1. 评分标准

   71页 3.1共100分,每题25分， 附加题每道25分

2. 情况汇总

   a) 38份作业100分
   b) 错误率相对较高的为3.1中的(4)。

则下列句子对应的集合表达式分别为：

(1) 只有数学专业的一年级学生去听音乐会了。

$G \subseteq F \cap M$

(2) 除了选修离散的同学之外的一年级学生以及所有的二年级学生都去听音乐会。

$(F-T) \cup S \subseteq G$

(3) 除了计算机系的学生以及周一晚上去听音乐会的学生之外周一晚上都没有晚睡

$H \subseteq R \cup G$

(4) 所有数学专业一年级的学生都没有听周一晚的音乐会。

$(F \cap M) \cap G = \phi$

选做：

1. 证明：$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

Date:

$$= (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap C \cap \bar{B})$$

$$(A \cap B) \oplus (A \cap C)$$

$$= (A \cap B - A \cap C) \cup (A \cap C - A \cap B)$$

$$= (A \cap B \cap \overline{A \cap C}) \cup (A \cap C \cap \overline{A \cap B})$$

$$= (A \cap B \cap (\bar{A} \cup \bar{C})) \cup (A \cap C \cap (\bar{A} \cup \bar{B}))$$

$$= ((A \cap B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B \cap \bar{C})) \cup ((A \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap C \cap \bar{B}))$$

$$= (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap C \cap \bar{B})$$

$$\therefore A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$$

P75. 习题3.19.

解：设 S 为 1到 1000000 的整数集（包括1, 1000000）

A 为 S 中的完全平方数集合

B 为 S 中的完全立方数集合

则 $|S| = 1000000$

由 $1000^2 = 1000000 \Rightarrow |A| = 1000$

$100^3 = 1000000 \Rightarrow |B| = 100$ $|A \cap B| = 10$.

$\therefore |\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$

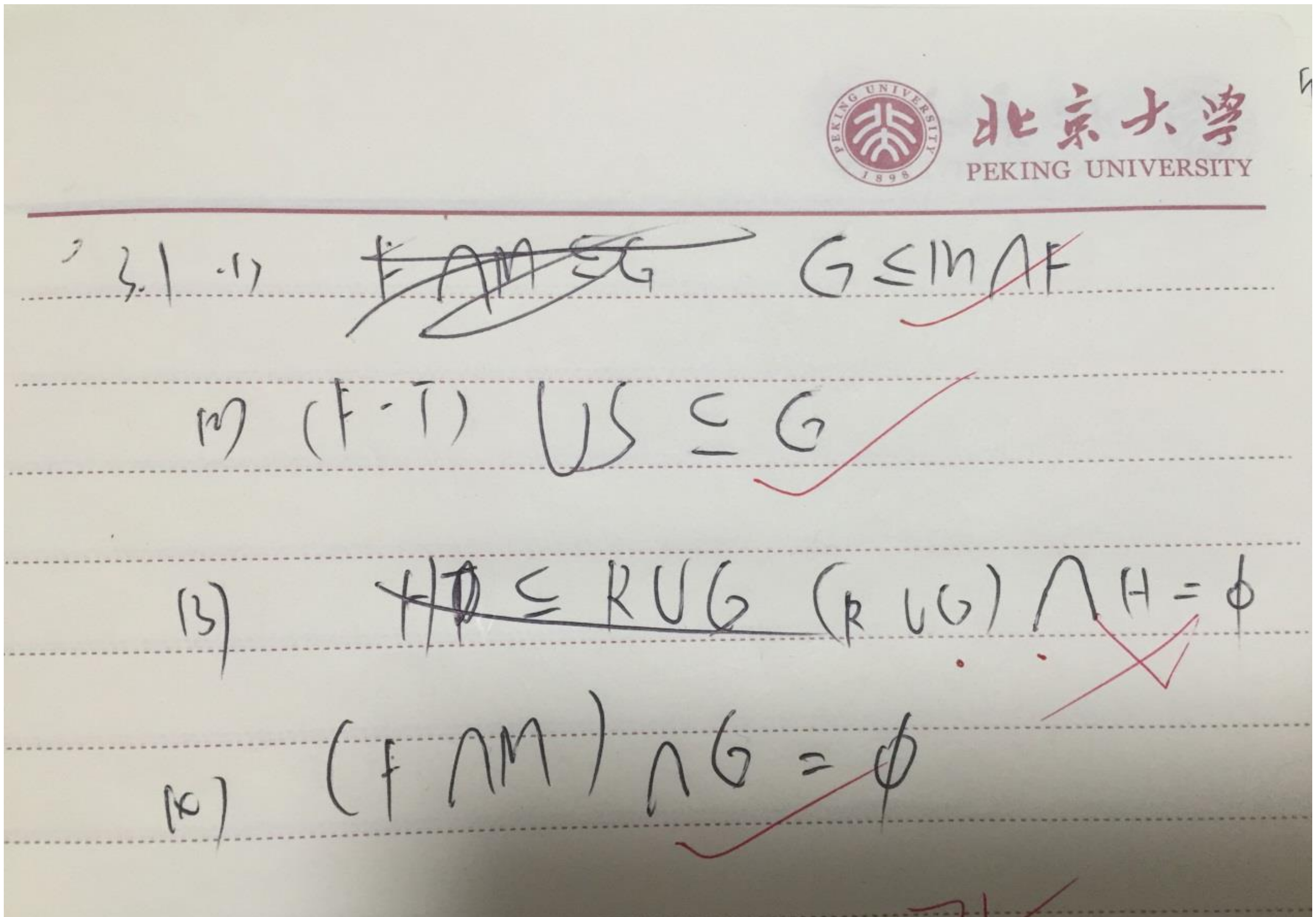
$= 1000000 - 1000 - 100 + 10$

$= 998910$

即 1到1000000之间，有998910个整数既不是完全平方数，也不是完全立方数.

1. 个别同学的证明步骤比较简单，望以后写详细些

2. 个别同学的过于潦草简单，如下图所示，希望以后注意



4.5 等价关系与偏序关系

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应
- 偏序关系
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特定元素

等价关系的定义与实例

定义　设 R 为非空集合上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若 $\langle x,y\rangle \in R$, 称 x 等价于 y, 记做 $x \sim y$.

实例　设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义 A 上的关系 R:

$$R = \{ \langle x,y\rangle \mid x,y \in A \wedge x \equiv y \pmod 3 \}$$

其中 $x \equiv y \pmod 3$ 叫做 x 与 y 模3相等, 即 x 除以3的余数与 y 除以3的余数相等.

