- 评分标准
  - 例2.14中(4)(5)(7)(8)(11)共70分,每题14分，附加题每道14分
  - 习题2.3中(2)(4)(6)共30分, 每题10分，附加题每道10分

情况汇总

- 27份作业100分，12份作业没有给予成绩（下次提交时补全错误及未完成部分）
- 错误率较高的为例2.14中的(5)。

第四次作业

1. 求下列各式的前束范式

(1) $\forall x \exists y F(x,y) \rightarrow \exists x \forall y F(x,y)$ 对应题(4)

解: $\forall x \exists y F(x,y) \rightarrow \exists x \forall y F(x,y)$

$\Leftrightarrow \neg \forall x \exists y F(x,y) \vee \exists x \forall y F(x,y)$ 蕴含等值式

$\Leftrightarrow \exists x \forall y \neg F(x,y) \vee \exists x \forall y F(x,y)$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \exists x \forall y \neg F(x,y) \vee \boxed{\exists s \forall t F(s,t)}$ 换名规则

$\Leftrightarrow \exists x \forall y (\neg F(x,y) \vee \exists s \forall t F(s,t))$ 定理1.1

$\Leftrightarrow \exists x \forall y (\exists s \forall t F(s,t) \vee \boxed{\neg F(x,y)})$ 交换律

$\Leftrightarrow \exists x \forall y \exists s \forall t (F(s,t) \vee \neg F(x,y))$ 定理1.1

(2) $\neg \forall x F(x) \leftrightarrow \exists x \neg F(x)$ 对应题(5)

解: $\neg \forall x F(x) \leftrightarrow \exists x \neg F(x)$

$\Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \leftrightarrow \exists x \neg F(x)$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow (\exists x \neg F(x) \rightarrow \exists x \neg F(x)) \wedge$ 等价等值式

$(\exists x \neg F(x) \rightarrow \exists x \neg F(x))$

$\Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \rightarrow \exists x \neg F(x)$ 等幂律

$\Leftrightarrow \neg(\exists x \neg F(x)) \vee \exists x \neg F(x)$ 蕴含等值式

$\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \exists x \neg F(x)$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \exists y \neg F(y)$ 换名规则

$\Leftrightarrow \forall x \exists y (F(x) \vee \neg F(y))$ 定理1.1

若进一步化简，可得原公式是逻辑有效式

(3) $\exists x \exists y F(x,y) \rightarrow \forall x \forall y F(x,y)$ 对应题(7)

解: $\neg \exists x \exists y F(x,y) \vee \forall x \forall y F(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \neg F(x,y) \vee \forall x \forall y F(x,y)$ 蕴含等值式+量词否

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \neg F(x,y) \vee \forall s \forall t F(s,t)$ 换名规则

$\Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg F(x,y) \vee \overset{B}{\boxed{\forall s \forall t F(s,t)}})$ 定理1.1

$\Leftrightarrow \forall x \forall y (\forall s \forall t F(s,t) \vee \overset{C}{\boxed{\neg F(x,y)}})$ 交换律

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall s \forall t (F(s,t) \vee \neg F(x,y))$ 定理1.1

(4) $\forall x (F(x) \vee G(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \vee \forall x G(x))$ 对应题(8)

解. $\forall x (F(x) \vee G(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \vee \forall x G(x))$

$\neg \forall x (F(x) \vee G(x)) \vee (\forall x F(x) \vee \forall x G(x))$ 蕴含等值式

$\exists x \neg (F(x) \vee G(x)) \vee (\forall x F(x) \vee \forall x G(x))$ 量词否定等值式

$\exists x \neg (F(x) \vee G(x)) \vee (\forall s F(s) \vee \forall t G(t))$ 换名规则

$\exists x \neg (F(x) \vee G(x)) \vee \forall s F(s) \vee \forall t G(t)$ 结合律

$\exists x (\neg (F(x) \vee G(x)) \vee \forall s F(s) \vee \forall t G(t))$ 定理1.1

$\exists x (\forall s F(s) \vee \forall t F(t) \vee \neg (F(x) \vee G(x)))$ 交换律

$\exists x \forall s \forall t (F(s) \vee F(t) \vee \neg (F(x) \vee G(x)))$ 定理1.1

(5) $\neg(\forall x F(x) \to \forall y G(y)) \wedge \forall y G(y)$ 习题(11)

解: $\neg(\forall x F(x) \to \forall y G(y)) \wedge \forall y G(y)$

$\neg(\neg \forall x F(x) \vee \forall y G(y)) \wedge \forall y G(y)$ 蕴含等值式

$\forall x F(x) \wedge \neg \forall y G(y) \wedge \forall y G(y)$ 德摩根律

$\forall x F(x) \wedge \exists y \neg G(y) \wedge \forall y G(y)$ 量词否定等值式

$\forall x F(x) \wedge \exists y \neg G(y) \wedge \forall z G(z)$

$\forall x \exists y \forall z (F(x) \wedge \neg G(y) \wedge G(z))$

P53. 对题2.3中的(2)(4)(6)命题符号化，只使用全称

解: (2). 有些人喜欢所有的花.

