第十一次作业

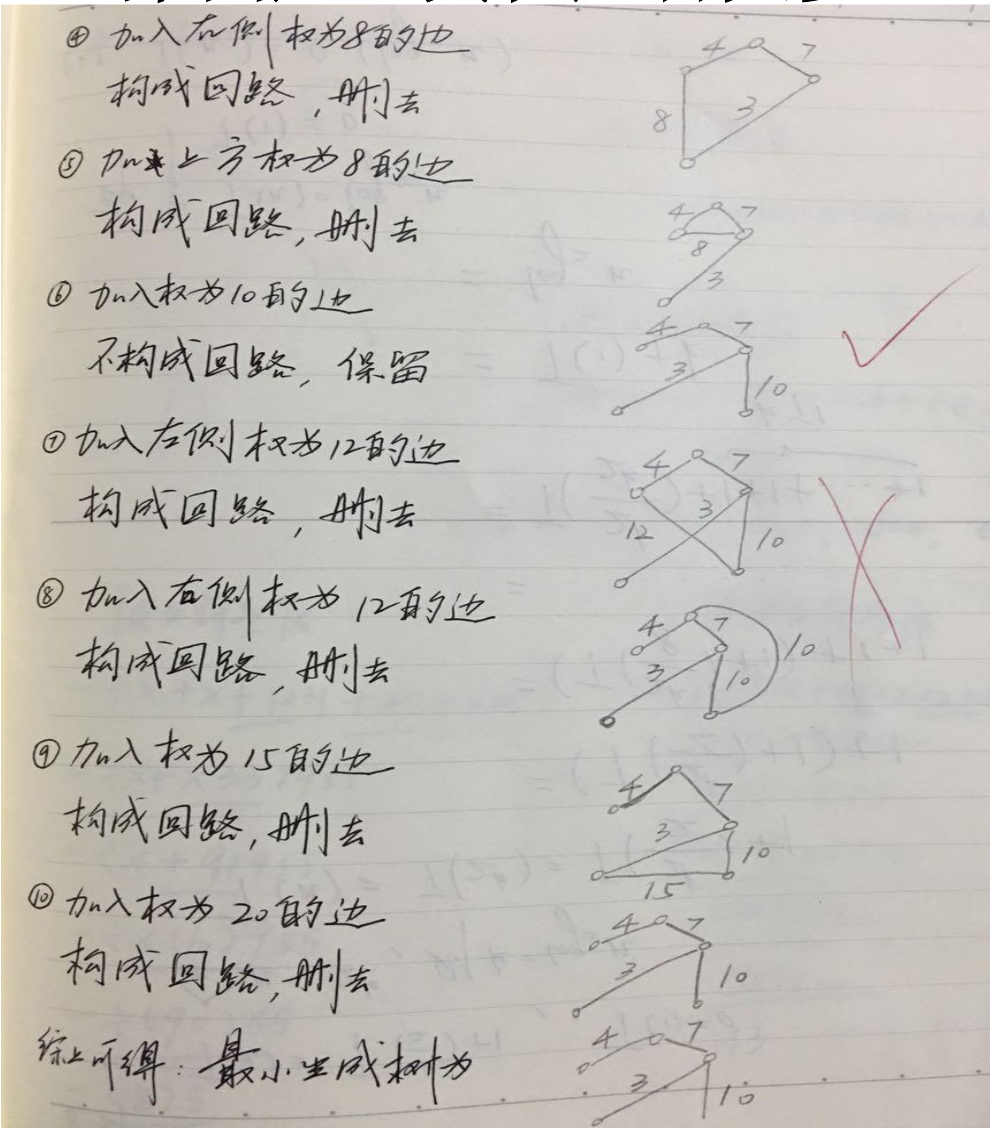
1. 评分标准

- 第一题20分，基本回路、割集每个2分，基本回路4分
- 第二题10分，
- 第三题20分，避圈法过程占10分
- 第四题30分，二叉树10分，波兰式，逆波兰式各5分，计算过程各5分
- 第五题20分，霍夫曼树10分，最佳二元前缀码5分，其余5分