等价关系的验证

验证模 3 相等关系 R 为 A上的等价关系, 因为

$\forall x \in A$, 有$x \equiv x(\text{mod } 3)$

$\forall x, y \in A$, 若 $x \equiv y(\text{mod } 3)$, 则有 $y \equiv x(\text{mod } 3)$

$\forall x, y, z \in A$, 若$x \equiv y(\text{mod } 3)$, $y \equiv z(\text{mod } 3)$,

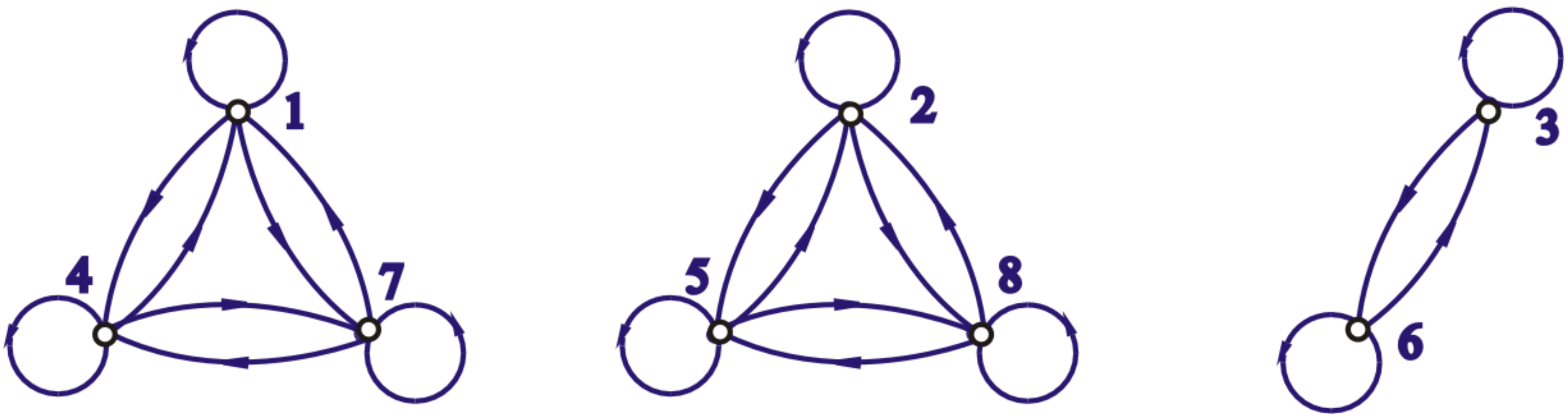
则有 $x \equiv z(\text{mod } 3)$

自反性、对称性、传递性得到验证

A上模3等价关系的关系图

设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$,

$R=\{\ \langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\equiv y \pmod 3\ \}$



等价类

定义 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于R 的等价类, 简称为 x 的等价类, 简记为$[x]$.

实例 A={ 1, 2, … , 8 }上模 3 等价关系的等价类:

$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$

$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$

$[3]=[6]=\{3,6\}$

等价类的性质

定理1 设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是A的非空子集.

(2) $\forall x, y \in A$, 如果 $x\, R\, y$, 则 $[x]=[y]$.

(3) $\forall x, y \in A$, 如果 $x \not R\, y$, 则 $[x]$与$[y]$不交.

(4) $\cup\{\, [x] \mid x \in A\}=A$，即所有等价类的并集就是$A$.

实例

A={ 1, 2, … , 8 }上模 3 等价关系的等价类:

$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$,

$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$,

$[3]=[6]=\{3,6\}$

- 以上3 类两两不交,
- $\{1,4,7\}\cup\{2,5,8\}\cup\{3,6\} = \{1,2, \dots ,8\}$

商集

定义 设R为非空集合A上的等价关系, 以R的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的**商集**, 记做 A/R, $A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$

实例 $A=\{1,2,\ldots,8\}$,A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{ \{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\} \}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{ \{1\},\{2\}, \ldots ,\{8\}\}$$

$$A/E_A = \{ \{1, 2, \ldots ,8\} \}$$

集合的划分

定义　设A为非空集合，若A的子集族$\pi(\pi\subseteq P(A))$ 满足下面条件：

(1) $\varnothing\notin\pi$

(2) $\forall x\forall y\,(x,y\in\pi\wedge x\neq y\rightarrow x\cap y=\varnothing)$

(3) $\cup\pi=A$

则称π是A的一个划分，称π中的元素为A的划分块.

例题

例1 设$A=\{a, b, c, d\}$,

给定$\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6$如下:

$\pi_1=\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$, $\pi_2=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$\pi_3=\{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$, $\pi_4=\{\{a, b\}, \{c\}\}$

$\pi_5=\{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}\}$, $\pi_6=\{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$

则π_1和π_2 是A的划分, 其他都不是 A 的划分.

为什么?

等价关系与划分的一一对应

- 商集 A/R 就是 A 的一个划分
- 不同的商集对应于不同的划分
- 任给 A 的一个划分π, 如下定义 A 上的关系 R:

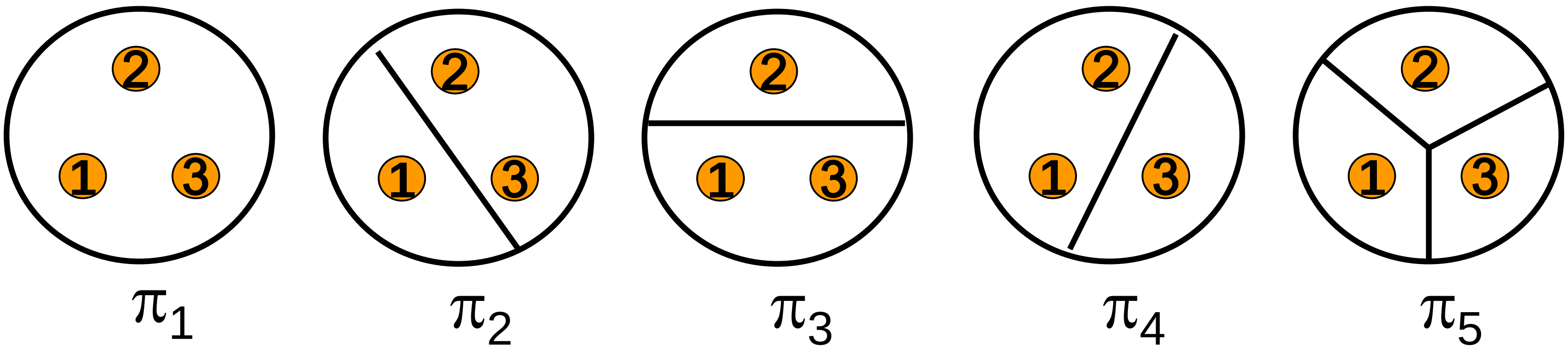
  $R = \{<x,y> \mid x,y \in A \wedge x$ 与 y 在π的同一划分块中$\}$

  则 R 为 A上的等价关系, 且该等价关系确定的商集就是π.

例2 给出$A=\{1,2,3\}$上所有的等价关系

求解思路：先做出A的所有划分, 然后根据划分写出对应的等价关系.

等价关系与划分之间的对应



π_1对应于全域关系 E_A，π_5 对应于恒等关系 I_A

π_2,π_3和π_3分别对应等价关系 R_2, R_3 和 R_4.

$R_2=\{<2,3>,<3,2>\}\cup I_A$，$R_3=\{<1,3>,<3,1>\}\cup I_A$

$R_4=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$

实例

例3 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，在 $A\times A$上定义二元关系R：

$$<<x,y>,<u,v>>\in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求 R 导出的划分.

