Aula 1 - Transformação Inversa

Prof. Dr. Eder Angelo Milani

19/04/2023

Métodos para geração de valores de variáveis aleatórias

Inicialmente, assumimos que um gerador de números pseudo-aleatórios uniforme adequado está disponível no software utilizado. Ao longo das aulas, sempre que mencionar números aleatórios gerados por computador, entende-se que se trata de números pseudo-aleatórios.

Nesta e nas próximas aulas, veremos vários métodos que são usados para gerar valores aleatórias de distribuições de probabilidade discretas e contínuas. No entanto, muitos geradores de valores aleatórios estão disponíveis no R, por exemplo: `rbeta`, `rgeom`, `rchisq`, ..., etc. Mas estes métodos apresentados a seguir são gerais e podem ser aplicados em muitos outros tipos de distribuições.

A função de geração de números pseudo-aleatórios no intervalo unitário no R é `runif`. Para gerar um vetor de n números aleatórios entre 0 e 1, use `runif (n)`. Para gerar n números aleatórios distribuídos de maneira uniforme no intervalo (a, b), use `runif(n, a, b)`. Para gerar uma matriz de dimensão n por m de números aleatórios distribuídos de maneira uniforme no intervalo 0 e 1, use `matrix(runif(n*m), nrow = n, ncol = m)` ou `matrix(runif (n*m), n, m)`.

Exemplo 1

Gerar 5 valores aleatórios da distribuição uniforme (0, 1).

```
runif(5, min=0, max=1)
```

```
## [1] 0.3025995 0.4057366 0.7222592 0.6097771 0.2346424
```

Obs.: os valores que eu obtive são iguais aos valores que você obteve?

Nota: precisamos utilizar o mesmo `set.seed` para que os nossos resultados sejam iguais.

Refazendo o Exemplo 1, agora com `set.seed(2023)`

```
set.seed(2023)
runif(5, min=0, max=1)
```

```
## [1] 0.46661394 0.33519095 0.16281756 0.39612002 0.03039173
```

Obs.: e agora, obtemos os mesmos valores?

Nota: a partir de agora, em todos as gerações utilizar `set.seed(2023)`.

