarrow B$产生两条推理定律: $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$

推理规则

证明:描述推理过程的命题公式序列，其中每个命题公式或者是已知的前提，或者是由前面的命题公式应用推理规则得到的结论.

(1) 前提引入规则：在证明的任何一步都可引入前提

(2) 结论引入规则：在证明的任何一步，前面已经证明的结论都可做为后续证明的前提引入

(3) 置换规则：在证明的任何一步，命题公式中的任何子命题公式都可以用与之等值的命题公式置换

推理规则

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{A \to B \quad A}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A \vee B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{A \to B \quad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{\therefore A \to C}$$

推理规则(续)

(9) 析取三段论规则

$$\frac{\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg B \end{array}}{\therefore A}$$

(10)构造性二难推理规则

$$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ C \to D \\ A \vee C \end{array}}{\therefore B \vee D}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ C \to D \\ \neg B \vee \neg D \end{array}}{\therefore \neg A \vee \neg C}$$

(12) 合取引入规则

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{\therefore A \wedge B}$$

构造证明之一——直接证明法

例 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我就有课. 若有课，今天必备课. 我今天下午没备课. 所以，

明天不是星期一和星期三.

解 设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我有课，s：我备课

推理的形式结构为

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

直接证明法 (续)

前提：$(p\vee q)\to r$，$r\to s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

证明

① $r\to s$

② $\neg s$

③ $\neg r$

④ $(p\vee q)\to r$

⑤ $\neg(p\vee q)$

⑥ $\neg p\wedge\neg q$

构造证明之二——附加前提证明法

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$C \to B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：B

理由： $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to (C \to B)$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B$

$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \to B$

附加前提证明法 (续)

例 构造下面推理的证明:

2是素数或合数. 若2是素数，则$\sqrt{2}$是无理数. 若$\sqrt{2}$是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

用附加前提证明法构造证明

解 设 p：2是素数，q：2是合数，

r：$\sqrt{2}$是无理数，s：4是素数

推理的形式结构

前提：$p\lor q$, $p\to r$, $r\to\neg s$

结论：$s\to q$

附加前提证明法 (续)

前提：$p \vee q$，$p \to r$，$r \to \neg s$

结论：$s \to q$

证明

① s

② $p \to r$

③ $r \to \neg s$

④ $p \to \neg s$

⑤ $\neg p$

⑥ $p \vee q$

⑦ q

请用直接证明法证明之

构造证明之三——归谬法(反证法)

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

将$\neg B$加入前提，若推出矛盾，则得证推理正确.

理由:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B)$为重言式当且仅当括号内部为矛盾式

归谬法 (续)

例 构造下面推理的证明

前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明（用归缪法）

① q

② $r\rightarrow s$

③ $\neg s$

④ $\neg r$

归谬法 (续)

① q 结论否定引入

② $r\to s$ 前提引入

③ $\neg s$ 前提引入

④ $\neg r$ ②③拒取式

⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$

⑥ $\neg(p\wedge q)$

⑦ $\neg p\vee\neg q$

⑧ $\neg p$

⑨ p

⑩ $\neg p\wedge p$

请用直接证明法证明之

作业

- **P35**习题**1.19**中（**1**）（**2**）（**4**），用直接证明法、附加前提证明法、归谬法证明