解 $A\times A=\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>, <2,3>,<2,4>,<3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <4,1>, <4,2>, <4,3>, <4,4>\}$

实例（续）

根据 $\langle x,y\rangle$ 的 $x+y=2,3,4,5,6,7,8$ 将$A\times A$划分成7个等价类:

$$
\begin{aligned}
(A\times A)/R=\{ & \{\langle 1,1\rangle\}, \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}, \\
& \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle\}, \\
& \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}, \\
& \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle\}, \\
& \{\langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle\}, \{\langle 4,4\rangle\} \}
\end{aligned}
$$

偏序关系

定义 非空集合*A*上的自反、反对称和传递的关系，称为A上的偏序关系，记作≼. 设≼为偏序关系, 如果$<x, y>\in\preccurlyeq$, 则记作 $x\preccurlyeq y$, 读作 *x*“小于或等于” *y*.

实例

集合*A*上的恒等关系 I_A 是*A*上的偏序关系.

小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

相关概念

x与 y 可比：设R为非空集合A上的偏序关系,

$x,y \in A$, x与y可比 $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$.

结论：任取两个元素x和y, 可能有下述情况：

$x \prec y$ (或$y \prec x$), $x = y$, x与y不是可比的.

全序关系：

R为非空集合A上的偏序, $\forall x,y \in A$, x与 y 都是可比的，则称 R 为全序（或 线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

相关概念（续）

覆盖：设R为非空集合A上的偏序关系， x, $y \in A$, 如果 $x \prec y$且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$, 则称 y 覆盖x.

实例：{ 1, 2, 4, 6 }集合上的整除关系,

2 覆盖 1,

4 和 6 覆盖 2.

4 不覆盖 1.

偏序集与哈斯图

定义　集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做偏序集，记作 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$.

实例：整数集和小于等于关系构成偏序集$\langle Z,\leq\rangle$，幂集$P(A)$和包含关系构成偏序集$\langle P(A),R_{\subseteq}\rangle$.

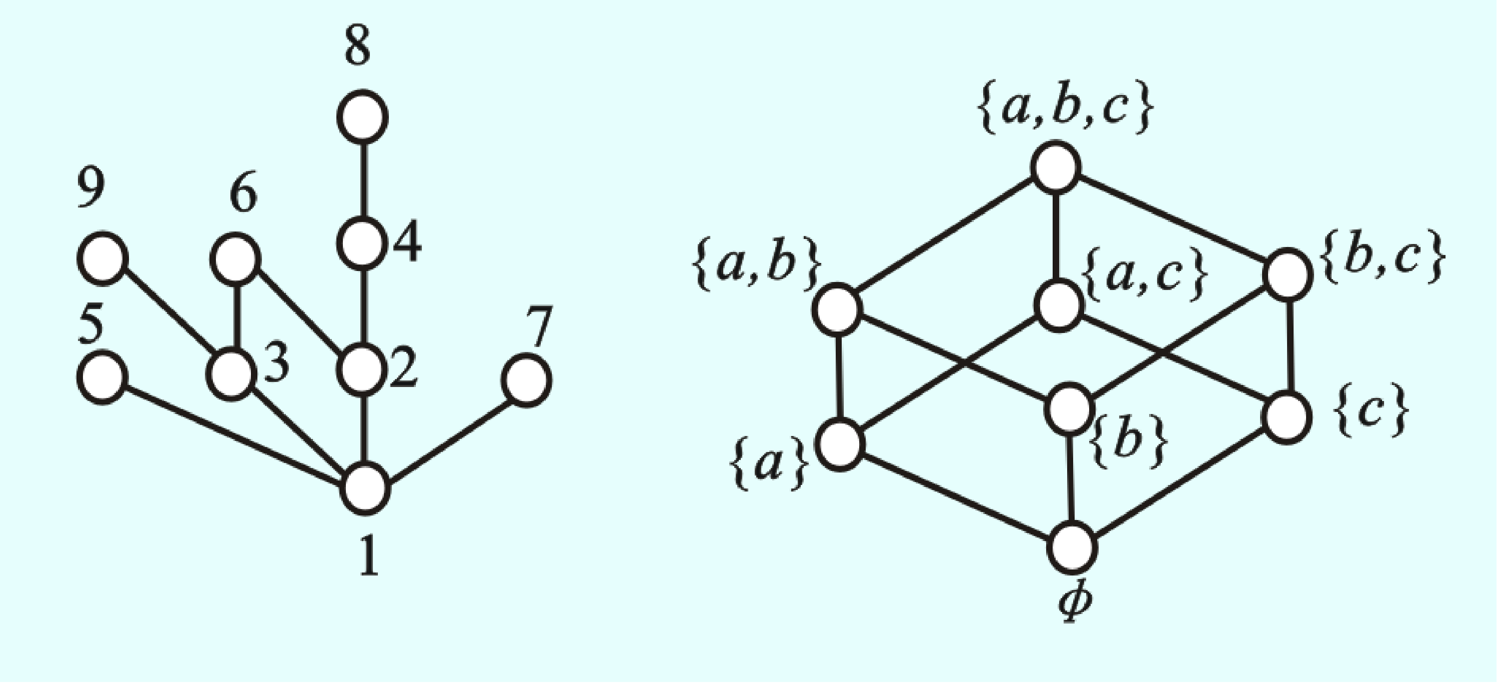
哈斯图：利用偏序自反、反对称、传递性简化的关系图

特点：每个结点没有环，两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前，具有覆盖关系的两个结点之间连边

哈斯图实例

例4　$<\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, R_{整除}>$

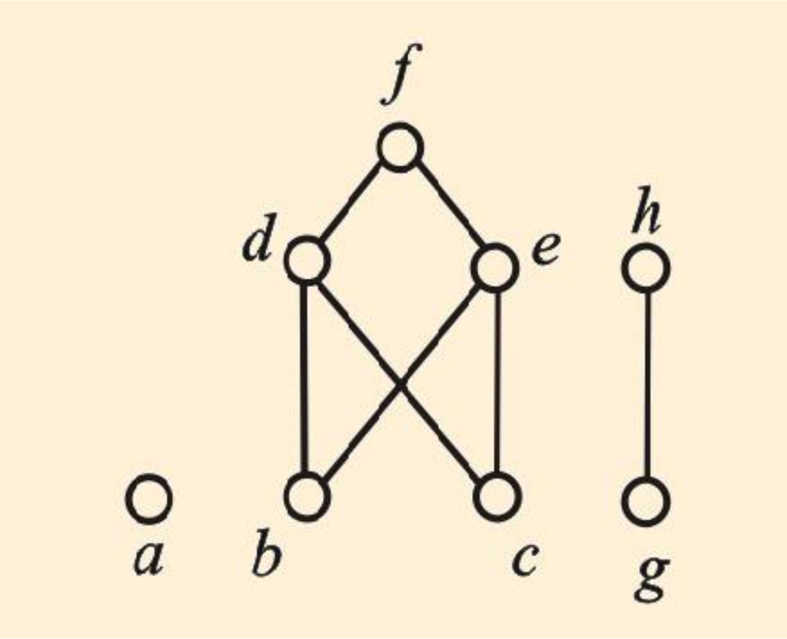
$<P(\{a, b, c\}), R_{\subseteq}>$



哈斯图实例（续）

例5

已知偏序集$<A,R>$的哈斯图如右图所示，试求出集合A和关系R的表达式.



