LÓGICA MATEMÁTICA

Profª Clarissa Tarragô Candotti

Esse material foi elaborado com o objetivo de apoiar os alunos durante o desenvolvimento das aulas de Lógica Matemática. Na última página são apresentados os livros utilizados como fonte bibliográfica, disponíveis aos alunos na biblioteca da Instituição. O material está dividido nos seguintes tópicos:

1. Introdução: O que é Lógica 2
2. Lógica das Proposições 2
   - 2.1. Sentenças Declarativas 2
   - 2.2. Proposições 2
   - 2.3. Valor verdade 3
   - 2.4. Proposições simples e compostas 3
   - 2.5. Operações ou Conectivos lógicos 3
   - 2.6. Fórmulas Proposicionais 8
   - 2.7. Aplicação em Linguagem de Programação 9
   - 2.8. Tabela Verdade 9
   - 2.9. Equivalências Lógicas 13
3. Conseqüência Lógica 19
   - 3.1. Regras de Inferência 20
   - 3.2. Validade de Argumentos - Cálculo de Dedução Natural 24
4. Lógica dos Predicados 33
   - 4.1. Sentenças abertas 33
   - 4.2. Quantificadores 35
   - 4.3. Formalização de Enunciados 37
   - 4.4. Validade de Formas Predicativas 43
6. Álgebra Booleana 54
   - 6.1. Introdução a Àlgebra de Boole 54
   - 6.2. Portas Lógicas 55
   - 6.3. Formas Normais 58
   - 6.4. Exemplo de aplicação da Álgebra Booleana 60
   - 6.5. Simplificação de Funções Booleanas 61
7. Equivalências Lógicas com Diagramas de Venn 65
8. Referências 67

1. Introdução: O que é Lógica

Lógica é a análise de métodos de raciocínio. É importante estudar Lógica, pois ela nos confere capacidade de análise crítica dos argumentos mentais utilizados na organização de ideias e processos criativos. O indivíduo se torna mais capaz na racionalização e organização de suas ideias. Refere-se a como as pessoas devem raciocinar. Para saber raciocinar adequadamente, o primeiro passo é ter consciência da natureza do raciocínio (SOUZA, 2008). O aprendizado da Lógica auxilia os estudantes no raciocínio, na compreensão de conceitos básicos, na verificação formal de programas e melhor os prepara para o entendimento do conteúdo de tópicos mais avançados.

Na disciplina de Lógica Matemática estudaremos a Lógica Formal ou Simbólica, que estuda a estrutura do raciocínio, enfatizando o estudo da forma e não do conteúdo dos argumentos.

Observe os seguintes argumentos:

- Todos os homens são mortais. Sócrates é homem. Portanto, Sócrates é mortal.
- Todo cão late. Totó é um cão. Portanto, Totó late.

Do ponto de vista da lógica, esses argumentos têm a mesma estrutura ou forma.

A Lógica Formal avalia as formas de argumentos, isto é, regras abstratas de raciocínio utilizadas em vários argumentos diferentes. O estudo de formas de argumentos facilita as generalizações amplas e esclarecedoras acerca da validade do argumento, através de formas fundamentais de raciocínio (Nolt & Rohantyn).

Para analisar as formas de argumento, é necessário realizar a **formalização de enunciados** ou proposições, isto é, usar letras sentenciais e operadores lógicos para simbolizar matematicamente uma proposição na linguagem natural. Nesse contexto, estudaremos a Lógica das proposições e a Lógica de Predicados.

2. Lógica das Proposições

2.1. Sentenças Declarativas

São frases na linguagem natural utilizadas para informar ou declarar um fato. Podem ser afirmativas ou negativas.

2.2. Proposições

Uma **proposição** ou **enunciado** é um significado ou ideia expressável por uma sentença (sequência de palavras) declarativa. Uma sentença declarativa <u>não pode ser</u> uma frase de interrogação, exclamação ou comandos, mas sim uma frase que possa ter uma ideia ou verdadeira ou falsa (independente da nossa capacidade de decidir se é V ou F). Ex1*: Dez é menor do que sete.* Ex2*: Existem formas de vida em outros planetas do universo.*

Assim, uma proposição pode ser definida como um conjunto de palavras que exprimem um pensamento de sentido completo, podendo assumir um dos dois valores lógico “V” ou “F”, mas não os dois valores ao mesmo tempo.

Podemos representar as sentenças através de letras, denominadas Letras Sentenciais. Por exemplo:

P : Hoje é segunda-feira. **Q :** Amanhã é terça-feira.

Exercício 1- Quais frases são proposições?

a) O signo de João é Capricórnio.
b) Será que João é Capricórnio?
c) Ela só come vegetais.
d) Existem pessoas vegetarianas.
e) Venha cá, meu filho, preciso falar contigo.
f) João é alto e sua esposa é baixa.

2.3. Valor verdade

Cada proposição possui um **valor verdade**, que ou é verdadeiro ou é Falso. Nenhuma proposição possui mais de um valor verdade.

Exemplo: O valor verdade da proposição “O UniRitter oferece curso de Medicina” é falso (F).

Exercício 2 - Determine o valor verdade das seguintes proposições:

a) A divisão de dez por dois é cinco.
b) O número oito é ímpar.
c) Getúlio Vargas foi presidente do Brasil.
d) Lula não é o presidente do Brasil.

2.4. Proposições simples e compostas

As proposições podem ser divididas em duas categorias: simples ou compostas. Uma proposição simples é aquela que não contém nenhum outro enunciado como seu componente (Ex: Carlos é asseado). Uma proposição composta é a combinação de duas ou mais proposições simples. (Ex: Carlos é asseado e Carlos é amável).

2.5. Operações ou Conectivos lógicos

Os operadores ou conectivos lógicos são usados para formar proposições compostas. Observe a classificação abaixo (Poffal & Renz, 2003):

Operador Lógico	*Leitura*	*Símbolo*
Negação	NÃO	~
Conjunção	E	Λ
Disjunção	OU	V
Condicional	SE ... ENTÃO	→
Bicondicional	SE E SOMENTE SE	↔

a) Negação ("Não é o caso que", "Não é verdade que")

A negação de uma proposição simples **P** simbolicamente é representada por **~P**.

Ex: "Não é verdade que ele é fumante" é a negação da sentença "Ele é fumante"

F: Ele é fumante.

A negação será **~F:** Não é verdade que ele é fumante.

b) Conjunção ("E")

A ligação de duas sentenças **P, Q** com o operador "E"' simbolicamente é representada por **P Λ Q**.

Ex: "Hoje é segunda-feira E está chovendo." é a ligação da sentença "Hoje é segunda-feira." com a sentença "Hoje está chovendo."

S: Hoje é segunda-feira

C: Hoje está chovendo

A conjunção será **S Λ C :** Hoje é segunda-feira e está chovendo.

Na linguagem natural, podem aparecer variações para a conjunção como (Poffal et al, 2003):

- P e então Q
- P todavia Q
- P assim como Q
- P embora Q
- P no entatnto Q
- P contudo Q
- P mas Q
- P enquanto Q
- Não só Q, mas ainda Q
- P e também Q
- P além disso Q
- P apesar de que também Q

c) Disjunção ("OU")

A ligação de duas sentenças **P, Q** com o operador "OU"' simbolicamente é representada por **P V Q**.

