4. Lógica dos Predicados

A linguagem da lógica proposicional não é adequada pra representar relações entre objetos, como a usado no seguinte argumento:

Todos os homens são mortais. Sócrates é homem. Portanto, Sócrates é mortal.

Na lógica dos predicados, formaliza-se o sujeito e o predicado das sentenças, que podem ser enunciados singulares, categóricos e relacionados. Veja os exemplos:

Carla é Bonita. (Bc)

João não é Alto. (~Aj)

Sócrates é homem. (Hs)

Carla e João são altos. (Ac Λ Aj)

Maria gosta de João. (Gmj)

Nos casos acima, as sentenças usam uma constante (a, b, c, d, etc.), pois se trata de um sujeito específico, sendo assim possível determinar um valor verdade para essas sentenças, como acontece com as proposições. No entanto, há também sentenças que usam variáveis, cuja determinação do valor verdade depende do domínio de interpretação da sentença (como é o caso da sentença “Todos os homens são mortais”). O uso de operações lógicas de quantificação transforma uma sentença aberta em uma proposição. A seguir, serão explicadas as sentenças abertas, os quantificadores, a formalização de enunciados usando a Lógica dos Predicados, bem como o uso da Teoria dos Conjuntos para verificar a validade de um argumento.

4.1. Sentenças abertas

Uma sentença aberta com uma variável em um conjunto “A” é uma expressão p(x) que se torna uma proposição devido à substituição da variável x por um dos valores do conjunto “A”. O conjunto “A” é chamado de <u>conjunto universo (ou domínio)</u> da variável x e qualquer elemento pertencente a “A” diz-se um valor da variável x (POFALL, 2003).

Exemplo de sentença declarativa ou proposição:

P: $3+5 \leq 11$ valor verdade = V

Exemplos de sentenças abertas:

P(x): $x+5 \leq 11$ no domínio: A= $\{x>10\}$ valor verdade = F

P(x): $x+5 \leq 11$ no domínio: A= $\{x\leq 6\}$ valor verdade = V

P(x): $x+5 \leq 11$ no domínio: A= $\{4,5,6,7,8\}$ valor verdade = “depende de x”
(para alguns valores do domínio é V e para outros é F)

Os valores do conjunto A que tornam a sentença aberta p(x) uma proposição verdadeira constituem o **Conjunto Verdade** dessa sentença aberta, sendo representado por V_p (POFALL, 2003).

No exemplo anterior, o conjunto verdade será composto pelos valores 4, 5 e 6, que são os valores que tornam a proposição verdadeira.

P(x): $x+5 \leq 11$ no domínio: A= $\{4,5,6,7,8\}$ $V_p = \{4,5,6\}$ *(Conjunto Verdade)*

Exercício 1 – Determinar o Conjunto Verdade das seguintes sentenças abertas:

a) P(x): $x + 3 < 10$ no domínio: $A = \{ x \in N \}$

b) Y(x): $x + 9 = 20$ no domínio: $A = \{ x \in N \}$

c) R(y): $y + 2 < 1$ no domínio: $A = \{ y \in N \}$

d) P(x): x é par no domínio: $A = \{ x \in N \}$

e) P(x): $x^2 \in A$ no domínio: $A = \{ 1,2,3,4 \}$

f) P(x): $x + 6 \geq 2$ no domínio: $A = \{ x \in R \}$

g) P(x): $x + 1 > x$ no domínio: $A = \{ x \in R \}$

h) P(x): $x + 1 = x$ no domínio: $A = \{ x \in R \}$

i) P(x): $9x^2 - 9 = 0$ no domínio: $A = \{ x \in R \}$

j) P(x): $x - 1 < 4$ no domínio: $A = \{ 2,4,5,8,10 \}$

4.2. Quantificadores

O uso de operadores lógicos chamados quantificadores transforma uma sentença aberta em uma proposição. Há dois tipos de quantificadores: Universal e Existencial.

a) Quantificador Universal (∀): é lido como "Qualquer que seja" ou "para todo".

