1.系统建模

对于机器人的平衡，纵向以及转向运动，可以将模型简化为三维空间中的类一阶倒立摆模型，即忽略腿长的变化，转向运动由两个驱动轮差速运动控制。

1.1模型定义

称机器人机体质心到两个驱动轮转轴中心的连线为摆杆，得到如图1所示平衡车模型。

该模型的变量与参数定义如表1、表2所示。

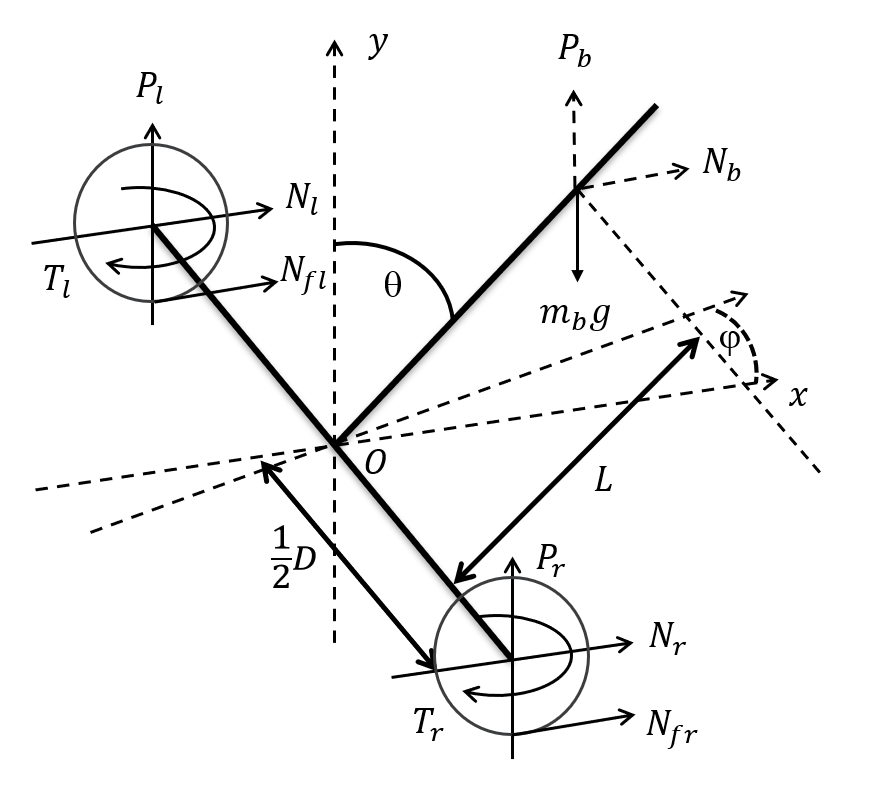


图1 平衡车模型

表1 平衡车模型变量定义

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 符号 | 含义 | 正方向 | 单位 |
| θ | 摆杆与竖直方向夹角 | 图示为正方向 | rad |
| ϕ | 摆杆偏航角 | 图示为正方向 | rad |
|  | 驱动轮位移 | X轴正方向 | m |
|  | 机体位移 | X轴正方向 | m |
|  | 驱动轮对摆杆力的竖直分量 | 箭头所示 | N |
|  | 摆杆受到的竖直方向力 | 箭头所示 | N |
|  | 驱动轮对摆杆力的水平分量 | 箭头所示 | N |
|  | 摆杆受到的水平方向力 | 箭头所示 | N |
|  | 驱动轮输出力矩 | 箭头所示 | N·m |

表2 平衡车模型参数定义

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 符号 | 单位 | 含义 |
|  |  | 车体转向直径 |
|  |  | 驱动轮半径 |
|  |  | 摆杆质心到驱动轮转轴中心的直线长度 |
|  |  | 驱动轮质量 |
|  |  | 摆杆质量 |
|  |  | 摆杆绕质心关于Z轴的转动惯量 |
|  |  | 驱动轮转子转动惯量 |
|  |  | 整车质心关于Y轴的转动惯量 |

1.2 经典力学分析

对驱动轮，有：

对摆杆，有：

对整车，有：

其中：

1.3 状态空间模型

定义非线性模型：

利用*MATLAB*符号运算工具，联立式（1）到式（8），通过函数solve对方程组消去中间变量，最终得到非线性表达式（9），式（10），和式（11）

定义状态向量x与控制向量u分别为：

根据式状态向量x与控制向量u，求非线性模型在平衡点处的雅可比矩阵并对其线性化，即将，则代入式（9）到（11）后，求：

其中，x、u是系统平衡点，即方程的解：

最终求得的状态方程为：

由于表达式略为复杂，此处用符号代替，具体内容可通过运行MATLAB代码在工作空间中查看。

所有变量均可通过平衡车上各个传感器（如驱动轮编码器，IMU模块等）直接测量或通过数据融合解算得到，故可得系统输出，其中为单位阵。

代入平衡车实车模型参数后可以得到该状态空间模型的状态矩阵A和控制矩阵B，在MATLAB中使用rank函数求得其可控矩阵满秩，系统可控。系统输出矩阵C为单位矩阵，系统可观。

