



假设检验

主讲人：刘宏志

liuhz@ss.pku.edu.cn



北京大学



引例：汽车改进

- A汽车公司对本公司的A1型号汽车的发动机系统进行了一系列改进，提高了启动速度，降低了噪音，改称为A2型。
- 节油是汽车的一个卖点，改进前的A1型汽车油耗较高，每百公里油耗为8.48升，公司希望改进后的车型比改进前节油，至少不比改进前更废油。
- 为此，随机抽取了15辆A2型汽车做试验，测得15辆汽车的每百公里耗油量的数据如下表，其平均数为8.377升。

8.50	8.75	8.33	8.21	8.52
8.30	8.31	8.19	8.40	8.86
8.41	8.01	8.20	8.26	8.39



北京大学



引例：汽车改进

- 基于此数据，**技术部**经理认为可以**肯定**改进后的汽车**更省油**。
- 公司**质量部**经理对此结论有不同看法，他认为这个现象有**可能**是由**抽样**的**随机性**造成的。
- 质量部的张工程师通过**计算**，得出结论：以现有的数据并**不能认为**改进前后汽车的油耗**有明显变化**。
- 张工是怎样作出他的统计分析结论的？



北京大学



假设检验

- 根据**样本信息检验**关于总体的某个**假设**是否正确
- 逻辑上运用**反证法**，统计上依据**小概率原理**
- 小概率：
 - 在一次试验中，一个**几乎不可能发生**的事件发生的概率
 - 概率是0~1之间的一个数，因此小概率就是接近0的一个数
 - R. Fisher 把**1/20**作为标准，即比**0.05**小的概率被认为是小概率
- 小概率原理：
 - 小概率事件在一次实验中几乎是不可能发生的



北京大学



假设检验

- 基本思想：
 - 在一次试验中小概率事件发生，就有理由拒绝原假设
- 一般步骤：
 - 首先假设总体参数某项取值**为真**，即其**发生可能性很大**
 - 然后**抽取**一个**样本**进行观察
 - 如果**样本**信息显示与事先**假设相反**的结果且差别很大，则说明**原来假定的小概率事件**在一次实验中**发生了**
 - 这是一个**违背小概率原理**的不合理现象，因此**有理由怀疑和拒绝原假设**
 - 否则不能拒绝原假设

不能拒绝原假设是否意味原假设为真？



北京大学



小概率原理：示例

- 问题：

- 某工厂质检部门规定该厂产品次品率不超过4%方能出厂
- 今从1000件产品中抽出10件，经检验有4件次品
- 问这批产品是否能出厂？

- 分析：

- 假设这批产品的次品率 $P \leq 4\%$ （原假设）
- 则可计算事件“抽10件产品有4件次品”的出现概率为：
$$P_{10}(4) = C_{10}^4 (0.04)^4 (1 - 0.04)^6 = 0.00042$$
- 可见，**概率是相当小的**，1万次实验中可能出现4次
- 概率如此小的事件在**一次实验**中**居然发生了**，这是**不合理的**，
- 而不合理的**根源**在于**假设次品率 $P \leq 4\%$**
- 因而认为假设次品率 $P \leq 4\%$ 是不能成立的
- 故按质检部门的规定，这批产品不能出厂



北京大学



假设检验

假设检验



参数假设检验

非参数假设检验

总体分布已知，检验关于未知参数的某个假设

总体分布未知时的假设检验问题



北京大学



案例：旅游平均费用

某旅游机构根据过去资料对国内旅游者的旅游费用进行分析,发现在10日的旅游时间中,旅游者用的车费、住宿费、膳食费及购买纪念品等方面的费用 X 是一个近似服从正态分布的随机变量,其平均值为1010元,标准差为205元。

而某研究所抽取了样本容量为400的样本,作了同样内容的调查,得到样本平均数为1250元。

若把旅游机构的分析结果看作是对总体参数的一种假设,这种假设能否接受?



北京大学



案例：旅游平均费用

- 分析：

- 一般用 H_0 表示所提出的假设，称之为原假设

- 用 H_1 表示与原假设对立的假设，称之为备择假设

- $H_0: \mu=1010$; $H_1: \mu \neq 1010$

- 假设 H_0 成立，则总体 $X \sim N(1010, 205^2)$

- 样本均值统计量: $\bar{X} \sim N(1010, \frac{205^2}{400})$

- $Z = \frac{\bar{X}-1010}{205/\sqrt{400}} \sim N(0,1)$

- 取 $\alpha=0.05$, 则 $P(|Z| > Z_{\alpha/2}) = \alpha$, 即 $P(|Z| > 1.96) = 0.05$

- Z 落在区间 $(-1.96, 1.96)$ 之外的概率仅有0.05，是一个很小的概率，在一次试验当中几乎不可能发生的

- 代入样本数据 $\bar{x} = 1250$, 得 $z = \frac{\bar{x}-1010}{205/\sqrt{400}} = \frac{1250-1010}{205/\sqrt{400}} = 23.4 > 1.96$

- 结论：

- 有理由怀疑 $H_0: \mu=1010$, 即认为平均费用不是1010元。



北京大学



假设检验的形式

原假设(null hypothesis)

1. 研究者想收集证据予以反对的假设
2. 又称“0假设”
3. 总是有符号 $=$, \leq 或 \geq
4. 表示为 H_0

例如, $H_0: \mu = 10\text{cm}$

备择假设(alternative hypothesis)

1. 研究者想收集证据予以支持的假设
2. 也称“研究假设”
3. 总是有符号 \neq , $<$ 或 $>$
4. 表示为 H_1

例如, $H_1: \mu \neq 10\text{cm}$

注意：原假设总是有等号： $=$ 或 \leq 或 \geq 。



北京大学



双侧检验与单侧检验

假设	研究的问题（总体均值检验）		
	双侧检验	左侧检验	右侧检验
H_0	$\bar{X} = \bar{X}_0$	$\bar{X} \geq \bar{X}_0$	$\bar{X} \leq \bar{X}_0$
H_1	$\bar{X} \neq \bar{X}_0$	$\bar{X} < \bar{X}_0$	$\bar{X} > \bar{X}_0$