Seja p(x) uma sentença aberta definida em um conjunto A. Se todos os elementos do conjunto "A" satisfazem p(x), podemos então dizer que, para todo elemento x de "A", p(x) é uma expressão verdadeira. Simbolicamente escrevemos

$(\forall x \in A)(p(x))$ ou $\mathbf{(\forall x)(p(x))}$

Exercício 2 – Determinar o valor verdade das proposições abaixo, observando o domínio de interpretação:

a) $(\forall x)(x \geq 0)$ no domínio: $A = \{ x \in N \}$

b) $(\forall x)(x \geq 0)$ no domínio: $A = \{ x \in Z \}$

c) $(\forall x)(x+1=1)$ no domínio: $A = \{ 0,1,2,3 \}$

d) $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ no domínio: $A = \{ x \in Z \}$

e) $(\forall x)(x^2 \geq 1)$ no domínio: $A = \{ 1,2,3,4 \}$

f) $(\forall x)\ [x+2 = x^2+4]$ no domínio: $A = \{ x \in R \}$

b) Quantificador Existencial (∃): é lido como "existe um", "para pelo menos um".

Seja p(x) uma sentença aberta definida em um conjunto A. Se pelo menos um elemento do conjunto A satisfaz p(x), podemos dizer que existe pelo menos um x pertencente a A que torna a expressão p(x) verdadeira. Simbolicamente escrevemos

$$(\exists x \in A)(p(x)) \quad \text{ou} \quad \mathbf{(\exists x)(p(x))}$$

Exercício 3 – Determinar o valor verdade das proposições abaixo, observando o domínio de interpretação:

a) $(\exists x)(x + 5 < 9)$ no domínio: $A = \{ x \in N \}$

b) $(\exists x)(x + 4 < 2)$ no domínio: $A = \{ x \in N \}$

c) $(\exists x)(x+3=10)$ no domínio: $A = \{ 1,2,3,4,5 \}$

d) $(\exists x)(x+1= 1)$ no domínio: $A = \{ 0,1,2,3 \}$

e) $(\exists x)(x^2<x)$ no domínio: $A = \{ x \in Z \}$

f) $(\exists x)(x^2 = x)$ no domínio: $A = \{ x \in R \}$

g) $(\exists x)(x+2= x)$ no domínio: $A = \{ x \in R \}$

Regras de equivalência para quantificadores

As regras de equivalência são utilizadas para realizar negações de quantificadores. Observe que a negação transforma o quantificador universal em quantificador existencial e vice versa (POFALL, 2003).

$$\mathbf{\sim[(\forall x)(Px)] \equiv (\exists x)(\sim Px)}$$

$$\mathbf{\sim[(\exists x)(Px)] \equiv (\forall x)(\sim Px)}$$

Exemplos:

Proposição	Negação da proposição
$(\forall x \in Z)(x \geq 0)$	$(\exists x \in Z)(x < 0)$
$(\exists x \in N)(x + 4 < 2)$	$(\forall x \in N)(x + 4 \geq 2)$
Todo aluno é dedicado.	Existe pelo menos um aluno que não é dedicado.
Algum aluno está doente.	Todo aluno não está doente. *(ou Nenhum aluno está doente.)*
Algum aluno não é alto.	Todo aluno é alto.

Exercício 4 – Escrever a negação das seguintes proposições:

a) $(\exists x \in N)(x + 5 = 9)$

b) $(\forall x \in N)(2x + 4 \neq 10)$

c) $(\exists x \in Z)(x + 2 < x)$

d) $(\forall x \in N)(x + 1 > x)$

Exercício 5 – Escrever em linguagem natural a negação das seguintes proposições:

a) Todos os pássaros voam.

b) Existe ao menos um mamífero que põe ovo.

c) Nenhum político é honesto.

d) Existe pescador que não é mentiroso.

Exercício 6 – Sendo A = $\{1,2,3\}$ o conjunto universo da variável x, determine o valor verdade para as proposições a seguir:

a) $(\forall x)[(x+1)^2 = x^2+1]$

b) $(\forall x)(x+3 < 6)$

c) $(\exists x)(x+1 = 4)$

d) $\sim[(\exists x)(x^2+3x = 1)]$

e) $(\exists x)(x^2+2 > 11)$

f) $(\forall x)(x^2+2 < 10)$

Exercício 7 – Encontre uma proposição equivalente para cada um dos enunciados do exercício anterior. Após, considerando o mesmo conjunto universo A = $\{1,2,3\}$, determine o seu valor verdade.

