Compte-rendu Projet de Méthodes Numériques

Clémence Gardelle William Didier

Avril 2017

1 Question 1 :

L'équation (10) du sujet équivaut a :

$$\begin{aligned} u_i^{(k+1)} + u_i^{(k)} &= \mu.\theta\left(C_{i+1/2}.u_{i+1}^{(k+1)} - (C_{i+1/2} + C_{i-1/2}).u_i^{(k+1)} + C_{i-1/2}.u_i^{(k+1)}\right) \\ &\quad +\mu.(1-\theta)\left(C_{i+1/2}.u_{i+1}^{(k)} - (C_{i+1/2} + C_{i-1/2}).u_i^{(k)} + C_{i-1/2}.u_i^{(k)}\right) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$.\mu(-C_{i+1/2}).u_{i+1}^{k+1} + (1+\theta.\mu(C_{i+1/2}+C_{i-1/2})).u_i^{k+1} + \theta.\mu(-C_{i-1/2}).u_{i-1}^{k+1}$$
$$=$$
$$(\theta-1)\mu(-C_{i+1/2}).u_{i+1}^{k} + (1+(\theta-1)\mu(C_{i+1/2}+C_{i-1/2})).u_i^{k} + (\theta-1)\mu(-C_{i-1/2}).u_{i-1}^{k}$$

(équation (1'))

On pose A tridiagonale tq :

$$\begin{cases} a_{i,i} &= C_{i+1/2} + C_{i-1/2}, \forall i \in [|1;n|] \\ a_{i,i_1} &= -C_{i-1/2}, \forall i \in [|1;n-1|] \\ a_{i,i+1} &= -C_{i+1/2}, \forall i \in [|2;n|] \end{cases}$$

$\boxed{\forall i \in [|2;n|] :}$

$$\begin{aligned} (I+(\theta-1)\mu A).{U^k}_i &= (\theta-1)\mu a_{i,i-1}.u_{i-1}^{(k)} + (1+(\theta-1)\mu a_{i,i}).u_i^{(k)} + (\theta-1)\mu a_{i,i+1}.u_{i+1}^{(k)} \\ &= (\theta-1)\mu(-C_{i+1/2}).u_{i+1}^{(k)} + (1+(\theta-1)\mu(C_{i+1/2}+C_{i-1/2})).u_i^{(k)} \\ &\quad +(\theta-1)\mu(-C_{i-1/2}).u_{i-1}^{(k)} \end{aligned}$$

On a donc le second menbre de (1').

Et de plus :

$$\begin{aligned}(I+\theta.\mu A).{U^{k+1}}_i &= \theta.\mu a_{i,i-1}.u_{i-1}^{(k+1)} + (1+\theta.\mu a_{i,i}).u_i^{(k+1)} + \theta.\mu a_{i,i+1}.u_{i+1}^{(k+1)} \\ &= \theta.\mu(-C_{i+1/2}).u_{i+1}^{k+1} + (1+\theta.\mu(C_{i+1/2}+C_{i-1/2})).u_i^{k+1} \\ &\quad +\theta.\mu(-C_{i-1/2}).u_{i-1}^{k+1}\end{aligned}$$

On a donc le premier menbre de (1').

On a donc l'égalité souhaitée, avec $B_i = 0, \forall i \in [|2,n|]$

$\boxed{\text{i = 1 :}}$

$$(I+\theta.\mu A).U_1^{k+1} = \theta.\mu(-C_{3/2}).u_2^{k+1} + (1+\theta.\mu(C_{3/2}+C_{1/2})).u_1^{k+1}$$

$$(I+(\theta-1)\mu A).U_1^k = (\theta-1)\mu(-C_{3/2}).u_2^{(k)} + (1+(\theta-1)\mu(C_{3/2}+C_{1/2})).u_1^{(k)}$$

Et (1') donne :

$$\theta.\mu(-C_{3/2}).u_2^{k+1}+(1+\theta.\mu(C_{3/2}+C_{1/2})).u_1^{k+1} = (\theta-1)\mu(-C_{3/2}).u_2^{(k)}+(1+(\theta-1)\mu(C_{3/2}+C_{1/2})).u_1^{(k)}+\mathbf{u}$$

On prend donc $B_1 = u_0^{(k+1)}.\theta.C_{1/2} - u_0(k).(\theta-1).C_{1/2}$, et on a l'égalité

On a donc :

A tridiagonale tq :

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} a_{i,i} &= C_{i+1/2}+C_{i-1/2}, \forall i \in [|1;n|] \\ a_{i,i-1} &= -C_{i-1/2}, \forall i \in [|2;n|] \\ a_{i,i+1} &= -C_{i+1/2}, \forall i \in [|1;n-1|]\end{aligned}\right.}$$