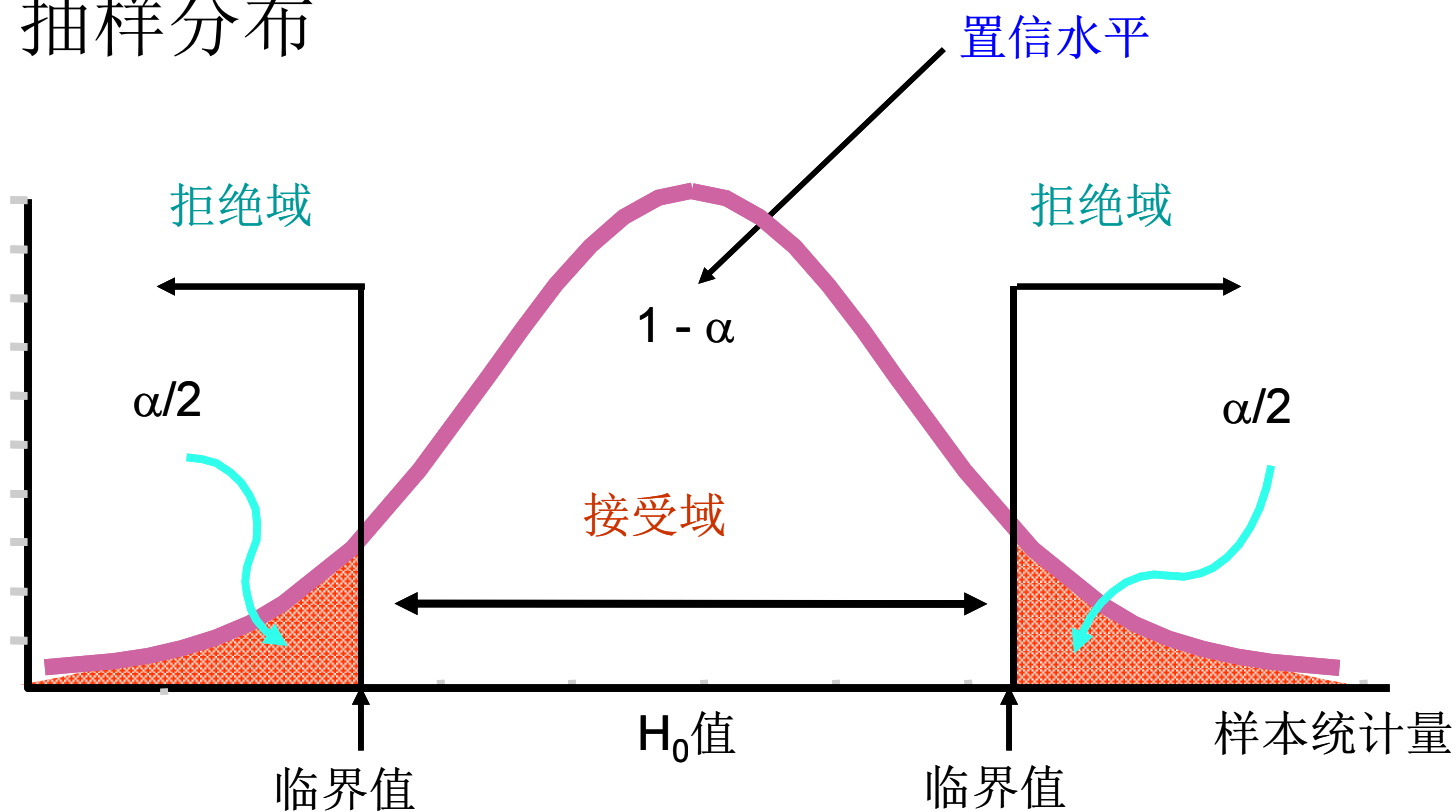


北京大学



双侧检验示意图

抽样分布

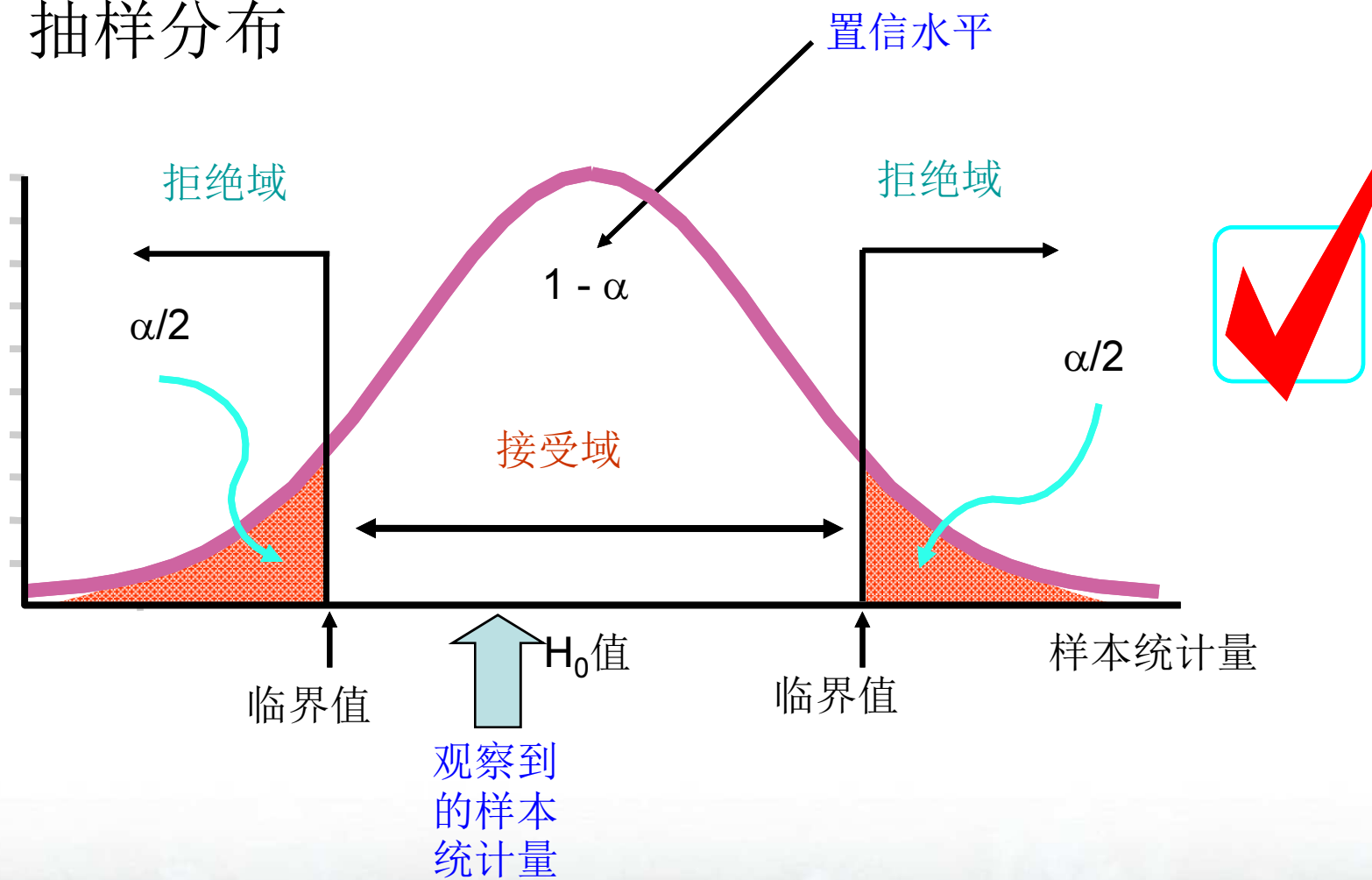


北京大学



双侧检验示意图

抽样分布

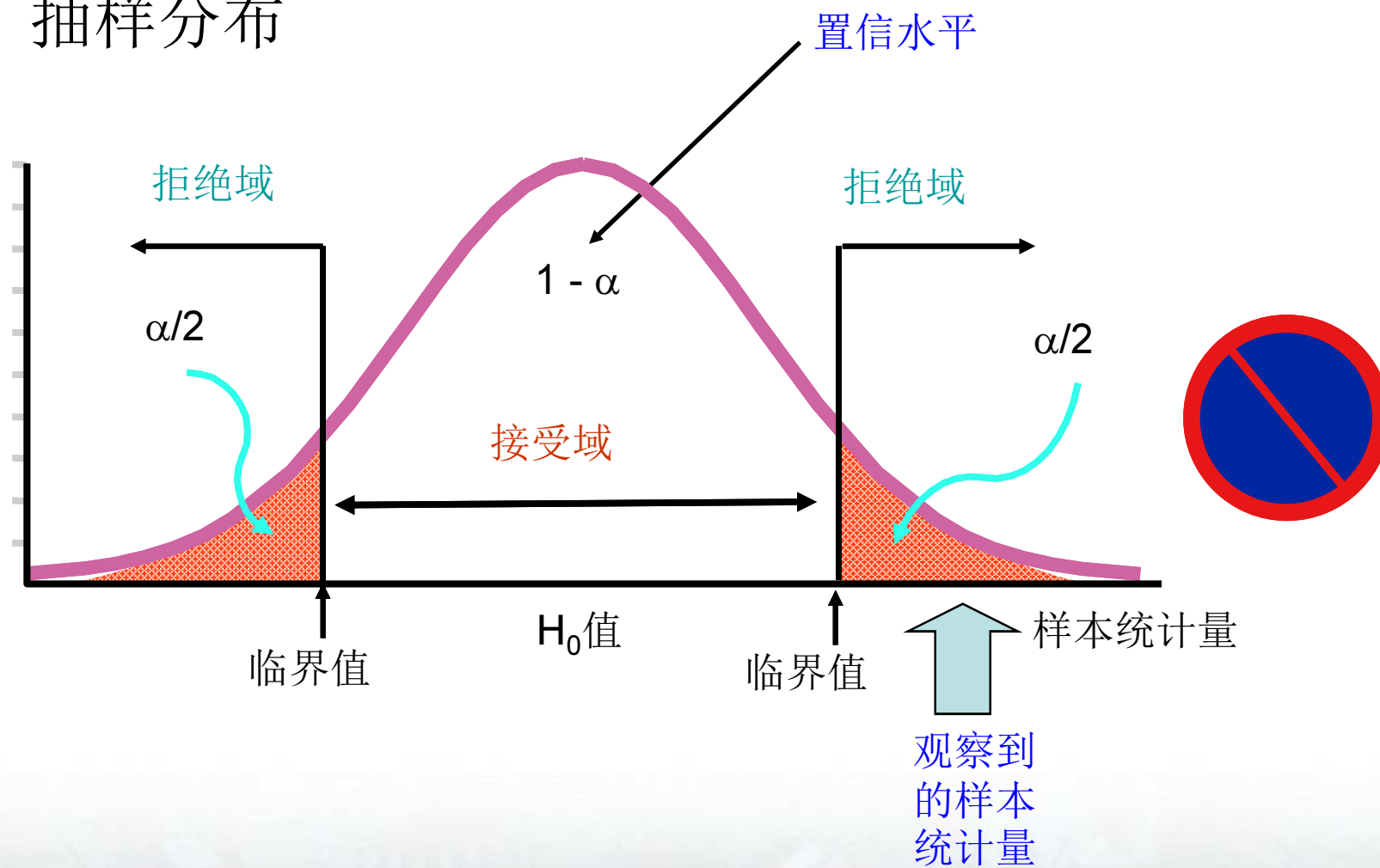