设 $F(x)$: x是人

$G(y)$: y是花

$H(x,y)$: x喜欢y.

若使用存在量词，命题符号化为

$\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \to H(x,y)))$

仅使用全称量词，则命题符号化为:

$\neg \forall x(\neg F(x) \vee \neg \forall y(G(y) \to H(x,y)))$

(4). 在北京工作的人未必都是北京人.

设: $F(x)$: x是在北京工作的人.

$G(x)$: x是北京人,

命题符号化为: $\neg \forall x \, (F(x) \rightarrow G(x))$

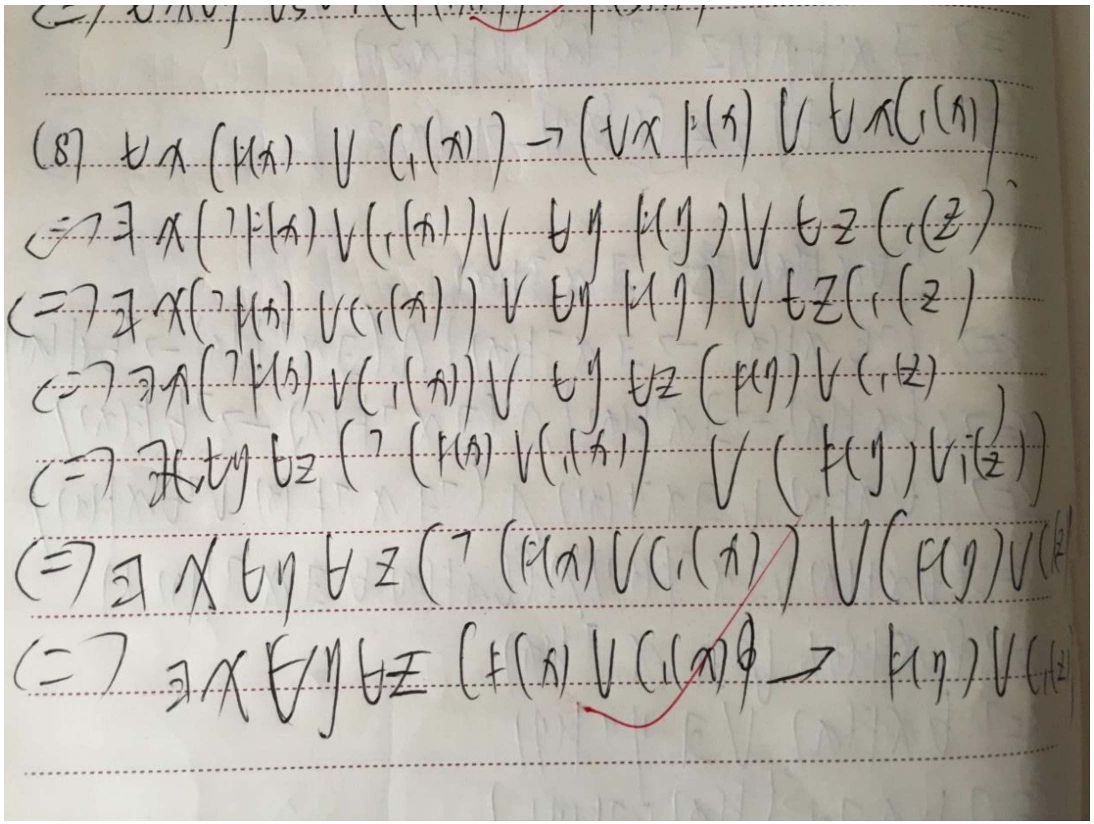
(6). 凡对顶角都相等.

