主要内容

- 第一部分：数理逻辑，包括命题逻辑和一阶逻辑；（12学时）
- 第二部分：集合论，包括集合的基本概念和运算，二元关系和函数；（12学时）
- 第三部分：图论，包括图的基本概念和几种特殊的图。（15学时）
- 第四部分：组合分析初步，包括基本组合计数、递推方程（5学时）
- 第五部分：代数系统简介，包括二元运算及其性质、代数系统（4学时）

数理逻辑部分

- 第1章 命题逻辑
- 第2章 一阶逻辑

第1章 命题逻辑

1.1 命题符号化及联结词

1.2 命题公式及分类

1.3 等值演算

1.4 范式

1.5 联结词全功能集

1.6 组合电路

1.7 推理理论

1.1 命题符号化及联结词

- 命题与真值
- 原子命题
- 复合命题
- 命题常项
- 命题变项
- 联结词

判断是否命题，将命题符号化并判断真值

1）明年1月张三考研成功

2）如果今天是1号，则明天是3号

3）小李与张明是同学

4）虽然天气很冷，老王还是来了

5）小李跑得真快！

6）x+5>4

7）李佳吃了苹果或者橘子

8）除非天下大雨，否则他不开车上班

9）除非天下大雨，他才开车上班

10）只有天下大雨，他才开车上班

11）只要天下大雨，他就开车上班

12）山无陵, 天地合,乃与君绝

1.2 命题公式及分类

- 命题变项与合式公式
- 公式的赋值
- 真值表
- 命题的分类

  重言式

  矛盾式

  可满足式
- 真值函数

真值函數

问题：含n个命题变项的所有公式共产生多少个互不相同的真值表?

定义 称定义域为{00…0, 00…1, …, 11…1}，值域为{0,1}的函数是n元真值函数，定义域中的元素是长为n的0,1串. 常用$F:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ 表示F是n元真值函数.

共有 2^{2^n} 个n元真值函数.

例如 $F:\{0,1\}^2\to\{0,1\}$，且$F(00)=F(01)=F(11)=0$，$F(01)=1$，则F为一个确定的2元真值函数.

2元真值函数对应的真值表

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

命题公式与真值函数

- 对于任何一个含n个命题变项的命题公式A，都存在惟一的一个n元真值函数F为A的真值表.
- 等值的公式对应的真值函数相同.

下表给出所有2元真值函数对应的真值表, 每一个含2个命题变项的公式的真值表都可以在下表中找到.

例如：$p\to q$, $\neg p\vee q$, $(\neg p\vee q)\vee(\neg(p\to q)\wedge q)$ 等都对应表中的 $F_{13}^{(2)}$