北京大学



双侧检验示意图

抽样分布

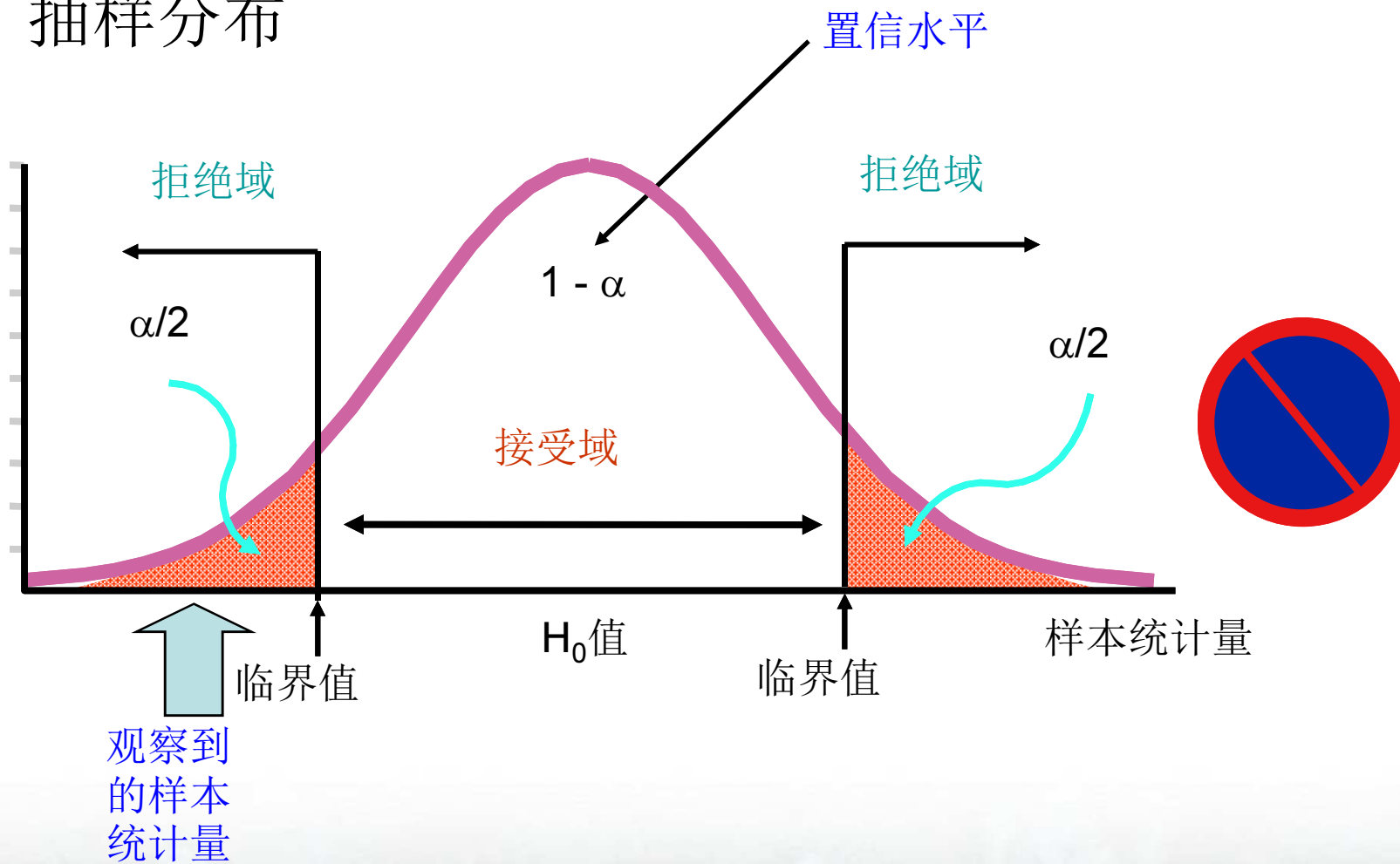


北京大学



双侧检验示意图

抽样分布

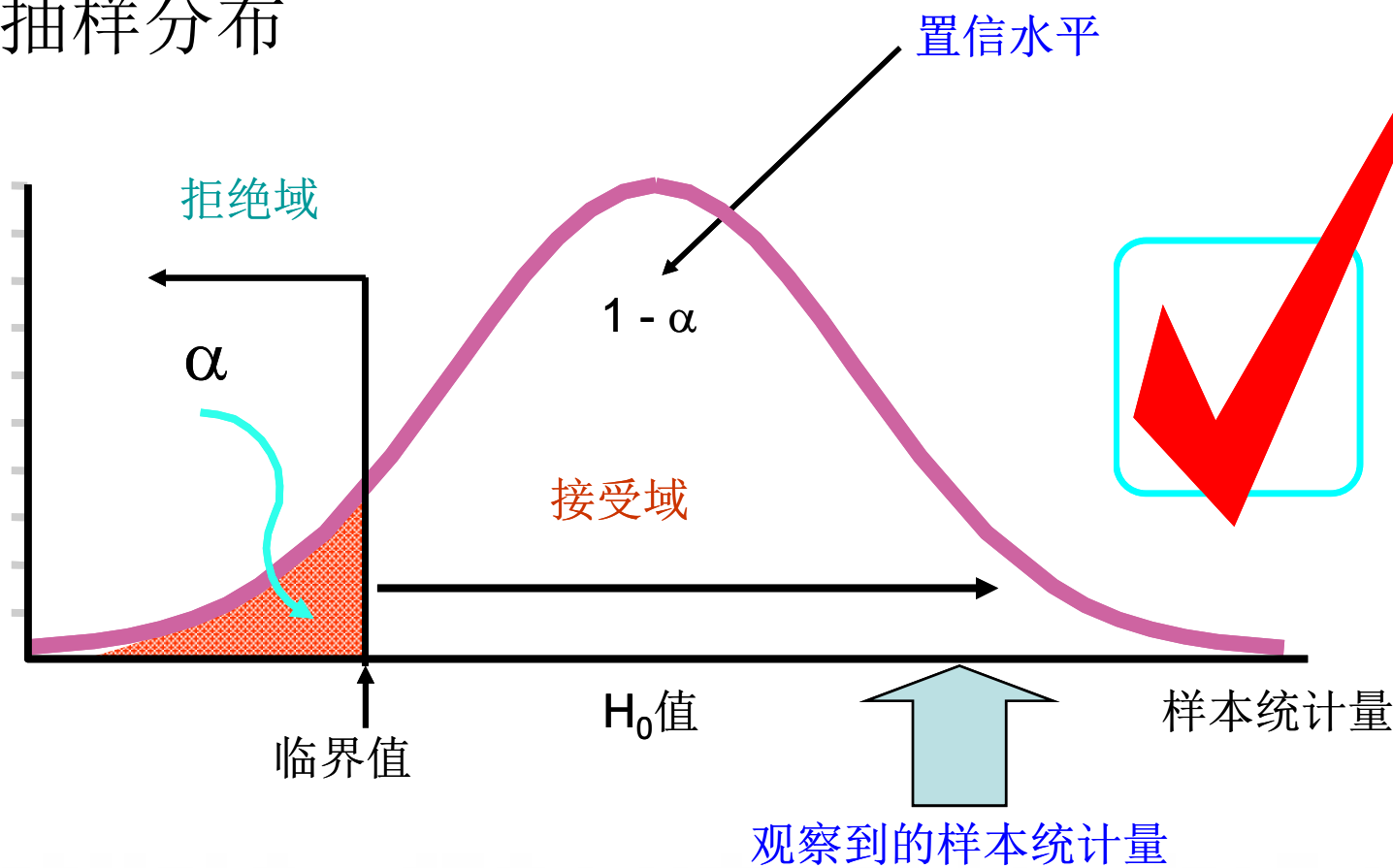


北京大学



左侧检验示意图

抽样分布