设: $F(x,y)$: x,y是对顶角

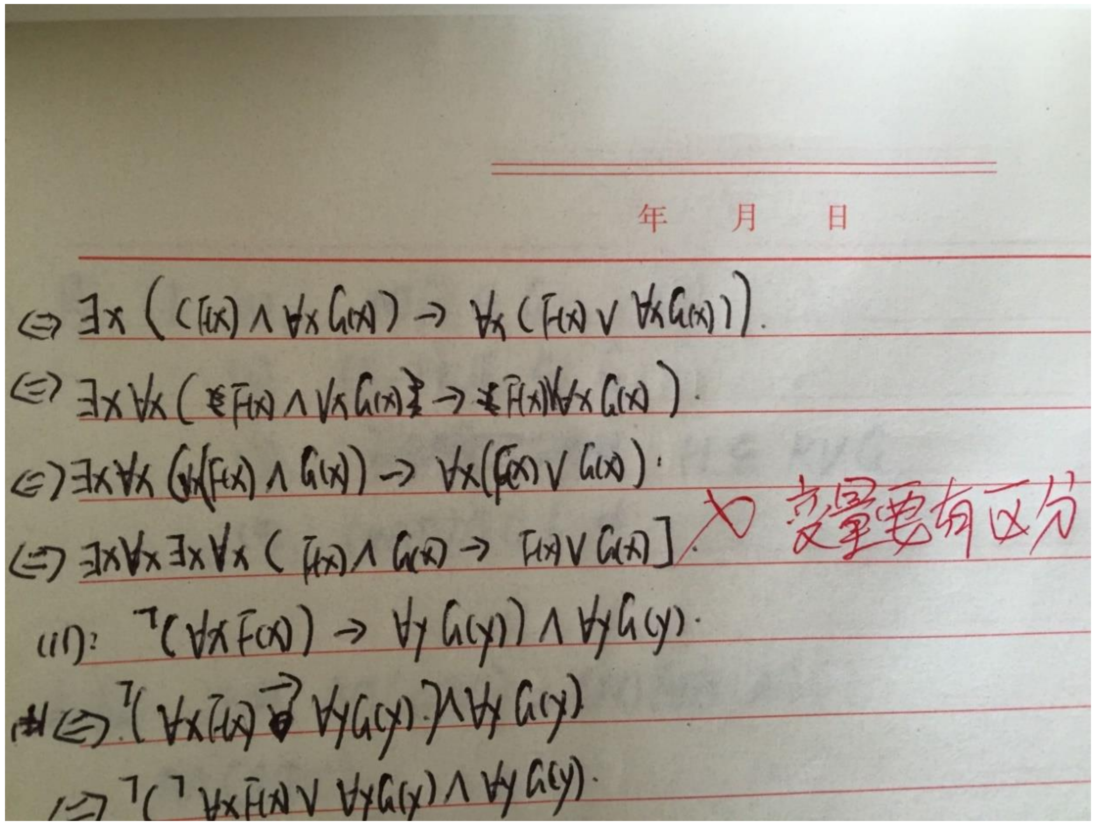
$G(x,y)$: x,y相等.

命题符号化为: $\forall x \forall y \, (F(x,y) \rightarrow G(x,y))$

字迹潦草



没有听课，不懂换名规则


年 月 日
⇔ ∃x((F(x) ∧ ∀xG(x)) → ∀x(F(x) ∨ ∀xG(x))).
⇔ ∃x∀x((F(x) ∧ ∀xG(x)) → (F(x) ∨ ∀xG(x))).
⇔ ∃x∀x(∀x(F(x) ∧ G(x)) → ∀x(F(x) ∨ G(x))).
⇔ ∃x∀x∃x∀x(F(x) ∧ G(x) → F(x) ∨ G(x)]
变量要有区分
(1): ¬(∀xF(x)) → ∀yG(y)) ∧ ∀yG(y).
⇔ ¬(∀xF(x) → ∀yG(y)) ∧ ∀yG(y)
⇔ ¬(¬∀xF(x) ∨ ∀yG(y)) ∧ ∀yG(y).

第4章 二元关系与函数

- 4.1 集合的笛卡儿积与二元关系
- 4.2 关系的运算
- 4.3 关系的性质
- 4.4 关系的闭包
- 4.5 等价关系和偏序关系
- 4.6 函数的定义和性质
- 4.7 函数的复合和反函数

4.1 集合的笛卡儿积和二元关系

- 有序对
- 笛卡儿积及其性质
- 二元关系的定义
- 二元关系的表示

有序对

定义 由两个客体 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为有序对，记作$<x,y>$

实例：点的直角坐标(3,–4)

有序对性质

有序性 $<x,y> \neq <y,x>$ （当$x \neq y$时）

$<x,y>$ 与 $<u,v>$ 相等的充分必要条件是

$$\boxed{<x,y>=<u,v> \Leftrightarrow x=u \wedge y=v}$$

例1 $<2, x+5> = <3y-4, y>$，求 x, y.

解 $3y-4 = 2,\ x+5 = y \Rightarrow y = 2,\ x = -3$

有序 n 元组

定义 一个有序 n ($n\geq 3$) 元组 $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ 是一个有序对，其中第一个元素是一个有序 n-1元组，即

$$<x_1, x_2, \ldots, x_n> = < <x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}>, x_n>$$

当 n=1时, $<x>$ 形式上可以看成有序 1 元组.

实例 n 维向量是有序 n元组.

笛卡儿积

定义　设A,B为集合，A与B 的笛卡儿积记作$A\times B$，

即　　$A\times B=\{ <x,y> \mid x\in A \wedge y\in B \}$

例2 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$

$A\times B=\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,$

$<3,a>,<3,b>,<3,c>\}$

$B\times A=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,$

$<a,3>, <b,3>,<c,3>\}$

$A=\{\varnothing\}$, $P(A)\times A=$

笛卡儿积的性质

不适合交换律 $A\times B\neq B\times A \quad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$

不适合结合律 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$

对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集.

$$A\times\varnothing=\varnothing\times B=\varnothing$$

若$|A|=m$, $|B|=n$, 则 $|A\times B|=mn$

性质的证明

证明　$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取$<x,y>$

$<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\vee<x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

所以有$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

例题

例3 (1) 证明 $A=B \wedge C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C=B\times D$是否推出 $A=B \wedge C=D$? 为什么？

解 (1) 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in A\times C \Leftrightarrow x\in A \wedge y\in C$$

$$\Leftrightarrow x\in B \wedge y\in D \Leftrightarrow <x,y>\in B\times D$$

(2) 不一定. 反例如下：

$A=\{1\}$，$B=\{2\}$, $C=D=\varnothing$, 则 $A\times C=B\times D$ 但是 $A\neq B$.