2 Question 2 :

On prend X vecteur de dimention n, non nul. On cherche à montrer $X^T.M.X \geq 0$.

$$\begin{aligned}(AX)_i &= (C_{1/2}+C_{3/2}).x_1 - C_{3/2}.x_2 \text{ ,} pour\ i=1 \\ &= -C_{i-1/2}.x_{i-1} + (C_{i-1/2}+C_{i+1/2}).x_i - C_{i+1/2}.x_{i+1} \text{ ,} pour\ i \in [|2,n-1|] \\ &= -C_{n-1/2}.x_{n-1} + (C_{n-1/2}+C_{n+1/2}).x_n \text{ ,} pour\ i=n.\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$
\begin{aligned}
X^T.A.X &= \sum_{i=2}^{n} -C_{i-1/2}.x_{i-1}.x_i + \sum_{i=1}^{n} C_{i-1/2}.x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} C_{i+1/2}.x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} -C_{i+1/2}.x_{i+1}.x_i \\
&= \sum_{i=2}^{n} -C_{i-1/2}.x_{i-1}.x_i + \sum_{i=1}^{n} C_{i-1/2}.x_i^2 + \sum_{i=2}^{n+1} C_{i-1/2}.x_{i-1}^2 + \sum_{i=2}^{n} -C_{i-1/2}.x_i.x_{i-1} \\
&= \sum_{i=2}^{n} C_{i-1/2}.(x_{i-1}^2 - 2.x_{i-1}.x_i + x_i^2) + C_{1/2}.x_1 + C_{n+1/2}.x_n \\
&= \sum_{i=2}^{n} C_{i-1/2}.(x_{i-1} - x_i)^2 + C_{1/2}.x_1^2 + C_{n+1/2}.x_n^2
\end{aligned}
$$

Tous les termes de cette somme sont positifs, puisqu'ils sont tous des produits de coefficients C_i positifs et de carrés.

$\boxed{\text{On a donc A symétrique définie positive.}}$

3 Question 3 :

La fonction retourne 2 vecteurs : `ldiag` (1 x n) et `ldinf` (1 x n-1).

On commence par initialiser $l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$.

Ensuite, en analysant la forme générale $l_{1,1} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2}$, on constate que l est tridiagonale et donc que le seul terme non nul de la somme est $l_{i,i-1}^2$.

On a donc $\boxed{\forall i \in [|2, n|],\ l_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - l_{i,i-1}^2}}$.

De plus,

$$l_{j,i} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}.l_{i+1,k}}{l_{i,i}}$$

est nul sauf $j = i + 1$(matrice bidiagonale supérieure).

On a donc

$$l_{i+1,i} = \frac{a_{i,i+1} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}.l_{i+1,k}}{l_{i,i}}$$

avec $\forall k \in [|1, i+1|],\ l_{i+1,k} = 0$.

D'ou : $\boxed{l_{i+1,i} = \frac{a_{i,i+1}}{l_{i,i}}\ ,\ \forall i \in [|1, n-1|]}$.

4 Question 4 :

On veut résoudre le systeme :

$$\begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

On a donc $l_{1,1}.z_1 = y_1 \Rightarrow \boxed{z_1 = \frac{y_1}{l_{1,1}}}$

Puis : $l_{i,i}.z_i + l_{i,i-1}.z_{i-1} \Rightarrow \boxed{z_i = \frac{y_i - l_{i,i-1}.z_{i-1}}{l_{i,i}} \ , \ \forall i \in [|2, n|]}$

5 Question 5 :

On veut résoudre le systeme :

$$\begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{2,2} & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & l_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & l_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

On a donc $l_{i,i}.x_i = z_i \Rightarrow \boxed{x_i = \frac{z_i}{l_{i,i}} \ , \ \forall i \in [|1, n|]}$

Puis : $l_{i,i}.x_i + l_{i,i+1}.x_{i+1} = z_i \Rightarrow \boxed{x_i = \frac{z_i - l_{i,i+1}.x_{i+1}}{l_{i,i}} \ , \ \forall i \in [|1, n-1|]}$

6 Question 6 :

La méthode des différences finies donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left[C(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right](x_i;t_k) &= \frac{-1}{\delta_x^2} * (-C_{i+1/2}.u_{i+1}^{(k)} + (C_{i+1/2} + C_{i-1/2}).u_i^{(k)} - C_{i-1/2}.u_{i-1}^{(k)}) \\ &= \frac{-1}{\delta_x^2} * (A.U^k)_i \ , \ \forall i \in [|2; n-1|] \\ &= 0 \ , \ \forall i \in [|2; n-1|] \ (\Leftrightarrow x_i \in]-l, l[) \end{aligned}$$