2. 情况汇总

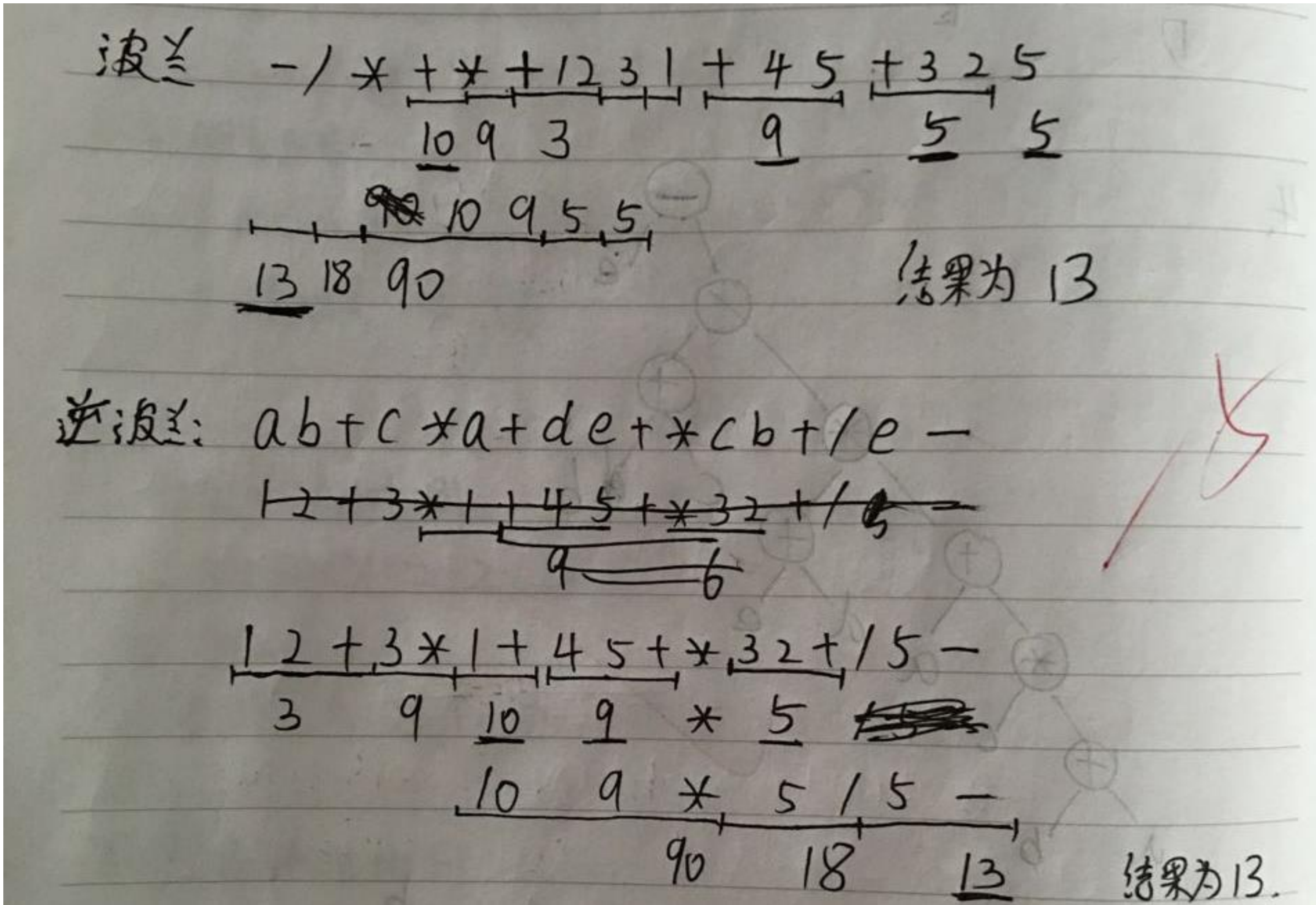
- 问题主要集中在第三题，第四题。其他题目大多数同学都没有问题。

① 第三题：**Kruskal**算法的终止条件是**k=n-1**

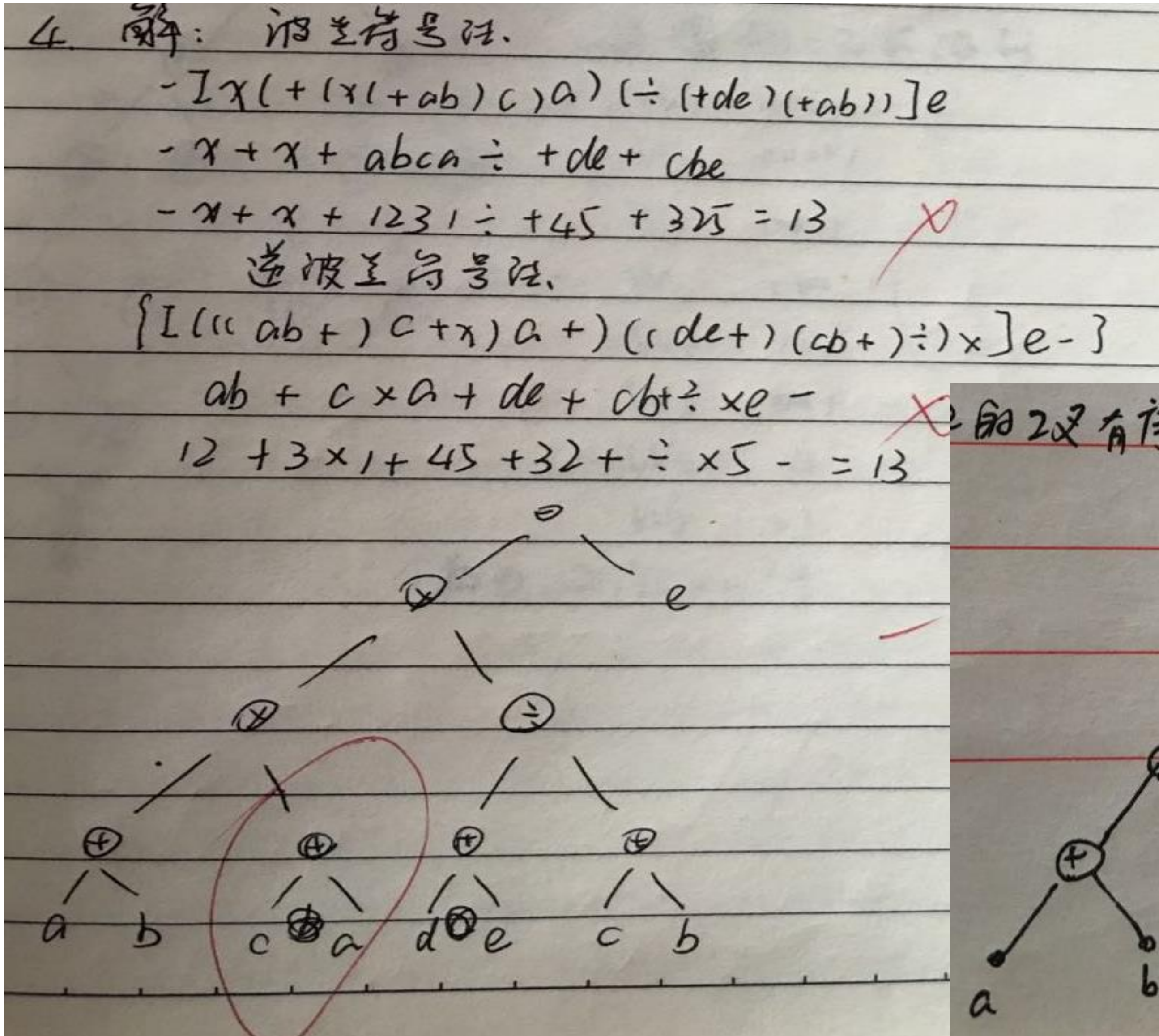


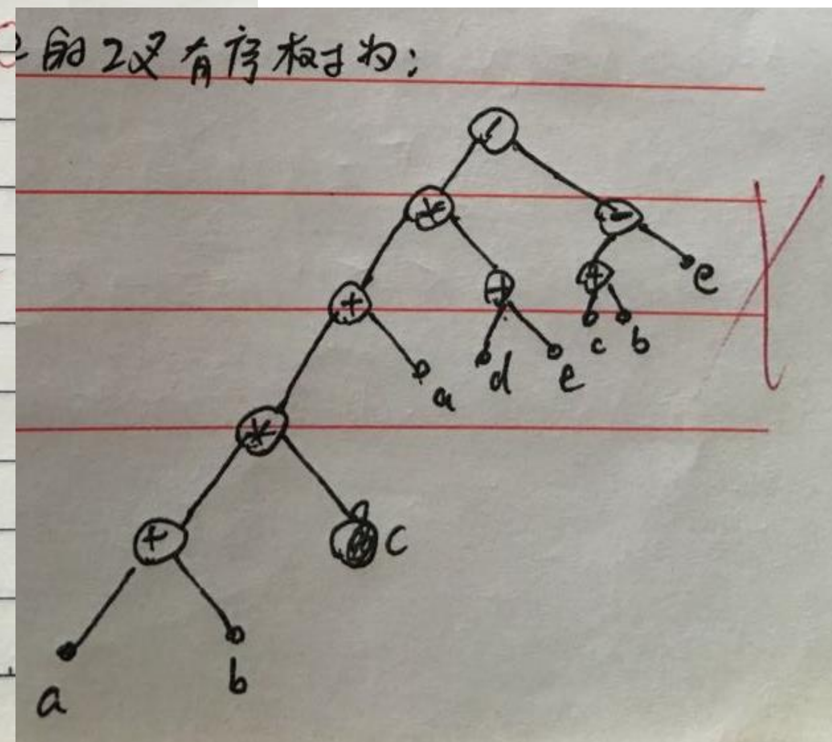
② 第四题：

a. 波兰式求值过程混乱，看不清过程

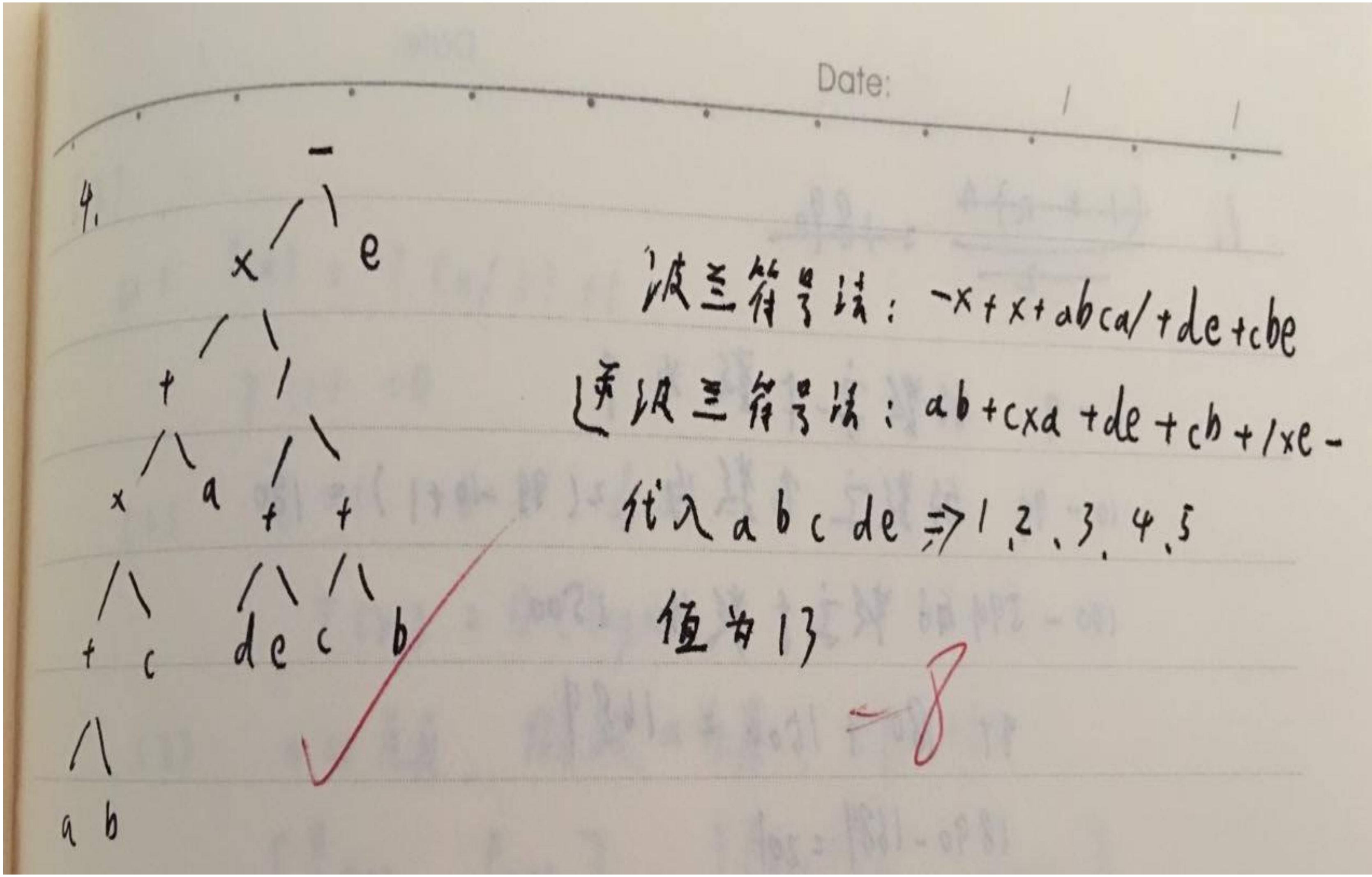


b. 二叉树求错


4. 解: 波兰符号法.
-[×(+(×(+ab)c)a)(÷(+de)(+ab))]e
-×+×+abca÷+de+cbe
-×+×+1231÷+45+325=13
逆波兰符号法.
{[((ab+)c+×)a+)((de+)(cb+)÷)×]e-}
ab+c×a+de+cb+÷×e-
12+3×1+45+32+÷×5-=13


的2叉有序树为:

c. 波兰式求值没有任何过程

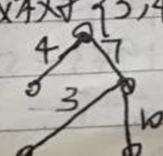


范例

1 对应于弦c的基本回路：C_c = abc
…… e …… ：C_e = abde
…… f …… ：C_f = dgf