二元关系的定义

定义 如果一个集合满足以下条件之一：

（1）集合非空, 且它的元素都是有序对

（2）集合是空集

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系，记作R.

如$<x,y>\in R$, 可记作 xRy；如果$<x,y>\notin R$, 则记作$x \not R y$

实例：$R=\{<1,2>,<a,b>\}$, $S=\{<1,2>,a,b\}$.

R是二元关系, 当a, b不是有序对时，S不是二元关系

根据上面的记法，可以写 $1R2$, aRb, $a \not R c$ 等.

从A到B的关系与A上的关系

定义 设A,B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做从A到B的二元关系，当$A=B$时则叫做 A上的二元关系.

例4 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, $R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$.

那么 R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B的二元关系, R_3和R_4同时也是 A上的二元关系.

计数

$|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$的子集有2^{n^2}个. 所以 A上有 2^{n^2}个不同的二元关系.

例如 $|A|=3$, 则 A上有=512个不同的二元关系.

A上重要关系的实例

设 A 为任意集合，

$\varnothing$是 A 上的关系，称为空关系

E_A, I_A 分别称为全域关系与恒等关系，定义如下：

$$E_A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$$

$$I_A=\{<x,x>|x\in A\}$$

例如, $A=\{1,2\}$, 则

$$E_A=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$$

$$I_A=\{<1,1>,<2,2>\}$$

A上重要关系的实例（续）

小于等于关系 L_A, 整除关系D_A, 包含关系$R_{\subseteq}$定义:

$L_A=\{<x,y>| \ x,y\in A\wedge x\le y\}$, $A\subseteq R$， R为实数集合

$D_B=\{<x,y>| \ x,y\in B\wedge x$整除$y\}$,

$B\subseteq Z^*$, Z^*为非0整数集

$R_{\subseteq}=\{<x,y>| \ x,y\in A\wedge x\subseteq y\}$, A是集合族.

类似的还可以定义大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等等.

实例

例如 $A = \{1, 2, 3\}$, $B =\{a, b\}$, 则

$L_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$

$D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$

$C=P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则 C上的包含关系是

$R_{\subseteq}=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$

$<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$

关系的表示

表示方式：关系的集合表达式、关系矩阵、关系图

关系矩阵：若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$B=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\,r_{ij}\,]_{m\times n}$，其中 $r_{ij} = 1 \Leftrightarrow <x_i, y_j> \in R$.

关系图：若$A= \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=<A, R>$，其中$A$为结点集，$R$为边集.如果$<x_i,x_j>$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

注意：A, B为有穷集，关系矩阵适于表示从A到B的关系或者A上的关系，关系图适于表示A上的关系

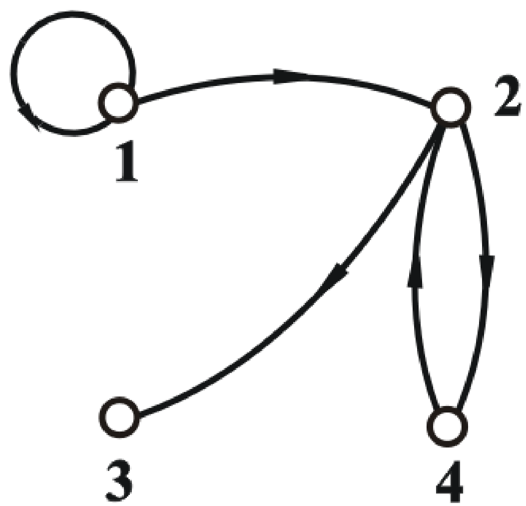
实例

A={1,2,3,4},

R={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>},

R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



4.2 关系的运算

- 基本运算定义
  - 定义域、值域、域
  - 逆、合成、限制、像
- 基本运算的性质
- 幂运算
  - 定义
  - 求法
  - 性质

关系的基本运算定义

定义域、值域 和 域

$\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y\, (\langle x,y\rangle \in R) \}$

$\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x\, (\langle x,y\rangle \in R) \}$

$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$

例1 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$, 则

$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

关系的基本运算定义（续）

逆与合成

$$R^{-1} = \{<y,x> \mid <x,y> \in R\}$$

$$R \circ S = |<x,z> \mid \exists\, y\, (<x,y> \in R \wedge <y,z> \in S)\ \}$$

例2 $R=\{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$S=\{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$R^{-1}=$