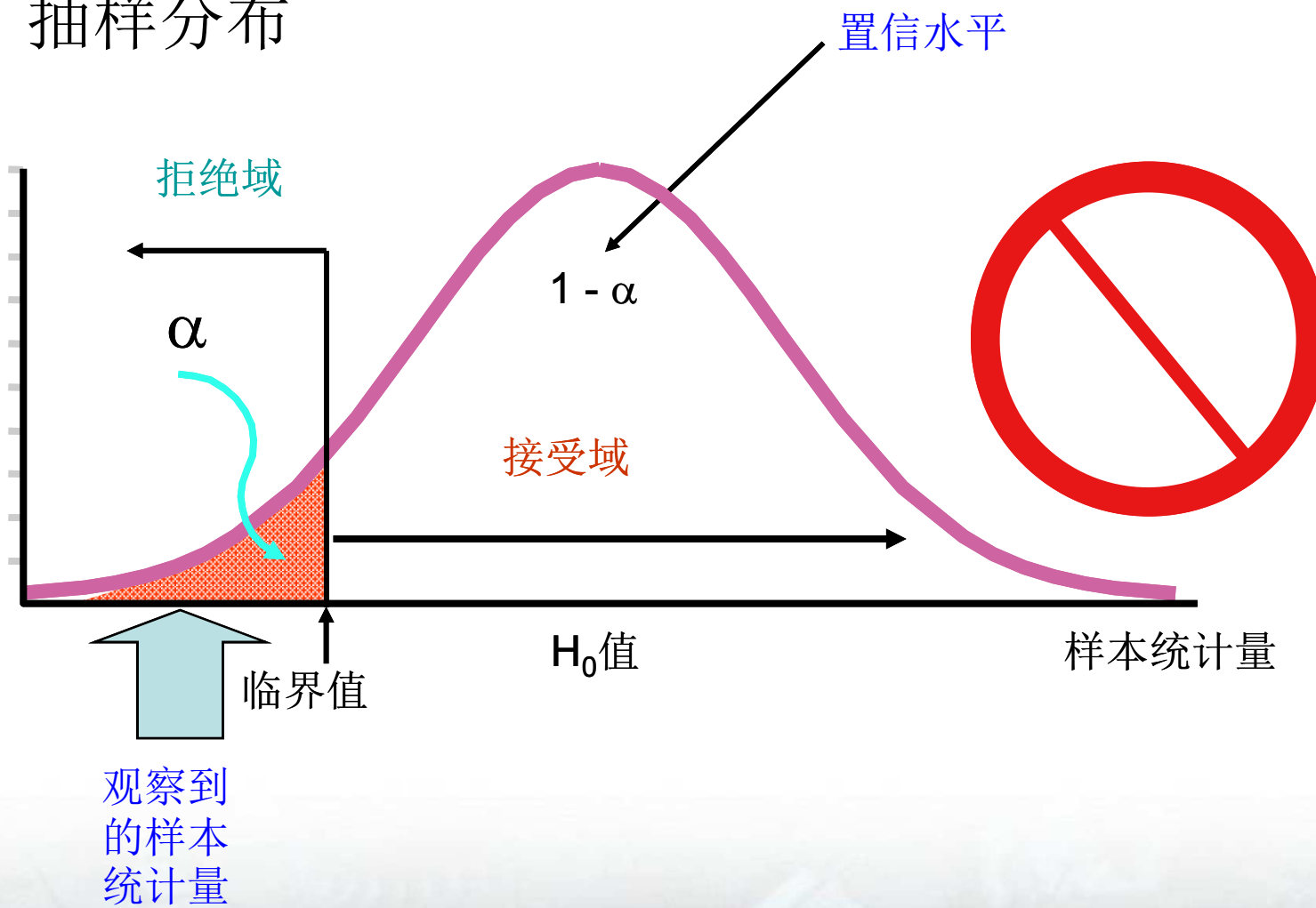


北京大学



左侧检验示意图

抽样分布

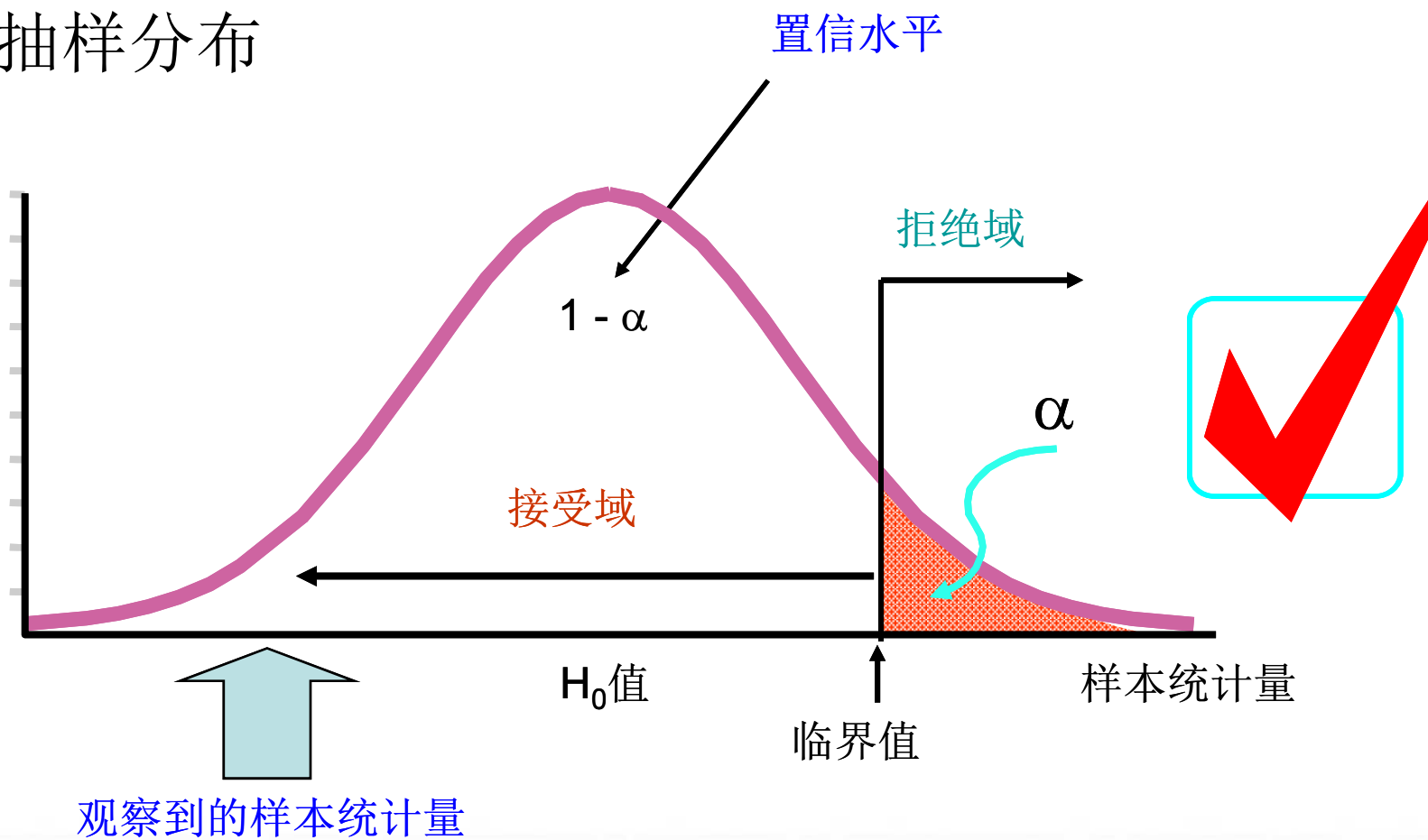


北京大学



右侧检验示意图

抽样分布

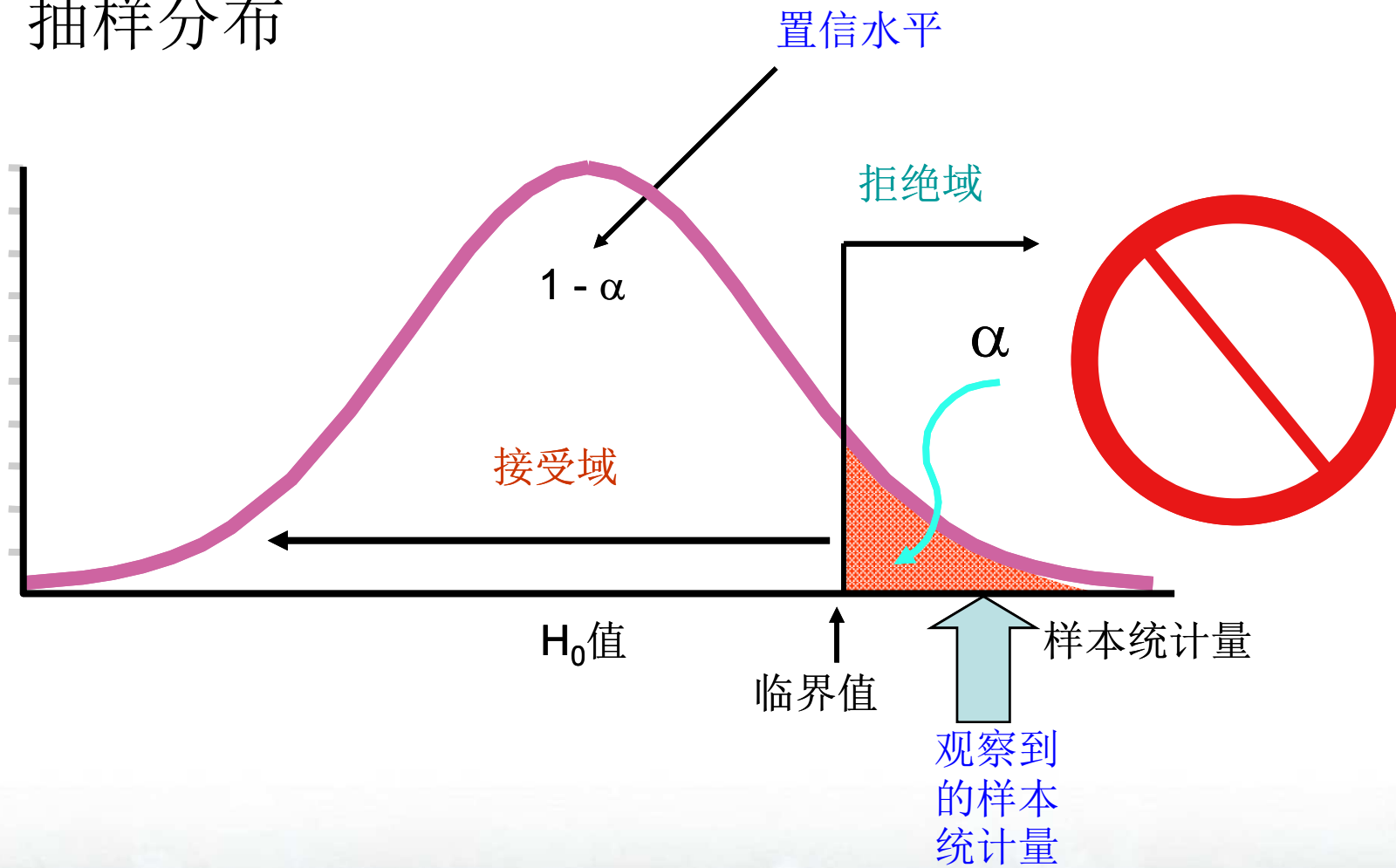