对应于树枝a的基本割集：S_a = aceh
…… d …… ：S_d = dehf
…… g …… ：S_g = ghf
$C\{d,c,h,g\} = C_c \oplus C_h = \{a,b,c\} \oplus \{a,b,h,d,g\} = \{d,c,h,g\}$
$S\{f,d,e,h\} = S_d = \{f,d,e,h\}$

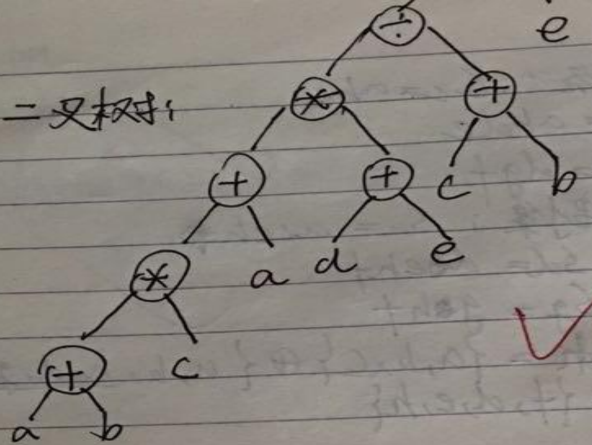
2 设有n个顶点，x片树叶
由定义知树中边 $m=n-1$，根据题意，有 $n=2+x \Rightarrow m=x+1$
而根据握手定理 $2m=3+5+x \Rightarrow 2(x+1)=3+5+x$
$\Rightarrow x=6$
$\Rightarrow$ 该树中顶点数为8，边数为7

3 有Prim与Kruskal算法，选择Kruskal算法
例7.8(a)中边按权值由小到大排列为{3,4,7,8,8,10,12,12,15,20}
Step1：选择最小边3，
step2：继续选择剩余最小边4，不构成回路
step3：…… 7，……
step4：…… 8，构成回路，抛弃，
step5：…… 8，构成回路，抛弃；
step6：…… 10，不构成回路，所有顶点已经在生成树中，完成。
$\Downarrow$
最小生成树{3,4,7,10}
图：