$R \circ S =$

$S \circ R =$

合成运算的图示方法

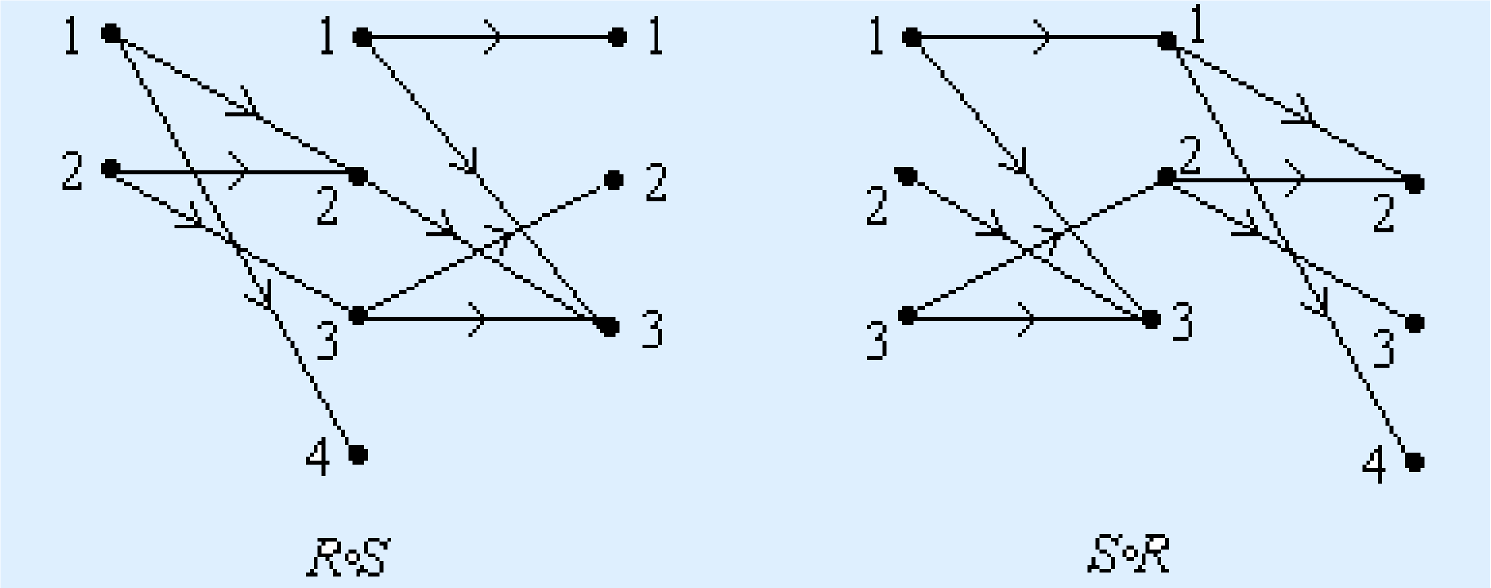
利用图示（不是关系图）方法求合成

$R \circ S$ ={<1,3>, <2,2>, <2,3>}

$S \circ R$={<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>}

R={<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>}

S={<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>}



限制与像

定义 F 在A上的限制

$F\restriction A = \{<x,y> \mid xFy \wedge x\in A\}$

A 在F下的像

$F[A] = \mathrm{ran}(F\restriction A)$

实例 $R=\{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$R\restriction\{1\}=\{<1,2>,<1,4>\}$

$R[\{1\}]=\{2,4\}$

$R\restriction\varnothing=\varnothing$

$R[\{1,2\}]=\{2,3,4\}$

注意：$F\restriction A\subseteq F$，$F[A]\subseteq\mathrm{ran}F$

关系基本运算的性质

定理1 设F是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x,y> \in (F^{-1})^{-1}$, 由逆的定义有

$<x,y> \in (F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y,x> \in F^{-1} \Leftrightarrow <x,y> \in F$

所以有 $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) 任取x,

$x \in \mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x,y> \in F^{-1})$

$\Leftrightarrow \exists y(<y,x> \in F) \Leftrightarrow x \in \mathrm{ran}F$

所以有$\mathrm{dom}F^{-1}= \mathrm{ran}F$. 同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1} = \mathrm{dom}F$.

关系基本运算的性质（续）

定理2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1}= G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$<x,y>$,

$<x,y>\in(F\circ G)\circ H$

$\Leftrightarrow \exists t(<x,t>\in F\circ G \wedge <t,y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\ (\exists s(<x,s>\in F \wedge <s,t>\in G) \wedge <t,y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\ \exists s\ (<x,s>\in F \wedge <s,t>\in G \wedge <t,y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists s\ (<x,s>\in F \wedge \exists t\ (<s,t>\in G \wedge <t,y>\in H))$

$\Leftrightarrow \exists s\ (<x,s>\in F \wedge <s,y>\in G\circ H)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ(G\circ H)$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

关系基本运算的性质（续）

$(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

(2) 任取$<x,y>$,

$<x,y> \in (F \circ G)^{-1}$

$\Leftrightarrow <y,x> \in F \circ G$

$\Leftrightarrow \exists t\, (<y,t> \in F \wedge (t,x) \in G)$

$\Leftrightarrow \exists t\, (<x,t> \in G^{-1} \wedge (t,y) \in F^{-1})$

$\Leftrightarrow <x,y> \in G^{-1} \circ F^{-1}$

所以 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

A上关系的幂运算

设R为A上的关系, n为自然数, 则 R 的 n次幂定义为:

(1) $R^0=\{<x,x> \mid x \in A\}=I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意:

对于A上的任何关系R_1和R_2都有

$$R_1{}^0 = R_2{}^0 = I_A$$

对于A上的任何关系 R 都有

$$R^1 = R$$

幂的求法

对于集合表示的关系R，计算 R^n 就是n个R右复合 . 矩阵表示就是n个矩阵相乘, 其中相加采用逻辑加:

0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=1

例3 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$,

求R的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解 R与R^2的关系矩阵分别为

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad M^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

幂的求法（续）

同理，$R^0=I_A$, R^3和R^4的矩阵分别是：

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可以得到

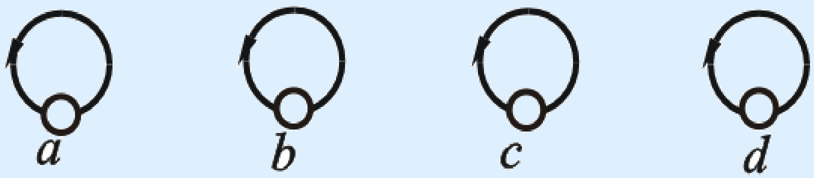
$$R^2=R^4=R^6=\ldots,\quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

幂的求法（续）

$A=\{a,b,c,d\}$

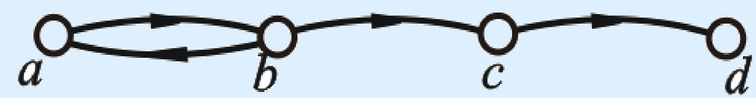
$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$

$R^0, R^1, R^2, R^3,\ldots$的关系图如下图所示



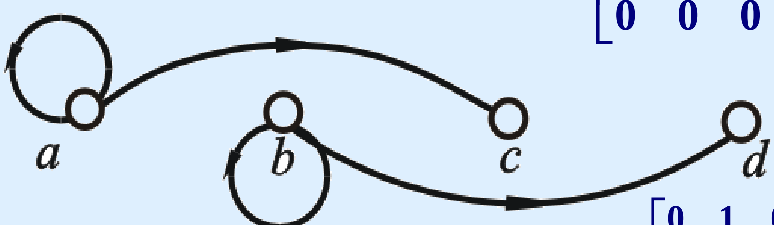
R^0

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$



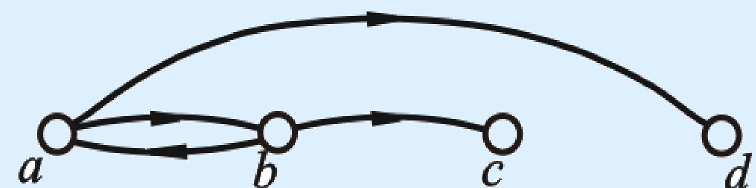
$R^1=R$

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$



$R^2=R^4$

$$M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$



$R^3=R^5$

幂运算的性质

定理3　设A为n元集, R是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得　$R^s = R^t$.

证　R为A上的关系，由于$|A|=n$，A上的不同关系只有 2^{n^2} 个.

当列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s=R^t$.

幂运算的性质（续）

定理4 设 R 是 A 上的关系, $m, n \in N$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的 $m \in N$, 施归纳于 n.

若 $n=0$, 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1},$$

所以对一切 $m, n \in N$ 有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

幂运算的性质（续）

$(R^m)^n = R^{mn}$

(接上页证明)

(2) 对于任意给定的 $m \in \mathrm{N}$，施归纳于n.

若$n=0$, 则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m \times 0}$$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$，则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^m = R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$$

所以对一切 $m,n \in \mathrm{N}$ 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.

4.3 关系的性质

- 自反性
- 反自反性
- 对称性
- 反对称性
- 传递性

自反性与反自反性

定义　设R为A上的关系,

(1) 若$\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\in R)$, 则称$R$在$A$上是自反的.

(2) 若$\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)$, 则称$R$在$A$上是反自反的.

实例:

自反关系：A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A

小于等于关系L_A, 整除关系D_A

反自反关系：实数集上的小于关系

幂集上的真包含关系

实例

例1　$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$

$R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$

$R_3=\{<1,3>\}$

R_2自反,

R_3反自反,

R_1既不是自反也不是反自反的

对称性与反对称性

定义 设R为A上的关系,

(1) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\rightarrow\langle y,x\rangle\in R)$，则称$R$为$A$上对称的关系.

(2) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)$, 则称$R$为$A$上的反对称关系.

实例:

对称关系：A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A和空关系$\varnothing$

反对称关系：恒等关系I_A，空关系是A上的反对称关系.

实例

例2　设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系,

其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$，　$R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3=\{<1,2>,<1,3>\}$，　$R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$

R_1 对称、反对称.

R_2 对称，不反对称.

R_3 反对称，不对称.

R_4 不对称、也不反对称.

反对称$\neq$不对称

传递性

定义　设R为A上的关系, 若

$\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \wedge \langle x,y \rangle \in R \wedge \langle y,z \rangle \in R \rightarrow \langle x,z \rangle \in R)$,

则称R是A上的传递关系.