4.3. Formalização de Enunciados

Na lógica dos predicados, diferencia-se o sujeito e o predicado na simbolização ou formalização, preservando o conteúdo da proposição estudada. Os enunciados podem ser singulares, categóricos e relacionados (Poffal & Renz, 2003).

Enunciados Singulares

Os enunciados singulares são proposições simples formadas por um sujeito e um predicado ligados pelo verbo *ser*.

Simboliza-se os sujeitos ou objetos com letras minúsculas (a, b, c, ..) e os predicados ou atributos com letras maiúsculas (A, B, C, ...). Um conjunto dessas abreviações forma um esquema abreviador.

Exemplo:

Sócrates é filósofo.	Fs
Sócrates é mortal.	Ms

Considerando como universo o conjunto de todas as pessoas, o esquema abreviador para formalizar os enunciados acima é:

s, *constante*, Sócrates

Fx, *símbolo de predicado*, x é filósofo

Mx, *símbolo de predicado*, x é mortal

Os enunciados também podem ser combinados com conectivos lógicos. Veja os exemplos:

Sócrates é filósofo e mortal.	$Fs \wedge Ms$
Sócrates não é filósofo.	$\sim Fs$
Se Sócrates não é filósofo, então é mortal.	$\sim Fs \rightarrow Ms$

Algumas vezes é necessário referir-se a objetos não especificados do universo e, para isso, utiliza-se variáveis (como x, y e z) que atuarão como os pronomes ele, ela, aquele, ou seja, sem se referir a quem se trata. Por exemplo:

Ele é filósofo. (Fx)

Aquele sujeito é filósofo e mortal. ($Fx \wedge Mx$)

Se ela é filósofa, então é mortal. ($Fx \rightarrow Mx$)

Exercício 8 – Escrever os seguintes enunciados na linguagem simbólica da lógica dos predicados, considerando como universo o conjunto de todas as pessoas e o esquema abreviador dado por:

m, *constante*, Miguel

p, *constante*, Paula

j, *constante*, José

Ex, *símbolo de predicado*, x é elegante

Tx, *símbolo de predicado*, x é talentoso

Cx, *símbolo de predicado*, x é cantor

Fx, *símbolo de predicado*, x é famoso

a) José é cantor.
b) Miguel é elegante.
c) Ele é famoso.
d) Miguel é talentoso ou José é elegante.
e) Miguel não é cantor.
f) Aquela menina é cantora.
g) Se Paula é talentosa, então é famosa.
h) Ela não é talentosa.
i) Miguel é famoso se e somente se é talentoso.
j) Paula é elegante e famosa.
k) Ele é famoso e talentoso.
l) Paula é uma cantora famosa.
m) José é cantor e não é talentoso.
n) Se Paula é famosa, então Miguel não é talentoso.

Exercício 9 – Usando o mesmo esquema abreviador do exercício anterior, escreva na linguagem natural:

a) $Cp \vee Fm$
b) $Cj \wedge \sim Fj$
c) $\sim Cj$
d) $Fx \rightarrow Tx$
e) $Tx \rightarrow Fx \wedge Ex$

Enunciados Categóricos

Também podemos simbolizar enunciados mais gerais que envolvem expressões do tipo todo, algum, ou nenhum, chamados de enunciados categóricos. Para isso, usamos os quantificadores que indicam quantos objetos (sujeitos) têm uma determinada propriedade (predicado).

Exemplos: Todo sapato é preto.
(sujeito) (predicado)

Alguns sapatos são pretos.
(sujeito) (predicado)

Usando a letra "x" como uma variável para representar um elemento ou objeto do universo, podemos expressar o enunciado "<u>Todo sapato é preto</u>" da seguinte forma:

Dado um x qualquer do universo, se x é um sapato, então x é preto.

Substituindo o objeto pela letra S e a propriedade pela letra P, temos a seguinte forma de argumento:

"Todo S é P.", que pode ser lido como "Qualquer que seja x, se x é S, então x é P."