删 Step7：……12，抛弃，
step8：……12，抛弃
step9：……15，抛弃
⋮

4 ~~建~~ 二叉树：



波兰符号表示法：−÷*+*+abca+de+cbe−

逆波兰符号表示法：ab+c*a+de+*cb+÷e−

将 a=1, b=2, c=3, d=4, e=5 代入得：

~~逆~~ 波兰：−÷*+*+123 1+45+325

⇒ −÷*+*33 1+45+325

⇒ −÷*+9 1+45+325

⇒ −÷*10+45+325

⇒ −÷*10 9+325

⇒ −÷90+325

⇒ −÷90 5 5

⇒ −165

⇒ 11

逆波兰：12+3*1+45+*32+÷5−

⇒ 12+3*1+45+*5÷5−

⇒ 12+3*1+9*5÷5−

⇒ 33*1+9*5÷5−

⇒ 9 1+9*5÷5−

⇒ 10 9*5÷5−

⇒ 90 5÷5− ⇒ 18 5− ⇒ 11

5 0: 15%, 1: 30% 2: 20% 3: 10% 4: 5% 5: 5%, 6: 10% 7: 5%

按小到大排序得：{5%, 5%, 5%, 10%, 10%, 15%, 20%, 30%}

算法 step1 ⇒ {10%, 5%, 10%, 10%, 15%, 20%, 30%}

选取4, 5, 7

step2 ⇒ {10%, 10%, 15%, 15%, 20%, 30%}

选取3, 6

step3 ⇒ {15%, 15%, 20%, 20%, 30%}

选取0

step4 ⇒ {20%, 20%, 30%, 30%}

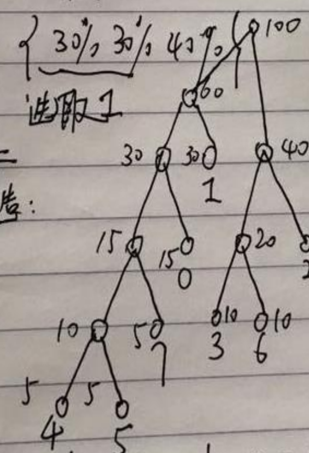
选取2

step5 ⇒ {30%, 30%, 40%} 100

选取1

~~step6~~

Huffman生成树构造：



编码 0→001 1→01 2→11 3→100 4→00000

5→00001 6→001 7→0001

AVL = 0.15×3 + 0.3×2 + 0.2×2 + 0.1×3 + 0.05×5 + 0.05×5 + 0.1×3 + 0.05×4

= 2.75

传输10^3个该类码需2.75×10^3个二进制数字

100

第十二次作业

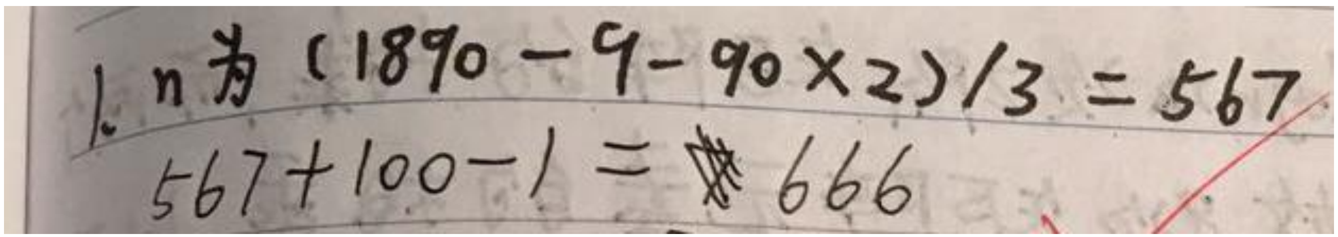
1. 评分标准

- 第一题**15**分，分析过程**10**分，结果**5**分
- 第二题**15**分，分析过程**10**分，结果**5**分
- 第三题**10**分，分析过程**5**分，结果**5**分
- 第四题**15**分， 求解递推方程**10**分
- 第五题**15**分， 算法过程**5**分，递推方程求解过程**10**分
- 第六题**15**分， 递推方程求解过程**10**分
- 第七题**15**分， 递推方程求解过程**10**分

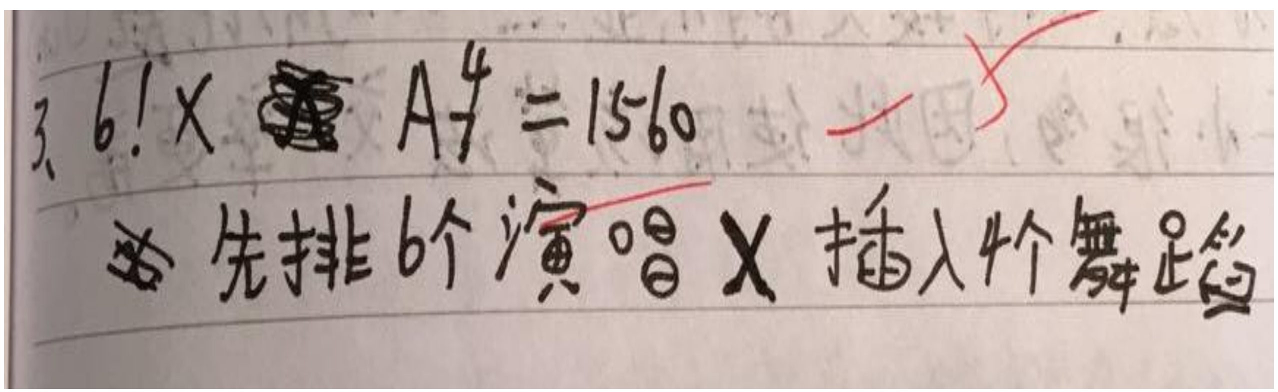
2. 情况汇总

① 四到七题有抄袭现象

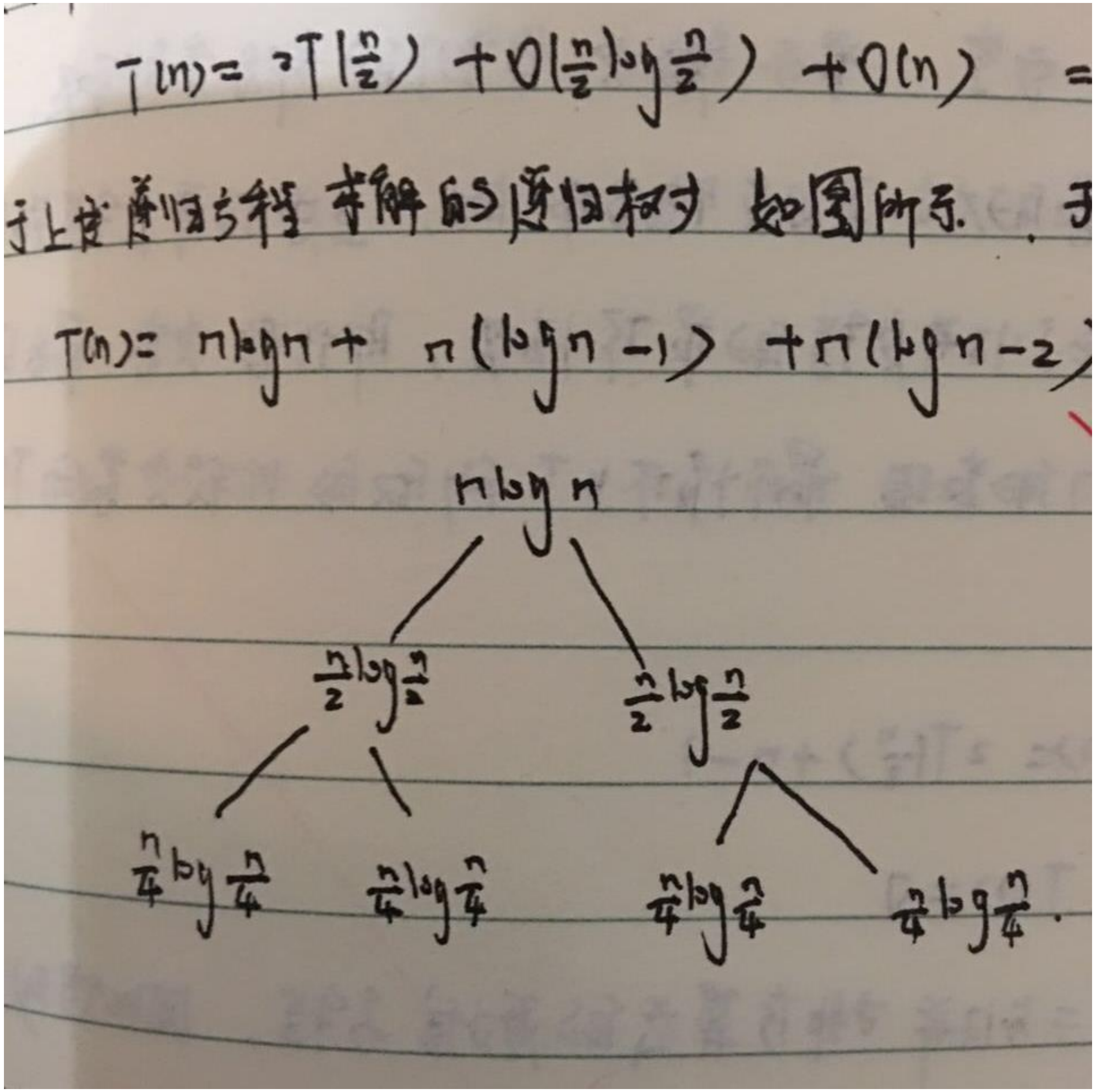
② 第一题：没有写出任何分析过程



③ 第三题:思路正确，结果求错



④ **8.31递归树构造不完全**



$T(n)=2T(\frac{n}{2})+O(\frac{n}{2}\log\frac{n}{2})+O(n) =$

于上述递归方程求解的递归树如图所示. 于

$T(n)= n\log n + n(\log n-1) + n(\log n-2)$

范例

第十二次作业

1、已知从1到n的十进制正整数的总数字个数(不包括无效0)是1890，求n.