1.4 仿真验证

将Solidwork中搭建的模型分模块导入到仿真软件Webots中，通过对关节电机设置其允许位移为0，得到一个定腿长的平衡车模型。



图2 仿真环境中的整车模型

通过使用MATLAB中的lqr函数计算得到反馈增益矩阵K。因为在仿真中主要目的是验证模型建立是否正确，用于计算K矩阵的Q和R权矩阵的数值选取只关注机器人俯仰角的稳定。经检验，得到模型正确。

2 控制器设计

基于本项目的平衡车构型，除了机器人的平移、转向和保持平衡的控制外，还需要控制平衡车双腿的长度及其横滚角。

2.1 LQR控制器

基于上述求得的状态空间方程，通过一个LQR控制器可以较好地对机器人平移、旋转以及机体俯仰角进行控制。

设计控制律为系统状态的线性组合：

通过线性二次型调节器计算反馈矩阵，定义代价函数为

其中：

* 是系统状态向量；
* 是控制输入向量；
* 是对状态变量的加权矩阵，通常是半正定矩阵，反映了对状态偏离的惩罚；
* 是对控制输入的加权矩阵，通常是正定矩阵，反映了对控制能量的惩罚。

**最优控制律：**

为了使代价函数达到最小，控制输入 应满足以下关系：

其中：

* 是代数 Riccati 方程的解。

**反馈增益矩阵：**

通过上述控制律，反馈增益矩阵 可以表示为：

代数 Riccati 方程**:**

矩阵需要满足以下代数 Riccati 方程：

其中：

* 和 是系统状态空间方程中的系统矩阵和输入矩阵。

为了可以控制平衡车的移动和转向，还需要实现对位移和偏航角两个状态变量的轨迹跟踪。在系统输入中加入参考输入，即状态期望：

其中为：

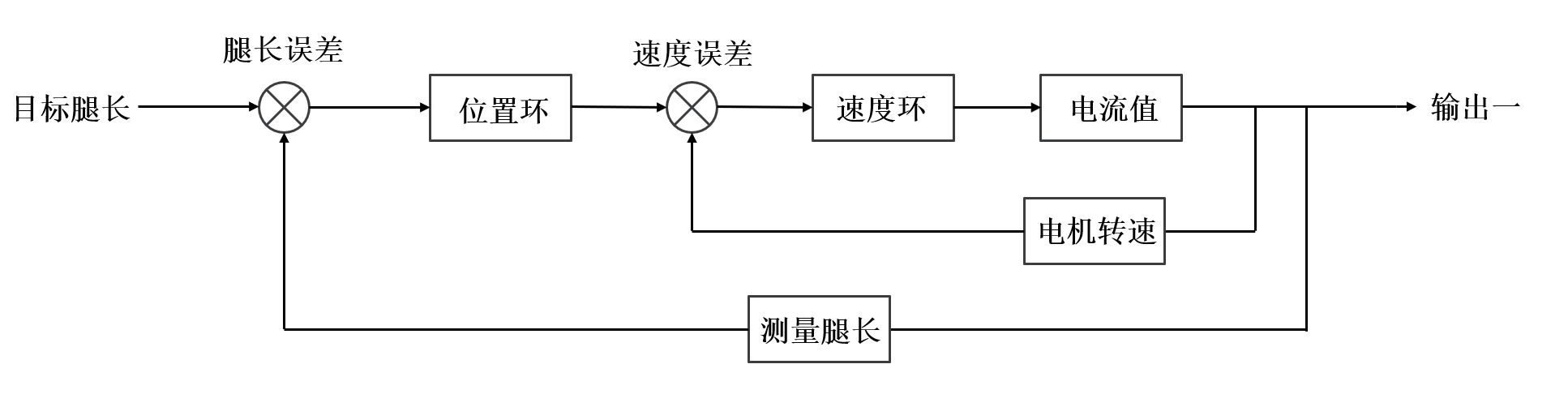
为期望位移，为期望偏航角，两者均由其期望一阶微分量对时间积分得到。

2.2 双环PID控制器

基于该项目平衡车的四连杆腿部构型，可以通过关节电机的输出来调整机器人的腿部长度；同时，为了让机器人在进行视觉识别时机体保持横滚角水平，还需要根据机器人实时的横滚角值来调整两边腿的长度。