$A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$

偏序集的特定元素

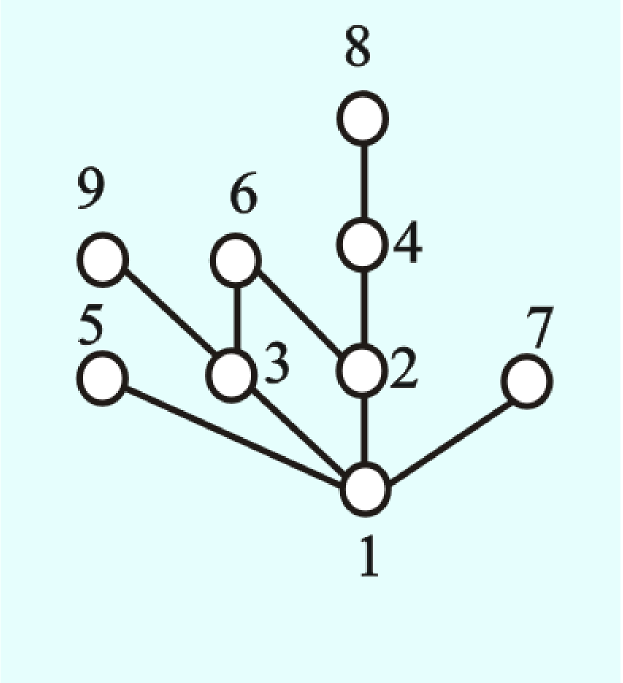
定义　设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$.

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的最小元

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的最大元.

(3) 若$\neg\exists x\,(x\in B\wedge x\prec y)$ 成立, 则称 y 为B的极小元

(4) 若$\neg\exists x\,(x\in B\wedge y\prec x)$ 成立, 则称 y 为B的极大元.



特殊元素的性质

- 对于有穷集，极小元和极大元必存在，可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集的特定元素(续)

定义　设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$.

(1) 若$\forall x(x \in B \to x \preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为B的上界.

(2) 若$\forall x(x \in B \to y \preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为B的下界.

(3) 令$C = \{y \mid y$为B的上界$\}$, 则称C的<u>最小元</u>为B的最小上界 或 上确界.

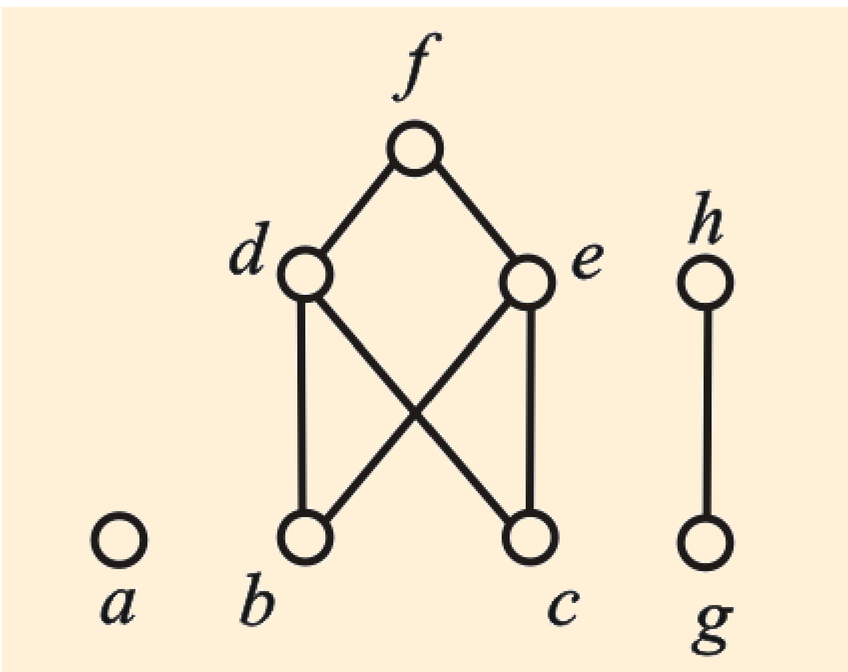
(4) 令$D = \{y \mid y$为B的下界$\}$, 则称D的<u>最大元</u>为B的最大下界 或 下确界.

特殊元素的性质

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在，则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

实例

例6 设偏序集<*A*,≼>如下图所示，求 *A* 的极小元、最小元、极大元、最大元. 设 $B=\{b,c,d\}$, 求 *B* 的下界、上界、下确界、上确界.



极小元：*a*, *b*, *c*, *g*;

极大元：*a*, *f*, *h*;

没有最小元与最大元.

*B*的下界和最大下界都不存在, 上界有*d* 和 *f*, 最小上界为 *d*.

4.6 函数的定义与性质

- 函数的定义
  - 函数定义
  - 从*A*到*B*的函数
  - 函数的像
- 函数的性质
  - 函数的单射、满射、双射性
  - 构造双射函数
- 应用实例：问题描述

函数定义

定义 设 F 为二元关系, 若 $\forall x \in \mathrm{dom}F$ 都存在唯一的$y \in \mathrm{ran}F$ 使 xFy 成立, 则称 F 为函数. 对于函数F, 如果有 xFy, 则记作 $y=F(x)$, 并称 y 为 F 在 x 的值.

例1 $F_1=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle,\langle x_3,y_2\rangle\}$

$F_2=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_1,y_2\rangle\}$

F_1是函数, F_2不是函数

函数相等

定义 设F, G为函数, 则

$$F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \land G \subseteq F$$

如果两个函数 F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$

(2) $\forall x \in \mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$ 都有 $F(x) = G(x)$

实例 函数

$$F(x)=(x^2-1)/(x+1),\ G(x)=x-1$$

不相等, 因为 $\mathrm{dom}F \subset \mathrm{dom}G$.

从 A 到 B 的函数

定义　设A, B为集合, 如果

f 为函数

$\mathrm{dom}f = A$

$\mathrm{ran}f \subseteq B$,

则称 f 为从A到B的函数, 记作 $f: A \to B$.

实例

$f: N \to N$, $f(x)=2x$ 是从 N 到 N 的函数

$g: N \to N$, $g(x)=2$也是从 N 到 N 的函数

B上A

定义　所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A，读作“B上A”，符号化表示为

$$B^A=\{\, f \mid f: A\to B \,\}$$

计数：

$|A|=m,\ |B|=n$，且$m, n>0$，$|B^A|=n^m$.

$A=\varnothing$，则 $B^A=B^{\varnothing}=\{\varnothing\}$.

$A\neq\varnothing$且$B=\varnothing$，则 $B^A=\varnothing^A=\varnothing$.

实例

例2 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 求B^A.

解 $B^A = \{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$, $f_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_2=\{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$, $f_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$

$f_4=\{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$, $f_5=\{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_6=\{<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$, $f_7=\{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$

函数的像

定义　设函数 f：$A\to B$, $A_1\subseteq A$.

A_1 在 f 下的像：$f(A_1) = \{ f(x) \mid x\in A_1 \}$

函数的像 $f(A)$

注意：函数值 $f(x)\in B$, 而像 $f(A_1)\subseteq B$.

例3　设 f：$N\to N$, 且 $f(x)=\begin{cases} x/2 & \text{若}x\text{为偶数} \\ x+1 & \text{若}x\text{为奇数} \end{cases}$

令$A=\{0,1\}$, 那么有

$f(A) = f(\{0,1\}) = \{ f(0), f(1) \} = \{0, 2\}$

函数的性质

定义 设 f：$A \to B$,

（1）若 $\mathrm{ran} f = B$, 则称 f：$A \to B$ 是满射的.