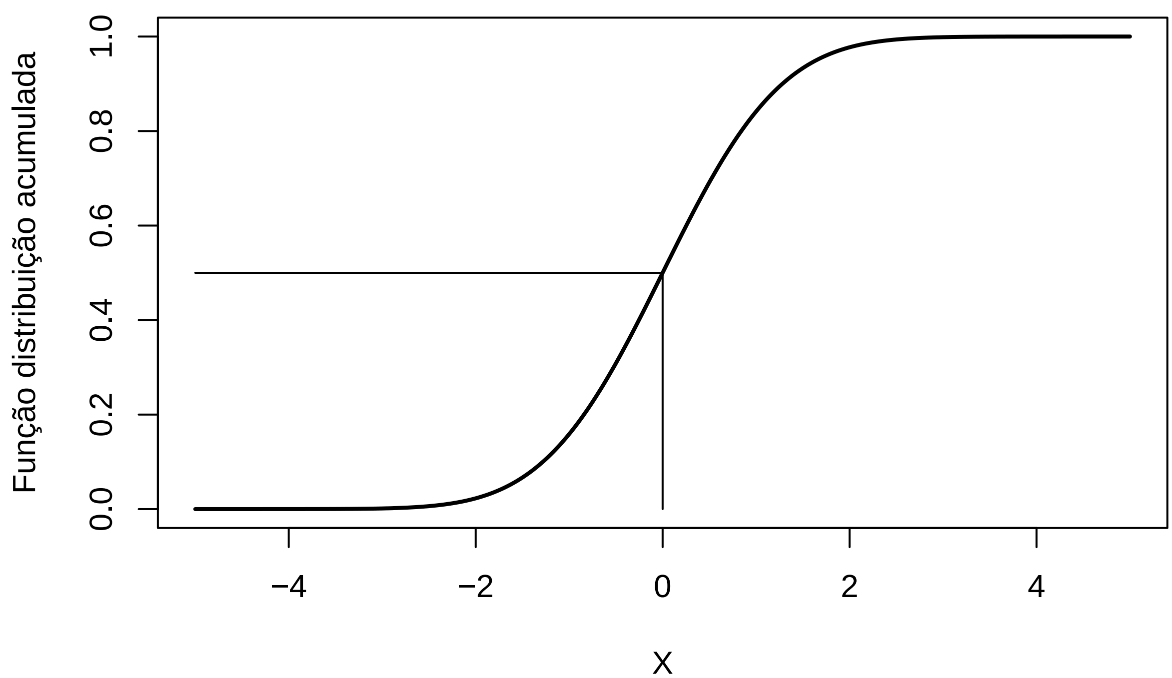
O Método da Transformação Inversa

O método da transformação inversa de geração é baseado no seguinte resultado.

Teorema: Se X é uma variável aleatória contínua com função acumulada $F_X(x)$, então

$$U = F_X(x) \sim \text{Uniforme}(0,1).$$

Ideia



Prova: A transformação inversa, $F_X^{-1}(.)$, é definida por $F_X^{-1}(u) = \inf\{x : F_X(x) = u\},\ 0 < u < 1.$

Se $U \sim \text{Uniforme}(0,1)$ então para todos $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
P(F_X^{-1}(U) \leq x) &= P(F_X(F_X^{-1}(U)) \leq F_X(x))\ (\textit{note que } F_X \text{ é } \textit{monótona}) \\
&= P(U \leq F_X(x))\ (\textit{observe que } F_X(F_X^{-1}(U)) = U) \\
&= F_U(F_X(x))\ (\textit{veja que } F_U(a) = a) \\
&= F_X(x) = P(X \leq x),
\end{aligned}$$

portanto, $P(F_X^{-1}(U))$ tem a mesma distribuição de X. Logo, para gerar uma observação da variável aleatória X, primeiramente gerar um valor u da variável $\text{Uniforme}(0,1)$ e calcular o valor inverso $F_X^{-1}(u)$.

Notas:

1. O método é fácil de ser aplicado, desde que $F_X^{-1}(u)$ seja fácil para calcular.

2. O método pode ser aplicado para gerar valores de v.a. contínua e discreta.

O método pode ser resumido como a seguir

Passo 1) Calcule a inversa da função $F_X^{-1}(u)$.

Passo 2) Escreva um comando ou uma função para calcular $F_X^{-1}(u)$.

Passo 3) Para cada valor aleatória requerido:

(a) gerar uma valor aleatório u da distribuição Uniforme$(0, 1)$.

(b) calcular $x = F_X^{-1}(u)$.

Exemplo 2 - Adaptado de Rizzo (2007)