解：1到9，数字数为1，共9个

10到99 数字数为2，共90个

100到999 数字数为3，共900个

$9\times1+90\times2=189<1890<9\times1+90\times2+900\times3=2889$

故1890为总数字个数的n为三位数 $100<n<999$

$(1890-189)\div3=567$ 故共有567个3位数，

故n为 $567+100-1=666$

2. 三只白色的棋子和两只红色的棋子摆放在5×5棋盘上，要求每行每列只放置一个棋子，则共有多少种摆放方法？

解. 摆放方法

$$N=\frac{P_5^5P_5^5}{P_2^2P_3^3}=1200$$

3. 有6个演唱节目，4个舞蹈节目，要编节目单，要求任意两个舞蹈节目之间至少安排一个演唱节目，则共可编写出多少个节目单？

解：题目要求即为舞蹈节目不相邻，故可先排列演唱节目，再填入舞蹈节目，舞蹈节目可为开始和结束节目，故节目单数：

$$N=P_6^6P_7^4$$
$$=604800$$

代数系统简介

第9章 代数系统简介

- 9.1 二元运算及其性质
- 9.2 代数系统
- 9.3 几个典型的代数系统

9.1 二元运算及其性质

- 二元运算及一元运算的定义
- 二元运算的性质
  - 交换律、结合律、幂等律、消去律
  - 分配律、吸收律
- 二元运算的特异元素
  - 单位元
  - 零元
  - 可逆元素及其逆元

二元运算的定义及其实例

定义 设 S 为集合,函数 f: $S\times S\rightarrow S$ 称为 S 上的二元运算, 简称为**二元运算**. 也称 S 对 f **封闭**.

例1

(1) N 上的二元运算：加法、乘法.

(2) Z 上的二元运算：加法、减法、乘法.

(3) 非零实数集 R* 上的二元运算: 乘法、除法.

(4) 设 $S = \{ a_1, a_2, \ldots , a_n\}$, $a_i \circ a_j = a_i$, $\circ$为 S 上二元运算.

二元运算的实例（续）

(5) 设 $M_n(\mathrm{R})$ 表示所有 n 阶 $(n\geq 2)$ 实矩阵的集合，即

$$M_n(\mathrm{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| \; a_{ij} \in \mathrm{R},\ i,j = 1,2,\ldots,n \right\}$$

矩阵加法和乘法都是 $M_n(\mathrm{R})$ 上的二元运算.

(6) 幂集 $P(S)$ 上的二元运算：$\cup, \cap, -, \oplus$.

(7) S^S 为 S 上的所有函数的集合：合成运算$\circ$.

n元运算

定义 设 S 为集合，n为正整数，函数

$$f: \underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{n个} \to S$$

称为 S 上的 n 元运算，简称为 **n元运算**.

例2 (1) Z, Q 和 R 上的一元运算: 求相反数

(2) 非零有理数集 Q*和实数集 R*的一元运算：倒数

(3) 复数集合 C 上的一元运算：求共轭复数

(4) 幂集 $P(S)$ 上, 全集为 S：求绝对补运算~

(5) A 为 S 上所有双射函数的集合，$A \subseteq S^S$: 求反函数

(6) 在 $M_n(\mathrm{R})$ ($n \geq 2$)上，求转置矩阵

运算的表示

算符：$\circ$, $*$, $\cdot$, $\oplus$, $\otimes$ 等符号

表示 n 元运算

$\circ(a_1, a_2, \ldots, a_n)=b$.

对二元运算 $\circ$，如果 x 与 y 运算得到 z，记做

$x\circ y = z$;

对一元运算 $\circ$, x 的运算结果记作 $\circ x$

注意：在同一问题中不同的运算使用不同的算符

二元与一元运算的表示

公式表示

例3 设 R 为实数集合，如下定义 R 上的二元运算 $*$:

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x * y = x.$$

那么 $3 * 4 = 3$

$0.5 * (-3) = 0.5$

运算表的形式

运算表（表示有穷集上的一元和二元运算）

$\circ$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1\circ a_1$	$a_1\circ a_2$	$\cdots$	$a_1\circ a_n$
a_2	$a_2\circ a_1$	$a_2\circ a_2$	$\cdots$	$a_2\circ a_n$
$\cdot$		$\cdots$		
$\cdot$		$\cdots$		
$\cdot$		$\cdots$		
a_n	$a_n\circ a_1$	$a_n\circ a_2$	$\cdots$	$a_n\circ a_n$

a_i	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
a_n	$\circ a_n$

运算表的实例

例4 $A = P(\{a, b\})$, $\oplus$, ~分别为对称差和绝对补运算（$\{a,b\}$为全集）

$\oplus$ 的运算表

$\oplus$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a.b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\varnothing$

~ 的运算表

X	$\sim X$
$\varnothing$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	$\varnothing$

运算表的实例（续）

例5 $Z_5 = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$, $\oplus$, $\otimes$ 分别为模 5 加法与乘法

$\oplus$ 的运算表

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\otimes$ 的运算表

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

二元运算的性质

定义 设 $\circ$ 为 S 上的二元运算,

(1) 如果对于任意的 $x, y \in S$ 有

$$x \circ y = y \circ x,$$

则称运算在 S 上满足交换律.

(2) 如果对于任意的 $x, y, z \in S$ 有

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

则称运算在 S 上满足结合律.

(3) 如果对于任意的 $x \in S$ 有

$$x \circ x = x,$$

则称运算在 S 上满足幂等律.

实例分析

Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；$M_n(\mathrm{R})$为 n 阶实矩阵集合, $n\geq 2$；$P(B)$为幂集；A^A 为 A上A，$|A|\geq 2$.

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
Z, Q, R	普通加法+	有	有	无
	普通乘法×	有	有	无
$M_n(\mathrm{R})$	矩阵加法+	有	有	无
	矩阵乘法×	无	有	无
$P(B)$	并∪	有	有	有
	交∩	有	有	有
	相对补−	无	无	无
	对称差⊕	有	有	无
A^A	函数复合∘	无	有	无

二元运算的性质（续）

定义 设 $\circ$ 和 $*$ 为 S 上两个不同的二元运算,

(1) 如果 $\forall x, y, z \in S$ 有

$$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$$

$$z \circ (x * y) = (z \circ x) * (z \circ y)$$

则称 $\circ$ 运算对 $*$ 运算满足分配律.

(2) 如果 $\circ$ 和 $*$ 都满足交换率, 并且 $\forall x, y \in S$ 有

$$x \circ (x * y) = x$$

$$x * (x \circ y) = x$$

则称 $\circ$ 和 $*$ 运算满足吸收律.

实例分析

Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；M_n(**R**) 为 n 阶实矩阵集合, n≥2；$P(B)$为幂集；A^A为 A上A，|A|≥2.

集合	运算	分配律	吸收律
Z,Q,R	普通加法 + 与乘法 ×	× 对 + 可分配 + 对 × 不分配	无
M_n(**R**)	矩阵加法 + 与乘法 ×	× 对 + 可分配 + 对 × 不分配	无
$P(B)$	并 ∪ 与交 ∩	∪ 对 ∩ 可分配 ∩ 对 ∪ 可分配	有
	交 ∩ 与对称差 ⊕	∩ 对 ⊕ 可分配 ⊕ 对 ∩ 不分配	无

二元运算的特异元素

单位元（幺元）

定义　设$\circ$为S上的二元运算，如果存在e_l（或e_r）$\in S$，使得对任意 $x\in S$ 都有

$$e_l \circ x = x \ (\text{或}\ x \circ e_r = x),$$

则称 e_l (或 e_r)是 S 中关于 $\circ$ 运算的 左 (或右) 单位元.

若 $e\in S$ 关于 $\circ$ 运算既是左单位元又是右单位元，则称 e 为 S 上关于 $\circ$ 运算的 单位元.