Ex: "Hoje é segunda-feira OU o restaurante está fechado" é a ligação da sentença "Hoje é segunda-feira." com a sentença "O restaurante está fechado."

D: Hoje é domingo.

R : O restaurante está fechado.

A disjunção será **D V R :** Hoje é domingo ou o restaurante está fechado.

d) Disjunção Exclusiva ("OU")

A disjunção exclusiva de duas proposições **P, Q** é a proposição representada simbolicamente por **P $\underline{\vee}$ Q** e pode ser lida como:

- Ou P, ou Q, mas não ambas.
- Ou P ou Q, mas não simultaneamente

Ex: **P $\underline{\vee}$ Q** : Ele é maior ou menor de idade.

Exercício 3 - Formalize as seguintes sentenças, usando letras sentenciais e operadores lógicos, considerando:

C = "Está chovendo"

N = "Está nevando"

a) Está chovendo.
b) Não está chovendo.
c) Está chovendo ou nevando.
d) Está chovendo e não está nevando.
e) Está chovendo, mas não está nevando.
f) Não está chovendo assim como não está nevando.
g) Está nevando ou está chovendo e nevando.
h) Não é o caso que está chovendo ou nevando.
i) Está nevando ou não está chovendo.

e) Condicional ("SE ... ENTÃO")

A interpretação do conectivo → é a implicação material de duas proposições. Em português, há várias maneiras de expressar a implicação entre as proposições "Está chovendo" e "A rua está molhada". Observe:

- Se está chovendo, então a rua está molhada.
- Se está chovendo, a rua está molhada.
- A rua está molhada, se está chovendo.
- Estar chovendo é condição suficiente para que a rua esteja molhada.
- A rua estar molhada é condição necessária para que esteja chovendo.

Todas essas afirmações acima podem ser representadas por **P→ Q**, considerando que **P** representa "Está chovendo" e **Q** representa "A rua está molhada".

P = "Está chovendo"

Q = "A rua está molhada"

Assim, na linguagem natural, qualquer uma das expressões abaixo representam esse condicional:

- P somente se Q
- P acarreta Q
- Se P, isso significa que Q
- Tendo-se P, então Q
- P, só se Q
- P é condição suficiente para Q
- Q é condição necessária para P
- Q sempre que se tenha P
- Q é resultante de P
- Q, se P

Na expressão **P→ Q** , P é chamado “antecedente”; e Q é chamado “conseqüente”. O enunciado “antecedente” implica o acontecimento do enunciado “conseqüente”.

Ex: “Fogo é uma condição necessária para fumaça.“ pode ser reformulada como: “Se há fumaça, então há fogo.“

P: Há fumaça. **(proposição antecedente)**

Q: Há fogo**.** **(proposição conseqüente)**

A implicação será **P→ Q:** Se há fumaça, então há fogo.

Quando escrevemos fórmula P→ Q, não necessariamente pretendemos dizer que P é uma causa de Q. O objetivo é dizer que se “P” é verdade, então “Q” também é verdade (SOUZA, 2008).

Exercício 4 - Sublinhe a proposição antecedente em cada uma das seguintes condicionais:

a) Se a chuva continuar, então o rio vai transbordar.
b) O mar está calmo é uma condição suficiente para o banho ser apreciado.
c) Se o mar está calmo, então o banho é apreciado.
d) O banho é apreciado se o mar está calmo.
e) O rio transbordar é condição necessária para a chuva continuar.
f) Ter quatro lados iguais é uma condição necessária para que o polígono seja um quadrado.
g) Se eu convidá-lo com carinho, então ele vai dançar comigo.
h) Ele vai dançar comigo se eu convidá-lo com carinho.
i) Se ele se sente angustiado, então ele come chocolate.
j) Ele come chocolate sempre que se sente angustiado.
k) Se eu gosto de brigadeiro, gosto de chocolate.

f) Bicondicional (“SE E SOMENTE SE”)

É a conjunção de dois condicionais (**P→Q e Q→ P**). O “antecedente” implica o “conseqüente” e, por sua vez, o “conseqüente” implica o “antecedente”. É representada simbolicamente por **P** ↔ **Q**.

Ex: T é um triângulo se e somente se T é um polígono de 3 lados. (significa que "Se T é um polígono de 3 lados, então T é um triângulo, e se T é um triângulo, então T é um polígono de 3 lados.")

Na linguagem natural pode ser lida como:

- P se e somente se Q
- P se e só se Q
- P é condição necessária e suficiente para Q
- Q é condição necessária e suficiente para P

Exercício 5 - Formalize as seguintes sentenças, usando letras sentenciais e operadores lógicos, considerando:

C = "Está chovendo"

N = "Está nevando"

a) Se não está chovendo, então está nevando.
b) Não é o caso que se está chovendo, então está nevando.
c) Não é o caso que se está nevando, então está chovendo.
d) Não é o caso que está chovendo ou nevando.
e) Se está nevando e chovendo, então está nevando.
f) Se não está chovendo, então não é o caso que esta nevando e chovendo.
g) Ou está chovendo, ou está nevando e chovendo.
h) Está chovendo se e somente se não está nevando.
i) Ou está chovendo e nevando, ou está nevando mas não está chovendo.
j) Está nevando, se não está chovendo.
k) Está chovendo apesar de que também está nevando.
l) Estar chovendo é uma condição necessária e suficiente para estar nevando.
m) Estar nevando é uma condição suficiente para não estar chovendo.

Exercício 6 – Considere as seguintes proposições:

P = Mário é alegre.

Q = Mário é alto.

R = Mário é bonito.

Enuncie, na linguagem natural, as seguintes expressões:

a) $\sim Q$
b) $P \leftrightarrow R$
c) $P \land Q$
d) $\sim Q \rightarrow R$
e) $(P \lor Q) \rightarrow \sim R$
f) $P \land Q \land \sim R$

Exercício 7 – Dadas as proposições abaixo, indique os operadores lógicos utilizados:

a) Se hoje é quinta-feira, amanhã é sexta-feira.
b) O trabalho voluntário é uma forma de ajudar as pessoas e de se sentir útil para a humanidade.
c) Hoje é um fim de semana se e somente se hoje é sábado ou domingo.
d) Se as pessoas sorriem, então é porque estão felizes.
e) As pessoas choram se estão tristes.
f) A televisão distrai ou bitola as pessoas.

Exercício 8 – Dada a proposição "Se eu ganhar na loteria, então irei para a Europa". Marque a alternativa que contém o operador envolvido nessa proposição:

( ) Conjunção

( ) Disjunção

( ) Condicional

( ) Bicondicional

( ) Negação

2.6. Fórmulas Proposicionais

Uma fórmula é uma seqüência qualquer de letras sentenciais e operadores lógicos, mas existem seqüências sem sentido como "((Λ(P" . Para distinguir essas fórmulas, introduz-se o conceito de Fórmulas Bem Formadas (ou *well-formed formula*), **fórmula** para abreviar. Esse conceito é definido pelas seguintes regras de formação:

a) Qualquer letra sentencial é uma fórmula;
b) Se X é uma fórmula, então ~X também o é;
c) Se X e Y são fórmulas, então (XΛY), (X v Y), (X→Y) e (X↔Y) também o são.

