评分标准

- P26例1.26 共50分,其中每小题5分,等值演算法2.5分,主析取范式/合取范式2.5分
- P34习题1.15共50分其中共分6种情况，每种情况8分，结论2分

情况汇总

- 8份作业没有给予成绩（下次提交时补全未完成部分）
- 个别同学不理解主析取范式与主合取范式的概念

Sun□Mon□Tue□Wed□Thu□Fri□Sat□

Date:

主合取范式

(3) $\neg(p \to q) \land q$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \lor q) \land q$

$\Leftrightarrow p \land \neg q \land q$

$\Leftrightarrow p \land 0$

-2.5'

矛

[illegible]的类型

(1) $(p\wedge q)\rightarrow(p\vee q)$

解：$(p\wedge q)\rightarrow(p\vee q)$

$\Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee(p\vee q)$ 蕴含等值式

$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee(p\vee q)$ 德·摩根律

$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee p\vee q$ 结合律

$\Leftrightarrow \neg p\vee p\vee\neg q\vee q$ 交换律 (x)

$\Leftrightarrow (\neg p\vee p)\vee(\neg q\vee q)$ 结合律

$\Leftrightarrow 1\vee 1$ 排中律

$\Leftrightarrow 1$ 等幂律

依据以上等值演算可得 $(p\wedge q)\rightarrow(p\vee q)$ 为重言式

$\therefore (p\wedge q)\rightarrow(p\vee q)$ 的主合取范式为 1

…$\wedge(SB_2$对一半$)\wedge(SB_3$全错$)\Leftrightarrow 1$

现分情况讨论：

A_1：(甲全对)$\wedge$(乙对一半)$\wedge$(丙全错)

$$(\neg p\wedge\neg q)\wedge((\neg p\wedge\neg r)\vee(p\wedge r))\wedge(r\wedge\neg p)$$

分配律 $\Leftrightarrow((\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge r))\wedge(r\wedge\neg p)$

分配律 $\Leftrightarrow((\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge\neg r)\wedge(r\wedge\neg p))\vee((\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge r)\wedge(r\wedge\neg p))$

结合律 $\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg p\wedge\neg r\wedge r\wedge\neg p)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge p\wedge r\wedge r\wedge\neg p)$

交换律 $\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg p\wedge\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg p\wedge p\wedge\neg q\wedge r\wedge r)$

结合律 $\Leftrightarrow((\neg p\wedge\neg p\wedge\neg p)\wedge(\neg q)\wedge(r\wedge\neg r))\vee((\neg p\wedge\neg p\wedge p)\wedge(\neg q)\wedge(r\wedge r))$

等幂律 $\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge(r\wedge\neg r))\vee((\neg p\wedge p)\wedge\neg q\wedge r))$

矛盾律 $\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge 0)\vee(0\wedge\neg q\wedge r)$

零律 $\Leftrightarrow 0\vee 0$

等幂律 $\Leftrightarrow 0$

1.5 联结词全功能集

- 联结词全功能集
- 与非联结词, 或非联结词

联结词的全功能集

定义 设S是一个联结词集合，如果任何$n(n\geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是联结词全功能集.

说明：若S是联结词全功能集，则任何命题公式都可用S中的联结词表示.

设S_1, S_2是两个联结词集合，且$S_1\subseteq S_2$. 若S_1是全功能集，则S_2也是全功能集. 反之，若S_2不是全功能集，则S_1也不是全功能集.

联结词全功能集实例

定理 $\{\neg, \wedge, \vee\}$、$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \vee\}$、$\{\neg, \rightarrow\}$都是联结词全功能集.

证明

每一个真值函数都可以用一个主析取范式表示,故$\{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词全功能集.

$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$，故$\{\neg, \wedge\}$是全功能集.

$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$，故$\{\neg, \vee\}$是全功能集.

$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p) \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$，故$\{\neg, \rightarrow\}$也是全功能集.

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$，故$\{\neg, \rightarrow\}$也是全功能集.

复合联结词

与非式: $p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$

或非式: $p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$

↑和↓与¬, ∧,∨有下述关系:

$\neg p \Leftrightarrow \neg(p\wedge p) \Leftrightarrow p\uparrow p$

$p\wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p\wedge q) \Leftrightarrow \neg(p\uparrow q) \Leftrightarrow (p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q)$

$p\vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p\wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p)\uparrow(\neg q) \Leftrightarrow (p\uparrow p)\uparrow(q\uparrow q)$

复合联结词(续)

$\neg p \Leftrightarrow p \downarrow p$

$p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

$p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

定理 $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$是联结词全功能集.

可以证明: $\{\wedge, \vee\}$不是全功能集, 从而$\{\wedge\}$, $\{\vee\}$也不是全功能集.