单位元也叫做 幺元.

二元运算的特异元素（续）

零元

设 $\circ$ 为 S 上的二元运算, 如果存在 θ_l（或 θ_r）$\in S$，使得对任意 $x \in S$ 都有

$$\theta_l \circ x = \theta_l \ (\text{或 } x \circ \theta_r = \theta_r),$$

则称 θ_l (或 θ_r)是 S 中关于 $\circ$ 运算的 左 (或右) 零元.

若 $\theta \in S$ 关于 $\circ$ 运算既是左零元又是右零元，则称 θ 为 S 上关于运算 $\circ$ 的 零元.

二元运算的特异元素（续）

可逆元素及其逆元

令 e 为 S 中关于运算∘的单位元. 对于 $x \in S$，如果存在y_l（或 y_r）$\in S$ 使得

$$y_l \circ x = e \text{（或 } x \circ y_r = e\text{）},$$

则称 y_l(或 y_r)是 x 的 左逆元 (或右逆元).

关于 ∘运算，若 $y \in S$ 既是 x 的左逆元又是 x 的右逆元，则称 y 为 x 的逆元.

如果 x 的逆元存在，就称 x 是可逆的.

实例分析

集合	运算	单位元	零元	逆元
Z, Q, R	普通加法+	0	无	x 的逆元 $-x$
	普通乘法×	1	0	x 的逆元 x^{-1} (x^{-1}属于给定集合)
M_n(R)	矩阵加法+	n阶全0矩阵	无	X逆元$-X$
	矩阵乘法×	n阶单位矩阵	n阶全0矩阵	X的逆元 X^{-1} （X是可逆矩阵）
$P(B)$	并∪	$\varnothing$	B	$\varnothing$ 的逆元为 $\varnothing$
	交∩	B	$\varnothing$	B 的逆元为 B
	对称差⊕	$\varnothing$	无	X 的逆元为 X

唯一性定理

定理（单位元） 设 ∘为S上的二元运算，e_l和 e_r 分别为 S中关于运算的左和右单位元，则 $e_l = e_r = e$，且 e为 S 上关于∘运算的惟一的单位元.

证 $e_l = e_l \circ e_r = e_r$

所以 $e_l = e_r$, 将这个单位元记作 e. 假设 e' 也是 S 中的单位元，则有

$$e' = e \circ e' = e.$$

惟一性得证.

类似地可以证明关于零元的惟一性定理.

注意：当 $|S| \geq 2$，单位元与零元是不同的；

当 $|S| = 1$ 时，这个元素既是单位元也是零元.

惟一性定理（续）

定理（逆元） 设 $\circ$为 S 上可结合的二元运算, e 为该运算的单位元, 对于 $x\in S$ 如果存在左逆元 y_l 和右逆元 y_r, 则有 $y_l = y_r = y$, 且 y 是 x 的惟一的逆元.

证 由 $y_l\circ x = e$ 和 $x \circ y_r = e$ 得

$$y_l = y_l \circ e = y_l \circ (x \circ y_r) = (y_l \circ x) \circ y_r = e \circ y_r = y_r$$

令 $y_l = y_r = y$, 则 y 是 x 的逆元.

假若 $y'\in S$ 也是 x 的逆元, 则

$$y' = y' \circ e = y' \circ (x \circ y) = (y' \circ x) \circ y = e \circ y = y$$

所以 y 是 x 惟一的逆元.

说明：对于可结合的二元运算，可逆元素 x 只有惟一的逆元，记作 x^{-1}.

消去律

定义 设$\circ$为V上二元运算，如果$\forall\, x, y, z\in V$，

若 $x \circ y = x \circ z$，且 x不是零元，则 $y = z$

若 $y \circ x = z \circ x$，且 x 不是零元，则 $y = z$

那么称 $\circ$ 运算满足 消去律.

实例: Z, Q, R 关于普通加法和乘法满足消去律.

M_n(R) 关于矩阵加法满足消去律，但是关于矩阵乘法不满足消去律.

Z_n关于模 n 加法满足消去律，当 n 为素数时关于模 n乘法满足消去律. 当 n 为合数时关于模 n 乘法不满足消去律.

例题分析

例6　设 ∘ 运算为 Q 上的二元运算，

$$\forall x, y \in Q,\quad x \circ y = x+y+2xy,$$

(1) ∘运算是否满足交换和结合律？说明理由.

(2) 求 ∘ 运算的单位元、零元和所有可逆元.

解 (1) ∘ 运算可交换，可结合．任取$x, y \in Q$,

$$x \circ y = x+y+2xy = y+x+2yx = y \circ x,$$

任取$x, y, z \in Q$,

$$(x \circ y) \circ z = (x+y+2xy) + z + 2(x+y+2xy)\, z$$

$$= x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz$$

$$x \circ (y \circ z) = x + (y+z+2yz) + 2x(y+z+2yz$$

$$= x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz$$

例题分析（续）

(2) 设$\circ$运算的单位元和零元分别为 e 和 θ，则对于任意 x 有 $x\circ e = x$ 成立，即 $x+e+2xe = x \Rightarrow e = 0$

由于 $\circ$ 运算可交换，所以 0 是幺元.

对于任意 x 有 $x \circ \theta = \theta$ 成立，即

$$x+\theta+2x\theta = \theta \Rightarrow x + 2x\theta = 0 \Rightarrow \theta = -1/2$$

给定 x，设 x 的逆元为 y, 则有 $x \circ y = 0$ 成立，即

$$x+y+2xy = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{1+2x} \quad (x \neq = -1/2)$$

因此当 $x \neq -1/2$时，$y = -\frac{x}{1+2x}$ 是 x 的逆元.

例题分析（续）

例7 (1) 说明那些运算是交换的、可结合的、幂等的.
(2) 求出运算的单位元、零元、所有可逆元素的逆元.

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\bullet$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

解 (1) $*$ 满足交换、结合律；$\circ$ 满足结合、幂等律；
$\bullet$ 满足交换、结合律.

(2) $*$ 的单位元为 b, 没零元， $a^{-1} = c, b^{-1} = b, c^{-1} = a$
$\circ$ 的单位元和零元都不存在，没有可逆元素.
$\bullet$ 的单位元为 a， 零元为c, $a^{-1}=a$. b, c不可逆.

例题分析（续）

例8 设 $A = \{a, b, c\}$, 构造 A 上的二元运算* 使得 $a*b = c$, $c*b = b$, 且*运算是幂等的、可交换的，给出关于*运算的一个运算表，说明它是否可结合，为什么？

*	a	b	c
a	a	c	□
b	c	b	b
c	□	b	c

根据幂等律和已知条件 $a*b = c$, $c*b = b$ 得到运算表

根据交换律得到新的运算表

方框 □ 可以填入 a, b, c 中任一选定的符号，完成运算表

不结合，因为 $(a*b)*b = c*b = b$, $a*(b*b) = a*b = c$

由运算表判别算律的一般方法

- 交换律：运算表关于主对角线对称
- 幂等律：主对角线元素排列与表头顺序一致
- 消去律：所在的行与列中没有重复元素
- 单位元：所在的行与列的元素排列都与表头一致
- 零元：元素的行与列都由该元素自身构成
- A 的可逆元：a 所在的第i行中某列 (比如第 j 列) 元素为 e，且第 j 行 i 列的元素也是 e，那么 a 与第 j 个元素互逆
- 结合律：除了单位元、零元之外，要对所有3个元素的组合验证表示结合律的等式是否成立

9.2 代数系统

- 代数系统定义
- 同类型与同种的代数系统
- 子代数
- 积代数

代数系统定义与实例

定义

非空集合 S 和 S 上 k 个一元或二元运算 f_1, f_2, … , f_k 组成的系统称为一个代数系统, 简称代数，记做 $V=<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$.