实例:

A上的全域关系E_A,恒等关系I_A和空关系$\varnothing$

小于等于关系, 小于关系，整除关系，包含关系，真包含关系

实例

例3 设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,3\rangle\}$

R_1 和 R_3 是A上的传递关系

R_2不是A上的传递关系

关系性质的充要条件

设R为A上的关系, 则

(1) R在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R在A上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

(4) R在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

注意:

反对称$\neq$不对称 （I_A）

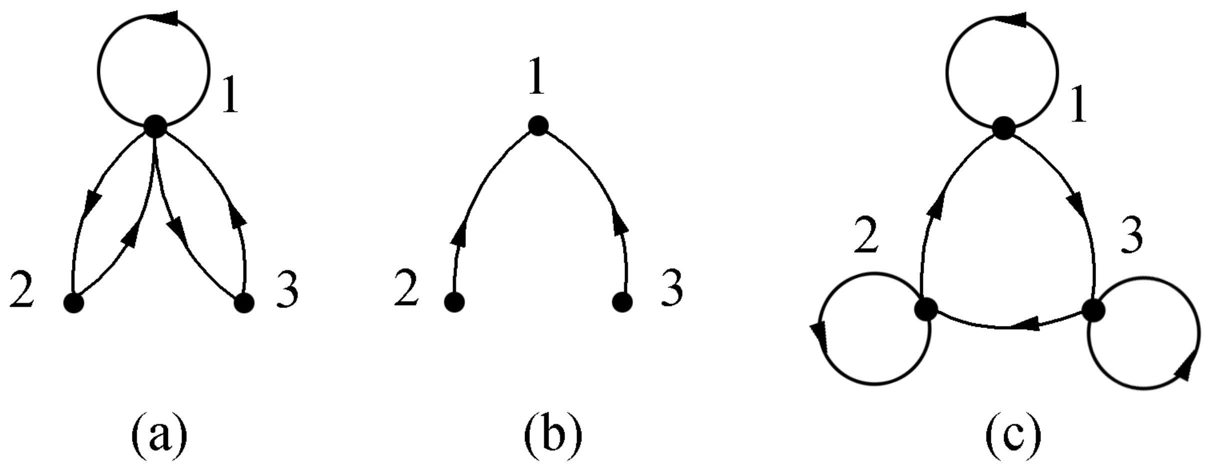
不自反$\neq$反自反

关系性质判别

	自反	反自反	对称	反对称	传递
表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	对M^2中1所在位置, M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边,是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边,是一条有向边(无双向边)	如果顶点x_i连通到x_k, 则从x_i到x_k有边

实例

例8 判断下图中关系的性质, 并说明理由.



(a)<u>不自反也不反自反</u>；对称, 不反对称；不传递.

(b)反自反，不是自反的；反对称，不是对称的；是传递的.

(c)自反，不反自反；反对称，不是对称；不传递.

自反性证明

证明模式 证明R在A上自反

任取x,

$x \in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R$

前提 推理过程 结论

例4 证明若 $I_A \subseteq R$，则 R在A上自反.

证 任取x,

$$x \in A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R$$

因此 R 在 A 上是自反的.

对称性证明

证明模式 证明R在A上对称

任取$<x, y>$

$<x,y>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <y,x>\in R$

前提　　推理过程　　结论

例5 证明若 $R=R^{-1}$, 则R在A上对称.

证 任取$<x,y>$

$<x,y>\in R \Rightarrow <y,x>\in R^{-1} \Rightarrow <y, x>\in R$

因此 R 在 A 上是对称的.

反对称性证明

证明模式 证明R在A上反对称

任取$<x, y>$

$<x,y>\in R \wedge <y,x>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow x=y$

前提 推理过程 结论

例6 证明若 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$，则$R$在$A$上反对称.

证 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in R \wedge <y, x>\in R \Rightarrow <x,y>\in R \wedge <x,y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in I_A \Rightarrow x=y$$

因此 R 在 A 上是反对称的.

传递性证明

证明模式　证明R在A上传递

任取$<x, y>$，$<y, z>$

$<x,y>\in R \wedge <y, z>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <x,z>\in R$

前提　推理过程　结论

例7　证明若 $R\circ R\subseteq R$，则R在A上传递.

证　任取$<x,y>$，$<y, z>$

$<x,y>\in R \wedge <y,z>\in R \Rightarrow <x,z>\in R\circ R \Rightarrow <x,z>\in R$

因此 R 在 A 上是传递的.

运算与性质的关系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

4.4 关系的闭包

- 闭包定义
- 闭包的构造方法
  - 集合表示
  - 矩阵表示
  - 图表示
- 闭包的性质

闭包定义

定义　设R是非空集合A上的关系, R的自反（对称或传递）闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

（1）R'是自反的（对称的或传递的）

（2）$R \subseteq R'$

（3）对A上任何包含R的自反（对称或传递）关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$, 对称闭包记作 $s(R)$, 传递闭包记作 $t(R)$.