Ainda podemos substituir "x é S" por Sx e "x é P" por Px e usar o símbolo do operador condicional para representar o enunciado que se torna:

$(\forall x)(Sx \rightarrow Px)$ (que significa o mesmo que **"**Qualquer que seja x, se x é S, então x é P." ou "**Todo S é P"**)

De maneira análoga, temos o argumento "Nenhum S é P", que pode ser lido como **"**Qualquer que seja x, se x é S, então x NÃO é P". Temos a seguinte expressão:

$(\forall x)(Sx \rightarrow \sim Px)$ (que significa o mesmo que **"**Qualquer que seja x, se x é S, então x NÃO é P." ou "**Nenhum S é P"**)

Exercício 10 – Escrever os seguintes enunciados na linguagem simbólica, considerando como universo o conjunto de todos os seres e o esquema abreviador dado por:

Px, *símbolo de predicado*, x é psicólogo

Sx, *símbolo de predicado*, x é sábio

Ix, *símbolo de predicado*, x é inteligente

Mx, *símbolo de predicado*, x é mulher

Dx, *símbolo de predicado*, x é divertido

a) Todas as mulheres são sábias.
b) Nenhuma mulher é divertida.
c) Mulheres são psicólogas.

d) Todas as mulheres psicólogas são inteligentes.
e) Todas as mulheres psicólogas são inteligentes e divertidas.

Ax, *símbolo de predicado*, x é ator

Mx, *símbolo de predicado*, x é mentiroso

Fx, *símbolo de predicado*, x é famoso

Tx, *símbolo de predicado*, x é talentoso

f) Atores não são mentirosos.
g) Atores são talentosos e famosos.
h) Atores são talentosos e não famosos.
i) Todos os atores famosos não são talentosos.
j) Nenhum ator famoso é talentoso.
k) Qualquer ator é famoso.

Usando a letra ”x” como uma variável para representar um elemento ou objeto do universo, podemos expressar o enunciado “Algum sapato é preto” da seguinte forma:

Existe pelo menos um x no universo, tal que x é um sapato e x preto.

Substituindo o objeto pela letra S e a propriedade pela letra P, temos a seguinte forma de argumento:

“Algum S é P”, que pode ser lido como “Existe um x, tal que x é S e x é P.”

Ainda podemos substituir “x é S” por Sx e “x é P” por Px e usar o operador condicional “$\wedge$” para representar o enunciado que se torna:

$(\exists x)(Sx \wedge Px)$ (que significa o mesmo que “Existe um x, tal que x é S e x é P.”
ou **“Algum S é P”**)

De maneira análoga, temos o argumento “Algum S não é P”, que pode ser lido como **“**Existe um x, tal que x é S e x NÃO é P.”) Temos a seguinte expressão:

$(\exists x)(Sx \wedge \sim Px)$ (que significa o mesmo que **“**Existe um x, tal que x é S e x NÃO é P”
ou **“Algum S não é P ”**)

Exercício 11 – Escrever os seguintes enunciados na linguagem simbólica, considerando como universo o conjunto de todos os seres e o esquema abreviador dado por:

Px, *símbolo de predicado*, x é psicólogo

Sx, *símbolo de predicado*, x é sábio

Ix, *símbolo de predicado*, x é inteligente

Mx, *símbolo de predicado*, x é mulher

Hx, *símbolo de predicado*, x é homem

Ex, *símbolo de predicado*, x é engenheiro

a) Algum homem é sábio.
b) Algum homem não é sábio.
c) Alguma mulher é engenheira.
d) Alguma mulher psicólogas é engenheira.
e) Alguma mulher não é psicóloga e engenheira.
f) Existem mulheres psicólogas que não são inteligentes.
g) Algum ser é sábio.

Exercício 12 – Escrever os seguintes enunciados na linguagem simbólica, considerando como universo o conjunto de todos os seres e o esquema abreviador dado por:

Fx: x é famoso	Hx: x é ser humano
Ax: x é ambicioso	Ix: x é inteligente

a) Todos os seres humanos são ambiciosos.
b) Algum ser humano é inteligente e ambicioso.
c) Todos os seres humanos ambiciosos são famosos.
d) Algum ser humano inteligente é famoso.
e) Algum ser humano não é famoso.
f) Algum ser humano é ambicioso, mas não é famoso.
g) Todo o ser humano inteligente é ambicioso e famoso.
h) Nenhum ser humano é ambicioso e famoso.

Exercício 13 – Usando o mesmo esquema abreviador do exercício anterior, escreva na linguagem natural:

a) $(\forall x)(Hx \rightarrow Fx)$

b) $(\forall x)(Hx \rightarrow \sim Fx)$

c) $(\exists x)(Hx \wedge \sim Ix)$

d) $(\forall x)(Hx \wedge Ax \rightarrow Ix)$

e) $(\exists x)[(Hx \wedge Ix) \wedge Fx]$

Enunciados Relacionados

Enunciados relacionados correspondem às proposições em que o verbo representa uma relação entre um ou mais seres do universo. A letra maiúscula corresponde ao verbo, seguida pelo sujeito e seus objetos.