Exercício 9 - Verifique se são fórmulas proposicionais:

a) vPvQ
b) (PvQ)→R
c) P~
d) ~Pv~Q
e) ~P→~QvR
f) P~→R
g) →P→Q
h) ~[~Pv~(Q→R)]
i) ~PΛ ~Q

2.7. Aplicação em Linguagem de Programação

Em linguagens de programação, a combinação dos conectivos lógicos “E”, “Ou”, “negação” com expressões verdadeiras ou falsas fornece um valor lógico final. O comando representado pelo condicional, executa uma tarefa se o valor lógico for verdadeiro, e executa outra tarefa se o valor verdade for falso (POFFAL, 2003).

Exemplo:

Se *condição*, então *tarefa A*

Caso contrário, *tarefa B.*

O trecho de programa executará a *tarefa A*, se a *condição* for verdadeira e executará a *tarefa B,* se a *condição* for falsa.

Exercício 10- Dado o comando:

Se ($y > 1$ **∧** $y < x$), então escreva ($x-y$).

Caso contrário, escreva ($x+y$).

Determine a saída do comando acima, supondo que:

a) $x=24$ e $y=10$

b) $x=24$ e $y= 0$

c) $x=2$ e $y=10$

d) $x=0$ e $y=1$

Exercício 11 - Dado o comando:

Se ($y > 1$ **V** $y < x$), então escreva ($x-y$).

Caso contrário, escreva ($x+y$).

Determine a saída do comando acima, supondo que:

a) $x=24$ e $y=10$

b) $x=24$ e $y= 0$

c) $x=2$ e $y=10$

d) $x=0$ e $y=1$

2.8. Tabela Verdade

Para resumir as situações possíveis de valor verdade que uma fórmula proposicional pode assumir, constrói-se uma tabela, chamada **Tabela-Verdade**. Cada linha horizontal da tabela representa uma classe de situação possível. O número de linhas numa tabela verdade é determinado pelo número de letras sentenciais na fórmula a ser considerada. Se o número de letras sentenciais for “**n**”, o número de linhas será “2^n”.

Por exemplo: dada a fórmula **“P∧Q”,** que possui 2 letras sentenciais, a tabela verdade é composta por **2^2 = 4 linhas**, conforme abaixo:

P	Q	P Λ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A seguir, são apresentadas as tabelas verdades para as fórmulas com cada um dos operadores ou conectivos lógicos.

a) Negação (“Não é o caso que“): ~P

P	~P
V	F
F	V

b) Conjunção (“E”): P Λ Q

P	Q	P Λ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

d) Disjunção inclusiva (“OU”): P V Q

P	Q	P v Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

d) Condicional ("SE ... ENTÃO"): P→ Q

P	Q	P → Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

* sempre se considera "V" quando o "antecedente" tiver o valor verdade "F".

e) Bicondicional ("SE E SOMENTE SE"): P↔ Q

P	Q	P ↔ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Definiremos a **ordem de precedência dos conectivos proposicionais** em uma fórmula da seguinte maneira:

- Maior precedência: ~
- Precedência intermediária: Λ, V
- Menor precedência: →**,** ↔

Exemplo: **(P V Q) Λ ~P**

P	Q	P V Q	~P	(P V Q) Λ ~P
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Quando uma formula possui os valores-verdade sempre verdadeiros, para qualquer situação possível, chama-se uma "**tautologia**".

Quando uma formula possui os valores-verdade sempre falsos, para qualquer situação possível, chama-se uma "**contradição**".

Quando uma formula possui os valores-verdade verdadeiros e falsos, chama-se uma "**contingência**"

Exercício 12 - Sabendo que X = falso, Y = verdadeiro, Z = verdadeiro, W = falso, determine o valor verdade das seguintes fórmulas:

a) $Y \land W$
b) $X \lor \sim W$
c) $\sim X \land \sim(Z \lor W)$
d) $\sim\sim Z$
e) $\sim Y \lor \sim(\sim Z \land W)$
f) $X \lor \sim Y \lor \sim W$
g) $X \land \sim Y \land \sim W$
h) $\sim(Y \land \sim W)$
i) $\sim[X \land \sim(Z \lor W)]$
j) $Y \rightarrow \sim X$
k) $\sim Y \rightarrow X$
l) $Y \rightarrow X$
m) $Z \leftrightarrow W$
n) $Z \leftrightarrow \sim W$
o) $(Y \rightarrow X) \lor \sim Y \lor (Z \land W)$
p) $[W \leftrightarrow (\sim X \lor Y)]$
q) $Z \land (X \rightarrow W)$
r) $(X \land Y) \lor (Y \rightarrow \sim X)$
s) $\sim[(Y \leftrightarrow W) \land (\sim Z \rightarrow W)]$

Exercício 13 - Construa a tabela verdade das seguintes fórmulas proposicionais:

a) $\sim P \lor Q$
b) $\sim\sim P$
c) $P \lor \sim P$
d) $P \land \sim P$
e) $P \land \sim(P \lor Q)$
f) $(P \lor Q) \land \sim(P \land Q)$
g) $(P \land Q) \land \sim(P \lor R)$
h) $\sim P \lor (Q \land R)$
i) $\sim(P \rightarrow Q)$
j) $\sim P \leftrightarrow \sim Q$
k) $\sim P \lor \sim Q \leftrightarrow P \land Q$
l) $P \rightarrow Q \lor \sim R$
m) $(P \land Q) \lor (R \land S) \rightarrow P$
n) $\sim(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \rightarrow Q)$

Exercício 14 – Assuma que as proposições “Tom é um gato” e “Tom tem seis anos” são sentenças falsas. Determine o valor lógico de cada uma das proposições abaixo:

a) Ou Tom é um gato, ou tem seis anos.
b) Tom tem seis anos ou não é um gato.
c) Tom não é um gato ou não tem seis anos.
d) Tom não é um gato e não tem seis anos.
e) Nem Tom é um gato, nem tem seis anos.
f) Tom é um gato, se e somente se tem seis anos.
g) Tom não ser um gato é condição necessária para que Tom tenha seis anos.
h) Tom ser um gato é condição suficiente para que Tom não tenha seis anos.

2.8.1. *Aplicações da Tabela verdade*

Implicitamente, há muitas situações cotidianas que envolvem os operadores lógicos (POFALL, 2003). Observe o exemplo: para um cliente obter crédito em uma loja, é necessário que ele apresente comprovante de rendimentos e esteja “OK” com o Serviço de Proteção ao Crédito.

Nesse exemplo, podemos assumir que:

O cliente apresenta comprovante de rendimentos. **V**

O cliente não apresenta comprovante de rendimentos. **F**

O cliente está “OK” com o Serviço de Proteção ao Crédito. **V**

O cliente não está “OK” com o Serviço de Proteção ao Crédito. **F**

O cliente obtém o crédito na loja. **V**

O cliente não obtém o crédito na loja. **F**

A tabela verdade que descreve o critério de concessão de crédito em uma loja é:

Comprovante de Rendimentos	**Serviço de Proteção ao Crédito**	**Obtenção do Crédito**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Assim, o critério de obtenção de crédito na loja do exemplo é uma conjunção, uma vez que o crédito só é obtido quando o cliente apresenta o comprovante de rendimentos e está “OK” com o Serviço de Proteção ao Crédito.

Também é possível usar a tabela verdade para verificação de equivalências lógicas entre fórmulas proposicionais e para verificar a validade de argumentos (serão estudados a seguir).