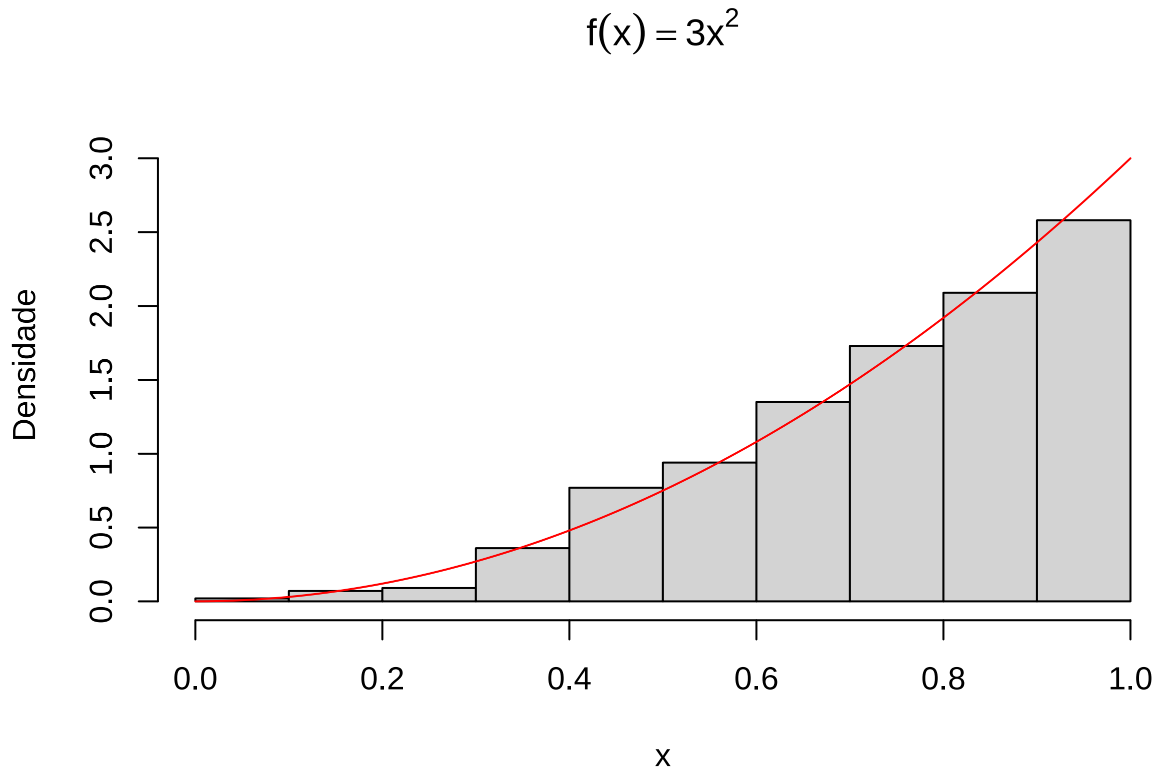
Utilize o método da transformação inversa para gerar 1.000 valores aleatórios da distribuição com densidade $f_X(x) = 3x^2, \quad 0 < x < 1$.

Note que a função acumulada é dada por $F_X(x) = x^3, \quad 0 < x < 1$, logo a função inversa é dada por $F_X^{-1}(u) = u^{1/3}$.

```r
set.seed(2023)
n <- 1000
u <- runif(n)
x <- u^(1/3)  # aplicando a funcao inversa


# densidade estimada pelo histograma
hist(x,  prob=T, main=expression(f(x)==3*x^2), ylab="Densidade", ylim=c(0, 3.2))
y <- seq(0, 1, 0.01)

# curva da função f(x)
lines(y, 3*y^2, col="red")
```




```
# resumo dos valores gerados
summary(x)
```

```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
## 0.07127 0.62004 0.78090 0.74477 0.90480 1.00000
```

Exemplo 3 - Adaptado de Rizzo (2007)

Utilize o método da transformação inversa para gerar 100 valores aleatórios da distribuição exponencial com média $1/\lambda$.

Observação: Se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, então $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$.

