Minimos Cuadrados

William Humberto Callao López
Ing.Informatica
UMSS Facultad Ciencias y Tecnología
(Dated: 25 de abril de 2021)

En el presente informe se refleja el proceso de la obtención de las ecuaciones de ajuste de curvas por el método de mínimos cuadrados el cual se explica al inicio de este informe
Se trabajó con tres tablas de valores correspondientes a cilindros, discos, esferas y con ayuda del programa estadístico - gráficador R estudio.

1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El método de mínimos cuadrados se define como un método analítico para obtener la mejor recta a partir de los datos experimentales (x, y)que muestren un comportamiento lineal, de manera que la sumatorio de las discrepancias al cuadrado se mínima.
La ecuación de la recta de ajuste es:

$$y' = A + Bx \tag{1}$$

1.1. Discrepancia

La discrepancia se define como la diferencia entre el valor experimental Y y el valor Y' y de la recta de ajuste.

$$d_i = y_i - y_i' \tag{2}$$

Las discrepancias indican la separación de los datos experimentales con respecto a la recta de ajuste.
Con las ecuaciones (1) y (2),se realiza la sumatoria de las discrepancias al cuadrado,se deriva la ecuación obtenida respecto de A y B, y se igualan a cero dando como resultado las siguientes ecuaciones.

$$\sum y_i = nA + B\sum x_i \tag{3}$$

$$\sum x_i y_i = A\sum x_i + B\sum x_i^2 \tag{4}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene que los valores para A y B son:

$$A = \frac{\sum y_i \Sigma x_1^2 - \sum x_i y_i \Sigma x_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} \tag{5}$$

$$B = \frac{n\sum x_i y_i - \Sigma x_i \sum y_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} \tag{6}$$

Definimos:

$$\Delta = n\sum x_i^2 - (\Sigma x_i)^2 \tag{7}$$

Los errores estimados para A y B están dados por las ecuaciones:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{\Delta}} \qquad \sigma_B = \sqrt{\frac{\sigma^2 n}{\Delta}} \tag{8}$$

Donde:

$$\sigma^2 = \frac{\sum d_i^2}{n-2} \tag{9}$$

1.2. Coeficiente de correlación

$$r = \frac{n(\Sigma \mathrm{xy}) - (\Sigma \mathrm{x})(\sum y)}{\sqrt{\left[n\left(\sum x^2\right) - (\Sigma \mathrm{x})^2\right]\left[n\left(\sum y^2\right) - (\Sigma \mathrm{y})^2\right]}} \tag{10}$$

2. OBJETIVO

El objetivo de este informe es hallar:

- La mejor ecuación de ajuste para los datos experimentales de cilindros, discos y esferas.
- Los errores estimados para A y B.
- El coeficiente de correlación.

3. MATERIALES Y MÉTODOS

Para la representación gráfica y manejo de datos se usó el programa estadístico *R*.

Primeramente se identifico el modelo matemático de cada conjunto de datos y se procedió a su linealizacion

Luego con el uso las formulas se encontraron los objetivos mencionados anteriormente.

4. PROCEDIMIENTO Y RESULTADOS

4.1. Tabla C.1 Cilindros

La Tabla C.1 es un registro de datos experimentales de la altura y la masa de distintos cilindros.

N	H[cm]	m[g]
1	1.00	8.65
2	2.00	17.30
3	3.00	25.95
4	4.00	34.63
5	5.00	43.31
6	6.00	51.95

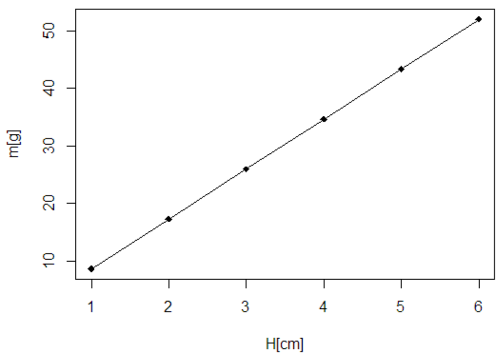


Figura 1: Masa en función de la altura

Los datos de la tabla de cilindro presentan una tendencia lineal y podemos aplicar el método de mínimos cuadrados.
Para Obtener el valor de A y de B hacemos uso de las ecuaciones (5) y (6) respectivamente:

$$A = -0{,}02 \qquad B = 8{,}66 \tag{11}$$

dando como resultado la ecuacion $y = -0{,}02 + 8{,}66\,x$, los errores para A y B calculados con la ayuda de las formulas (8) mencionadas anteriormente son:

$$\sigma_A = 0{,}012 \qquad \sigma_B = 0{,}003 \tag{12}$$

y el valor del coeficiente de correlación obtenido con ayuda de la formula (10) es:

$$r = 0{,}999 \tag{13}$$

4.2. Tabla D.1 Discos

La tabla D.1 es un registro experimental del diámetro y la masa de distintos discos.

N	D[cm]	m[g]
1	1.00	1.22
2	2.00	4.90
3	3.00	10.40
4	4.00	19.52
5	5.00	30.71
6	6.00	43.75

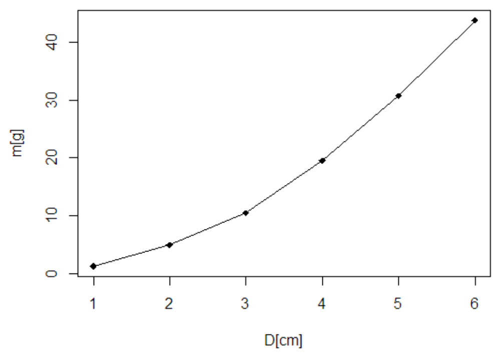


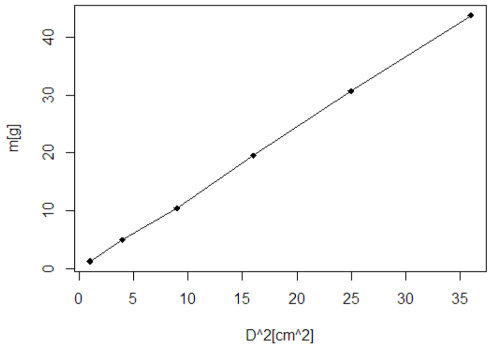
Figura 2: Masa en función del diámetro

En la figura 2 se puede estimar que el comportamiento de los datos sigue la ecuación de una parábola.
Tomamos en cuenta el siguiente modelo matemático:

$$m = aD^2 \tag{14}$$

Recurrimos a la linealizacion aplicando el cambio de variable de $z = D^2$.

N	$z = D^2[cm^2]$	m[g]
1	1	1.22
2	4	4.90
3	9	10.40
4	16	19.52
5	25	30.71
6	36	43.75

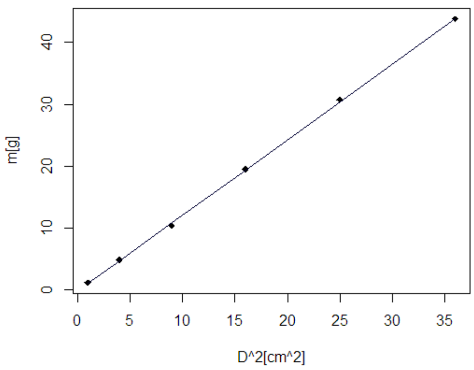


Se puede observar que ahora los datos presentan una tendencia lineal y podemos aplicar el método de mínimos cuadrados.

Para Obtener el valor de A y de B hacemos uso de las ecuaciones (5) y (6) respectivamente:

$$A = -0{,}12 \qquad B = 1{,}22 \tag{15}$$

dando como resultado la ecuación $\quad y = 0{,}12 + 1{,}22\ x^2$



los errores para A y B calculados con la ayuda de las formulas (8) mencionadas anteriormente son:

$$\sigma_A = 0{,}195 \qquad \sigma_B = 0{,}010 \tag{16}$$

y el valor del coeficiente de correlación obtenido con ayuda de la formula (10) es:

$$r = 0{,}999 \tag{17}$$

4.3. Tabla E.1 Esferas

La Tabla E.1 es un registro de datos experimentales de el diámetro y la masa de distintas esferas.