Exemplo:

c, *constante*, Carla

j, *constante*, João

s,*constante*, sorvete

Gxy, *símbolo de predicado*, x gosta de y

Carla gosta de sorvete.	Gcs
João gosta de Carla.	Gjc

Os enunciados relacionados também podem conter as palavras "todo", "algum", "nenhum". Veja os exemplos:

Alguns gostam de João.	$(\exists x)(Gxj)$
Carla gosta de todos.	$(\forall x)(Gcx)$
João gosta de alguém.	$(\exists x)(Gjx)$
Alguém gosta de Carla.	$(\exists x)(Gxc)$
Ninguém gosta de João.	$(\forall x)(\sim Gxj)$

Exercício 14 – Escrever os seguintes enunciados na linguagem simbólica, considerando como universo o conjunto de todos os seres e o esquema abreviador dado por:

Fx: x é famoso	a, *constante*, Adriano
Ax: x é ambicioso	b, *constante*, Bia
Hx: x é ser humano	d,*constante*, dinheiro
Gxy: x gosta de y	s,*constante*, sucesso

a) Adriano e Bia gostam de dinheiro.
b) Adriano gosta de sucesso e dinheiro.
c) Alguns seres humanos são ambiciosos e famosos.
d) Todo ser humano ambicioso gosta de sucesso.
e) Se Adriano e Bia são ambiciosos, então existe um ser humano ambicioso.
f) Todos os humanos são ambiciosos.
g) Todos os humanos famosos gostam de dinheiro.
h) Alguns humanos não gostam de dinheiro.
i) Todos os humanos que gostam de dinheiro são ambiciosos.

Exercício 15 – Usando o mesmo esquema abreviador do exercício anterior, escreva na linguagem natural:

a) $(\forall x)(Hx \wedge Ax \rightarrow Gbx)$

b) $(\exists x)(Hx \wedge \sim Gxd)$

Equivalências entre enunciados categóricos

$$\sim[(\forall x)(Px \rightarrow Qx)] \equiv (\exists x)(Px \wedge \sim Qx)$$

$$\sim[(\exists x)(Px \wedge Qx) \equiv (\forall x)(Px \rightarrow \sim Qx)$$

Exercício 16 – Escreva a negação dos seguintes enunciados:

a) $(\forall x)(Hx \rightarrow Fx)$ Negação:

b) $(\forall x)(Hx \rightarrow \sim Fx)$ Negação:

c) $(\exists x)(Hx \wedge \sim Ix)$ Negação:

d) $(\forall x)[(Hx \wedge Ax) \rightarrow Ix]$ Negação:

e) $(\exists x)[(Hx \wedge Ix) \wedge Fx]$ Negação:

f) $(\exists x)[Hx \wedge (Ix \wedge \sim Ax)]$ Negação:

4.4. Validade de Formas Predicativas

Regras de Inferência

A lógica dos predicados usa as mesmas regras do cálculo proposicional, além de algumas regras de introdução e eliminação para os quantificadores, para provar a validade de formas predicativas, que são as fórmulas que utilizam quantificadores em sua expressão.

A seguir alguns exemplos (POFFAL, 2003):

Exemplo - Prove a validade da forma lógica a seguir:

$\sim Fa \lor \exists xFx,\ \exists xFx \rightarrow P,\ Fa \vdash P$

Solução:

1	$\sim Fa \lor \exists xF_x$	Premissa
2	$\exists_x F_x \rightarrow P$	Premissa
3	Fa	Premissa
4	~~Fa	3 DN
5	$\exists xFx$	1,4 SD
6	P	2,5 MP

I - Regra <u>Eliminação Universal (EU):</u>

$(\forall x)(Px \rightarrow Mx) \vdash Pa \rightarrow Ma.$

Esta regra considera que uma propriedade que vale para todos os indivíduos de um grupo, vale para alguns também. Assim, se uma conclusão tem a forma de um enunciado singular, com constante, então as premissas podem ser reescritas, eliminando-se esse quantificador (Poffal, 2003).