（2）若 $\forall y \in \mathrm{ran} f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$, 则称 f：$A \to B$ 是单射的.

（3）若 f：$A \to B$ 既是满射又是单射的, 则称 f：$A \to B$ 是双射的

f 满射意味着：$\forall y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$.

f 单射意味着：$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

常函数、恒等函数、单调函数

1. 设f：$A \to B$, 若存在 $c \in B$ 使得 $\forall x \in A$ 都有 $f(x)=c$, 则称 f：$A \to B$是常函数.
2. 称 A 上的恒等关系 I_A为 A 上的恒等函数, 对所有的 $x \in A$ 都有 $I_A(x)=x$.
3. 设 f：$R \to R$，如果对任意的 $x_1, x_2 \in R$，$x_1<x_2$, 就有 $f(x_1) \le f(x_2)$, 则称 f 为单调递增的；如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$, $x_1< x_2$, 就有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 f 为 严格单调递增 的.

类似可以定义单调递减 和严格单调递减 的函数.

实例

例4

判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) f: $R \to R$, $f(x) = -x^2+2x-1$

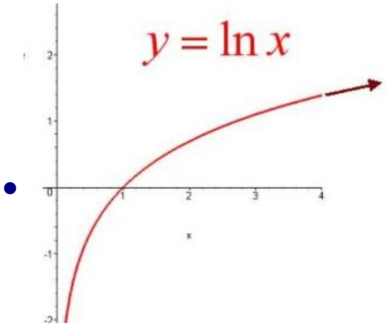
(2) f: $Z^+ \to R$, $f(x) = \ln x$, Z^+为正整数集

(3) f: $R \to Z$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(4) f: $R \to R$, $f(x) = 2x+1$

(5) f: $R^+ \to R^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中R^+为正实数集.

实例（续）



解 (1) f：$R \to R$, $f(x)=-x^2+2x-1$

在x=1取得极大值0. 既不单射也不满射.

(2) f：$Z^+ \to R$, $f(x)=\ln x$

单调上升, 是单射. 但不满射, ran$f$={ln1, ln2, …}.

(3) f：$R \to Z$, $f(x)=\lfloor x \rfloor$

满射, 但不单射, 例如 $f(1.5)=f(1.2)=1$.

(4) f：$R \to R$, $f(x)=2x+1$

满射、单射、双射, 因为它是单调的并且ran$f$=R.

(5) f：$R^+ \to R^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$

有极小值$f(1)=2$. 该函数既不单射也不满射.

构造从A到B的双射函数

有穷集之间的构造

例5 $A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

解 $A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

$B=\{ f_0, f_1, \ldots , f_7 \}$, 其中

$f_0=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_1=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_2=\{<1,0>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_3=\{<1,0>,<2,1>,<3,1>\}$,

$f_4=\{<1,1>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_5=\{<1,1>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_6=\{<1,1>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_7=\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$.

令 f: $A\rightarrow B$,

$f(\varnothing)=f_0$, $f(\{1\})=f_1$, $f(\{2\})=f_2$, $f(\{3\})=f_3$,
$f(\{1,2\})=f_4$, $f(\{1,3\})=f_5$, $f(\{2,3\})=f_6$, $f(\{1,2,3\})=f_7$

构造从*A*到*B*的双射函数（续）

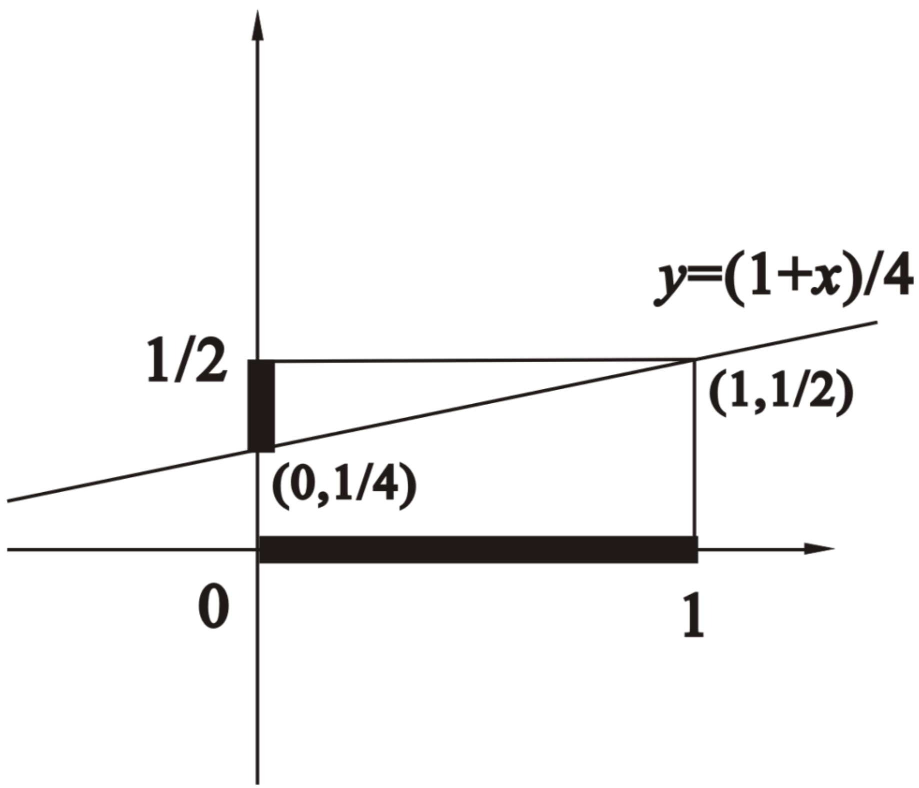
实数区间之间构造双射

构造方法：直线方程

例6　$A=[0,1]$

$B=[1/4,1/2]$

构造双射 $f:A\rightarrow B$



解

令 f：$[0,1]\rightarrow[1/4,1/2]$

$f(x)=(x+1)/4$

构造从*A*到*B*的双射函数（续）

A 与自然数集合之间构造双射

方法：将A中元素排成有序图形，然后从第一个元素开始按照次序与自然数对应

例7　A=Z, *B*=*N*，构造双射 *f*：*A*→*B*

将Z中元素以下列顺序排列并与N中元素对应：

$$\begin{array}{llllllll} \mathrm{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathrm{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \end{array}$$

则这种对应所表示的函数是：

$$f: \mathrm{Z} \rightarrow N, f(x) = \begin{cases} 2x & \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