- 评分标准
  - 命题符号化每小题5分共40分
    - 缺前提扣4分
  - 习题1.12每小题20分共60分
    - 公式类型每个4分

情况汇总
——命题符号化

- 命题符号化的4至8错误较多，重点4、6、8

情况汇总
——命题变量的取值顺序

2. 用真值表判断教材习题1.12中公式的类型

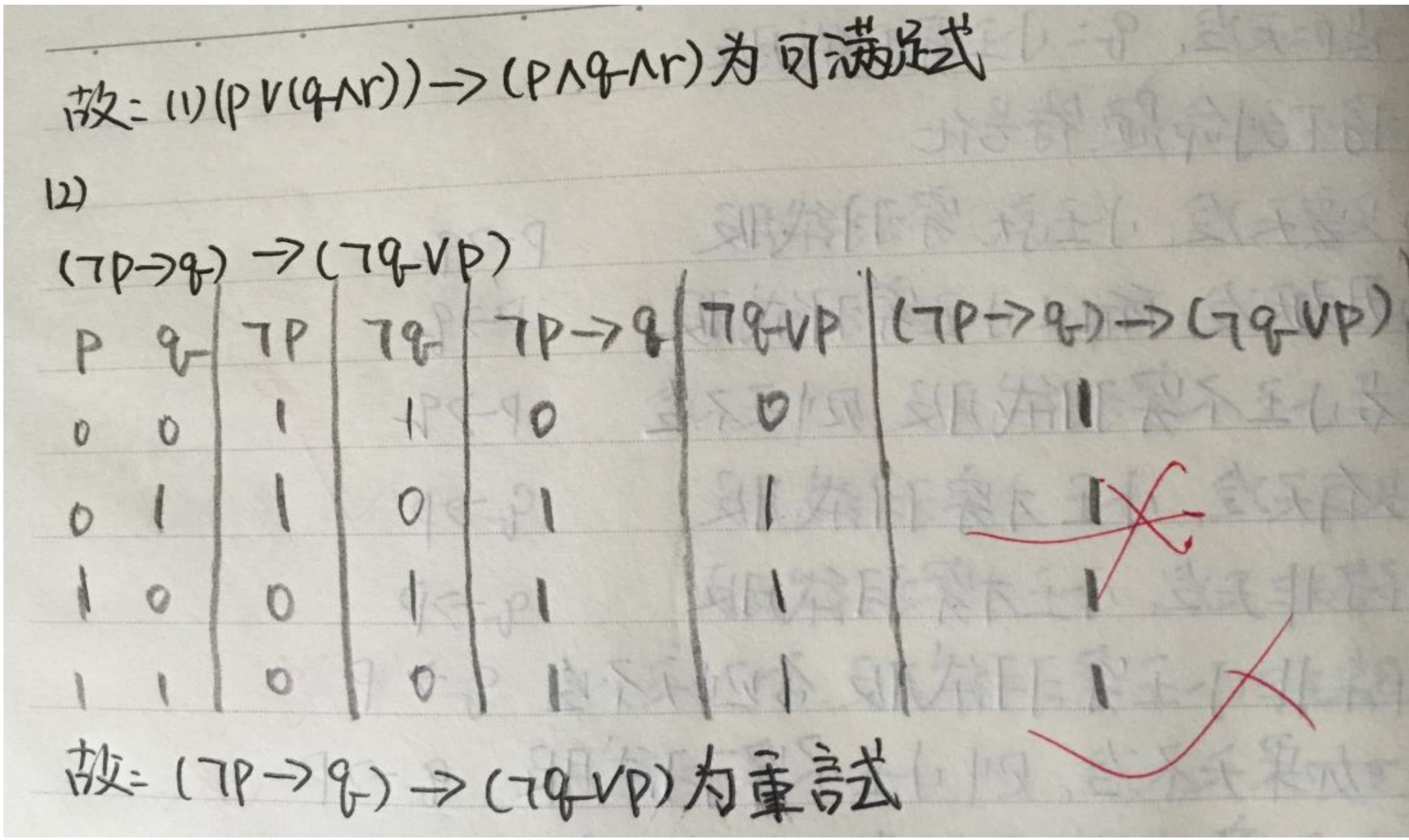
a) $(p\vee(q\wedge r))\to(p\wedge q\wedge r)$

pqr	$q\wedge r$	$p\vee(q\wedge r)$	$p\wedge q$	$p\wedge q\wedge r$	$p\vee(q\wedge r)\to(p\wedge q\wedge r)$
000	0	0	0	0	1
001	0	0	0	0	1
010	0	0	0	0	1
011	1	1	0	0	0
100	0	1	0	0	0
110	0	1	1	0	0
111	1	1	1	1	1
101	0	1	0	0	0

可满足式

情况汇总

——习题1.12中的第二题错误较多



故：(1) $(p\vee(q\wedge r))\rightarrow(p\wedge q\wedge r)$ 为可满足式

(2)

$(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\vee p)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\rightarrow q$	$\neg q\vee p$	$(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\vee p)$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

故：$(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\vee p)$ 为重言式

1.12

解：

(1) $2^3=8$项

p	q	r	$q\wedge r$	$p\wedge q$	$p\vee(q\wedge r)$	$p\wedge q\wedge r$	$(p\vee(q\wedge r))\to(p\wedge q\wedge r)$
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

10分

由该表知：命题公式

$(p\vee(q\wedge r))\to(p\wedge q\wedge r)$是可满足式

(2) $2^2=4$项

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\to q$	$\neg q\vee p$	$(\neg p\to q)\to(\neg q\vee p)$
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

由该表知：命题公式

$(\neg p\to q)\to(\neg q\vee p)$是重言式

情况汇总

真值表中数据的个数不全

情况汇总

——没看课件作业，按照原题回答

1.12 求主析取，主合取，成真，成假赋值。 审题

(1) $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \wedge q \wedge r)$

解：化简原式为 $\neg(p \vee (q \wedge r)) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \wedge (r \vee \neg r)) \vee ((\neg p \wedge \neg r) \wedge (\neg q \vee q)) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