S 称为代数系统的载体， S 和运算叫做代数系统的成分. 有的代数系统定义指定了S中的特殊元素，称为代数常数, 例如二元运算的单位元. 有时也将代数常数作为系统的成分.

实例

$\langle N,+\rangle$, $\langle Z,+,\cdot\rangle$, $\langle R,+,\cdot\rangle$是代数系统，

+ 和 ·分别表示普通加法和乘法.

$\langle M_n(R),+,\cdot\rangle$是代数系统，

+ 和 ·分别表示n 阶 ($n\geq 2$) 实矩阵的加法和乘法.

$\langle Z_n,\oplus,\otimes\rangle$是代数系统，$Z_n=\{0, 1, \ldots, n-1\}$，

⊕ 和 ⊗ 分别表示模 n 的加法和乘法，$\forall x,y\in Z_n$，

$$x\oplus y = (x+y) \bmod n，\quad x\otimes y = (xy) \bmod n$$

$\langle P(S),\cup,\cap,\sim\rangle$ 也是代数系统，

∪和∩为并和交，~为绝对补

同类型与同种代数系统

定义 (1) 如果两个代数系统中运算的个数相同，对应运算的元数相同，且代数常数的个数也相同，则称它们是 同类型的 代数系统.

(2) 如果两个同类型的代数系统规定的运算性质也相同，则称为 同种的 代数系统.

例1 $V_1 = \langle \mathbf{R}, +, \ ; 0, 1 \rangle$,

$V_2 = \langle M_n(\mathbf{R}), +, \ ; \theta, E \rangle$,

θ 为 n 阶全 0 矩阵，E 为 n 阶单位矩阵

$V_3 = \langle P(B), \cup, \cap, \varnothing, B \rangle$

同类型与同种代数系统（续）

V_1	V_2	V_3
+ 可交换, 可结合 · 可交换, 可结合 + 满足消去律 · 满足消去律 · 对+可分配 + 对 · 不可分配 +与 · 没有吸收律	+ 可交换, 可结合 ·可交换, 可结合 + 满足消去律 · 满足消去律 · 对+可分配 + 对 · 不可分配 +与 · 没有吸收律	∪可交换, 可结合 ∩可交换, 可结合 ∪不满足消去律 ∩不满足消去律 ∩对∪可分配 ∪对∩可分配 ∪与∩满足吸收律

V_1, V_2, V_3是同类型的代数系统

V_1, V_2是同种的代数系统

V_1, V_2与V_3不是同种的代数系统

子代数

定义　设$V=<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$是代数系统，$B$是$S$的非空子集，如果$B$对$f_1, f_2, \ldots, f_k$都是封闭的，且$B$和$S$含有相同的代数常数，则称$<B, f_1, f_2, \ldots, f_k>$是$V$的子代数系统，简称子代数. 有时将子代数系统简记为B.

实例　N是<Z,+>和<Z,+,0>的子代数．N−{0}是<Z,+>的子代数，但不是<Z,+,0>的子代数

说明：

子代数和原代数是同种的代数系统

对于任何代数系统V，其子代数一定存在.

关于子代数的术语

- 最大的子代数 就是V 本身.
- 如果V 中所有代数常数构成集合 B，且 B 对V 中所有运算封闭，则 B 就构成了V 的最小的子代数.
- 最大和最小子代数称为V 的平凡的子代数.
- 若 B 是 S 的真子集，则 B 构成的子代数称为V 的真子代数 .

例2 设$V=\langle Z,+,0\rangle$，令 $n\mathrm{Z} = \{ nz \mid z \in \mathrm{Z}\}$，$n$ 为自然数，则 $n\mathrm{Z}$ 是 V 的子代数，当 $n = 1$ 和 0 时，$n\mathrm{Z}$ 是 V 的平凡的子代数，其他的都是 V 的非平凡的真子代数.

积代数

定义 设 $V_1=<S_1,\circ>$和 $V_2=<S_2,*>$是代数系统，其中 $\circ$ 和 $*$ 是二元运算. V_1 与 V_2 的 积代数 是$V=<S_1\times S_2,\cdot>$,

$\forall <x_1,y_1>, <x_2,y_2>\in S_1\times S_2$,

$$<x_1,y_1>\cdot<x_2,y_2>=<x_1\circ x_2, y_1*y_2>$$

例3 $V_1=<Z,+>$, $V_2=<M_2(R),\cdot>$, 积代数$< Z\times M_2(R),\circ>$

$\forall <z_1,M_1>, <z_2,M_2>\in Z\times M_2(R)$,

$$<z_1,M_1> \circ <z_2,M_2> = <z_1+z_2, M_1\cdot M_2>$$

$$<5,\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}>\circ<-2,\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}>=<3,\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}>$$

积代数的性质

设 $V_1 = <S_1, \circ>$和 $V_2 = <S_2, *>$是代数系统，其中 $\circ$ 和 $*$是二元运算. V_1 与 V_2 的积代数是 $V=<S_1 \times S_2, \cdot>$

(1) 若 $\circ$ 和 $*$ 运算是可交换的，那么$\cdot$ 运算也是可交换的

(2) 若 $\circ$ 和 $*$ 运算是可结合的，那么$\cdot$ 运算也是可结合的

(3) 若 $\circ$ 和 $*$ 运算是幂等的，那么$\cdot$ 运算也是幂等的

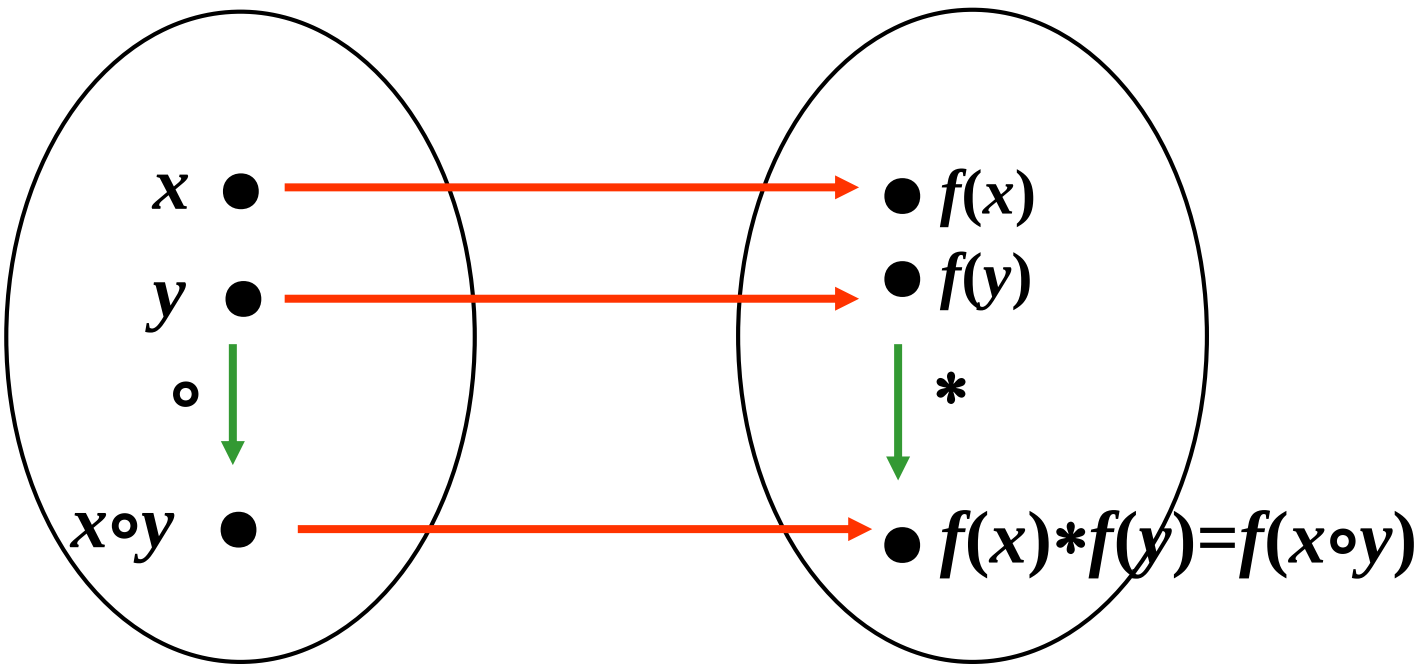
(4) 若 $\circ$ 和 $*$ 运算分别具有单位元 e_1 和 e_2，那么$\cdot$ 运算也具有单位元$<e_1, e_2>$