例

将公式$p\wedge\neg q$化成只含下列各联结词集中的联结词的等值的公式.

(1) $\{\neg, \vee\}$；(2) $\{\neg, \rightarrow\}$；(3) $\{\uparrow\}$；(4) $\{\downarrow\}$.

解

(1) $p\wedge\neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)$.

(2) $p\wedge\neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q) \Leftrightarrow \neg(p\rightarrow q)$.

(3) $p\wedge\neg q \Leftrightarrow p\wedge(q\uparrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg(p\wedge(q\uparrow q)))$

$\Leftrightarrow \neg(p\uparrow(q\uparrow q)) \Leftrightarrow (p\uparrow(q\uparrow q))\uparrow(p\uparrow(q\uparrow q))$.

(4) $p\wedge\neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q) \Leftrightarrow (\neg p)\downarrow q \Leftrightarrow (p\downarrow p)\downarrow q$.

1.6 组合电路

- 组合电路
- 逻辑门

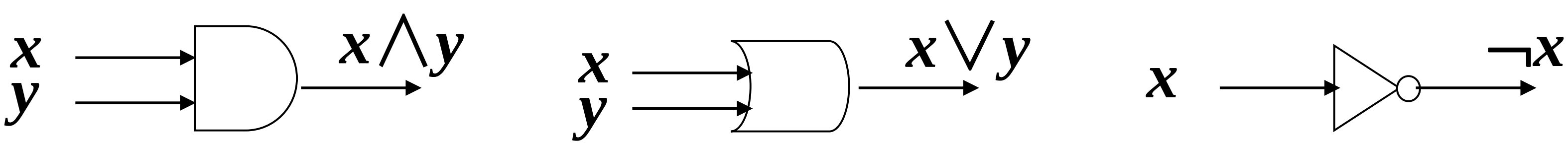
  与门，或门，非门，与非门，或非门
- 奎因–莫可拉斯基方法

组合电路

逻辑门：实现逻辑运算的电子元件.

与门，或门，非门.

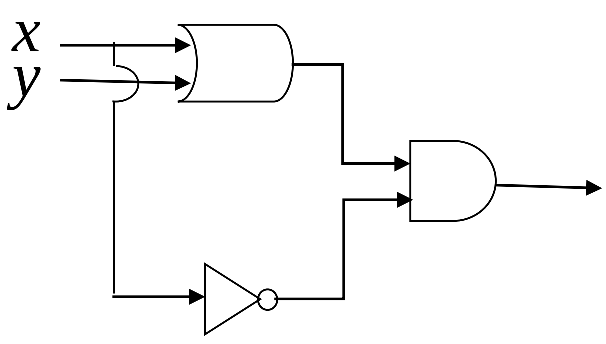
组合电路:实现命题公式的由电子元件组成的电路.