<u>Exemplo</u> - Prove a validade da forma lógica a seguir:

$(\forall x)(Hx \rightarrow Mx),\ Hs \vdash Ms$

Solução:

1	$(\forall x)(Hx \rightarrow Mx)$	Premissa
2	Hs	Premissa
3	$Hs \rightarrow Ms$	1 EU (Eliminação Universal)
4	Ms	2,3 MP

Este último exemplo é a forma lógica do seguinte argumento:

Todos os homens são mortais.

Sócrates é homem.

:. Sócrates é mortal.

Outro exemplo: “Maria é atriz. Todas as atrizes são mais talentosas do que Jane. Portanto, Maria é mais talentosa do que Jane.”

$Am,\ (\forall x)(Ax \rightarrow Txj) \vdash Tmj$

1	Am	Premissa
2	$(\forall x)(Ax \rightarrow Txj)$	Premissa
3	$Am \rightarrow Tmj$	2 EU
4	Tmj	1,3 MP

Exercício 17 - Considere o argumento *"Todos os físicos são inteligentes. Todas as pessoas inteligentes são criativas. Paulo é um físico. Portanto, Paulo é criativo".* Simbolize esse argumento e use as regras de inferência para deduzir a conclusão.

II - Regra Introdução Existencial (IE):

$$\mathbf{Pa \vdash (\exists x)(Px)}$$

Se existe uma premissa que tem a forma de um enunciado singular, com constante, então é possível generalizar que "existe pelo menos um" na conclusão.

Exemplo - Prove a validade da forma lógica a seguir:

$$\mathbf{(\forall x)(Bx \rightarrow Mx),\ Bm \vdash (\exists x)(Mx)}$$

Solução:

1	$(\forall x)(Bx \rightarrow Mx)$	Premissa
2	Bm	Premissa
3	$Bm \rightarrow Mm$	1 EU (Eliminação Universal)
4	Mm	2,3 MP
5	$(\exists x)(Mx)$	4 IE (Introdução Existencial)

Outro exemplo: "Ivete Sangalo, Cláudia Leite e Daniela Mercury são cantoras. Sendo assim, conclui-se que existem cantoras".

$\mathbf{Ci \land Cc \land Cd \vdash (\exists x)\ (Cx)}$

1	$Ci \land Cc \land Cd$	Premissa
2	Ci	$1 \land E$
3	$(\exists x)\ (Cx)$	2 IE

Exercício 18 - Considere o argumento abaixo. Simbolize-os e use as regras de inferência para deduzir a conclusão.

a) Sócrates é mortal, logo alguém é mortal.

b) Carlos é inteligente, portanto há pessoas inteligentes.

c) Maria é irmã de Carla. Logo, pode-se afirmar que Maria tem uma irmã.

d) Carla é irmã de Maria. Logo, pode-se afirmar que alguém é irmã de Maria.

III - Regra <u>Introdução Universal (IU):</u>

$$Px \vdash (\forall x)(Px)$$

Não se pode generalizar sobre variáveis que ocorram livremente nas premissas das quais a conclusão depende, as variáveis devem ser quantificadas.

<u>Exemplo</u> – Prove a validade da forma lógica a seguir:

$$(\forall x)(Px \to Cx), (\forall x)(Cx \to Vx) \vdash (\forall x)(Px \to Vx)$$

Solução:

1	$(\forall x)(Px \to Cx)$	Premissa
2	$(\forall x)(Cx \to Vx)$	Premissa
3	$Px \to Cx$	1 EU (Eliminação Universal)
4	$Cx \to Vx$	2 EU
5	$Px \to Vx$	3,4 SH
6	$(\forall x)(Px \to Vx)$	5 IU (Introdução Universal)

Outro exemplo: $(\forall x)[Ax \to (Vx \lor Hx)], (\forall x)(\sim Vx) \vdash (\forall x)(Ax) \to (\forall x)(Hx)$

1	$(\forall x)[Ax \to (Vx \lor Hx)]$	Premissa
2	$(\forall x)(\sim Vx)$	Premissa
3	$\vert\ (\forall x)(Ax)$	Hipótese (PC)
4	$\vert\ Ax \to (Vx \lor Hx)$	1 EU
5	$\vert\ \sim Vx$	2 EU
6	$\vert\ Ax$	3 EU
7	$\vert\ (Vx \lor Hx)$	4,6 MP
8	$\vert\ Hx$	5,7SD
9	$\vert\ (\forall x)(Hx)$	8 IU (Introdução Universal)
10	$(\forall x)(Ax) \to (\forall x)(Hx)$	3,8 PC

Exercício 19 - Considere o argumento *"Todos os músicos são talentosos. Todos os talentosos não são medíocres. Assim, todos os medíocres não são músicos".* Simbolize esse argumento e use as regras de inferência para deduzir a conclusão.