(5) 若 $\circ$ 和 $*$ 运算分别具有零元 θ_1 和 θ_2，那么$\cdot$ 运算也具有零元$<\theta_1, \theta_2>$

(6) 若 x 关于 $\circ$ 的逆元为 x^{-1}, y 关于 $*$ 的逆元为 y^{-1}，那么$<x,y>$关于$\cdot$ 运算也具有逆元$<x^{-1}, y^{-1}>$

同态映射的定义

定义 设 V_1=<S_1,∘>和 V_2=<S_2,∗>是代数系统，其中 ∘ 和 ∗是二元运算. f: $S_1 \rightarrow S_2$, 且$\forall x,y \in S_1$, $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$, 则称 f 为V_1到 V_2 的同态映射，简称同态.



更广泛的同态映射定义

定义 设 $V_1=<S_1,\circ,\cdot>$和 $V_2=<S_2,*,\Diamond>$是代数系统，其中 $\circ$和 $*$是二元运算. $f: S_1\to S_2$, 且$\forall x,y\in S_1$

$$f(x\circ y)=f(x)*f(y),\quad f(x\cdot y)=f(x)\Diamond f(y)$$

则称 f 为V_1到 V_2 的同态映射，简称同态.

设 $V_1=<S_1,\circ,\cdot,\Delta>$和 $V_2=<S_2,*,\Diamond,\nabla>$是代数系统，其中$\circ$ 和 $*$ 是二元运算. Δ 和 ∇是一元运算， f: $S_1\to S_2$, 且$\forall x,y\in S_1$

$$f(x\circ y)=f(x)*f(y),\quad f(x\cdot y)=f(x)\Diamond f(y),\quad f(\Delta x)=\nabla f(x)$$

则称 f 为V_1到 V_2 的同态映射，简称同态.

例题

例1 V=<R*,·>, 判断下面的哪些函数是V 的自同态?

(1) $f(x)=|x|$　(2) $f(x)=2x$　(3) $f(x)=x^2$

(4) $f(x)=1/x$　(5) $f(x)= -x$　(6) $f(x)=x+1$

解　(2) , (5), (6) 不是自同态.

(1) 是同态，　$f(x\cdot y) = |x\cdot y| = |x| \cdot |y| = f(x) \cdot f(y)$

(3) 是同态，　$f(x\cdot y) = (x\cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = f(x) \cdot f(y)$

(4) 是同态，　$f(x\cdot y) = 1/(x\cdot y) = 1/x \cdot 1/y = f(x) \cdot f(y)$

特殊同态映射的分类

同态映射如果是单射，则称为**单同态**；

如果是满射，则称为 **满同态**，这时称 V_2 是 V_1 的**同态像**，记作 $V_1 \sim V_2$；

如果是双射，则称为 **同构**，也称代数系统 V_1 同构于V_2，记作 $V_1 \cong V_2$.

对于代数系统 V，它到自身的同态称为**自同态**.

类似地可以定义**单自同态**、**满自同态**和**自同构**.

同态映射的实例

例2 设V=<Z,+>，$\forall a \in$Z，令

$$f_a\text{：}Z \to Z\text{，}f_a(x)=ax$$

那么 f_a是V的自同态.

因为$\forall x,y \in$Z，有

$$f_a(x+y) = a(x+y) = ax+ay = f_a(x)+f_a(y)$$

当 a = 0 时称 f_0为零同态；

当a=±1时，称 f_a为自同构；

除此之外其他的 f_a 都是单自同态.

同态映射的实例（续）

例3 设V_1=<Q,+>, V_2= <Q*,·>，其中Q*= Q−{0}，令

$$f\text{：} Q \to Q^*,\ f(x)=e^x$$

那么 f 是V_1到V_2的同态映射，因为∀x, y∈Q有

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y).$$

不难看出 f 是单同态.

同态映射的实例（续）

例4 $V_1=\langle Z,+\rangle$， $V_2=\langle Z_n,\oplus\rangle$， $Z_n=\{0,1,\ldots,n-1\}$， $\oplus$是模 n 加. 令

$$f: Z\to Z_n,\quad f(x) = (x)\bmod n$$

则 f 是V_1到 V_2 的满同态. $\forall x, y\in Z$有

$$f(x+y) = (x+y)\bmod n$$

$$= (x)\bmod n \oplus (y)\bmod n$$

$$= f(x) \oplus f(y)$$

同态映射的实例（续）

例5 设 $V=\langle Z_n,\oplus\rangle$，可以证明恰有 n 个G 的自同态，

f_p: $Z_n \to Z_n$,

$f_p(x) = (px) \bmod n$，$p = 0,1, \ldots, n-1$

例如 $n = 6$, 那么

f_0为零同态；

f_1与 f_5为同构；

f_2 与 f_4的同态像是$\{0, 2, 4\}$；

f_3 的同态像是$\{0, 3\}$.

同态映射保持运算的算律

设V_1,V_2是代数系统. o,*是V_1上的二元运算，o’,*’是V_2上对应的二元运算，如果 f： $V_1 \to V_2$是满同态，那么

(1)若o运算是可交换的（可结合、幂等的），则o’运算也是可交换的（可结合、幂等的）.

(2) 若o运算对*运算是可分配的，则o’运算对*’运算也是可分配的；若o 和*运算是可吸收的，则 o’和*’运算也是可吸收的。

同态映射保持运算的特异元素

(3) 若e为$\circ$ 运算的单位元，则 $f(e)$为$\circ'$运算的单位元.

(4) 若 θ为$\circ$ 运算的零元，则 $f(\theta)$ 为$\circ'$运算的零元.

(5) 设 $u \in V_1$，若 u^{-1} 是 u 关于$\circ$运算的逆元，则 $f(u^{-1})$ 是 $f(u)$关于$\circ'$运算的逆元。

同态映射的性质

说明：

上述性质仅在满同态时成立，如果不是满同态，那么相关性质在同态像中成立.

同态映射不一定能保持消去律成立.

例如 $f : \mathrm{Z} \rightarrow \mathrm{Z}_n$ 是 $V_1=<\mathrm{Z}, \cdot>$ 到 $V_2=<\mathrm{Z}_n, \otimes>$ 的同态，$f(x)=(x)\mathrm{mod}\ n$, V_1中满足消去律，但是当 n 为合数时, V_2中不满足消去律.

例题

例6 设V_1=<Q,+> ， V_2=<Q*, ·>，其中 Q 为有理数集合，Q*=Q−{0}，+ 和 ·分别表示普通加法和乘法.

证明不存在 V_2 到 V_1 的同构.

证 假设 f 是 V_2 到 V_1 的同构，那么有f：$V_2 \to V_1$，$f(1)=0$. 于是有

$$f(-1)+f(-1) = f((-1)(-1))= f(1)=0$$

从而 $f(-1)=0$，又有 $f(1)=0$，这与 f 的单射性矛盾.