Exercício 15 – Ao fechar as portas da frente de um carro, o motorista aciona o alarme. Sabendo que este é disparado quando pelo menos uma das portas estiver aberta, escreva a operação lógica que descreve o problema e sua tabela verdade.

2.9. Equivalências Lógicas

Dois programas computacionais distintos podem executar a mesma tarefa. Nesse caso, podem ser considerados programas equivalentes em termos de resultado, pois ambos obtêm o mesmo resultado final. Em Lógica, duas proposições distintas podem ter o mesmo significado e pode-se dizer que são equivalentes.

Duas proposições **P** e **Q** são logicamente equivalentes, se e somente se **P**$\leftrightarrow$**Q** for uma tautologia. Nesse caso, pode-se representá-las da seguinte maneira: **P≡Q**

Uma equivalência lógica é:

- Reflexiva: $P \equiv P$
- Simétrica: se $P \equiv Q$, então $Q \equiv P$
- Transitiva: se $P \equiv Q$ e $Q \equiv R$, então $P \equiv R$

A seguir, algumas equivalências lógicas:

Dupla Negação (DN)
$P \equiv {\sim}{\sim}P$

Tautologia (TAUT)
$P \land P \equiv P$
$P \lor P \equiv P$

Comutação (COM)
$P \lor Q \equiv Q \lor P$
$P \land Q \equiv Q \land P$

Associação (ASSOC)
$P \lor (Q \lor R) \equiv (P \lor Q) \lor R$
$P \land (Q \land R) \equiv (P \land Q) \land R$

Distribuição (DIST)
$P \land (Q \lor R) \equiv (P \land Q) \lor (P \land R)$
$P \lor (Q \land R) \equiv (P \lor Q) \land (P \lor R)$

Absorção (ABS)
$P \land (P \lor Q) \equiv P$
$P \lor (P \land Q) \equiv P$

Leis de DeMorgan (DM)
${\sim}(P \land Q) \equiv {\sim}P \lor {\sim}Q$
${\sim}(P \lor Q) \equiv {\sim}P \land {\sim}Q$

Implicação Material (IM)
$P \rightarrow Q \equiv {\sim}P \lor Q$

Transposição (TRANS)
$P \rightarrow Q \equiv {\sim}Q \rightarrow {\sim}P$

Exportação (EXP)
$(P \land Q) \rightarrow R \equiv P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

Bicondicional (BICOND)
$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)$
$P \leftrightarrow Q \equiv ({\sim}P \land {\sim}Q) \lor (P \land Q)$

2.9.1. Princípio de Substituição

Uma equivalência pode ser usada para substituir uma parte de uma sentença por outra logicamente equivalente, uma vez que a substituição mantém o valor lógico da expressão original (POFALL, 2003).

Exemplos:

a) ~~PVQ

Usando a equivalência P ≡~~ P□, pode-se reescrever a proposição **~~PVQ** como **PVQ**.

b) $\sim(P \wedge \sim Q)$

Usando a equivalência $\sim(P \wedge Q) \equiv (\sim P \vee \sim Q)$, pode-se reescrever a proposição **$\sim(P \wedge \sim Q)$** como **$\sim P \vee \sim\sim Q$**, que por sua vez pode ser reescrita como **$\sim P \vee Q$**.

2.9.2. Equivalência Lógica e a Negação de Proposições

A negação de uma negação

A negação de uma negação pode ser obtida através da equivalência $P \equiv \sim\sim P$.

A negação de uma conjunção

A negação de uma conjunção pode ser obtida diretamente das Leis de Morgan:

$\sim(P \wedge Q) \equiv (\sim P \vee \sim Q)$

A negação de uma disjunção

A negação de uma disjunção pode ser obtida diretamente das Leis de Morgan:

$\sim(P \vee Q) \equiv (\sim P \wedge \sim Q)$

A negação de uma condicional

A partir da equivalência Implicação Material $(P \rightarrow Q) \equiv (\sim P \vee Q)$, obtém-se a seguinte expressão da sua negação:

$\sim(P \rightarrow Q) \equiv \sim(\sim P \vee Q)$

E então, aplicando as leis de Morgan, encontra-se **$\sim(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q$.**

A negação de uma bicondicional

A partir da equivalência $P \leftrightarrow Q \equiv (\sim P \wedge \sim Q) \vee (P \wedge Q)$, obtém-se a seguinte expressão da sua negação:

$\sim(P \leftrightarrow Q) \equiv \sim[(\sim P \wedge \sim Q) \vee (P \wedge Q)]$

E então, aplicando as leis de Morgan e Implicação Material, encontra-se

$\sim(P \leftrightarrow Q) \equiv P \leftrightarrow \sim Q$ ou também **$\sim(P \leftrightarrow Q) \equiv \sim P \leftrightarrow Q$.**

Exercício 16 – Reescreva as proposições usando as equivalências indicadas:

a) $\sim\sim C$	(DUPLA NEGAÇÃO)
b) $\sim(X \wedge Y)$	(DE MORGAN)
c) $\sim(\sim X \wedge Y)$	(DE MORGAN)
d) $\sim(X \wedge \sim Y)$	(DE MORGAN)
e) $\sim(\sim X \wedge \sim Y)$	(DE MORGAN)
f) $\sim(X \vee \sim Y)$	(DE MORGAN)
g) $\sim(X=2 \wedge X \neq 0)$	(DE MORGAN)

h) $\sim(Z=4 \lor X > 0)$ (DE MORGAN)
i) $(Z>7) \lor (Y\leq1)$ (DE MORGAN)
j) $\sim(Z>7 \lor Y\leq1)$ (DE MORGAN)
k) $A \lor (A \land Z)$ (ABSORÇÃO)
l) $\sim A \lor (\sim A \land Z)$ (ABSORÇÃO)
m) $A \lor (A \land \sim Z)$ (ABSORÇÃO)
n) $X \land (X \lor Y)$ (ABSORÇÃO)
o) $A<1 \lor (A<1 \land Z< 0)$ (ABSORÇÃO)
p) $X=2 \land (X>5 \lor X=2)$ (ABSORÇÃO)

Exercício 17 – Reescreva as proposições usando a equivalência "IMPLICAÇÃO MATERIAL":

a) $J \rightarrow K$
b) $\sim J \rightarrow K$
c) $\sim J \rightarrow \sim K$
d) $J \rightarrow \sim K$
e) $x>2 \rightarrow x\neq0$
f) $z \leq 4 \lor x > 0$
g) $P \land Q \rightarrow R$
h) $P \land Q \rightarrow R \land S$

Exercício 18 – Reescreva as proposições usando a equivalência "TRANSPOSIÇÃO":

a) $J \rightarrow K$
b) $\sim J \rightarrow K$
c) $\sim J \rightarrow \sim K$
d) $J \rightarrow \sim K$
e) $X=2 \rightarrow y<0$
f) $x\neq5 \rightarrow x\geq0$
g) $P \land Q \rightarrow R$
h) $P \land Q \rightarrow R \land S$

Exercício 19 – Construindo a Tabela Verdade, verifique se as seguintes fórmulas são equivalentes:

a) $(P \lor Q) \rightarrow Q \equiv P \rightarrow Q$
b) $\sim P \rightarrow (P \lor Q) \equiv P \lor Q$
c) $R \lor S \lor T \equiv \sim(R \land S \land T)$
d) $P \equiv P \lor \sim Q$

Exercício 20– Marque a alternativa que possui uma sentença lógica equivalente a "Se Pedro é economista, então Luísa é solteira" é:

a) Pedro é economista ou Luísa é solteira.

b) Pedro é economista ou Luísa não é solteira.

c) Se Luísa é solteira, Pedro é economista.

d) Se Pedro não é economista, então Luísa não é solteira.

e) Se Luísa não é solteira, então Pedro não é economista.