为了让机器人的腿长控制有更快的响应速度和鲁棒性，引入两个双环PID控制器分别对机器人的腿长和横滚角进行控制，最后并行输出到电机控制电流值。

腿长的控制框图如图3所示：

图3 机器人腿长双环PID控制框图

横滚角的控制框图如图4所示：

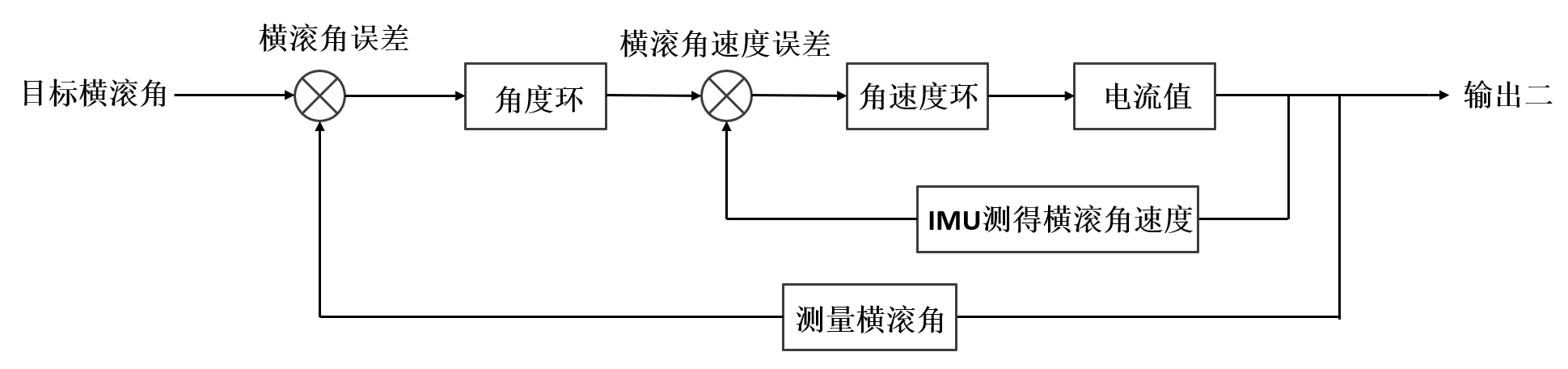


图4 机器人横滚角双环PID控制框图

最终发送的电机电流值为两个控制器的输出之和。

2.3 增益矩阵K的参数拟合

在建模阶段，我们将倒立摆的杆长假设为定值，但实际上，该值会随着机器人腿长的变化而改变，其对应的模型也会有差异。由于求得解析解较为困难，我们将机器人腿长作为拟合的自变量，对增益矩阵K进行四阶多项式拟合。