北京大学



右侧检验示意图

抽样分布



北京大学



假设检验的两类错误

假设检验会不会犯错误呢？

作出结论的依据是

小概率原理

不是一定不发生

小概率事件在一次试验中基本上不会发生



北京大学



假设检验的两类错误

第一类错误： 拒绝正确的原假设，简称“**拒真**”；

第二类错误： 接受错误的原假设，简称“**纳伪**”

		总体情况	
		H_0 正确	H_0 错误
结论	接受 H_0	正确结论	第二类错误
	拒绝 H_0	第一类错误	正确结论

两类错误发生的概率表示如下：

α ——第一类错误发生的概率，被称为**显著性水平**

β ——第二类错误发生的概率；

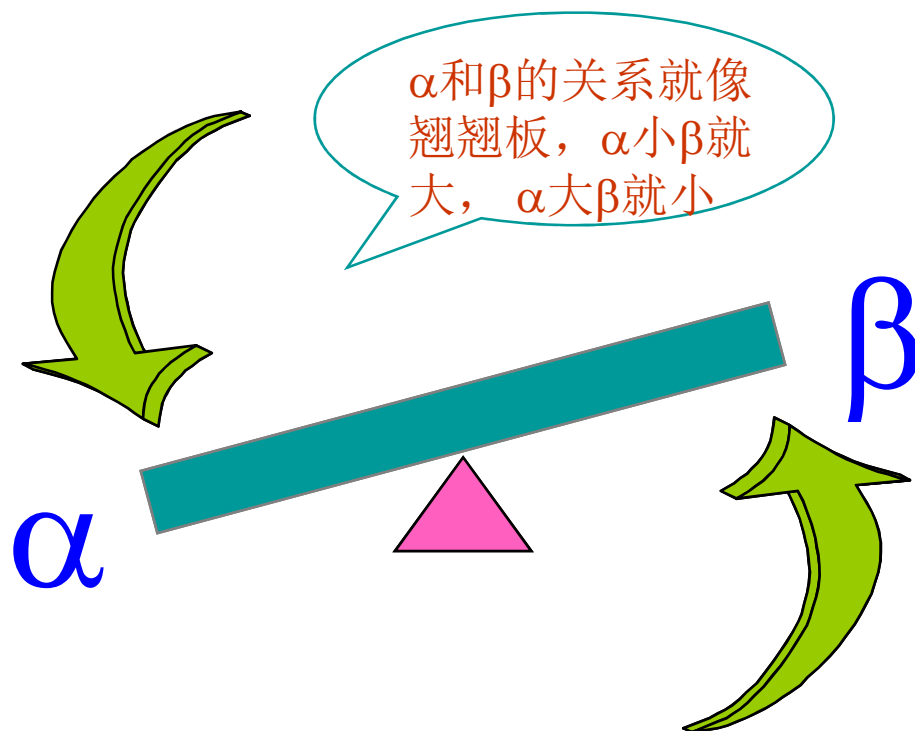
显著性水平 α 取值由研究者**事先确定**，常见取值：0.01, 0.05, 0.10



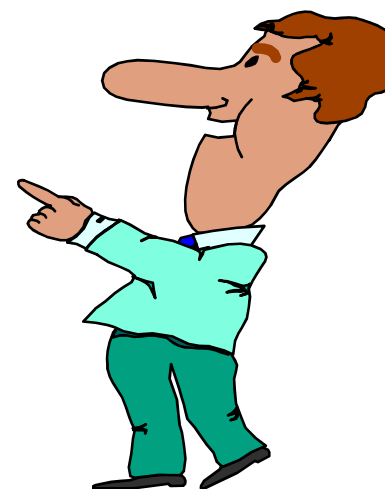
北京大学



α 错误和 β 错误的关系



你不能同时减少两类错误!