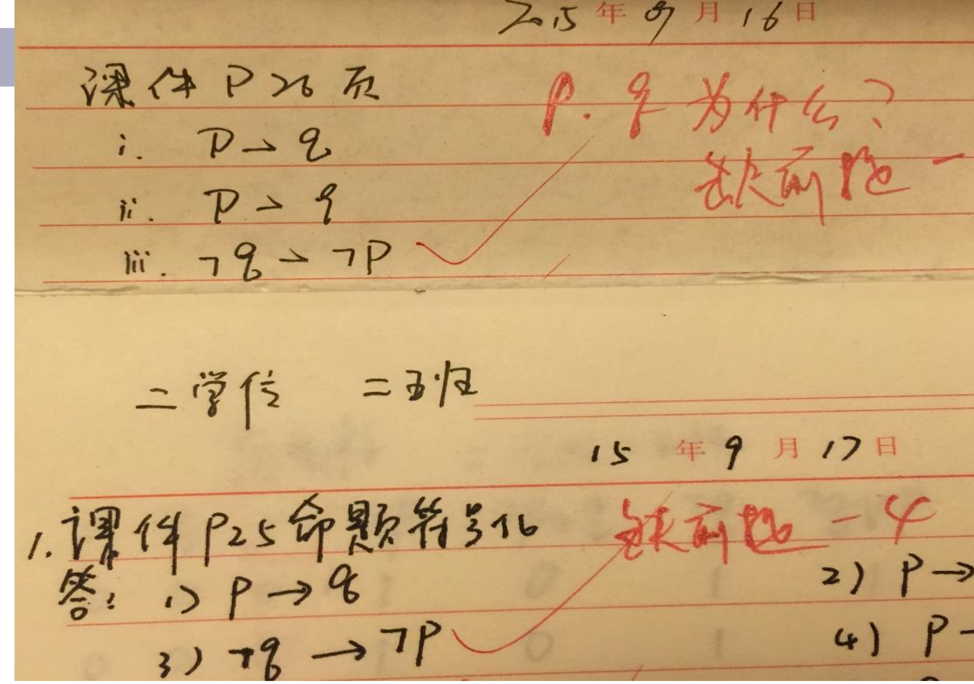
∵原式的主析取范式为 $m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_7$