Exercício 21 – Dizer que não é verdade que Pedro é pobre e Alberto é alto é logicamente equivalente a dizer que é verdade que:

a) Pedro não é pobre ou Alberto não é alto.

b) Pedro não é pobre e Alberto não é alto.

c) Pedro é pobre ou Alberto não é alto.

d) Se Pedro não é pobre, então Alberto é alto.

e) Se Pedro não é pobre, então Alberto não é alto.

Exercício 22 – Formalize as proposições abaixo e, em seguida, encontre uma proposição equivalente. Após escreva-a na linguagem natural:

a) Pedro não canta ou Quincas não canta.

b) Se Maria não gosta de chocolate, então ela gosta de doces.

c) Se Pedro canta, então Quincas também canta.

d) Maria viaja se e somente se seu chefe a liberar.

Exercício 23 – Verifique se os pares de proposições abaixo são logicamente equivalentes:

a) P: Se José tiver dinheiro, então ele não comprará fiado.
Q: José não tem dinheiro ou não compra fiado.

b) P: Se José tiver dinheiro, então ele não comprará fiado.
Q: Se José comprar fiado, então ele não tem dinheiro.

c) P: Se José tiver dinheiro, então ele não comprará fiado.
Q: Se José não compra fiado, então ele tem dinheiro.

Exercício 24 – Dada a proposição “O espetáculo termina antes das 22h ou não há sessão de autógrafos.”

a) Escreva em forma simbólica.

b) Escreva duas proposições equivalentes.

Exercício 25 – Escreva a negação de cada uma das seguintes proposições:

a) Nem o relógio desperta, nem Lélio acorda para o café da manhã.
b) Se o relógio despertar, então está na hora de levantar.
c) O relógio não despertou e Oscar pôde dormir mais dez minutos.
d) O galo cantou ou o relógio despertou mais cedo.
e) Ou Carlos ajusta o relógio ou ele se atrasa para o trabalho.

Exercício 26 – Escreva uma fórmula equivalente para as seguintes negações:

a) $\sim(A \vee \sim B) \equiv$

b) $\sim(\sim A \wedge \sim B) \equiv$

c) $\sim(A \rightarrow B) \equiv$

d) $\sim(A \rightarrow \sim B) \equiv$

e) $\sim(A \leftrightarrow B) \equiv$

f) $\sim(\sim A \leftrightarrow \sim B) \equiv$

3. Consequência Lógica

Denomina-se **premissas** (ou hipóteses) certas proposições que são usadas para chegar a uma outra proposição denominada **conclusão** (ou tese), baseada em um raciocínio. Essas proposições compõem um argumento.

O raciocínio dedutivo considera que dadas duas premissas, delas tira-se seguramente uma conclusão. Não gera conhecimento novo, apenas organiza e especifica conhecimentos já existentes. Parte de um caso geral para um particular, sendo assim muito útil para aplicar regras gerais a casos particulares.

Exemplos de dedução (a conclusão está em negrito):

Todas os cravos daquele jardim são vermelhas.

Esses cravos são daquele jardim.

Logo, esses cravos são vermelhos (seguramente).

Todo cachorro de João é da raça poodle.

Esse cachorro é de João.

Portanto, esse cachorro é da raça poodle (seguramente).

Se chover, então a rua ficará alagada.

Choveu.

Portanto, **a rua ficou alagada** (seguramente).

Assim, no raciocínio dedutivo, a verdade da conclusão é uma **consequência lógica** das premissas, isto é, se as premissas forem verdadeiras, então a conclusão também deve ser verdadeira.

Essas proposições que formam um argumento podem ser representadas utilizando o traço de asserção ├ para separar as premissas de sua conclusão.

Exemplo de consequência lógica:

Na linguagem natural:	na linguagem simbólica:
Se chover, então a rua ficará alagada. (premissa)	$C \rightarrow R$
Choveu. (premissa)	C
Portanto (conclusão), **a rua ficou alagada.**	$\mathbf{R}$

Essa consequência lógica pode ser representada da seguinte forma:

$$C \rightarrow R, C \vdash \mathbf{R}$$

Observação: uma conclusão **R** é uma consequência lógica de duas premissas (**P**, **Q**), se e somente se (**P Λ Q)**→**R** for uma tautologia (todos os valores verdadeiros na tabela verdade).

3.1. Regras de Inferência

Regras de Inferências são uma série de consequências lógicas clássicas que podem ser

Regras de inferência	Premissas	Conclusão
Dupla Negação (DN)	$\sim\sim P$	P
Introdução de $\wedge$ ($\wedge$ I)	P, Q	$P \wedge Q$
Eliminação de " $\wedge$ " ($\wedge$ E)	$P \wedge Q$	P (ou Q)
Introdução de "V" (VI)	P	$P \vee Q$
Modus Ponens (MP)	$P \rightarrow Q, P$	Q
Modus Tolens (MT)	$P \rightarrow Q, \sim Q$	$\sim P$
Dilema Construtivo (DC)	$P \vee Q, P \rightarrow Z, Q \rightarrow Z$	Z
Introdução de bicondicional ($\leftrightarrow$I)	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow P$	$P \leftrightarrow Q$
Eliminação de bicondicional ($\leftrightarrow$E)	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q \wedge Q \rightarrow P$
Silogismo Disjuntivo (SD)	$P \vee Q, \sim Q$	P
Silogismo Hipotético (SH)	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R$	$P \rightarrow R$
Absorção (ABS)	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow (P \wedge Q)$

usadas na demonstração de teoremas (afirmações que podem ser provadas).

As regras de inferência que serão estudadas estão resumidas abaixo.

I. **Dupla negação (DN):** de uma fórmula $\sim\sim X$, podemos inferir X. Essa regra permite inferir de premissas que são negação de negações.

Exemplo: $\mathbf{\sim\sim\sim P \rightarrow \sim\sim Q \vdash \sim P \rightarrow Q}$

