秩方差分析

主讲人：刘宏志
liuhz@ss.pku.edu.cn

北京大學

Kruskal-Wallis秩和检验

- 简称K-W检验，也称H检验
- 由Kruskal和Wallis二人在1952年提出
- 一种单因素方差分析方法
- 将两个独立样本的秩和检验推广到3个或更多组的检验
- 基本原理：
  - 若各组的处理效应相同，则混合编秩后，各组的平均秩应近似相等

单因素方差分析的数据结构

	因素(A)			
	水平A_1	水平A_2	…	水平A_K
重复观察量	x_{11}	x_{21}	⋯	x_{k1}
	x_{12}	x_{22}	⋯	x_{k2}
	:	:	:	:
	:	:	:	:
	x_{1n_1}	x_{1n_2}	⋯	x_{1n_k}

单因素方差分析的秩矩阵

	因素(A)			
	水平A_1	水平A_2	…	水平A_K
重复观察量的秩	R_{11}	R_{21}	…	R_{k1}
	R_{12}	R_{22}	…	R_{k2}
	⋮	⋮	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮	⋮
	R_{1n_1}	R_{2n_2}	…	$R_{k\,n_k}$
秩和	$R_{1\cdot}$	$R_{2\cdot}$	…	$R_{k\cdot}$

各组的平均秩： $\bar{R}_{i\cdot} = R_{i\cdot}/n_i$

混合后的平均秩：$\bar{R}_{\cdot\cdot} = (N+1)/2$

北京大学

检验统计量：H值

$$H=\sum_{i=1}^{k}\frac{(R_{i\cdot}-n_i\overline{R}_{\cdot\cdot})^2}{n_iS^2}$$

$$S^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(R_{ij}-\overline{R}_{\cdot\cdot})^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}R_{ij}^2-N\overline{R}_{\cdot\cdot}^2$$

如果没有同秩(tie)现象，则有

$$S^2=\frac{1}{N-1}\left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}-\frac{N(N+1)^2}{4}\right]=\frac{N(N+1)}{12}$$

$$H=\frac{12}{N(N+1)}\sum\frac{R_i^2}{n_i}-3(N+1)$$

当混合编秩过程中出现同秩现象时，需要对H统计量进行校正

K-W检验：一般步骤

1.建立假设、确定检验水准

H_0：各样本分布位置相同

H_1：各样本分布位置不全相同

$\alpha = 0.05$

2. 选择检验方法、计算统计量

(1)混合编秩

(2)求秩和(R_i)和统计量H值：

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

北京大学

3.确定P值，作出推断结论

(1)小样本情况：

当组数$k \leq 3$，且$n_i<5$时，查H界值表，确定P值。

如果$H > H_\alpha$，则$P < \alpha$；反之，$P > \alpha$。

(2)大样本情况：

若$k>3$或$n_i>5$时，理论上，H近似服从自由度为$k-1$的χ^2分布，可查χ^2界值表确定P值。

如果$H > H_\alpha$，则$P < \alpha$；反之，$P > \alpha$。

示例：杀灭钉螺的药物比较

三种药物杀灭钉螺的死亡率（%）比较

甲药		乙药		丙药	
死亡率	秩	死亡率	秩	死亡率	秩
32.5	10	16.0	4	6.5	1
35.5	11	20.5	6	9.0	2
40.5	13	22.5	7	12.5	3
46.0	14	29.0	9	18.0	5
49.0	15	36.0	12	24.0	8
R_i	63	—	38	—	19
n_i	5	—	5	—	5

1.建立假设、确定检验水准

H_0： 三种药物杀灭钉螺的死亡率总体分布位置相同

H_1： 三种药物杀灭钉螺的死亡率总体分布位置不全相同

$\alpha = 0.05$

2. 求检验统计量*H*值：

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\left(\sum \frac{R_i^2}{n_i}\right) - 3(N+1)$$

$$H = \frac{12}{15(15+1)}\left(\frac{63^2 + 38^2 + 19^2}{5}\right) - 3(15+1) = 9.74$$

3.确定P值，作出推断结论

$\chi^2_{0.05}(2)=5.99 < \mathrm{H}$

拒绝H_0，接受H_1，认为三种药物的效果不同

多个相关样本的比较：*M*检验

- Friedman *M*检验,用于推断随机区组设计的多个相关样本所来自的多个总体分布的位置是否有差别
- 检验假设 与 备择假设 和多个独立样本比较的Kruskal-Wallis 检验相同

多个相关样本的比较：M检验

受试对象(j)	因素(A) i			
	水平A_1	水平A_2	…	水平A_K
1	X_{11}	X_{21}	…	X_{k1}
2	X_{12}	X_{22}	…	X_{k2}
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
n	X_{1n}	X_{2n}	…	X_{kn}

多个相关样本的比较：*M*检验

受试对象(j)	因素(A) i			
	水平A_1	水平A_2	…	水平A_K
1	R_{11}	R_{21}	…	R_{k1}
2	R_{12}	R_{22}	…	R_{k2}
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
n	R_{1n}	R_{2n}	…	R_{kn}
秩和	$R_{1\cdot}$	$R_{2\cdot}$	…	$R_{k\cdot}$

对每个受试对象在不同水平下的观测值{R_{1j}, R_{2j},…, R_{kj}}独立编秩

8名受试对象对4种不同频率声音刺激的反应率（%）

受试号	频率 A		频率 B		频率 C		频率 D	
	反应率	秩	反应率	秩	反应率	秩	反应率	秩
1	8.4	1	9.6	2	9.8	3	11.7	4
2	11.6	1	12.7	4	11.8	2	12.0	3
3	9.4	2	9.1	1	10.4	4	9.8	3
4	9.8	2	8.7	1	9.9	3	12.0	4
5	8.3	2	8.0	1	8.6	3.5	8.6	3.5
6	8.6	1	9.8	3	9.6	2	10.6	4
7	8.9	1	9.0	2	10.6	3	11.4	4
8	7.8	1	8.2	2	8.5	3	10.8	4
R_i	—	11	—	16	—	23.5	—	29.5

M统计量

$$\overline{R}_{i\cdot} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} R_{ij}$$

$$\overline{R}_{\cdot\cdot} = \frac{1}{nk}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} R_{ij}$$

$$SS_t = n\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{R}_{i\cdot} - \overline{R}_{\cdot\cdot}\right)^2$$

$$M = \frac{12n}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{R}_{i\cdot} - \overline{R}_{\cdot\cdot}\right)^2$$

M服从什么分布？

M检验：一般步骤

1.建立假设

H_0：各样本分布位置相同

H_1：各样本分布位置不全相同

2. 计算检验统计量

(1)每个对象独立编秩

(2)求统计量M值：

$$M=\frac{12n}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{R}_{i\cdot}-\overline{R}_{\cdot\cdot}\right)^2$$

3.确定P值，作出推断结论

(1) 根据检验水平α和自由度k-1查χ^2分布表，确定临界值

(2) 比较临界值和统计量值，做出结论

北京大学