主合取范式为 $M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$

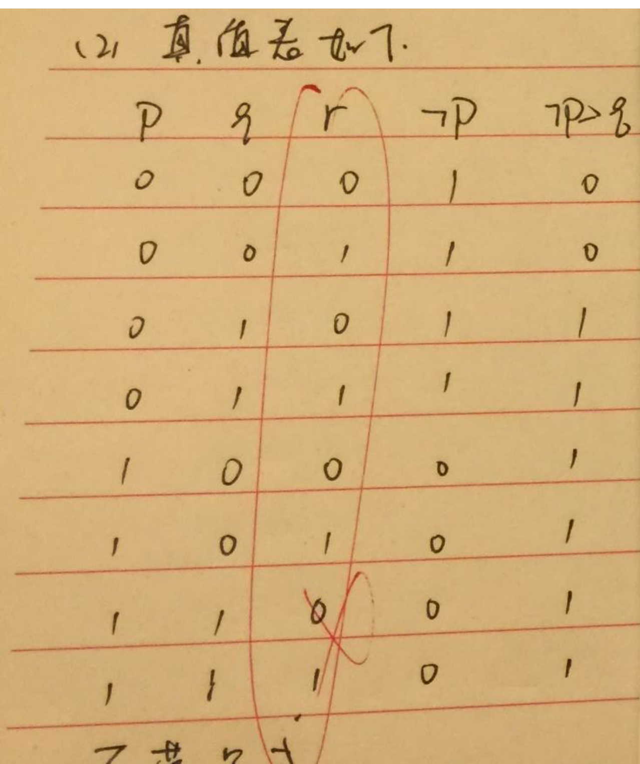
成真赋值为 m_0，m_1，m_2，m_7

成假赋值为 m_3，m_4，m_5，m_6

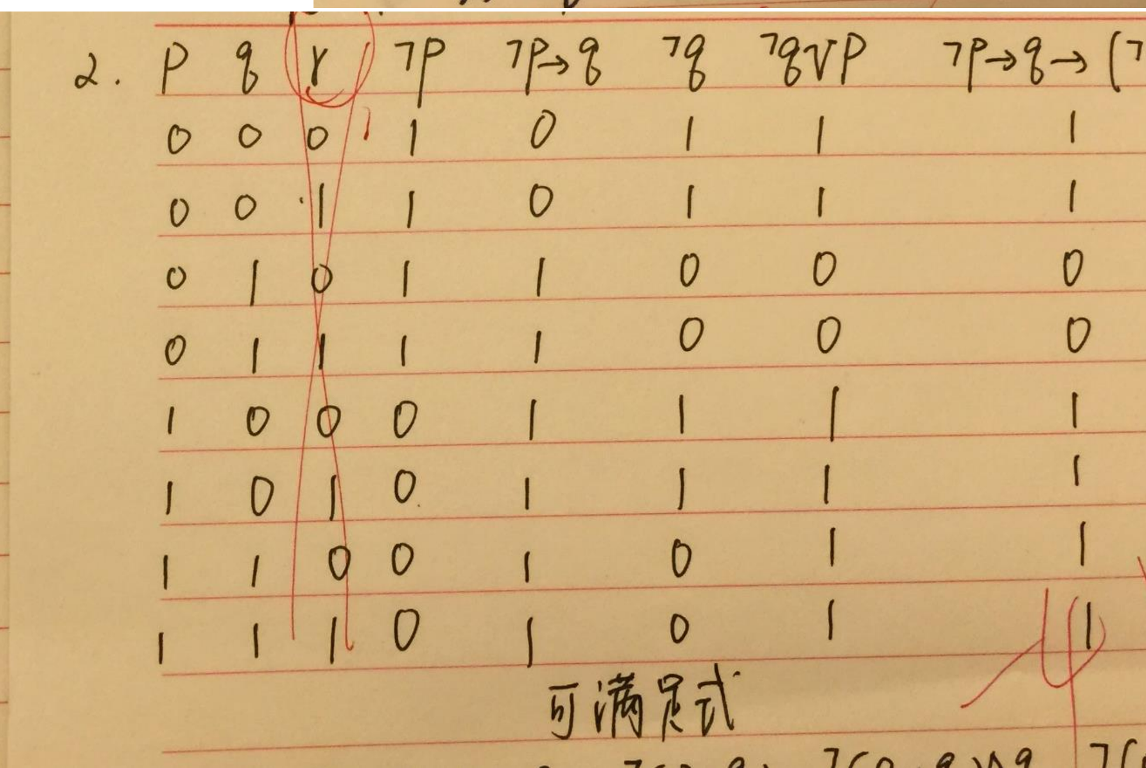