闭包的构造方法

定理1 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R) = R \cup R^0$

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

(3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

说明:

- 对于有穷集合A ($|A|=n$) 上的关系, (3)中的并最多不超过 R^n.
- 若 R是自反的，则 $r(R)=R$; 若R是对称的，则 $s(R)=R$; 若R是传递的，则 $t(R)=R$.

闭包的构造方法（续）

设关系R，$r(R)$，$s(R)$，$t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s 和 M_t, 则

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M'$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \ldots$$

E 是和 M 同阶的单位矩阵, M'是 M 的转置矩阵.

注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

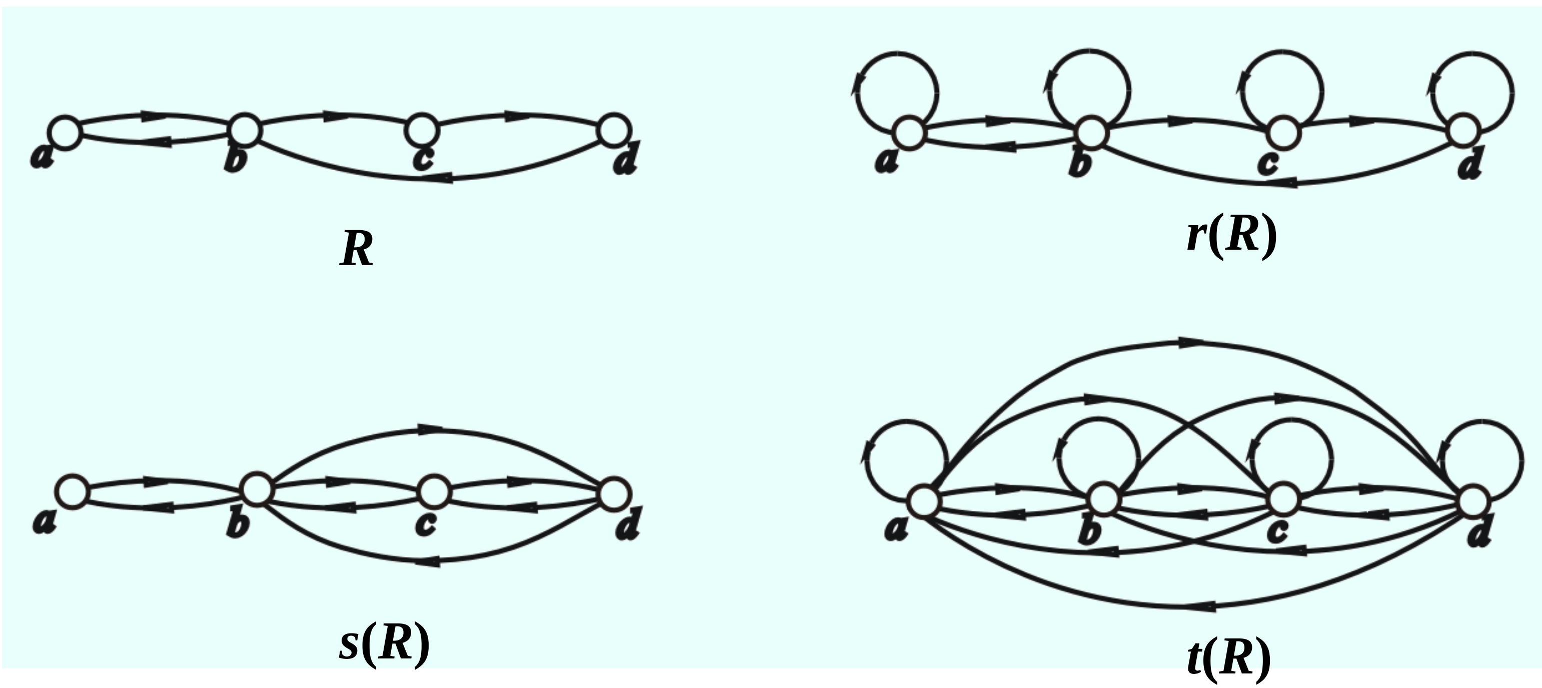
闭包的构造方法（续）

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t , 则G_r, G_s, G_t 的顶点集与G 的顶点集相等. 除了G 的边以外, 以下述方法添加新边:

- 考察G的每个顶点, 如果没有环就加上一个环，最终得到G_r .
- 考察G的每条边, 如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i \neq j$, 则在G中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边，最终得到G_s.
- 考察G的每个顶点 x_i, 找从 x_i 出发的每一条路径，如果从 x_i 到路径中任何结点 x_j 没有边，就加上这条边. 当检查完所有的顶点后就得到图G_t .

实例

例1 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$, R和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.



作业

- 设S={1,2,3,4}，R为S上的关系，关系矩阵为$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则(1)R的关系表达式？
  (2)domR=?,ranR=?
  (3) R∘R的集合表达式？

(4) R^{-1} 的关系图？

(5) $R\restriction\{1,2\}=?$

(6) $R[\{1,2\}]=?$

作业

- 课件53页证明反对角线，对“×”举出反例
  - 必做：

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

  - 选做：全部