由于实车环境下我们无法直接测量机器人实时腿长，需要由一些角度关系推算得到。将模型简化至如图5所示。

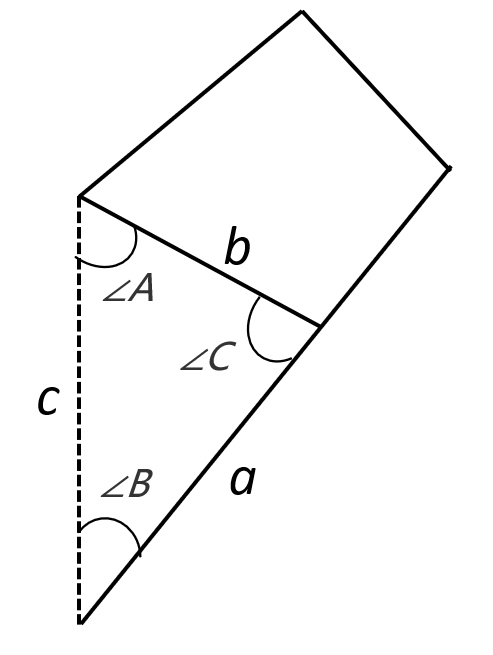


图5 腿部四连杆结构简化模型

其中，三角形边a、边b可以通过在机械图纸中测量得到，角A可以由电机编码器求得，边c则是期望求得的机器人腿长。由余弦定理得式（13）：

通过MATLAB的solve函数求解（排除负数解）得式（14）：

经测量，实车边，边，将数据代入并由0至90度遍历角A可以得到角A与腿长的关系曲线如图6所示。

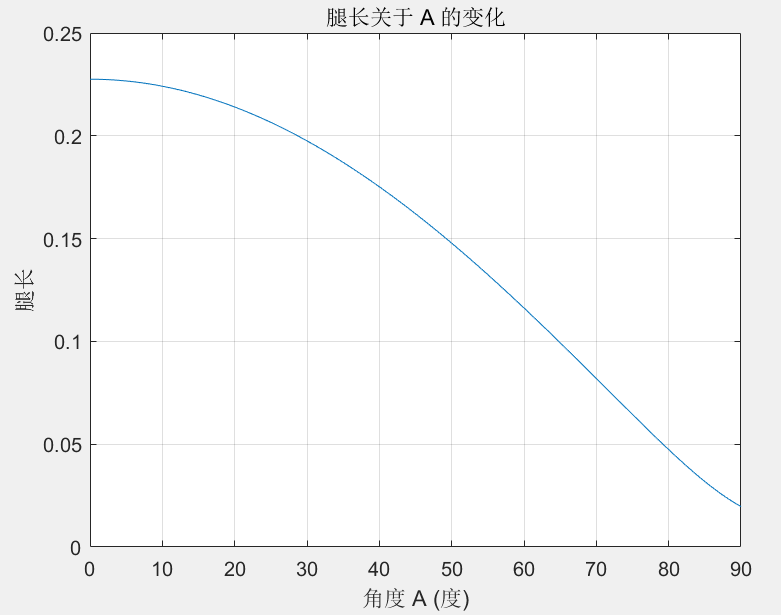


图6 机器人腿长与角度A的关系曲线

在MATLAB中遍历腿长，计算不同腿长值下的增益矩阵K，并对K矩阵每个元素进行关于角度A的多项式拟合，求得拟合系数并存到EXCEL表格中，以便将它们添加进实车代码中进行增益矩阵的实时计算。