情况汇总
——抄袭示例



课件P26页
i. P→q
ii. P→q
iii. ¬q→¬P
P.q为什么?
缺前提
二学位 二班
15年9月17日
1.课件P25命题符号化
答: 1) P→q
2) P→
3) ¬q→¬P
4) P→
缺前提 -4



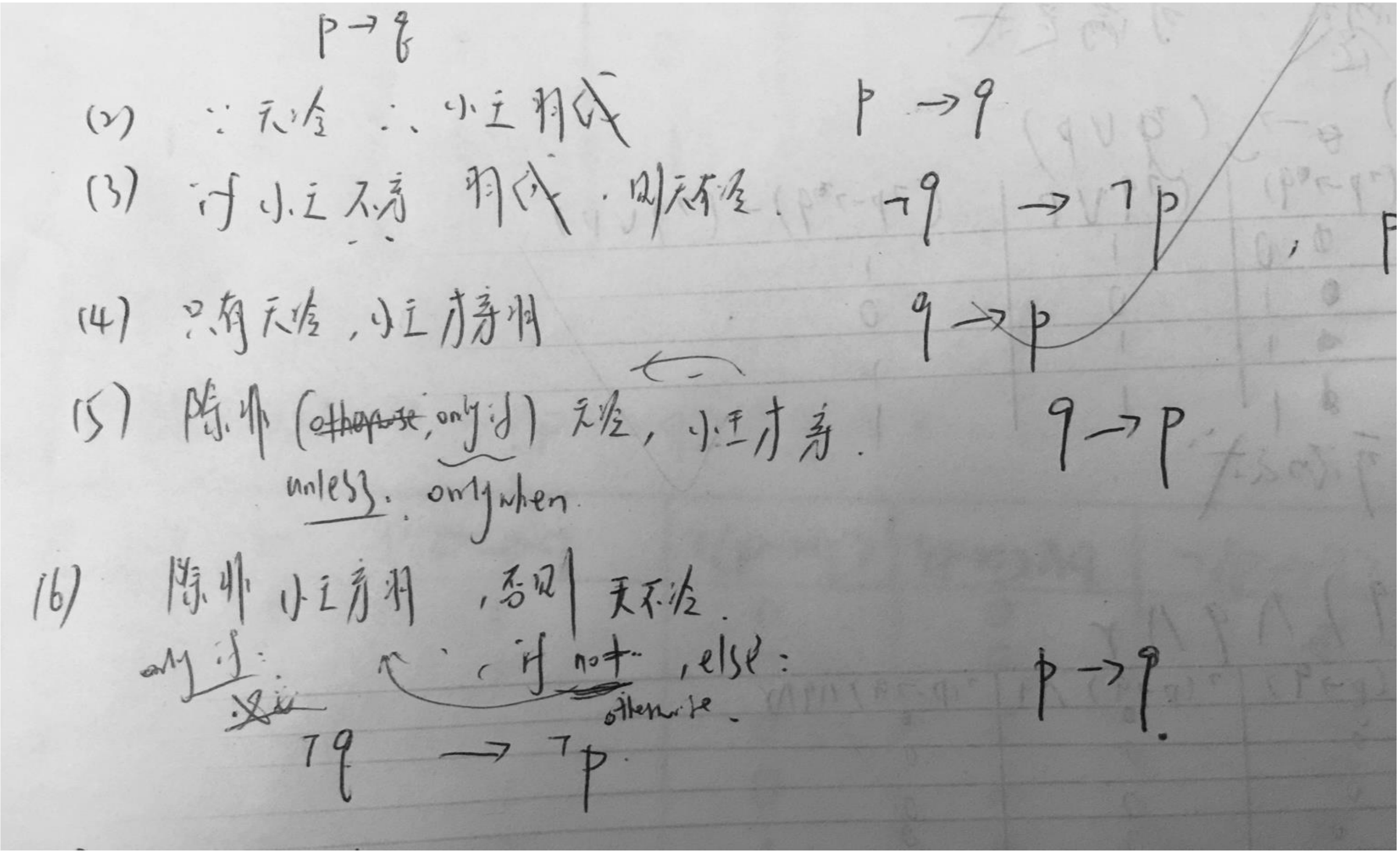
(2) 真值表如下.