N	D[cm]	m[g]
1	0.713	1.47
2	0.998	4.50
3	1.501	13.75
4	1.746	21.70
5	1.905	28.20
6	2.222	44.75

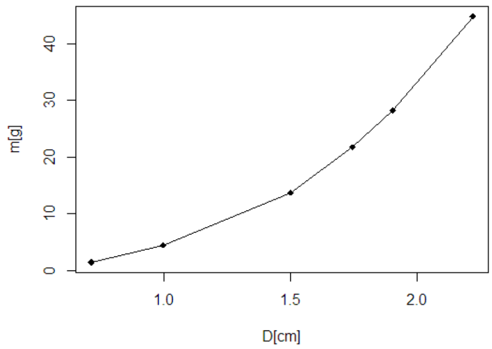


Figura 3: Masa en función del Diámetro

Se puede observar que el gráfico no presenta una tendencia lineal recta, procedemos a la linealizacion por el método logarítmico.

En base a la ecuación de potencia simple tenemos:

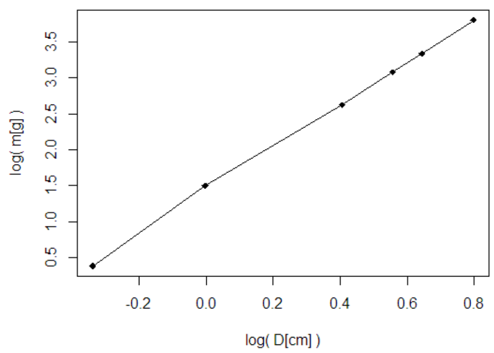
$$y = ax^b \tag{18}$$

Aplicamos logaritmos a ambos miembro de la ecuación:

$$\log(y) = \log(a) + b\log(x) \tag{19}$$

Dando como resultado la siguiente tabla:

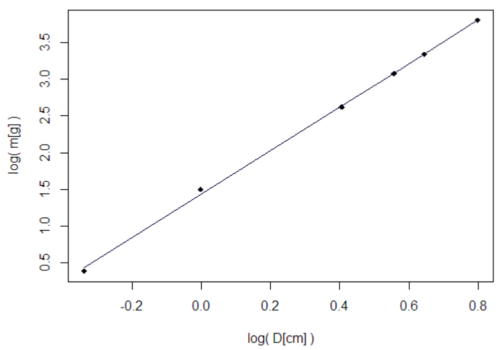
N	*log*$(D[cm])$	*log*$(m[g])$
1	-0.34	0.38
2	0.00	1.50
3	0.40	2.62
4	0.56	3.08
5	0.64	3.34
6	0.80	3.80



Se puede observar que ahora los datos presentan una tendencia lineal y podemos aplicar el método de mínimos cuadrados para obtener el valor de A y de B gracias a las ecuaciones (5) y (6).

$$A = 1{,}43 \qquad a = 10^A = 26{,}91 \qquad B = 2{,}96 \tag{20}$$

dando como resultado la ecuación $y = 26{,}91 + 2{,}96\ x$



los errores para A y B calculados con la ayuda de las formulas (8) mencionadas anteriormente son:

$$\sigma_A = 0{,}025 \qquad \sigma_B = 0{,}047 \tag{21}$$

y el valor del coeficiente de correlación obtenido con ayuda de la formula (10) es:

$$r = 0{,}999 \tag{22}$$

5. CONCLUCIONES

El método de mínimos cuadrados demuestra ser una forma mucho mas fiable de determinar los valores de intersección con el eje de las ordenadas y la pendiente de la recta de ajuste a comparación del método gráfico.
Con este método se demuestra lo sencillo que es hallar la recta de ajuste a partir de las formulas, aunque en la actualidad ya no es necesario hacer estos cálculos de manera manual debido a que las calculadoras científicas tienen incorporadas funciones estadísticas que permiten encontrar los parámetros A, B y el coeficiente de relación lineal.