Donc $\forall i \in [|2; n-1|], (A.U^k)_i = B_i = 0.$

Pour les cas de bord:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left[C(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right](x_1;t_k) &= \frac{-1}{\delta_x^2} * \left((A.U^k)_1 - C_{1/2}.u_0^{(k)}\right) \\ &= \frac{-1}{\delta_x^2} * \left((A.U^k)_1 - C_{1/2}.u_0\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $(A.U^k)_1 = B_1 = C_{1/2}.u_0.$

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial x}\left[C(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right](x_n;t_k) & = & \frac{-1}{\delta_x^2} * \left((A.U^k)_n - C_{n+1/2}.u_{n+1}^{(k)}\right) \\ & = & \frac{-1}{\delta_x^2} * \left((A.U^k)_1 - 0\right) \\ & = & 0. \end{array}$$

Donc $(A.U^k)_n = B_n = 0$.

$$\boxed{\text{On a donc } A.U^{(k)} = B \text{ avec } \left\{ \begin{array}{rcl} B_1 & = & C_{1/2}.u_0 \\ B_i & = & 0, \forall i \in [|2;n|] \end{array} \right.}$$

Or A est inversible, donc notre probleme admet une unique solution $U^{(k)} = B.A^{-1}$.

7 Question 7 :

$$\begin{array}{rcl} \frac{-1}{l} * e^{\frac{-x}{l}} * u'(x) + \Leftrightarrow e^{\frac{-x}{l}} * u''(x) & = & 0 \\ \Leftrightarrow u''(x) - \frac{1}{l} * u'(x) & = & 0 \\ \Leftrightarrow u''(x) & = & \frac{1}{l} * u'(x) \end{array}$$

Soit $x^2 - \frac{1}{l} * x = 0 \Leftrightarrow x * (x - \frac{1}{l}) = 0$

On a deux racines : $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{1}{l}$.
Donc $\exists (a,b), u(x) = a * e^0 + b * e^{\frac{1}{l}}$

Or : $u_0 = u(-l) = 1 \Leftrightarrow a + b * e^{-1} = 1$
Et : $u(l) = 0 \Leftrightarrow a + b * e^1 = 0$
Donc $a = \frac{-e^2}{1-e^2}$ et $b = \frac{e}{1-e^2}$.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} Donc \;\; u(x) & = & a + b * e^{\frac{1}{l}} \\ & = & \frac{e}{1-e^2} * (e^{\frac{1}{l}} - e) \end{array}}$$

Avec n = 10 000, on obtient les courbes expérimentales et exactes suivantes :

La courbe bleue est la courbe expérimentale obtenue avec notre programme, la bleue est celle de la solution théorique calculée précedament.

On observe que les courbes sont assez proches l'une de l'autre, particulierement aux limites, meme si la convergence pourrait etre amélioré sur l'ensemble d'analyse.

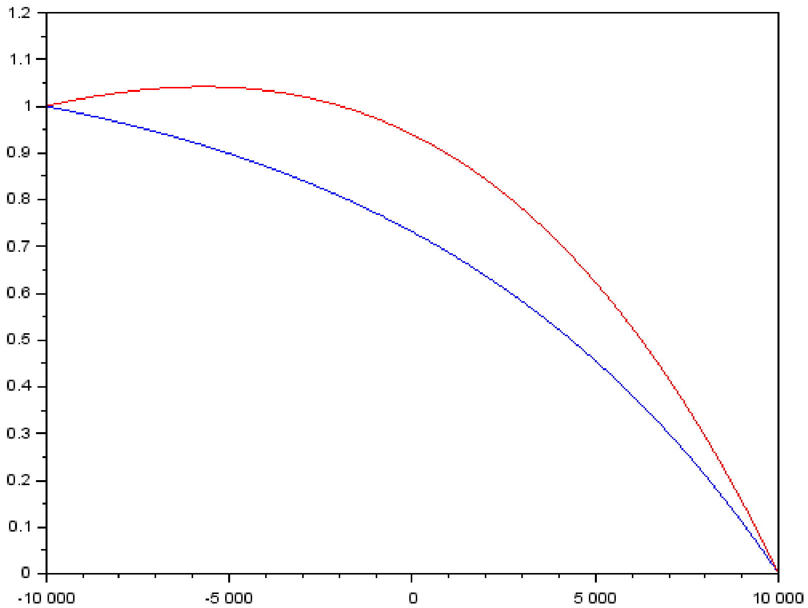

Figure 1: Courbes expérimentales et exactes, pour n = 10 000

8 Question 8 :

Soit X un vecteur propre de A et λ sa valeur propre associée.