可满足式

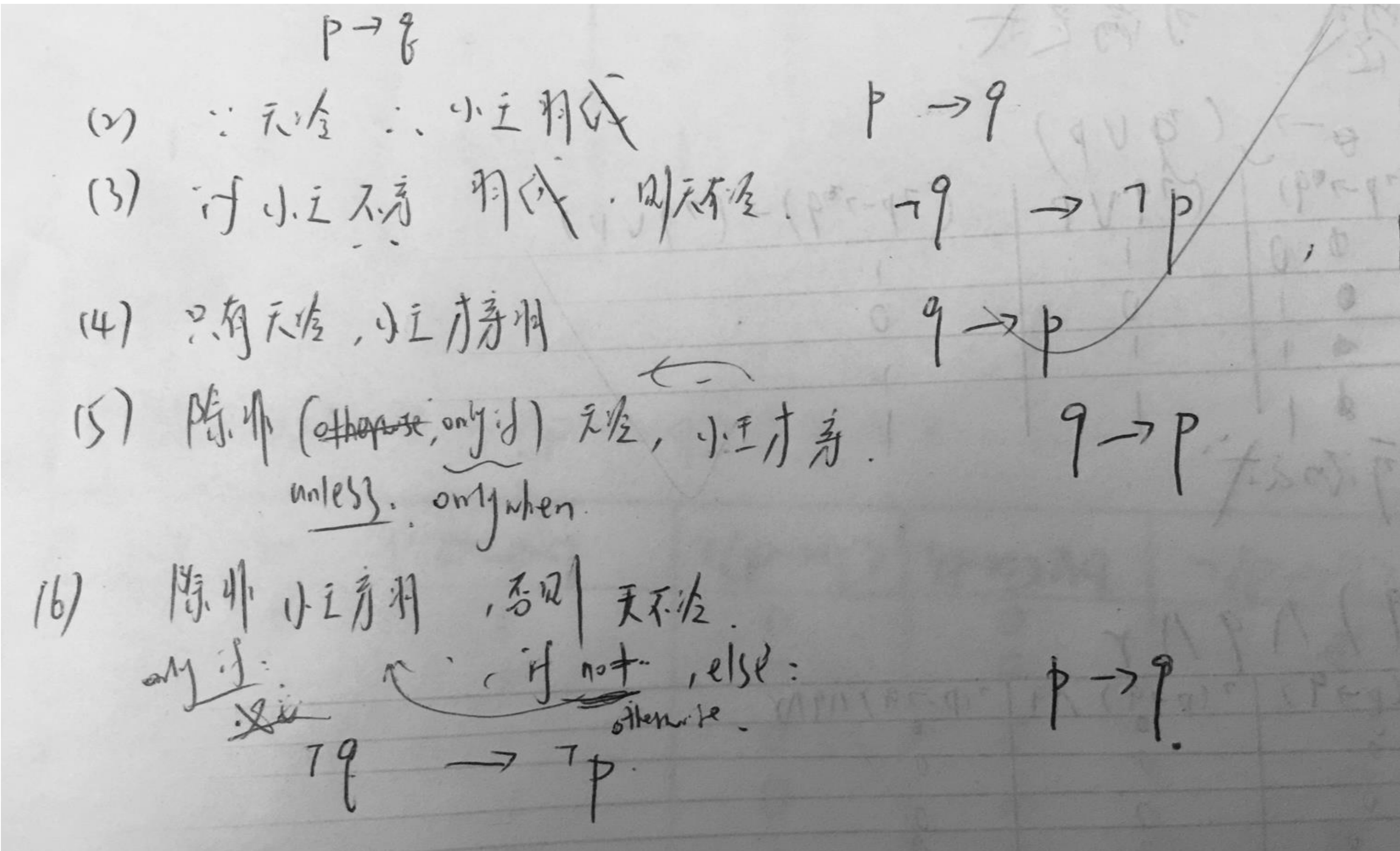
情况汇总

——需要区分作业与草稿



情况汇总

——需要区分作业与草稿



情况汇总

有些问题不是不会是因为不细心，希望以后注意

正确答案及示范

(8) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候．

注意：$p \to q$ 与 $\neg q \to \neg p$ 等值（真值相同）．

解：设 p：天冷；q：小王穿羽绒服 则 p, q 为两个命题．将(1)~(8)分别

符号化如下：

(1) $p \to q$

(2) $p \to q$

(3) $\neg q \to \neg p$ 或符号化为 $p \to q$

(4) $q \to p$

(5) $q \to p$

(6) $p \to q$

(7) $\neg p \to \neg q$ 或符号化为 $q \to p$

(8) $q \to p$

正确答案及示范

解：(1) 表(1)为 $(p\vee(q\wedge r))\rightarrow(p\wedge q\wedge c)$ 这个命题公式的真值表，具体如下：

表1

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee(q\wedge r)$	$p\wedge q$	$p\wedge q\wedge r$	$(p\vee(q\wedge r))\rightarrow(p\wedge q\wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

因为最后一列既有0又有1，所以这个命题公式为非重言式的可满足式

正确答案及示范

(2) 表(2)为命题公式 $(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$ 的真值表，具体如下：

表(2)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to q$	$\neg q \vee p$	$(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

答：因为最后一列既有0，又有1，所以这个命题公式为可满足式。

(3) 表(3)为命题公式 $\neg(p \to q) \wedge q \wedge r$ 的真值表，具体如下：

表(3)

p	q	r	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg(p \to q) \wedge q$	$\neg(p \to q) \wedge q \wedge r$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

答：因为无成真赋值，所这个命题公式为矛盾式。

1.3 命题逻辑等值演算

- 等值式
- 基本等值式
- 等值演算
- 置换规则

等值式

定义 若等价式$A \leftrightarrow B$是重言式，则称A与B等值，记作$A \Leftrightarrow B$，并称$A \Leftrightarrow B$是**等值式**

说明：定义中，$A, B, \Leftrightarrow$均为元语言符号, A或B中可能有哑元出现.

例如，在 $(p \to q) \Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge r))$中，$r$为左边公式的哑元.

用真值表可验证两个公式是否等值

请验证：$p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$

$p \to (q \to r) \not\Leftrightarrow (p \to q) \to r$

基本等值式

双重否定律：$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

等幂律: $A\vee A \Leftrightarrow A$, $A\wedge A \Leftrightarrow A$

交换律: $A\vee B \Leftrightarrow B\vee A$, $A\wedge B \Leftrightarrow B\wedge A$

结合律: $(A\vee B)\vee C \Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$

$(A\wedge B)\wedge C \Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$

分配律: $A\vee(B\wedge C) \Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(A\vee C)$

$A\wedge(B\vee C) \Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

基本等值式(续)

德·摩根律: $\neg(A \lor B) \Leftrightarrow \neg A \land \neg B$

$\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$

吸收律: $A \lor (A \land B) \Leftrightarrow A$, $A \land (A \lor B) \Leftrightarrow A$

零律: $A \lor 1 \Leftrightarrow 1$, $A \land 0 \Leftrightarrow 0$

同一律: $A \lor 0 \Leftrightarrow A$, $A \land 1 \Leftrightarrow A$

排中律: $A \lor \neg A \Leftrightarrow 1$

矛盾律: $A \land \neg A \Leftrightarrow 0$

基本等值式(续)

蕴涵等值式: $A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B$

假言易位: $A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg B\rightarrow \neg A$

等价等值式: $A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$

等价否定等值式: $A\leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A\leftrightarrow \neg B$

归谬论: $(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

牢记这些等值式是继续学习的基础

注意: A,B,C代表任意的命题公式

等值演算与置换规则

等值演算:

由已知的等值式推演出新的等值式的过程

置换规则：若$A \Leftrightarrow B$, 则$\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$

等值演算的基础:

(1) 等值关系的性质：自反、对称、传递

(2) 基本的等值式

(3) 置换规则

应用举例——证明两个公式等值

例1 证明 $p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\rightarrow r$

证 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$

说明:也可从右边开始演算（请做一遍）

因为每一步都用置换规则，故可不写出

熟练后，基本等值式也可以不写出

应用举例——证明两个公式不等值

例2 证明: $p \to (q \to r) \not\Leftrightarrow (p \to q) \to r$

用等值演算不能直接证明两个公式不等值,证明两个公式不等值的基本思想是找到一个赋值使一个成真,另一个成假.