Note que a função acumulada é dada por

$$F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad x > 0,$$

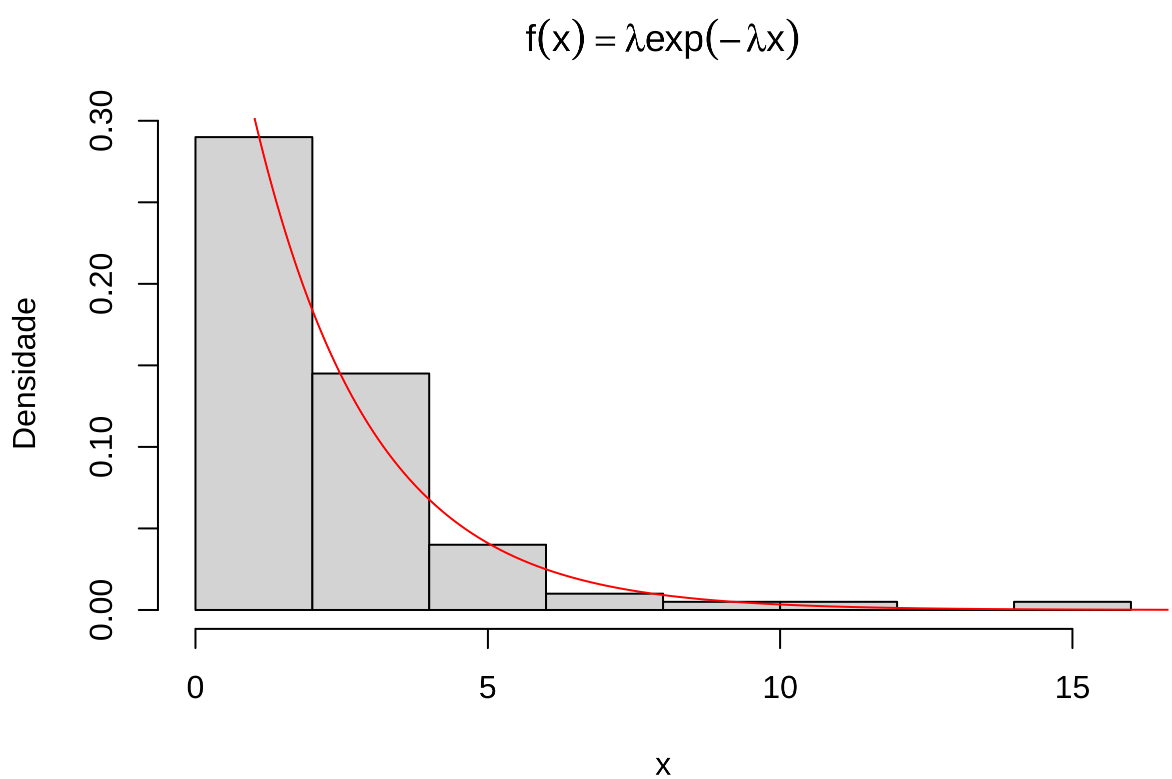
logo a função inversa é dada por

$$F_X^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - u).$$

```r
set.seed(2023)
n <- 100
u <- runif(n)
lambda <- 0.5
x <- -(1/lambda) * log(1-u) # aplicando a funcao inversa

# densidade estimada pelo histograma
hist(x, prob=T, main=expression(f(x)==lambda*exp(-lambda*x )), ylab="Densidade")
y <- seq(0, 20, 0.01)

# curva da funcao f(x)
lines(y, lambda*exp(-lambda*y), col="red")
```




```r
# resumo dos valores gerados
summary(x)
```

```
##     Min.  1st Qu.   Median     Mean  3rd Qu.     Max.
##  0.06173  0.77015  1.56966  2.20691  2.82599 14.45403
```

```r
# comparacao
summary(rexp(n, 0.5))
```

```
##      Min.   1st Qu.    Median      Mean   3rd Qu.      Max.
##  0.009802  0.510125  1.284221  1.891774  2.760131 11.086154
```

Exercícios

1. Utilize o método da transformação inversa para gerar 1.000 valores aleatórios da distribuição Weibull($\alpha = 2, \sigma = 2$), sendo que a função densidade é dada por

$$f(x) = \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha-1} \exp(-(x/\sigma)^{\alpha}), \ x > 0.$$

Compare os valores obtidos utilizando o método da transformação inversa com uma amostra de mesmo tamanho adquirida da `rweibull`.

2. (Adaptado de Rizzo, 2007) Utilize o método da transformação inversa para gerar 1.000 valores aleatórios da distribuição Laplace padrão, que tem densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|), \quad x \in \mathbb{R}.$$

A partir dos valores gerados, faça um histograma e compare com a função densidade.