拟合公式如式（15）：

其中y对应K矩阵的各个元素，x为测得角度A的值。

最终的拟合效果如图7所示，蓝色曲线为各个角度A值下的实际K矩阵值，紫色曲线为拟合值。

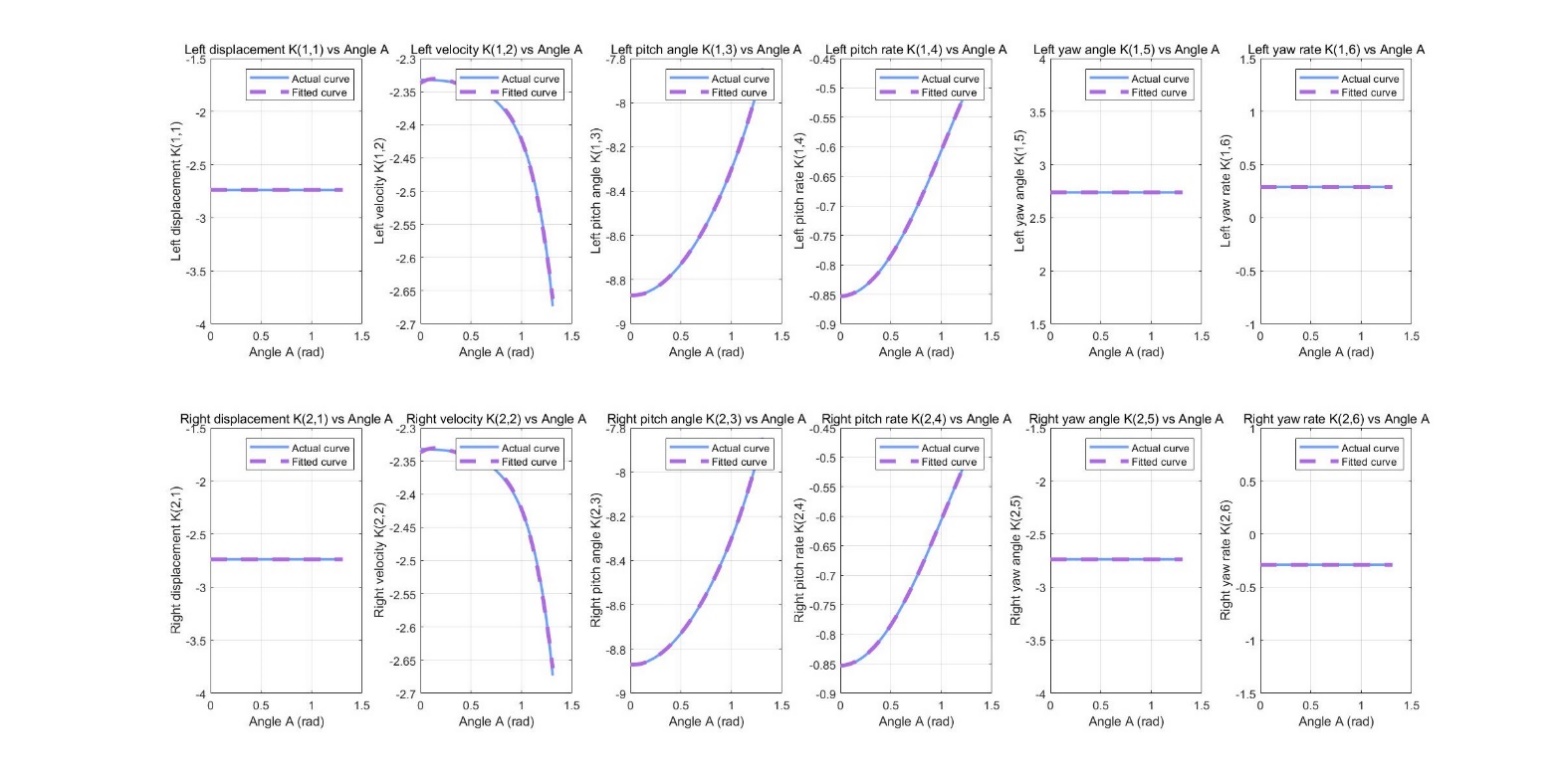


图7 增益矩阵K的实际曲线与拟合曲线对比

通过对比，可知拟合效果满足实车控制需求。

3. 实车硬件选型及代码框架介绍

基于项目需求及材料储备，本次选取的电控硬件型号如表3所示。

表3 平衡车实车主要电控硬件表

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 名称 | 部分技术参数 | 功能 | 数量 |
| Robomaster开发板C型 | 输入电压：8-28 V  IMU+E-compass：1个  CAN总线接口：CAN1：2个；CAN2：2个  UART接口：2个  SPI接口：1个 | 搭载的芯片提供足够高的运算能力，让机器人控制频率保持1000Hz。电机通讯、遥控器信息接收以及视觉电脑通讯 | 1 |
| 迈克mc6cmini遥控器航模接收器接收机 | 通道数量：6  频率范围：2401-2478 Mhz  控制范围：>800 m | 发送摇杆值，发送机器人平移、旋转、跳跃等指令 | 1 |
| 瓴控MG6012E-i8v3伺服电机 | 额定电压：48 V  空载转速：310 rpm  额定扭矩：6 Nm  峰值扭矩：16 Nm | 机器人关节电机，控制机器人的腿长以及机体横滚角 | 2 |
| Robomater GM6020电机 | 额定电压：24 V  空载转速：320 rpm  额定扭矩：1.2 Nm  峰值扭矩：1.4 Nm | 机器人驱动轮电机，执行平移、旋转、维持平衡等动作 | 2 |
| 经纬M600系列TB47S智能飞行电池 | 容量: 4500 mAh 电压: 22.2 V | 整套机器人电控系统的供电 | 1 |
| DC-DC可调电源模块 | 输入电压：7-32 V  输出电压：0.8-28 V  恒流范围：0.2-12 A | 为视觉电脑提供适配的工作电压及电流 | 1 |

4. 实车测试结果与数据分析

对整车多个控制器的控制效果进行分析，除了腿长控制器和横滚角控制器的测试，所有数据测量均在固定腿长的实车状态下测得，对应的增益矩阵K如下所示。数据均在J-Scope中测得，在MATLAB中绘制。