- 方法一：真值表法（自己证）
- 方法二：观察赋值法. 容易看出000, 010等是左边的成真赋值，是右边的成假赋值.
- 方法三：用等值演算先化简两个公式，再观察.

应用举例——判断公式类型

例3 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q \wedge \neg(p \to q)$

解　$q \wedge \neg(p \to q)$

$\Leftrightarrow q \wedge \neg(\neg p \vee q)$

$\Leftrightarrow q \wedge (p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow p \wedge 0$

$\Leftrightarrow 0$

由最后一步可知，该式为矛盾式.

例3 (续)

(2) $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

解 $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

由最后一步可知，该式为重言式.

问：最后一步为什么等值于1？

例3 (续)

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

解 $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$

$\Leftrightarrow p\wedge r$

这不是矛盾式，也不是重言式，而是非重言式的可满足式. 如101是它的成真赋值, 000是它的成假赋值.

总结：A为矛盾式当且仅当$A\Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A\Leftrightarrow 1$

说明：演算步骤不惟一, 应尽量使演算短些

1.4 范式

- 析取范式与合取范式

- 主析取范式与主合取范式

析取范式与合取范式

文字:命题变项及其否定的总称

简单析取式:有限个文字构成的析取式

如 $p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

简单合取式:有限个文字构成的合取式

如 $p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

析取范式:由有限个简单合取式组成的析取式

$A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_r$, 其中$A_1,A_2,\ldots,A_r$是简单合取式

合取范式:由有限个简单析取式组成的合取式

$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_r$, 其中$A_1,A_2,\ldots,A_r$是简单析取式

析取范式与合取范式(续)

范式:析取范式与合取范式的总称

公式A的析取范式: 与A等值的析取范式

公式A的合取范式: 与A等值的合取范式

说明:

单个文字既是简单析取式，又是简单合取式

$p\wedge\neg q\wedge r$, $\neg p\vee q\vee\neg r$既是析取范式，又是合取范式

(为什么?)

命题公式的范式

定理 任何命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式.

求公式A的范式的步骤:

(1) 消去A中的$\rightarrow, \leftrightarrow$（若存在）

(2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

(3) 使用分配律

$\wedge$对$\vee$分配（析取范式）

$\vee$对$\wedge$分配（合取范式）

公式的范式存在，但不惟一

求公式的范式举例

例 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $A=(p\to\neg q)\vee\neg r$

解 $(p\to\neg q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee\neg r$ （消去→）

$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg r$ （结合律）

这既是*A*的析取范式（由3个简单合取式组成的析取式），又是*A*的合取范式（由一个简单析取式组成的合取式）

求公式的范式举例(续)

(2) $B=(p\to\neg q)\to r$

解　$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\to r$　（消去第一个→）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$　（消去第二个→）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$　（否定号内移——德·摩根律）

这一步已为析取范式（两个简单合取式构成）

继续：　$(p\wedge q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$　（∨对∧分配律）

这一步得到合取范式（由两个简单析取式构成）

极小项与极大项

定义 在含有n个命题变项的简单合取式(简单析取式)中，若每个命题变项均以文字的形式出现且仅出现一次，称这样的简单合取式(简单析取式)为极小项(极大项）.

说明:

- n个命题变项产生2^n个极小项和2^n个极大项
- 2^n个极小项（极大项）均互不等值
- 在极小项和极大项中文字均按下标或字母顺序排列

极小项与极大项(续)

说明（续）：

- 用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示. 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示，m_i(M_i)称为极小项(极大项)的名称.

- m_i与M_i的关系：$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$，$\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

极小项与极大项(续)

由p, q两个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

由p, q, r三个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

主析取范式与主合取范式

主析取范式：由极小项构成的析取范式

主合取范式：由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为p, q, r时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ 是主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_5$ 是主合取范式

A的主析取范式：与A等值的主析取范式

A的主合取范式：与A等值的主合取范式.

主析取范式与主合取范式(续)

定理 任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是唯一的.

用等值演算法求公式的主范式的步骤:

(1) 先求析取范式（合取范式）

(2) 将不是极小项（极大项）的简单合取式（简单析取式）化成与之等值的若干个极小项的析取（极大项的合取），需要利用同一律（零律）、排中律（矛盾律）、分配律、幂等律等.

(3) 极小项（极大项）用名称m_i（M_i）表示，并按角标从小到大顺序排序.

求公式的主范式

例 求公式 $A=(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$的主析取范式与主合取范式.