集合的特征函数

4. 设 A 为集合, $\forall A' \subseteq A$, A' 的 特征函数 $\chi_{A'}$: $A \to \{0,1\}$ 定义为

$$\chi_{A'}(a) = \begin{cases} 1, & a \in A' \\ 0, & a \in A - A' \end{cases}$$

实例 集合: X ={ A, B, C, D, E, F, G, H },

子集: T = { A, C, F, G, H }

T 的特征函数 χ_T:

x	A	B	C	D	E	F	G	H
$\chi_T(x)$	1	0	1	0	0	1	1	1

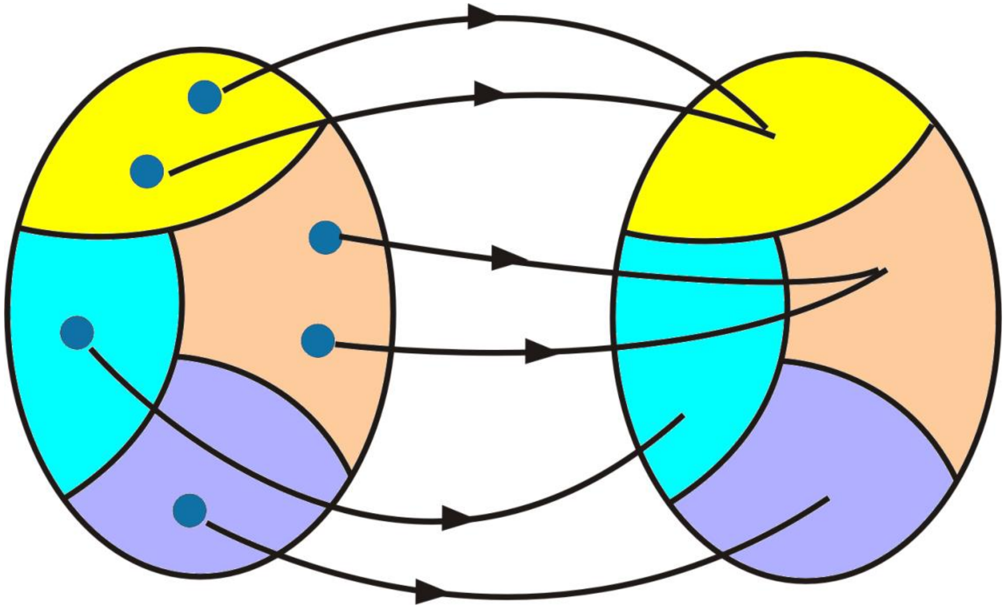
自然映射

5. 设 R 是 A 上的等价关系, 令

$$g: A \to A/R$$

$$g(a) = [a], \forall a \in A$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射.



实例

例8 (1) A的每一个子集A'都对应于一个特征函数, 不同的子集对应于不同的特征函数. 例如 $A=\{a, b, c\}$, 则有

$$\chi_{\varnothing} = \{ \langle a,0\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,0\rangle \},$$

$$\chi_{\{a,b\}} = \{ \langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,0\rangle\}$$

(2) 给定集合 A， A 上不同的等价关系确定不同的自然映射, 其中恒等关系确定的自然映射是双射, 其他的自然映射一般来说是满射. 例如

$$A=\{1, 2, 3\},\ R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}\cup I_A$$

$$g(1) = g(2) = \{1,2\},\ g(3) = \{3\}$$

4.7 函数的复合与反函数

- 函数的复合
  - 函数复合的定理
  - 函数复合的性质
- 反函数
  - 反函数存在的条件
  - 反函数的性质

函数复合的定理

定理 设F, G是函数, 则$F\circ G$也是函数, 且满足

(1) $\mathrm{dom}(F\circ G)=\{\, x \mid x\in \mathrm{dom}F \wedge F(x)\in \mathrm{dom}G\}$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$ 有 $F\circ G(x) = G(F(x))$

推论1 设F, G, H为函数, 则 $(F\circ G)\circ H$ 和 $F\circ(G\circ H)$ 都是函数, 且 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

推论2 设 f: $A\rightarrow B$, g: $B\rightarrow C$, 则 $f\circ g$: $A\rightarrow C$, 且 $\forall x\in A$ 都有 $f\circ g(x) = g(f(x))$.

函数复合运算的性质

定理 设 f：$A \to B$, g：$B \to C$.

(1) 如果 f：$A \to B$, g：$B \to C$ 都是满射的, 则 $f \circ g$：$A \to C$也是满射的.

(2) 如果 f：$A \to B$, g：$B \to C$ 都是单射的, 则 $f \circ g$：$A \to C$也是单射的.

(3) 如果 f：$A \to B$, g：$B \to C$ 都是双射的, 则 $f \circ g$：$A \to C$也是双射的.

证 (1) $\forall c \in C$, 由 g：$B \to C$ 的满射性, $\exists b \in B$ 使得 $g(b)=c$. 对这个b, 由 f：$A \to B$ 的满射性，$\exists a \in A$ 使得 $f(a)=b$. 由合成定理有 $f \circ g(a)=g(f(a))=g(b)=c$ 从而证明了 $f \circ g$：$A \to C$是满射的.

函数复合运算的性质

(2) 假设存在 $x_1, x_2 \in A$使得 $f\circ g(x_1) = f\circ g(x_2)$

由合成定理有 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$.

因为 g：$B\to C$是单射的, 故 $f(x_1)=f(x_2)$. 又由于 f：$A\to B$也是单射的, 所以 $x_1=x_2$. 从而证明 $f\circ g$：$A\to C$是单射的.

(3) 由 (1) 和 (2) 得证.

定理 设 f: $A\to B$，则

$$f = f\circ I_B = I_A\circ f$$

反函数存在的条件

任给函数 F, 它的逆F^{-1}不一定是函数, 是二元关系.

实例：$F=\{\langle a,b\rangle,\langle c,b\rangle\}$， $F^{-1}=\{\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$

任给单射函数 f：$A \to B$, 则 f^{-1}是函数, 且是从 $\mathrm{ran}f$ 到 A的双射函数, 但不一定是从 B 到 A 的双射函数.

实例：$f: N \to N$, $f(x) = 2x$,

$f^{-1}: \mathrm{ran}f \to N$, $f^{-1}(x) = x/2$

反函数

定理 设 $f: A \to B$是双射的, 则$f^{-1}: B \to A$也是双射的.

证 因为 f 是函数, 所以 f^{-1} 是关系, 且

$$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{ran} f = B\,, \qquad \mathrm{ran}\, f^{-1} = \mathrm{dom} f = A,$$

对于任意的 $y \in B = \mathrm{dom}\, f^{-1}$, 假设有$x_1, x_2 \in A$使得

$$<y,x_1> \in f^{-1} \wedge <y,x_2> \in f^{-1}$$

成立, 则由逆的定义有

$$<x_1,y> \in f \wedge <x_2,y> \in f$$

根据 f 的单射性可得 $x_1 = x_2$, 从而证明了f^{-1}是函数，且是满射的. 下面证明 f^{-1} 的单射性.

若存在 $y_1, y_2 \in B$ 使得 $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$, 从而有

$$<y_1,x> \in f^{-1} \wedge <y_2,x> \in f^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y_1> \in f \wedge <x,y_2> \in f \Rightarrow y_1 = y_2$$

反函数的定义及性质

对于双射函数f：$A\to B$, 称 f^{-1}：$B\to A$是它的反函数.