样本容量 n 一定的情况下，假设检验不能同时做到犯 α 和 β 两类错误的概率都很小
要使 α 和 β 同时变小只有增大样本容量，但会受人力、经费、时间等多因素的限制



北京大学



假设检验的基本步骤

1. 提出原假设 H_0 ，确定备择假设 H_1
2. 构造分布已知的合适的检验统计量
3. 由给定的检验水平 α ，求出在 H_0 成立的条件下的临界值（上侧 α 分位数，或双侧 α 分位数）
4. 根据样本计算检验统计量的样本观测值
5. 将检验统计量值与临界值比较，如果落在拒绝域内，则拒绝原假设，否则，接受原假设



北京大学



假设检验：p值法

假设检验方法 — $\left\{ \begin{array}{l} \text{临界值法} \\ \text{p值检验法} \end{array} \right.$

例1 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 未知, $\sigma^2 = 100$, 现有样本 x_1, x_2, \dots, x_{52} , 算得 $\bar{x} = 62.75$.

现在来检验假设

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 = 60, \quad H_1 : \mu > 60.$$

采用Z检验法, 检验统计量为



北京大学



$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

以数据代入 , 得 Z 的观察值为

$$z_0 = \frac{62.75 - 60}{10 / \sqrt{52}} = 1.983.$$

概率

$$P\{Z \geq z_0\} = P\{Z \geq 1.983\} = 1 - \Phi(1.983) = 0.0238.$$

此即为图中标准正态曲线下位于 z_0 右边的尾部面积.

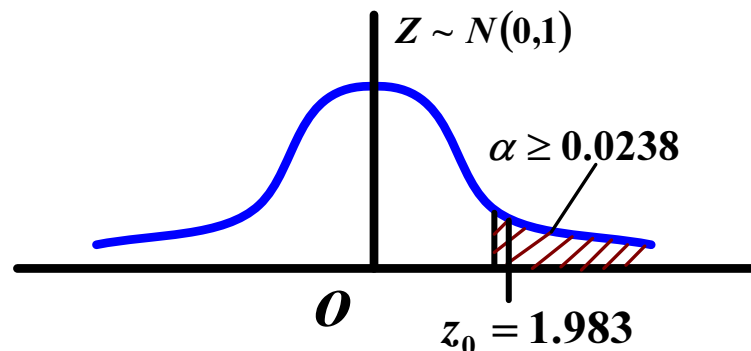
此概率称为 Z 检验法的右边检验的 p 值.



北京大学



记为 p 值= $P\{Z \geq z_0\} = 0.0238$.



若显著性水平 $\alpha \geq p = 0.0238$, 则对应的临界值 $z_\alpha \leq 1.983$, 这表示观察值 $z_0 = 1.983$ 落在拒绝域内 (如图1), 因而拒绝 H_0 ;



北京大学



定义 假设检验问题的 p 值(*probability value*)是由检验统计量的样本观察值得出的原假设可被拒绝的最小显著性水平.

任一检验问题的 p 值可以根据检验统计量的样本观察值的以及检验统计量在 H_0 下一个特定的参数值(一般是 H_0 与 H_1 所规定的参数的分界点)对应的分布求出.



北京大学



典型例题

例1 公司从生产商购买牛奶. 公司怀疑生产商在牛奶中掺水以谋利. 通过测定牛奶的冰点, 可以检验出牛奶是否掺水. 天然牛奶的冰点温度近似服从正态分布, 均值 $\mu_0 = -0.545^{\circ}\text{C}$, 标准差 $\sigma = 0.008^{\circ}\text{C}$. 牛奶掺水可使冰点温度升高而接近水的冰点温度(0°C). 测得生产商提交的5批牛奶的冰点温度, 其均值 $\bar{x} = -0.535^{\circ}\text{C}$, 问是否可以认为生产商在牛奶中掺了水? 取 $\alpha = 0.05$.



北京大学



解一 临界值法。按题意需检验假设

$H_0: \mu \leq \mu_0 = -0.545$ (即设牛奶未掺水)

$H_1: \mu > \mu_0$ (即设牛奶已掺水)

这是右边检验问题，用Z检验法，

其拒绝域为
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{0.05} = 1.645.$$

现在
$$z = \frac{-0.535 - (-0.545)}{0.008/\sqrt{5}} = 2.7951 > 1.645,$$

z的值落在拒绝域中，所以我们在显著性水平

$\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 ，即认为牛奶商在牛奶中掺了水。



北京大学



解二 P 值法。

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 = -0.545, \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

现在检验统计量 $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ 的观察值为

$$z_0 = \frac{-0.535 - (-0.545)}{0.008 / \sqrt{5}} = 2.7955.$$

$$p\text{值} = P\{Z \geq 2.7955\} = 1 - \Phi(2.7955) = 0.0026.$$

$p\text{值} < \alpha = 0.05$, 故拒绝 H_0 .



北京大学



一般, 若 p 值 ≤ 0.01 , 称推断拒绝 H_0 的依据很强或称检验是高度显著的 ;

若 $0.01 < p$ 值 ≤ 0.05 , 称判断拒绝 H_0 的依据是强的或称检验是显著的;

若 $0.05 < p$ 值 ≤ 0.1 , 称推断拒绝 H_0 的理由是弱的, 检验是不显著的 ;

若 p 值 > 0.1 , 一般来说没有理由拒绝.

基于 p 值, 研究者可以使用任意希望的显著性水平来作计算.



北京大学