IV - Regra <u>Eliminação Existencial (EE):</u>

$$(\exists x)(Px \land Mx) \vdash (Px \land Mx)$$

Essa regra exige a indicação da variável de instanciação junto à justificação da linha que resulta da aplicação da regra. A mesma variável não pode surgir assinalada mais de uma vez na dedução (POFFAL, 2003).

<u>Exemplo</u> - Prove a validade da forma lógica a seguir:

$$(\exists x)(Qx \land Lx), \forall x(Lx \to Cx) \vdash (\exists x)(Qx \land Cx)$$

Solução:

1	$(\exists x)(Qx \land Lx)$	P (premissa)
2	$\forall x(Lx \to Cx)$	P (premissa)
3	$Lx \to Cx$	2 EU (Eliminação Universal)
4	$(Qx \land Lx)$	1 EE (Eliminação Existencial) **(x)**
5	Qx	4 ∧ E
6	Lx	4 ∧ E
7	Cx	3,6 MP
8	$Qx \land Cx$	5,7 ∧ I
9	$(\exists x)(Qx \land Cx)$	8 IE (Introdução Existencial)

Exercício 20 - Considere o argumento *"Alguns alunos são estudiosos. Todos os estudiosos são aprovados. Portanto, alguns alunos são aprovados".* Simbolize esse argumento e use as regras de inferência para deduzir a conclusão.

Exercício 21 – Complete os passos nas demonstrações a seguir.

a) $(\forall x)(Fx \to \sim Gx), (\forall x)(Gx), (\forall x)(\sim Fx \to Hx) \vdash (\exists x)(Gx \land Hx)$

1	$(\forall x)(Fx \to \sim Gx)$	Premissa
2	$(\forall x)(Gx)$	Premissa

3	$(\forall x)(\sim Fx \rightarrow Hx)$	Premissa
4		1 EU (Eliminação Universal)
5		2 EU (Eliminação Universal)
6		3 EU (Eliminação Universal)
7		4,5 MT
8		6,7 MP
9		5,8 $\wedge$ I
10		9 IE (Introdução Existencial)

b) $\sim[(\exists x)(Rx \wedge Sx)], (\exists x)(Px \wedge Sx) \vdash (\exists x)(Px \wedge \sim Rx)$

1	$\sim[(\exists x)(Rx \wedge Sx)]$	Premissa
2	$(\exists x)(Px \wedge Sx)$	Premissa
3		1 Equivalência Quantificador
4		3 EU (Eliminação Universal)
5		2 EE (x) (Eliminação Existencial)
6		5 $\wedge$ E
7		4,5 MT
8		5 $\wedge$ E
9		7,8 $\wedge$ I
10		9 IE (Introdução Existencial)

c) $(\forall x)(Px \rightarrow \sim Dx), (\forall x)(\sim Sx \vee Dx) \vdash (\forall x)(Px \rightarrow \sim Sx)$

1	$(\forall x)(Px \rightarrow \sim Dx)$	Premissa
2	$(\forall x)(\sim Sx \vee Dx)$	Premissa
3		1 EU (Eliminação Universal)
4		2 EU (Eliminação Universal)
5		4 Implicação Material
6		5 Transposição
7		3,6 SH
8		7 IU (Introdução Universal)

Exercício 22 - Considere o argumento abaixo. Simbolize-os e use as regras de inferência para deduzir a conclusão.

a) Todos os pássaros voam. Piu-piu é um pássaro. Portanto Piu-piu voa.

b) Não existem animais selvagens. Todos os gorilas são selvagens. Consequentemente, todos os animais não são gorilas.
c) Existem brasileiros que são famosos. Todas os famosos são cultos. Logo, existem brasileiros que são cultos.
d) Todos os homens são generosos. Todos os generosos são bondosos. Portanto, todos os homens são bondosos.
e) Todos os artistas não são excêntricos. Alguns artistas são indigentes. Logo, alguns indigentes não são excêntricos.