4.1 平衡车位移、偏航角静态响应及俯仰角变化

在静止状态下，给机器人位移期望输入幅值为的阶跃信号，其位移响应及俯仰角变化如图8所示。

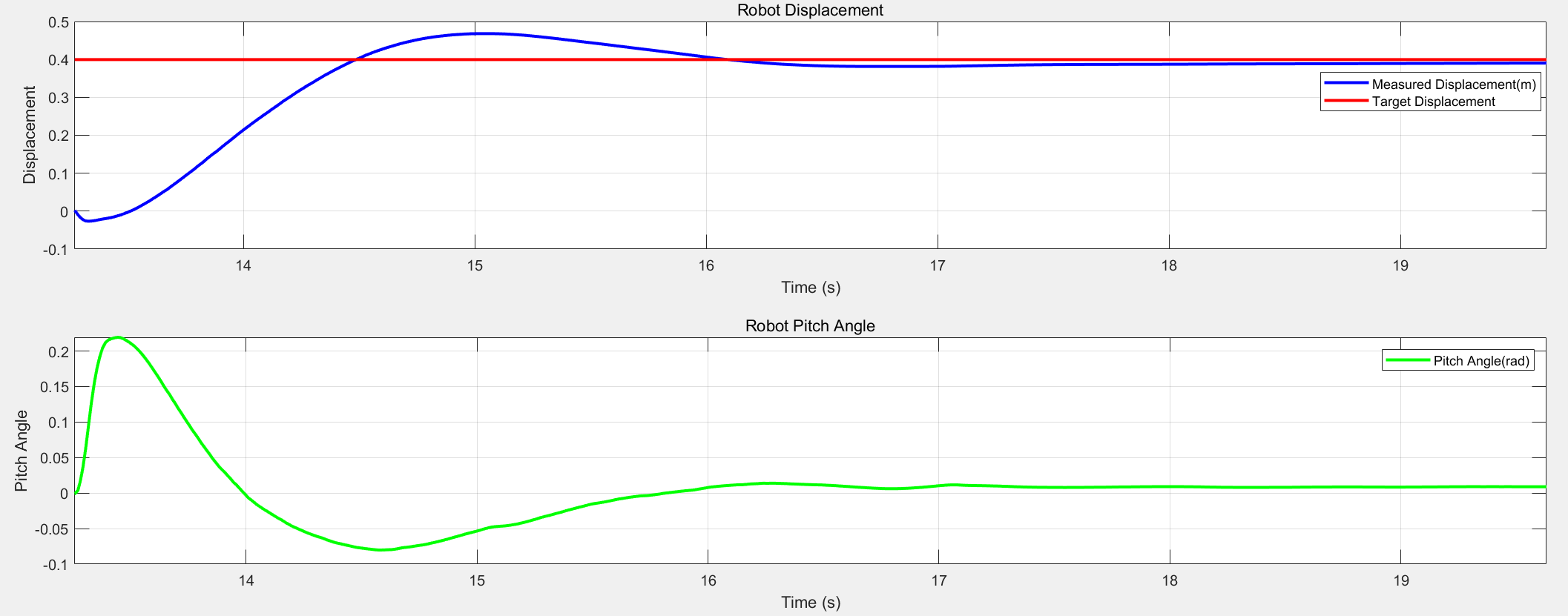


图8 机器人位移阶跃响应及其过程俯仰角变化

经测量，位移响应的峰值时间为：

超调量σ%为：

调节时间为（5%误差下）：

在位移状态量的轨迹跟踪过程中，测得机器人机体最大俯仰角为，即约12.549度。

在静止状态下，给机器人偏航角期望输入幅值为（约90度）的阶跃信号，其偏航角响应及俯仰角变化如图9所示。

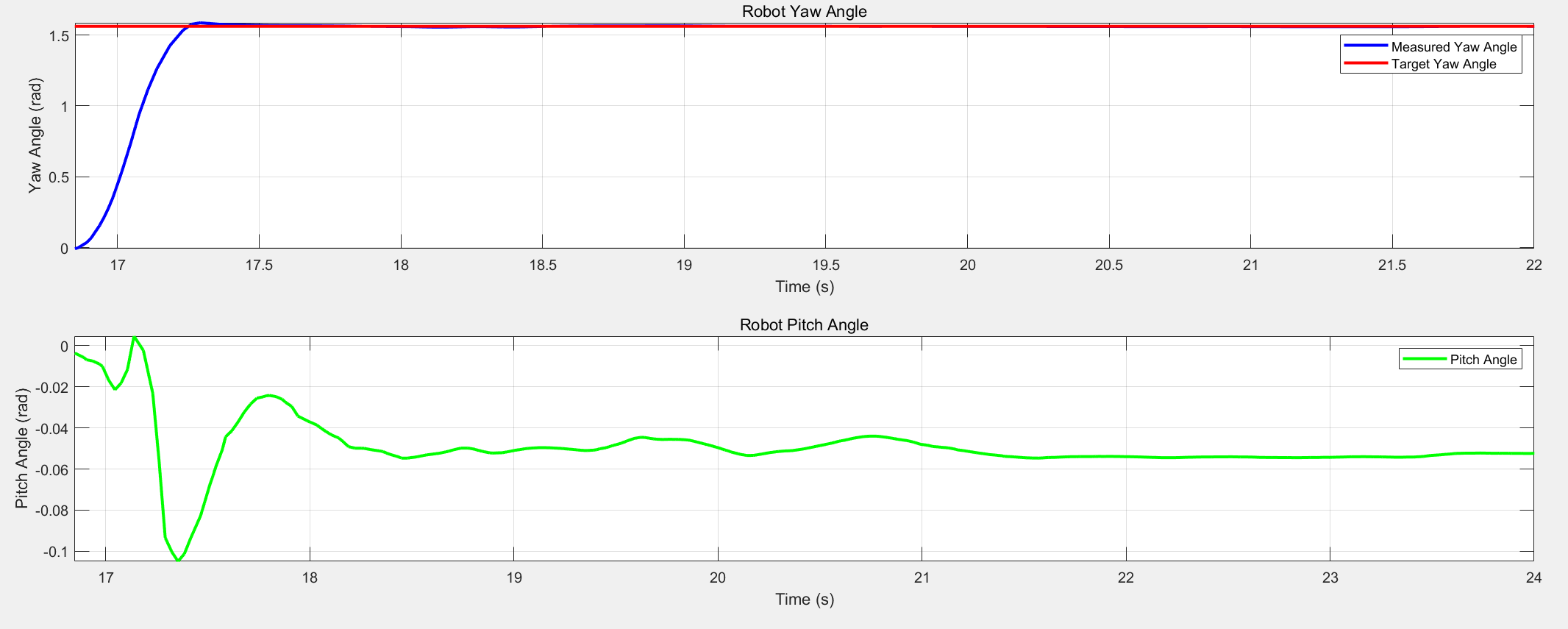


图9 机器人偏航角阶跃响应及其过程俯仰角变化

经测量，位移响应的峰值时间为：

超调量σ%为：

调节时间为（5%误差下）：

在偏航角状态量的轨迹跟踪过程中，测得机器人机体俯仰角在转动过程中会在内产生小幅度震荡。

综上，机器人位移响应速度较慢，考虑到测量过程中没有加入机器人速度状态的轨迹跟踪，且响应过程中机体倾角较小，实际响应效果可以满足项目需求。偏航角的响应十分迅速，且超调量小，对机体的俯仰角影响十分有限，也能满足项目需求。