II. **Introdução de Conjunção ($\wedge$I):** de quaisquer fórmulas X e Y, podemos inferir a conjunção $X \wedge Y$.

Exemplos: $\mathbf{P, \sim Q \vdash P \wedge \sim Q}$

$\mathbf{R, (P \rightarrow Q) \vdash R \wedge (P \rightarrow Q)}$

III. **Eliminação de Conjunção ($\wedge$E):** de uma conjunção podemos inferir qualquer um dos seus conjunctos.

Exemplos: $\mathbf{(Q \wedge R) \vdash Q}$

$\mathbf{(Q \wedge R) \vdash R}$

$\mathbf{R \wedge (P \rightarrow Q) \vdash R}$

$\mathbf{R \wedge (P \rightarrow Q) \vdash P \rightarrow Q)}$

Exercício 27– Encontre uma conclusão adequada usando as regras de inferência DN, $\wedge$I e $\wedge$E:

a) $P, Q \rightarrow R \vdash$

b) $R \vee S, \sim P \vdash$

c) $P \wedge \sim Q \vdash$

d) $(A \vee B) \wedge A \vdash$

e) $\sim (P \vee Q) \wedge (Q \rightarrow R) \vdash$

f) $X \neq 3 \wedge X > 2 \vdash$

IV. Introdução de Disjunção (vI): de uma fórmula X, podemos inferir a disjunção de X com qualquer fórmula.

Exemplos: **$C \vdash C \vee Q$**

$P \rightarrow Q \vdash (P \rightarrow Q) \vee R$

Exercício 28 - Encontre uma conclusão adequada usando a regra de inferência vI :

a) $B \wedge A \vdash$

b) $\sim J \vdash$

c) $X \neq 3 \vdash$

V. *Modus Ponens* (MP): de um condicional e seu antecedente, podemos inferir o seu conseqüente.

Exemplos: **$P \rightarrow Q, P \vdash Q$**

$\sim P \rightarrow Q, \sim P \vdash Q$

$P \rightarrow \sim Q, P \vdash \sim Q$

$\sim P \rightarrow \sim Q, \sim P \vdash \sim Q$

$\sim P \rightarrow (Q \vee R), \sim P \vdash (Q \vee R)$

$(Q \vee R) \rightarrow \sim P, (Q \vee R) \vdash \sim P$

Exercício 29- Encontre uma conclusão adequada usando as regras de inferência:

a) $B, B \rightarrow C \vdash$

b) $\sim R \rightarrow S, \sim R \vdash$

c) $P \rightarrow (Q \rightarrow S), P \vdash$

d) $\sim C, \sim C \rightarrow S \vdash$

e) $RvS \rightarrow Q, RvS \vdash$

f) $T, T \rightarrow \sim Q \vdash$

g) $X \neq 3 \rightarrow X > 2, X \neq 3 \vdash$

VI. *Modus Tollens* (MT): de um condicional e da negação do seu conseqüente, podemos inferir a negação do seu antecedente.

Exemplos: **$P \rightarrow Q, \sim Q \vdash \sim P$**

$\sim P \rightarrow Q, \sim Q \vdash P$

$P \rightarrow \sim Q, Q \vdash \sim P$

$\sim P \rightarrow \sim Q, Q \vdash P$

$\sim P \rightarrow (Q \vee R), \sim (Q \vee R) \vdash P$

$(Q \vee R) \rightarrow \sim P, P \vdash \sim (Q \vee R)$

Exercício 30- Encontre uma conclusão adequada usando a regra MT:

a) $\sim C, B \rightarrow C \vdash$
b) $RvS \rightarrow Q, \sim Q \vdash$
c) $\sim R \rightarrow \sim S, S \vdash$
d) $P \rightarrow (QVS), \sim(QVS) \vdash$
e) $\sim S, \sim C \rightarrow S \vdash$
f) $X \neq 3 \rightarrow X > 2, X \leq 2 \vdash$
g) $X < 4 \rightarrow (X+Y) = 5, (X+Y) \neq 5 \vdash$

VII. Dilema Construtivo (DC): de fórmulas X v Y, X→ Z e Y→ Z, podemos inferir a fórmula Z.

<u>Exemplo:</u> **P v Q, P→ R, Q→ R ├ R**

Exercício 31- Encontre uma conclusão adequada usando a regra DC:

a) $\sim C \vee B,\ B \rightarrow D, \sim C \rightarrow D \vdash$
b) $\sim C \vee B,\ B \rightarrow (D \wedge E), \sim C \rightarrow (D \wedge E) \vdash$
c) $(R \wedge S) \vee T, (R \wedge S) \rightarrow Q, T \rightarrow Q \vdash$

VIII. Introdução do bicondicional (↔I): de quaisquer fórmulas (X→Y) e (Y→X), podemos inferir X ↔ Y.

<u>Exemplo:</u> **P → Q, Q → P ├ P ↔ Q**

IX. Eliminação do bicondicional (↔E): de quaisquer fórmulas X ↔ Y, podemos inferir (X→Y) ou (Y→X).

<u>Exemplo:</u> **P ↔ Q ├ (P → Q) Λ (Q → P)**

Exercício 32- Encontre uma conclusão adequada usando regras de inferência ↔I e ↔E:

a) $A \leftrightarrow B \vdash$
b) $A \leftrightarrow \sim B \vdash$
c) $(AVC) \leftrightarrow (BVD) \vdash$
d) $(\sim A \rightarrow C), (C \rightarrow \sim A) \vdash$
e) $(\sim A \rightarrow CVD), (CVD \rightarrow \sim A) \vdash$

X. Silogismo Disjuntivo (SD): de uma disjunção e da negação de um dos seus disjuntos, podemos inferir o outro disjunto.

<u>Exemplo:</u> **P v Q, ~P ├ Q**
P v Q, ~Q ├ P
~P v Q, P ├ Q
P v ~Q, Q ├ P
~P v ~Q, P ├ ~Q
(P→R) v Q, ~(P→R) ├ Q

Exercício 33- Encontre uma conclusão adequada usando a regra SD:

a) $\sim A \vee B, A \vdash$
b) $A \vee B, \sim A \vdash$
c) $A \vee B, \sim B \vdash$
d) $(A \rightarrow C) \vee \sim B, \sim(A \rightarrow C) \vdash$
e) $A \vee \sim B, B \vdash$
f) $\sim A \vee \sim B, A \vdash$
g) $\sim C \vee (B \rightarrow C), C \vdash$
h) $X \neq 3 \vee X > 2, X \leq 2 \vdash$

XI. Silogismo Hipotético (SH): de dois condicionais, podemos inferir um terceiro.

Exemplo: $\mathbf{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R}$

Exercício 34- Encontre uma conclusão adequada usando a regra SH:

a) $\sim C \rightarrow \sim B, \sim B \rightarrow D \vdash$
b) $(R \vee S) \rightarrow Q, Q \rightarrow (T \vee S) \vdash$
c) $X = 3 \rightarrow X < Y, X < Y \rightarrow X \neq Z \vdash$

XII. Absorção (ABS): a partir de uma proposição condicional $X \rightarrow Y$, podemos inferir uma outra condicional com o mesmo antecedente X e cujo conseqüente é formado pela conjunção do antecedente com o conseqüente.

Exemplo: $\mathbf{P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow (P \wedge Q)}$

Exercício 35 - Encontre uma conclusão adequada usando a regra ABS:

a) $B \rightarrow \sim C \vdash$
b) $(R \vee S) \rightarrow Q \vdash$
c) $\sim R \rightarrow (Q \vee T) \vdash$
d) $X = 3 \rightarrow Y = 4 \vdash$

Exercício 36 - Dadas as premissas abaixo, verifique se a conclusão pode ser deduzida a partir delas. Justifique sua resposta.

a) Premissa1: Vou escrever ou pintar.
Premissa2: Não vou escrever.
Conclusão: Vou pintar.

b) Premissa1: Se o policial reagir, então o meliante vai atirar.
Premissa2: O policial não reagiu.
Conclusão: O meliante não atirou.

c) Premissa1: Se o policial reagir, então o meliante vai atirar.

Premissa2: O policial reagiu.

Conclusão: O meliante atirou.

d) Premissa1: Se Carlos casar, então irá viajar.

Premissa2: Carlos não viajou.

Conclusão: Carlos não casou.