On a alors :

$$\begin{aligned} NX &= (I-(1-\theta).\mu.A)X \\ &= X-(1-\theta).\mu.\lambda.X \\ &= (1-(1-\theta).\mu.\lambda)X \end{aligned}$$

Donc X est également un vecteur propre de N, de valeur propre associée $(1-(1-\theta).\mu.\lambda)$. De meme, X est vecteur propre de M, de valeur propre associée $(1+\theta.\mu.)$. Donc X est vecteur propre de M^{-1}, de valeur propre associée $\frac{1}{1+\theta.\mu.}$.

Donc :

$$\begin{aligned} M^{-1}NX &= (1-(1-\theta).\mu.\lambda)M^{-1}X \\ &= \tfrac{1-(1-\theta).\mu.\lambda}{1+\theta.\mu.}X \\ &= \tfrac{1-\mu.\lambda/2}{1+\mu.\lambda/2}X \end{aligned}$$

Donc X est vecteur propre de $M^{-1}N$ de valeur propre associée $\frac{1-\mu.\lambda/2}{1+\mu.\lambda/2}$.

Or A est diagonalisable, donc ses vecteurs propres forment une base de R^n. De plus, A et $M^{-1}N$ ont les mêmes dimensions, donc les memes vecteurs propres.

Donc toutes les valeurs propres de $M^{-1}N$ s'écrivent $\frac{1-\mu.\lambda/2}{1+\mu./2}$ avec λ plus grand que 0 (valeur propre de A, matrice symétrique définie positive).

Or :

$$\left|\frac{1-\mu.\lambda/2}{1+\mu.\lambda/2}\right| < \frac{|1-\mu.\lambda/2|}{|1+\mu.\lambda/2|} < 1 \ , \ \forall\lambda > 0$$

Donc $\boxed{\rho(\mathrm{M}^{-1}N) = \underset{\lambda\ vp\ de\ A,\ >0}{Max} \left|\frac{1-\mu.\lambda/2}{1+\mu.\lambda/2}\right| < 1}$

9 Question 9:

$MU^{k+1} = NU^k + \mu B$

Or, d'aprs le cours sur l'étude de la convergence, ce type de schéma converge si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Or, c'est précisément ce que l'on vient de montrer a la question précédante.

$\boxed{\text{On a donc bien convergence du schéma.}}$

10 Question 10:

Notre code n'est malheureusement toujours pas fonctionnel pour ce qui concerne cette question. Nous obtenons des valeurs incohérentes (U croit avec le temps sans limite apparente). Nous n'avons malheureusement pas réussi á identifier le probleme dans le codage de notre schéma.

11 Question 11:

Nous n'avons pas réussi a implémenter cette fonction ni les suivantes, nous concentrant sur le débuggage de la question 10 : en effet, la fonction précédente est essentielle pour la suite.

12 Question 12:

13 Question 13 :

Pour réaliser la dichotomie, il faut chosir dans quel sous-intervalle se placer lors d'une étape quelconque.

Nous savons que la fonction est décroissante jusqu'au minimum cherché, puis croissante.

Il faut donc déterminer a quel moment le sens de variation change :

- Si le minimum est dans l'intervalle $[a, x_2]$, alors J est croissante sur $[x_2, b]$ ($x_2 < x_3 < b$).
- Si le minimum est dans l'intervalle $[x_1, x_3]$, alors J est décroissante sur $[a, x_1]$ ($a < x_1$) et croissante sur $[x_3, b]$ ($x_3 < b$).
- Si le minimum est dans l'intervalle $[x_2, b]$, alors J est décroissante sur $[a, x_2]$ ($a < x_1 < x_2$).

On fait donc trois cas dans notre fonction :

- Si $a < x_1$ et $x_3 > b$, on cherche dans $[x_1, x_3]$
- Si $a > x_1$ et $x_1 > x_2$, on cherche dans $[x_2, b]$
- Si $x_2 < x_3$ et $x_3 < b$ (ou si les autres cas ne sont pas possible), on cherche dans $[a, x_2]$

14 Question 14 :

Pour cette fonction, on défini tout d'abord un x_0 tres approximatif. Une fois que on l'a défini, a chaque étape on :

- Tant que la valeur absolue de $J'(x)$ n'est pas inférieure a ϵ, on fait les étapes suivantes
- On calcule Δ_x grace a la formule du sujet
- On remplace x_k par $x_{k+1} = x_k + \Delta_x$