反函数的性质

定理　设 f：$A\to B$是双射的, 则

$$f^{-1}\circ f = I_B,\quad f\circ f^{-1} = I_A$$

对于双射函数 f：$A\to A$, 有

$$f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = I_A$$

函数复合与反函数的计算

例 设 f: $R \to R$, g: $R \to R$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x \ge 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases} \qquad g(x)=x+2$$

求 $f \circ g$, $g \circ f$. 如果 f 和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

解 $f \circ g: R \to R$ $\qquad g \circ f: R \to R$

$$f \circ g(x)=\begin{cases} x^2+2 & x \ge 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases} \qquad g \circ f(x)=\begin{cases} (x+2)^2 & x \ge 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

f: $R \to R$不是双射的, 不存在反函数. g: $R \to R$是双射的, 它的反函数是 g^{-1}: $R \to R$, $g^{-1}(x) = x-2$

问题描述——多机调度

问题：

有2台机器c_1, c_2;

6项任务$t_1, t_2, \ldots, t_6$. 每项任务的加工时间分别为：

$$l(t_1)=l(t_3)=l(t_5)=l(t_6)=1,\ l(t_2)=l(t_4)=2$$

任务之间的顺序约束是：

任务t_3只有在t_6和t_5完成之后才能开始加工；

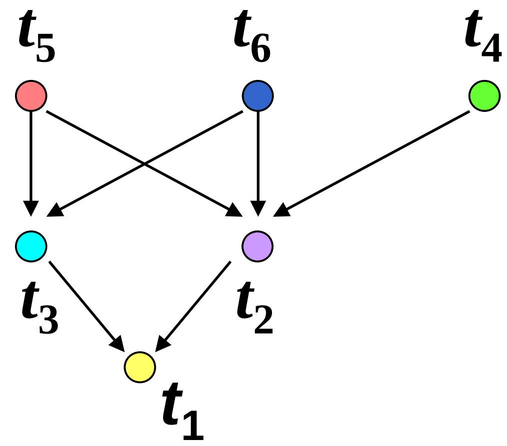
任务t_2只有在t_6, t_5和t_4都完成后才能开始加工；

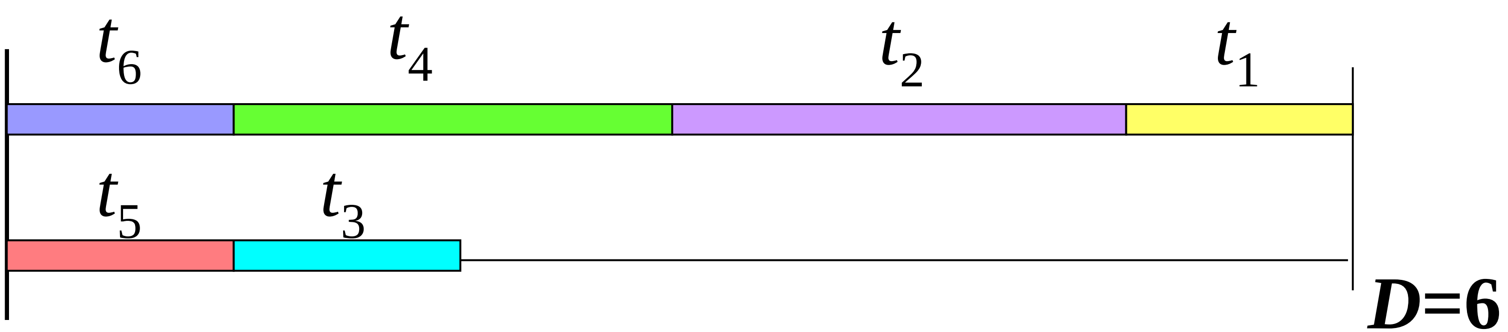
任务t_1只有在t_3和t_2完成之后才能开始加工.

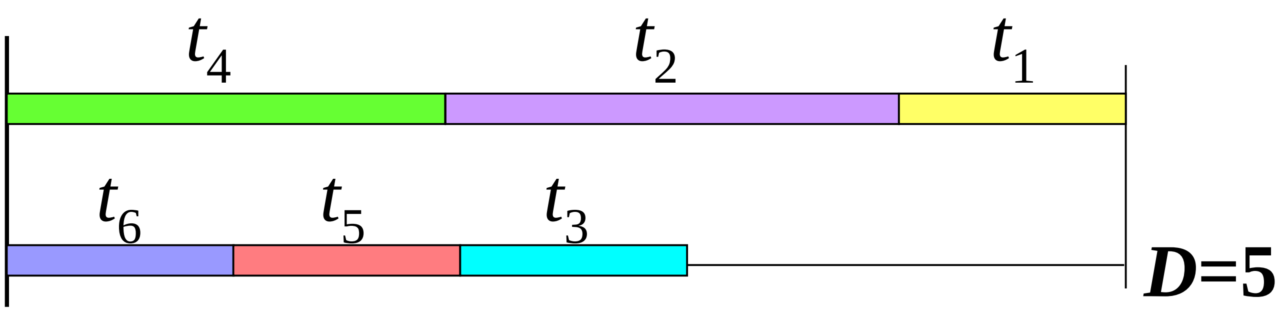
调度：任务安排在机器上加工的方案

截止时间：开始时刻0，最后停止加工机器的停机时刻

两个调度方案







问题描述

- 集合

  任务集 $T=\{t_1, t_2, \dots, t_n\}, n\in Z^+$

  机器集 $M=\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$， $m\in Z^+$

  时间集 N

- 函数和关系

  加工时间——函数 $l:T\to Z^+$.

  顺序约束 R ——T上的偏序关系，定义为

  $R=\{<t_i, t_j>|\ t_i, t_j\in T, i=j$ 或 t_i完成后t_j才可以开始加工$\}$

问题描述（续）

- 可行调度
  - 分配到机器：

T 的 划分 $\pi=\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$，划分块$T_j$是$T$ 的非空子集，由安排在机器c_j上加工的所有任务组成.

  - 每个机器上的任务开始时间

$\forall T_j \in \pi$，存在调度函数 $\sigma_j: T_j \to N$(机器c_j上某任务被调度的时刻)，满足以下条件：

(1) 任意时刻 i，每台机器上正在加工至多1个任务

$$\forall i,\ 0 \le i < D,$$

$$|\{ t_k \mid t_k \in T_j,\ \sigma_j(t_k) \le i < \sigma_j(t_k) + l(t_k) \}| \le 1,\ j=1, 2, \ldots, m$$

(2) 任务的安排满足偏序约束

$$\forall t_i \in T_i,\ t_j \in T_j,\ \langle t_i, t_j \rangle \in R \Leftrightarrow \sigma_i(t_i) + l(t_i) \le \sigma_j(t_j) \quad i, j=1, 2, \ldots, m$$

问题描述（续）

机器 j 的停止时间

$$D_j=\max\{\sigma_j(t_k) \mid t_k \in T_j\}+l(t_k)$$

所有任务的截止时间

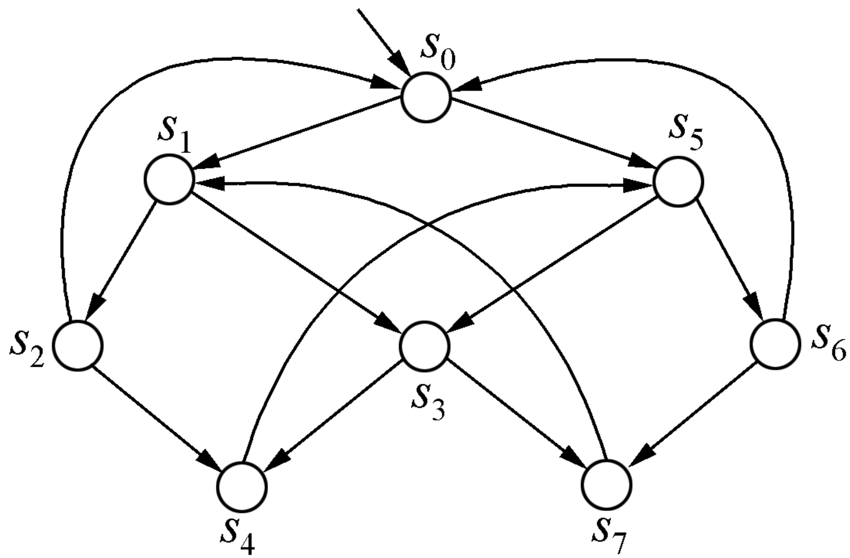
$$D=\max\{D_j \mid j=1,2,\ldots,m\}.$$

我们的问题就是确定使得D达到最小的可行调度.