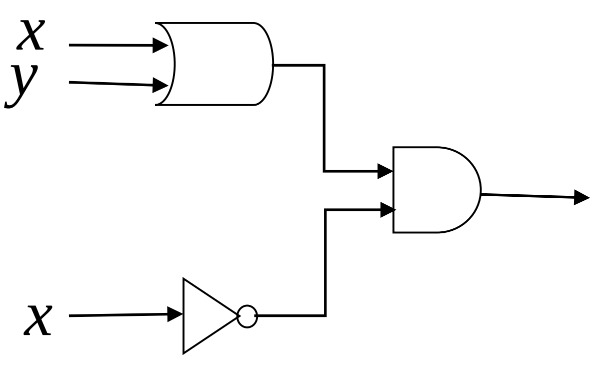
与门　　或门　　非门

组合电路的例子

$(x \lor y) \land \neg x$的组合电路



第一种画法



第二种画法

例

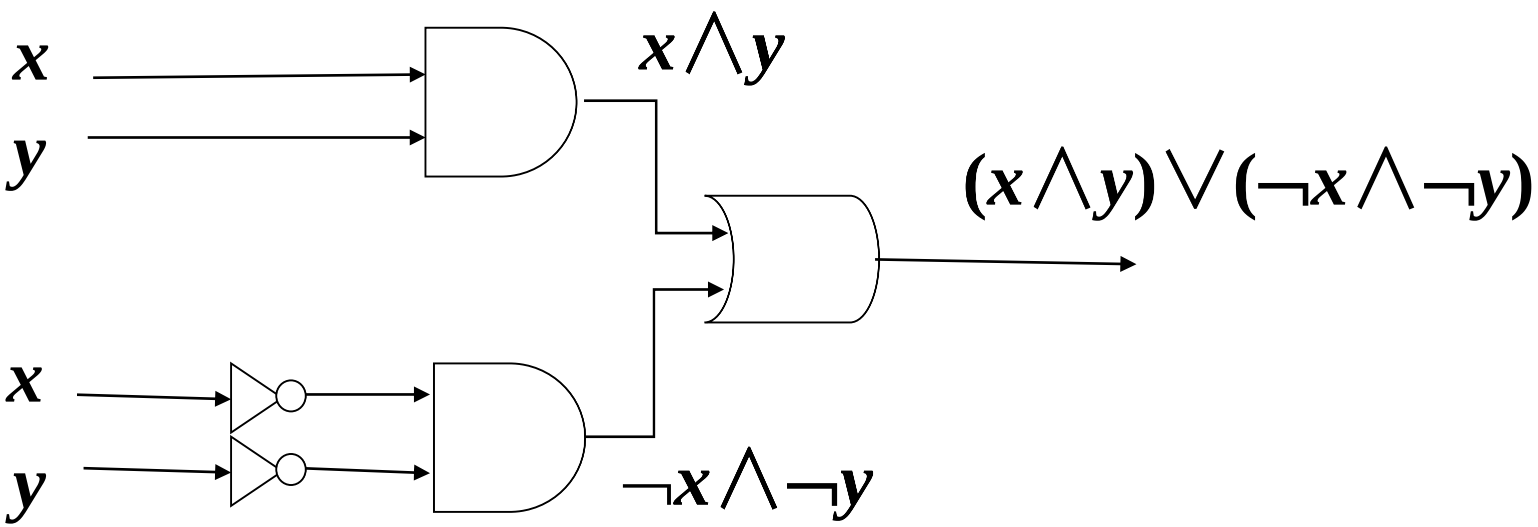
例 楼梯的灯由上下2个开关控制, 要求按动任何一个开关都能打开或关闭灯. 试设计一个这样的线路.

解 x,y:开关的状态, F:灯的状态, 打开为1, 关闭为0. 不妨设当2个开关都为0时灯是打开的.

x	y	$F(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$F=m_0\vee m_3=(\neg x\wedge\neg y)\vee(x\wedge y)$$

例(续)



设计组合电路

步骤: 1.构造输入输出表(问题的真值函数),

2. 写出主析取范式,

3. 化简.

最简展开式: 包含最少运算的公式

例　当且仅当 $x=y=z=1$ 或 $x=y=1$且 $z=0$ 时输出1.

$$F= m_6 \lor m_7 = (x \land y \land \neg z) \lor (x \land y \land z)$$

4个与门,1个或门和一个非门

$F \Leftrightarrow x \land y$　　一个与门

奎因-莫可拉斯基方法

1. 合并简单合取式生成所有可能出现在最简展开式中的项.
2. 确定最简展开式中的项.

1、合并方法：

- 列出主析取范式中所有极小项的角码的二进制表示
- 合并每一对可以合并的极小项：两个极小项可以合并当且仅当它们的角码的二进制表示恰好有一位不同

  如：　101与001合并为-01

  　　-01与-00合并为-0-
- 当不能再合并时，得到最简展开式中所有可能出现的项

例

求下述公式的最简展开式:

$$F=(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge\neg x_3\wedge x_4)\vee(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge x_4)$$
$$\vee(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3\wedge x_4)\vee(\neg x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge x_4)$$
$$\vee(x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4)\vee(x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge x_4)$$
$$\vee(x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4)$$

例(续)

解

编号	极小项	角码	标记
1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1110	*
2	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	1011	*
3	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	0111	*
4	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1010	*
5	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0101	*
6	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	0011	*
7	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0001	*

例(续)

第一批				第二批		
合并项	项	表示串	标记	合并项	项	表示串
(1,4)	$x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1–10		(3,5,6,7)	$\neg x_1 \wedge x_4$	0– –1
(2,4)	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$	101–				
(2,6)	$\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	–011				
(3,5)	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_4$	01–1	*			
(3,6)	$\neg x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$	0–11	*			
(5,7)	$\neg x_1 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0–01	*			
(6,7)	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_4$	00–1	*			

标记*表示该项已被合并

2、确定最简展开式中的项

两个原则：

- 称合并后的项覆盖合并成它的极小项，则最简展开式中的项必须覆盖原公式中所有的极小项
- 包含的运算符尽可能地少

例(续)

项	覆盖	运算符数
$x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	(1,4)	3
$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$	(2,4)	3
$\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	(2,6)	3
$\neg x_1 \wedge x_4$	(3,5,6,7)	2

选择(1,4), (2,4)和(3,5,6,7), 或者(1,4), (2,6)和(3,5,6,7).

最简展开式为

$$F \Leftrightarrow (x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_4)$$

或

$$F \Leftrightarrow (x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_4)$$