4.2 平衡车腿长及机体横滚角响应

对于机器人腿长的控制，我们采用了双环PID控制器。对腿长目标值输入幅值为0.3的阶跃信号。其位置外环及速度内环的响应曲线如图10所示。

其中，该PID控制器的内外环参数如下所示：

基于关节电机的扭矩参数，额定扭矩为，峰值扭矩为，设置常态下速度环的最大速出为8，即。

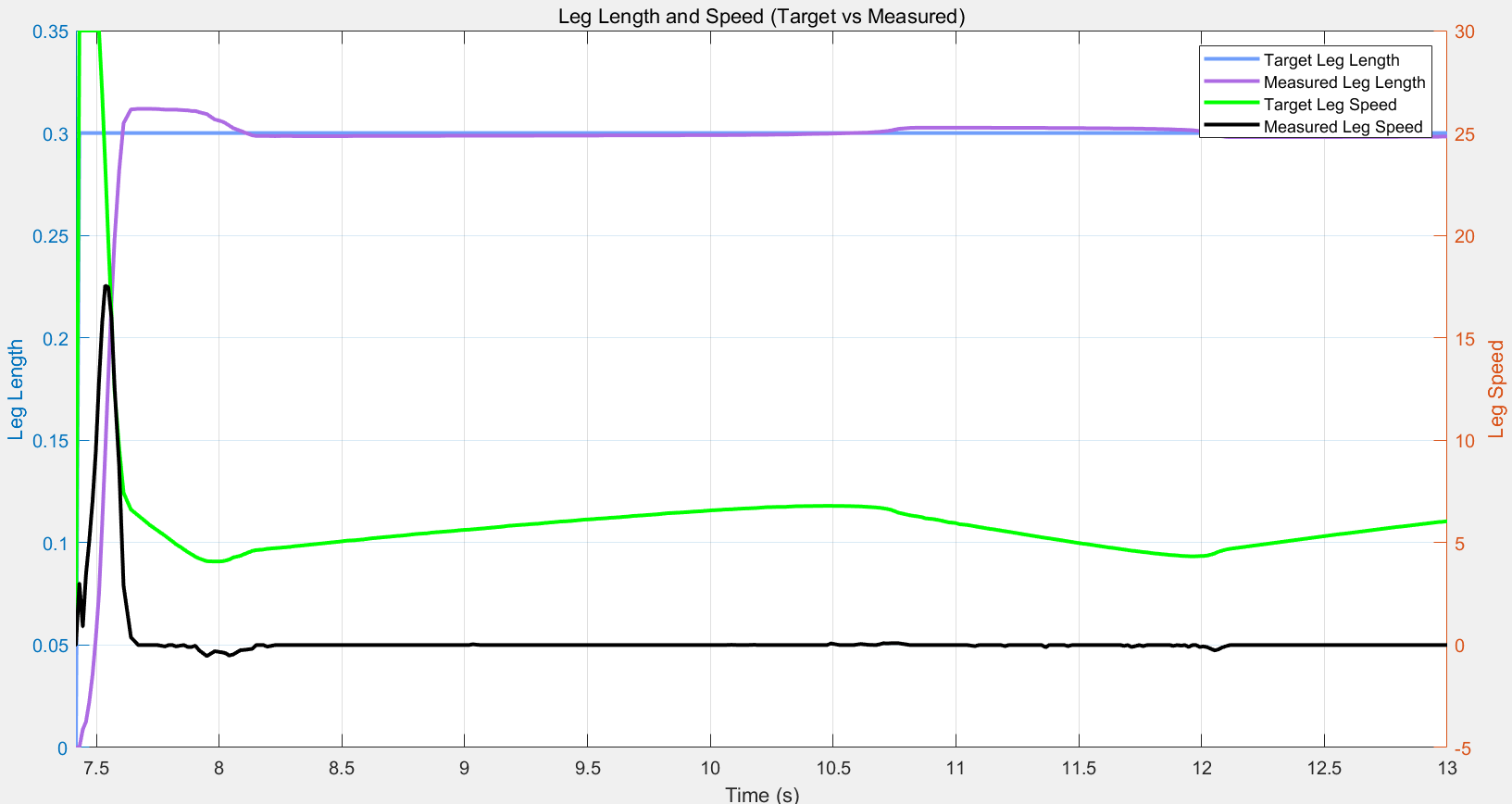