Inferências Imediatas entre Enunciados Categóricos

Inferências que partem de um enunciado categórico para outro enunciado categórico chama-se inferências imediatas (Nolt, 1991). São argumentos com apenas uma premissa e uma conclusão.

Exemplos de inferências imediatas:

a)
Considere a premissa: “Todo gato é mamífero.”
A partir dessa premissa, é possível deduzir a conclusão: “Algum gato é mamífero.”

b)
Premissa: Não é verdade que todo gato é mamífero.
Conclusão: Algum gato não é mamífero.

c)
Premissa: Nenhum gato é mamífero.
Conclusão: Algum gato não é mamífero.

d)
Premissa: Não é verdade que nenhum gato é mamífero.
Conclusão: Algum gato é mamífero.

e)
Premissa: Não é verdade que algum gato é mamífero.
Conclusão: Nenhum gato é mamífero.

f)
Premissa: Não é verdade que algum gato é mamífero.
Conclusão: Algum gato não é mamífero.

g)
Premissa: Não é verdade que algum gato não é mamífero.
Conclusão: Todo gato é mamífero.

h)
Premissa: Não é verdade que algum gato não é mamífero.
Conclusão: Algum gato é mamífero.

É possível verificar a validade de alguns argumentos desse tipo, verificando o valor lógico da conclusão. Para o argumento ser válido, a conclusão que se origina de uma premissa deve ter seu valor lógico verdadeiro. Caso a conclusão seja falsa, pode-se constatar que o argumento é inválido. Veja um exemplo de argumento inválido:

Premissa: Todo gato é mamífero.
Conclusão: Nenhum gato é mamífero.

Também há situações em que não é possível constatar com certeza a veracidade ou falsidade da conclusão. Nesse caso, considera-se que a validade é indeterminada, pois seria necessário haver mais premissas no argumento para chegar à conclusão.

Considerando os seguintes enunciados categóricos, onde "**S**" representa o termo sujeito e "**P**" representa o termo predicado, as relações entre os diferentes enunciados categóricos podem ser resumidas na tabela seguir (premissa expressa na linha e conclusão na coluna).

Todo S é P.	enunciado universal afirmativo
Nenhum S é P.	enunciado universal negativo
Algum S é P.	enunciado existencial afirmativo
Algum S não é P.	enunciado existencial negativo

	Nenhum S é P	**Algum S é P**	**Algum S não é P**
Todo S é P	Falso	Verdadeiro	Falso
~(Todo S é P)	Indeterminado	Indeterminado	Verdadeiro

	Todo S é P	**Algum S é P**	**Algum S não é P**
Nenhum S é P	Falso	Falso	Verdadeiro
~(Nenhum S é P)	Indeterminado	Verdadeiro	Indeterminado

	Todo S é P	**Nenhum S é P**	**Algum S não é P**
Algum S é P	Indeterminado	Falso	Indeterminado
~(Algum S é P)	Falso	Verdadeiro	Verdadeiro

	Todo S é P	**Algum S é P**	**Nenhum S é P**
Algum S não é P	Falso	Indeterminado	Indeterminado
~(Algum S não é P)	Verdadeiro	Verdadeiro	Falso

Exercício 23 – A partir da premissa "Todos os estudantes dedicados são bem sucedidos", aponte o que se pode inferir da verdade ou falsidade das seguintes proposições (V , F ou Indeterminado):

a) Nenhum estudante dedicado é bem sucedido.
b) Alguns estudantes dedicados são bem sucedidos.
c) Alguns estudantes dedicados não são bem sucedidos.

Exercício 24 – Analisando os enunciados a seguir, assinale **V** se a proposição for verdadeira, **F** se for falsa e **I** se for indeterminada:

a) A proposição "Todo S é P" é falsa, então:
   - nenhum S é P.
   - algum S é P.
   - algum S não é P.

b) A proposição “Não é verdade que nenhum S é P” é verdadeira, então:
- todo S é P.
- algum S é P.
- algum S não é P.

Exercício 25 – Admitindo-se que não é verdade que “Alguns cães não são mamíferos”, o que se pode inferir da verdade ou falsidade das seguintes proposições:

a) Todos os cães são mamíferos.
b) Nenhum cão é mamífero.