资源共享协议描述

两个进程p_1,p_2

进程状态：	系统状态：
闲置状态 i	$<x_1,x_2>$
请求状态 r	x_1,x_2分别为进程
访问状态 w	p_1和p_2的状态



$s_0=<i_1,i_2>$， $s_1=<r_1,i_2>$，
$s_2=<w_1,i_2>$， $s_3=<r_1,r_2>$，
$s_4=<w_1,r_2>$， $s_5=<i_1,r_2>$，
$s_6=<i_1,w_2>$， $s_7=<r_1,w_2>$，

$$S=\{i_1,r_1,w_1\}\times\{i_2,r_2,w_2\}-\{<w_1,w_2>\}$$
$$=\{s_0,s_1,\ldots,s_7\}$$

$<x_1, x_2>$ R $<x_3, x_4>$：

$<x_1, x_2>$ 可一步转换到 $<x_3, x_4>$

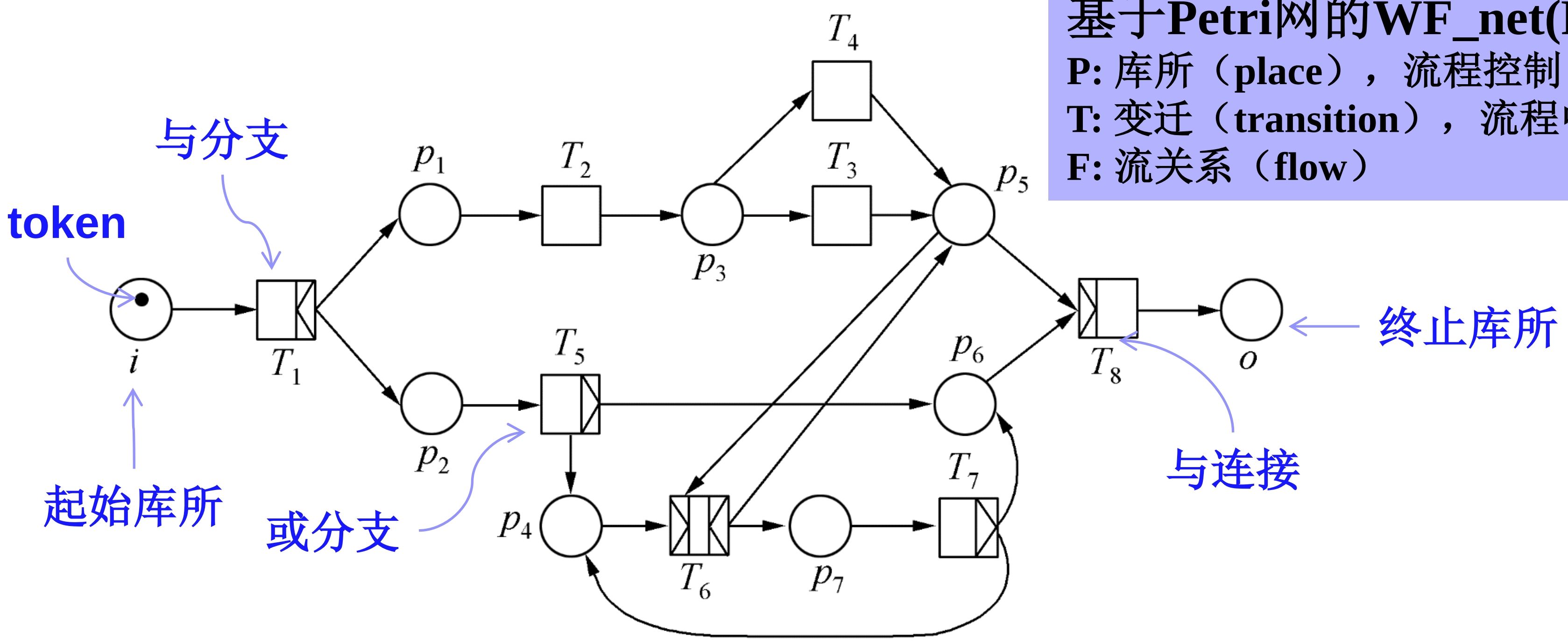
则R的关系图如上，构成了系统的状态空间

安全性：$\neg(w_1 \wedge w_2)$，任何时刻至多一个进程访问资源.

活性：$r_1 \rightarrow \Diamond w_1$，任何进程对资源的需求总会满足

投诉处理流程描述

工作流系统的网模型：
基于Petri网的WF_net(P,T,F)
P: 库所（place），流程控制
T: 变迁（transition），流程中的活动
F: 流关系（flow）



T_1：登记； T_2寄出调查表； T_3：调查表处理；
T_4：过期处理； T_5：投诉评估； T_6处理投诉；
T_7检查处理结果； T_8：归档保存.

形式化描述

WF_net是三元组(P,T,F)，其中P是库所集合，T是变迁集合，F 称为流关系．满足以下条件：

(1) $P\cap T=\varnothing$； //库所和变迁是两类不同的元素

(2) $P\cup T\neq\varnothing$；//网中至少含有一个元素

(3) $F\subseteq P\times T\cup T\times P$；//流关系反映的是资源（token）的流动

(4) dom$F\cup$ran$F=P\cup T$，其中 //网中没有孤立结点

dom$F=\{x\mid\exists y(<x,y>\in F)\}$，ran$F=\{y\mid\exists x(<x,y>\in F)\}$；

工作流网特有

(5) 存在起始库所$i\in P$，$^{\bullet}i=\varnothing$，$^{\bullet}i=\{j\mid<j,i>\in F\}$称为 i 的前集；

(6) 存在终止库所$o\in P$，$o^{\bullet}=\varnothing$，$o^{\bullet}=\{j\mid<o,j>\in F\}$称为$o$的后集；

(7) 每个结点$x\in P\cup T$，都处在从 i 到 o 的一条路径上.

作业

- 1. A={2,3,5,10,12,13,15}
  - 模3相等关系和整除关系，谁是等价关系，谁是偏序关系（说明为什么）？
  - 画出关于整除关系R的哈斯图，指出极大元、极小元、最大元、最小元、上确界、下确界
  - 求A上关于模3相等关系的商集

作业

2. 求P110例4.33中①∘③（右复合），标示清楚是A→B（比如R→Z）的函数；复合函数的性质（单射、满射，为什么），复合函数如果有逆函数则求出，没有则说明原因；求集合{1,3}在上面所求函数下的像
3. 集合A={1,2,3,4,5}，集合B={2,4}，求B的特征函数，$B^{\{0,1\}}$

选做题：2.题同要求：求P110例4.33中②∘④、③∘⑤，P111例4.35中(2)∘(4)，