Exercício 37 – Para cada uma das formas lógicas abaixo, indique a regra que foi usada para deduzir sua conclusão:

a) $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash Q \wedge R$
b) $P, \sim Q \vdash P \wedge \sim Q$
c) $\sim P \rightarrow (Q \wedge S), \sim(Q \wedge S) \vdash P$
d) $X=0 \leftrightarrow Y \neq 0 \vdash X=0 \rightarrow Y \neq 0 \wedge Y \neq 0 \rightarrow X=0$
e) $X=0 \rightarrow Y \neq 0, Y=0 \vdash X \neq 0$
f) $Y=2 \vee Z<Y, Z \geq Y \vdash Y=2$
g) $X=0 \rightarrow Y \neq 0, Y \neq 0 \rightarrow Z=0 \vdash X=0 \rightarrow Z=0$

3.2. Validade de Argumentos - Cálculo de Dedução Natural

Como dito anteriormente, a Lógica Formal avalia as formas de um argumento, enfatizando o estudo da forma e não do conteúdo dos argumentos.

Relembrando, um argumento dedutivo é uma sequência de proposições na qual uma delas é a conclusão ou tese e os demais são premissas ou hipóteses, as quais servem para provar a conclusão (Nolt & Rohantyn). Veja o exemplo:

Argumento: Todos os homens são mortais. Sócrates é homem. Portanto, Sócrates é mortal.

Premissa1: Todos os homens são mortais.

Premissa 2: Sócrates é homem.

Conclusão: **Sócrates é mortal.**

A seguir, algumas palavras utilizadas para assinalar a presença de um argumento:

Indicadores de premissas: pois, desde que, como, porque, assumindo que, visto que, supondo que, em vista de, dado que, sabendo-se que, como consequência de, etc.

Indicadores de conclusão: portanto, por conseguinte, assim, dessa maneira, neste caso, daí, logo, de modo que, então, assim sendo, consequentemente, o (a) qual implica que, etc.

É possível verificar a validade lógica de um argumento através do uso da tabela verdade e do cálculo de dedução natural, mediante regras de inferência ou demonstração condicional ou indireta.

No **caso da tabela-verdade**, essa pode ser construída para formas de argumento, como é o caso do exemplo abaixo. Nesse caso, para o argumento ser logicamente válido, a consequência lógica deve ser uma tautologia, isto é, NÃO pode haver uma linha da tabela em que as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. No exemplo, a forma de argumento é válida, pois na linha em que ambas premissas "PvQ" e "~P" são verdadeiras (terceira linha), a sentença "Q" também é verdadeira.

Exemplo: **P v Q, ~P ├ Q**

P	**Q**	**P v Q**	**~P**	**├ Q**
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

As outras maneiras de verificar a validade de um argumento serão descritas a seguir.

VALIDADE DE ARGUMENTOS MEDIANTE REGRAS DE INFERÊNCIA

Um método eficiente de estabelecer a validade de um argumento muito extenso é deduzir a sua conclusão a partir de suas premissas, mediante uma sequência de raciocínios elementares, dos quais se saiba que cada um é válido, como as regras de inferência e equivalências lógicas. Esse processo denomina-se sequência de demonstração ou prova.

A seguir, serão apresentados exemplos de sequências de prova usando as regras de inferência estudadas anteriormente;

***Modus Ponens* (MP)**

Exemplos - Prove a validade dos seguintes argumentos:

~P → Q, ~P ├ Q

Solução:

1	~P → Q	P (premissa)
2	~P	P (premissa)
3	Q	1,2 MP (Modus Ponens)

~P → (Q→ R), ~P, Q ├ R

Solução:

1	~P → (Q→ R)	P (premissa)
2	~P	P (premissa)
3	Q	P (premissa)
4	Q→ R	1,2 MP (Modus Ponens)
5	R	3,4 MP (Modus Ponens)

Exercício 38- Prove a validade dos seguintes argumentos:

a) B, B → C ├ C
b) RvS→Q, RvS ├ Q
c) ~R →S, ~R ├ S
d) P→ (Q →S), P├ (Q →S)
e) C, S →A, C→ S├ A
f) T, T→ ~Q, ~Q → ~S├ ~S

Dupla negação (DN)

Exemplos - Prove a validade dos seguintes argumentos:

P → ~Q, ~~P ├ ~Q

Solução:

1	P → ~ Q	P (premissa)
2	~~ P	P
3	P	2 DN (Dupla negação)
4	~Q	1,3 MP (Modus Ponens)

~P → ~ ~Q, ~ ~ ~P ├ Q

Solução:

1	~P → ~ ~Q	P (premissa)
2	~ ~ ~P	P
3	~P	2 DN (Dupla negação)
4	~ ~Q	1,3 MP (Modus Ponens)
5	Q	4 DN

Exercício 39- Prove a validade dos seguintes argumentos:

a) ~~P→ Q, P ├ Q
b) P → ~~Q, P ├ Q
c) P→ Q, ~~P ├ Q
d) ~P→ ~~Q, ~~~P ├ Q

Introdução de Conjunção (ΛI) e Eliminação de Conjunção (ΛE)

Exemplos - Prove a validade dos seguintes argumentos:

P → (Q Λ R), P ├ Q

Solução:

1	P → (Q Λ R)	P
2	P	P
3	Q Λ R	1,2 MP
4	Q	3 ΛE

P → (Q Λ R), P ├ P Λ Q

Solução:

1	P → (Q Λ R)	P
2	P	P
3	Q Λ R	1,2 MP
4	Q	3 ΛE
5	P Λ Q	2,4 ΛI

Exercício 40- Prove a validade dos seguintes argumentos:

a) P Λ Q, P→R ├ R

b) A →B, A ├ A Λ B

c) P Λ Q →R, P, Q ├ R

d) P Λ Q → R Λ S, ~~P, Q ├ S

Introdução de Disjunção (vI)

Exemplos - Prove a validade dos seguintes argumentos:

C v F → Q, C ├ Q

Solução:

1	C v F → Q	P
2	C	P
3	C v F	2 vI
4	Q	1,3 MP

P ├ (P v Q) Λ (P v R)

Solução:

1	P	P
2	P v Q	1 vI
3	P v R	1 vI
4	(P v Q) Λ (P v R)	2,3 ΛI

Exercício 41- Prove a validade do seguinte argumento:

a) B→A, B ├ AVC

Dilema Construtivo (DC)

Exemplo - Prove a validade dos seguintes argumentos:

S v D, S→ F, D→ F ├ F

Solução:

1	S v D	P
2	S→ F	P
3	D→ F	P
4	F	1,2,3 DC

Introdução do bicondicional (↔I)

Exemplo - Prove a validade do seguinte argumento:

F → G, G → F ├ F ↔ G

Solução:

1	F → G	P
2	G → F	P
3	F ↔ G	1 ↔I

Eliminação do bicondicional (↔E)

Exemplo - Prove a validade do seguinte argumento:

F ↔ (S v D), S ├ F

Solução:

1	$F \leftrightarrow (S \vee D)$	P
2	S	P
3	$(S \vee D) \rightarrow F$	1 $\leftrightarrow$E
4	$S \vee D$	2 vI
5	F	3,4 MP

Exercício 42- Prove a validade dos seguintes argumentos:

a) $A \wedge B \rightarrow C,\ C \rightarrow A \wedge B \vdash A \wedge B \leftrightarrow C$

b) $S \leftrightarrow F \vdash (S \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow S)$