(1) 求主析取范式

$(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$,　　（析取范式）　①

$(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_6\vee m_7$,　②

求公式的主范式(续)

r

$\Leftrightarrow(\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$（主析取范式）

求公式的主范式(续)

(2) 求A的主合取范式

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$,　　（合取范式）　①

$p\vee r$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$,　②

求公式的主范式(续)

$q \vee r$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee q \vee r$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_4$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$ （主合取范式）

由公式*A*的主析取范式确定它的主合取范式

- 步骤

1. 写出A的主析取范式
2. 写出以A的主析取范式中没出现的极小项的角码为角码的极大项
3. 由这些极大项构成的合取式即为A的主合取范式

设命题公式A中含n个命题变项，且设A的主析取范式中含k个极小项$m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_k}$, 则¬A的主析取范式中必含其余的$2^n$-k个极小项，设为$m_{j_1}, m_{j_2}, \ldots, m_{j_{2^n-k}}$，即

$$\neg A \Leftrightarrow m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \ldots \vee m_{j_{2^n-k}}$$

$$A \Leftrightarrow \neg\neg A \Leftrightarrow \neg(m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \ldots \vee m_{j_{2^n-k}})$$

$$\Leftrightarrow \neg m_{j_1} \wedge \neg m_{j_2} \wedge \ldots \wedge \neg m_{j_{2^n-k}}$$

$$\Leftrightarrow M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \ldots \wedge M_{j_{2^n-k}}$$

用公式*A*的真值表求*A*的主范式

- 求主析取范式的步骤

1. 找出A的真值表中所有的成真赋值
2. 计算成真赋值对应的十进制数
3. 顺序写出以上述十进制数作为角码的极小项即可构造A的主析取范式

主范式的用途——与真值表相同

(1) 求公式的成真赋值和成假赋值

例如 $(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$,

其成真赋值为001, 011, 101, 110, 111,

其余的赋值 000, 010, 100为成假赋值.

类似地，由主合取范式也可立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的用途(续)

(2) 判断公式的类型

设A含n个命题变项，则

A为重言式$\Leftrightarrow A$的主析取范式含2^n个极小项

$\Leftrightarrow A$的主合取范式为1.

A为矛盾式$\Leftrightarrow A$的主析取范式为0

$\Leftrightarrow A$的主合取范式含2^n个极大项

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow A$的主析取范式中至少含一个且不含全部极小项

$\Leftrightarrow A$的主合取范式中至少含一个且不含全部极大项

主范式的用途(续)

(3) 判断两个公式是否等值

例 用主析取范式判断下述两个公式是否等值：

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

解 $p\to(q\to r) = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\to r = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\to q)\to r = m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

故(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

说明：

由公式*A*的主析取范式确定它的主合取范式，反之亦然.

用公式*A*的真值表求*A*的主范式.

主范式的用途(续)

例 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件:

(1)若赵去,钱也去;

(2)李、周两人中至少有一人去;

(3)钱、孙两人中有一人去且仅去一人;

(4)孙、李两人同去或同不去;

(5)若周去,则赵、钱也去.

试用主析取范式法分析该公司如何选派他们出国?

例 (续)

解此类问题的步骤为：

① 将简单命题符号化

② 写出各复合命题

③ 写出由②中复合命题组成的合取式

④ 求③中所得公式的主析取范式

例 (续)

解 ① 设p：派赵去，q：派钱去，r：派孙去，

s：派李去，u：派周去.

② (1) $(p\to q)$ (1) 若赵去，钱也去；

(2) $(s\vee u)$ (2) 李、周两人中至少有一人去；

(3) $((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))$ (3) 钱、孙两人中有一人去且仅去一人；

(4) $((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))$ (4) 孙、李两人同去或同不去；

(5) $(u\to(p\wedge q))$ (5) 若周去，则赵、钱也去.

③ (1) ~ (5)构成的合取式为

$$A=(p\to q)\wedge(s\vee u)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\wedge((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))\wedge(u\to(p\wedge q))$$

例 (续)

④ $A \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$

结论：由④可知，*A*的成真赋值为00110与11001，因而派孙、李去（赵、钱、周不去）或派赵、钱、周去（孙、李不去）.

*A*的演算过程如下：

$A \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q)) \wedge$

$((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$ （交换律）

$B_1 = (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$

$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r))$ （分配律）

例 (续)

$B_2 = (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q))$

$\Leftrightarrow ((s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge u))$ （分配律）

$B_1 \wedge B_2 \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u)$

$\vee (q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge u)$

再令 $B_3 = ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$

得 $A \Leftrightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge B_3$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$

注意：在以上演算中多次用矛盾律

要求：自己演算一遍

作业

教材

- **P26**例**1.26**，分别用等值演算法（写出所使用的基本等值式）、主析取范式法（矛盾式不用写）、主合取范式法（重言式不用写）判断。
- **P34**习题**1.15**