图10 机器人腿长双环控制器的内外环响应曲线

由图10可以看到，速度响应在初始阶段有一段锯齿波形，这是由于机械的腿部涉及有一些干涉导致的。再次输入阶跃信号，其幅值为机器人的最高腿长，其响应曲线如图11所示。

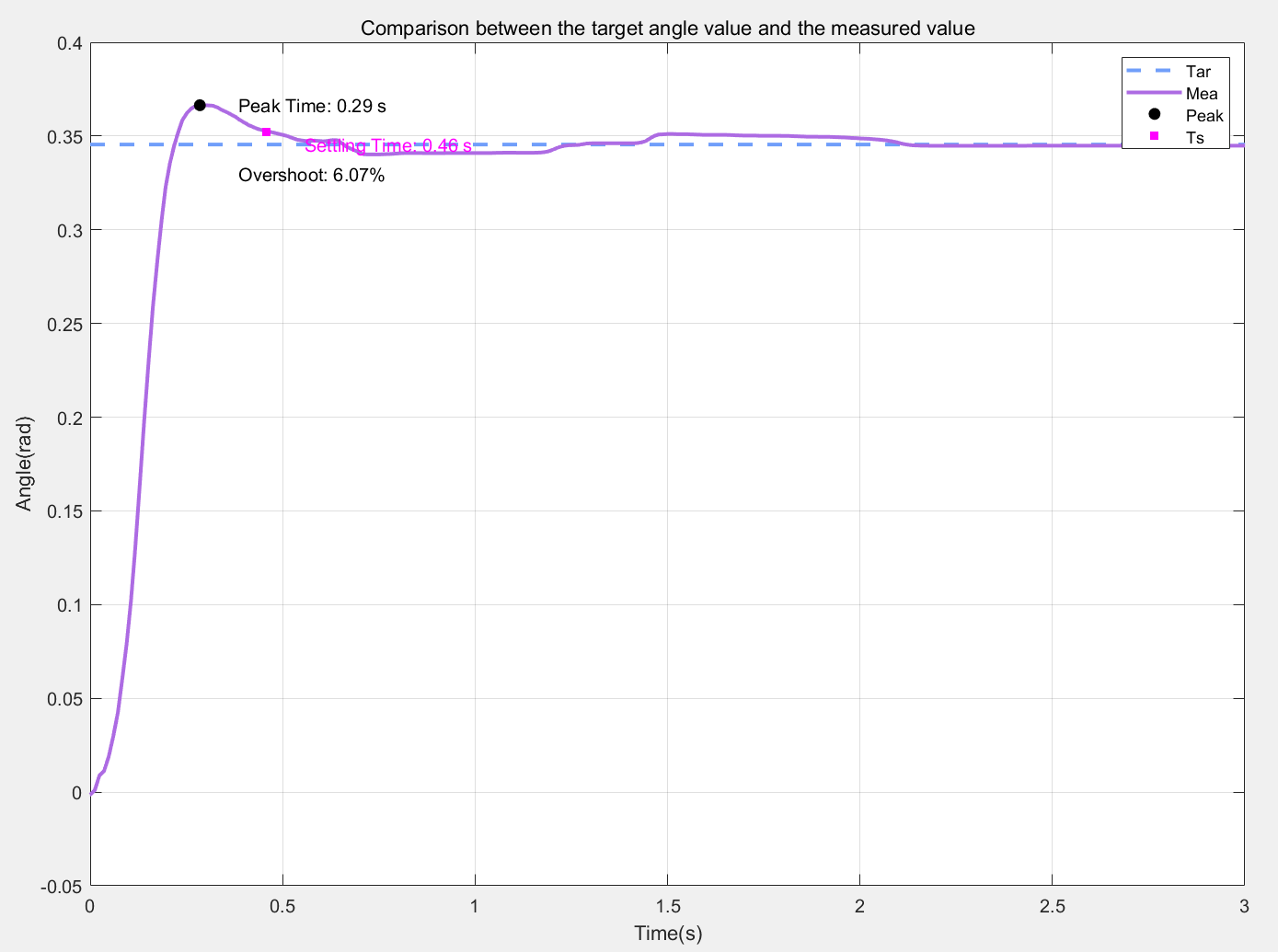


图11 机器人腿长最大阶跃响应曲线

经测量，腿长响应的峰值时间为：

超调量σ%为：

调节时间为（2%误差下）：