Modus Tollens (MT)

Exemplo - Prove a validade do seguinte argumento:

$$\mathbf{(A \wedge B) \rightarrow C,\ \sim C \vdash \sim(A \wedge B)}$$

Solução:

1	$(A \wedge B) \rightarrow C$	P
2	$\sim C$	P
3	$\sim(A \wedge B)$	1,2 MT

$$\mathbf{(S \wedge Q),\ T \rightarrow \sim Q,\ \sim T \rightarrow R \vdash R \vee \sim S}$$

Solução:

1	$S \wedge Q$	P
2	$T \rightarrow \sim Q$	P
3	$\sim T \rightarrow R$	P
4	Q	1$\wedge$E
5	$\sim T$	2,4 MT
6	R	3,5 MP
7	$R \vee \sim S$	6 vI

Exercício 43- Prove a validade dos seguintes argumentos:

a) $P \rightarrow S,\ P \wedge Q,\ (S \wedge R) \rightarrow \sim T,\ Q \rightarrow R \vdash \sim T$

b) $E \leftrightarrow S,\ \sim T \rightarrow \sim F,\ E \wedge F \vdash T \wedge S$

c) $C,\ \sim D \rightarrow \sim C \vdash D$

Silogismo Disjuntivo (SD)

Exemplo - Prove a validade do seguinte argumento:

T v S, ~R, T→R ├ S

Solução:

1	T v S	P
2	~R	P
3	T→R	P
4	~T	2,3 MT
5	S	1,4 SD

A v (B Λ C), ~A ├ B Λ C

Solução:

1	A v (B Λ C)	P
2	~A	P
5	B Λ C	1,2 SD

Silogismo Hipotético (SH)

Exemplo - Prove a validade do seguinte argumento:

F → S, S→T ├ F→T

Solução:

1	F → S	P
2	S→T	P
3	F→T	1,2 SH

Também é possível usar **Equivalências Lógicas** (estudadas anteriormente) para demonstrar os teoremas:

Ex:

Exemplo - Prove a validade do seguinte argumento:

~(P v S), ~S→T ├ T

Solução:

1	~(P v S)	P
2	~S→T	P
3	~P Λ ~S	1 De Morgan
4	~S	3 Λ E
5	T	2,4 MP

Exercício 44 - Prove a validade dos seguintes argumentos:

a) $\sim P \rightarrow Q,\ R \rightarrow S,\ \sim P \vee R,\ \sim Q \vdash S$

b) $\sim P \rightarrow \sim\sim Q,\ \sim\sim\sim P \vdash Q$

c) $A,\ A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow C$

d) $E \wedge F,\ F \rightarrow (G \wedge H) \vdash G$

e) $P \wedge Q,\ Q \leftrightarrow R \vdash R$

f) $A \rightarrow B,\ C \rightarrow D,\ A \vee C,\ \sim B \vdash D$

g) $P \rightarrow S,\ P \wedge Q,\ (S \wedge R) \rightarrow \sim T,\ Q \rightarrow R \vdash \sim T$

h) $\sim A \rightarrow B,\ B \rightarrow C,\ \sim C \vdash A$

i) $\sim A \rightarrow C,\ C \rightarrow \sim M,\ M \vee R,\ \sim R \vdash A$

j) $E \wedge F,\ E \rightarrow S,\ \sim T \rightarrow \sim F \vdash T \wedge S$

k) $P \vee (Q \wedge Z),\ \sim(Q \wedge Z) \vdash P$

Demonstração Condicional e Indireta

***** As duas próximas regras são denominadas **regras hipotéticas**, pois empregam o raciocínio hipotético, que é um raciocínio baseado em hipóteses, isto é, uma suposição feita sobre o argumento a fim de mostrar que uma conclusão particular segue daquela suposição.

Prova do condicional (PC): usada quando a conclusão é uma proposição condicional.

Exemplo - Prove a forma do seguinte argumento:

$$\mathbf{P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R}$$

Solução:

1	$P \rightarrow Q$	P
2	$Q \rightarrow R$	P
3	$\mid P$	H (Hipótese)
4	$\mid Q$	1,3 MP
5	$\mid R$	2,4 MP
6	$P \rightarrow R$	3,5 PC

Redução do absurdo (RAA): dada uma derivação de uma contradição a partir de uma hipótese X, podemos descartar a hipótese e inferir ~X.

Exemplo - Prove a forma do seguinte argumento:

$$\mathbf{P \rightarrow Q,\ \sim Q \vdash \sim P}$$

Solução:

1	$P \rightarrow Q$	P
2	$\sim Q$	P
3	$\mid P$	H (Hipótese)
4	$\mid Q$	1,3 MP

5	| Q Λ ~Q (contradição)	2,4 ΛI
6	~P	3,5 RAA

Exercício 45 - Verificar a validade dos seguintes argumentos:

a) (P→Q) Λ (P→R) ├ P→ (Q ΛR)
b) PvR, Q→~P ├ Q→ R
c) ~(~PΛ~Q), ~P ├ Q
d) ~(AΛB), C→(AΛB) ├ ~C
e) P→Q, P, R→~(P ΛQ) ├ ~R

Exercício 46 - Verificar a validade dos seguintes argumentos:

a) C, S→ A, C→ S ├ A
b) A, A →(B→ CΛD) ├ B→ D
c) ~~A, B Λ A →C, B ├ C
d) F, F Λ A → C V F, F→A ├ C V F
e) ~P Λ Q → U, ~~~P, S→Q, X→RΛS, X ├ U

***Exercícios Complementares* -** Verificar a validade das seguintes formas de argumentos, usando as regras indicadas:

MP

a) ~P→Q, ~P ├ Q

b) ~P→(Q→R), ~P, Q ├ R

DN

c) T→ ~~P, P→~Q, T ├~Q

d) ~P → ~~Q, ~~~P ├ Q

Λ I e **Λ E**

e) P→ Q, R→S, P, R ├Q ∧ S

f) P→ (Q ∧ R), P ├ P ∧ Q

g) (P∧Q) → (R∧S), ~~P, Q ├ S

h) ~P ∧ Q → U, ~~~P, S→Q, X→R∧S, X ├ U

i) S → ((P∧Q)→~~R), P∧Q, T∧S ├ R∧T

j) Q ├ (QvS) ∧ (QvR)

k) P, ~~(P→Q) ├ Qv ~Q

l) P, ~~(P→Q) ├ (R∧S)vQ

DC

m) SvD, S→F, D → F ├ F

n) (PvQ)∧(PvR), P→S, Q→S, P→T,R→T ├S∧T

o) PvP, P→(Q∧R) ├ R

↔ I e **↔ E**

p) P→Q, (P→Q) → (Q→P) ├ P ↔ Q

q) S→(R→P), A∧S, P→R ├ (P↔R) v Q

r) ~~(P↔X), ~~(Q→X), X∧P→K, PvQ, K↔U ├ U

s) F↔(SvD), S ├ F

MT

t) P→(QvR), ~(QvR) ├ ~P

u) A∧~B, ~C→D, C→B ├Dv~A

SD

v) P→Q, ~(P→Q) v (T→P) ├ (T→P)

x) ~A, BvC, B→A ├C

SH

z) T→(QvR), (QvR)→P ├ (T→P)