Aula 5: Método da Transformação

Prof. Dr. Eder Angelo Milani

08/05/2023

Método da Transformação

Muitos tipos de transformações, diferentes da transformação inversa, podem ser aplicados para simular valores de variáveis aleatórias. Alguns exemplos são:

1. Se $Z \sim N(0,1)$, então $V = Z^2 \sim \chi^2(1)$.
2. Se $U \sim \chi^2(m)$ e $V \sim \chi^2(n)$ são independentes, então $F = \frac{U/m}{V/n}$ tem distribuição F com (m,n) graus de liberdade.
3. Se $Z \sim N(0,1)$ e $V \sim \chi^2(n)$ são independentes, então $T = \frac{Z}{\sqrt{V/n}}$ tem distribuição t Student com n graus de liberdade.
4. Se $U, V \sim U(0,1)$ são independentes, então

- $Z_1 = \sqrt{-2log(U)}cos(2\pi V)$
- $Z_2 = \sqrt{-2log(V)}cos(2\pi U)$

são v.a. independentes normal padrão.

5. Se $U \sim Gama(r,\lambda)$ e $V \sim Gama(s,\lambda)$ são independentes, então $X = \frac{U}{U+V}$ tem distribuição beta(r,s).
6. Se $U, V \sim U(0,1)$ são independentes, então

$$X = \left\lfloor 1 + \frac{log(V)}{log(1-(1-\theta)^U)} \right\rfloor$$

tem distribuição logaritimica(θ), sendo que $\lfloor t \rfloor$ denota a parte inteira de t.

Exemplo 1

A seguinte relação entre as distribuições beta e gama fornece um gerador da distribuição beta.

Se $U \sim Gama(r,\lambda)$ e $V \sim Gama(s,\lambda)$ são independentes, então

$$X = \frac{U}{U+V}$$

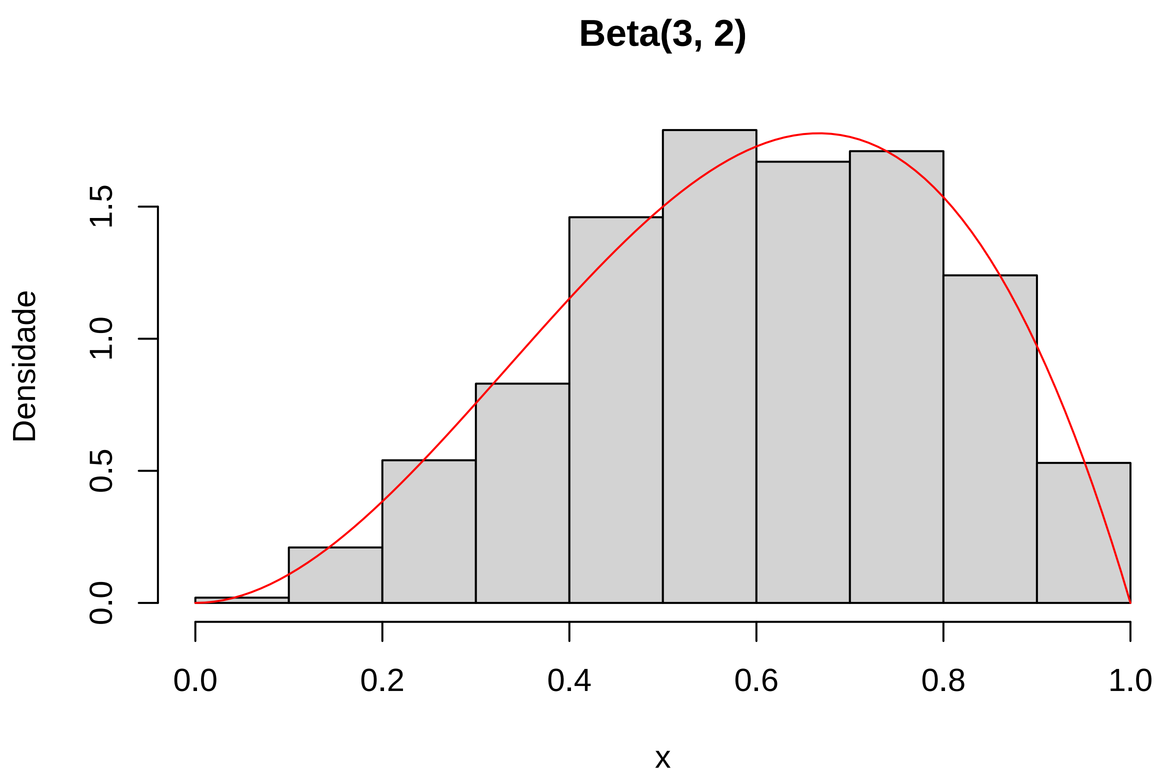
tem distribuição beta(r,s). Os passos a seguir fornecem um gerador de valores aleatórios da distribuição beta(a,b)

Passo 1) Gerar um valor aleatório u da distribuição Gama$(a, 1)$,

Passo 2) Gerar um valor aleatório v da distribuição Gama$(b, 1)$,

Passo 3) Calcular $x = \frac{u}{u+v}$.

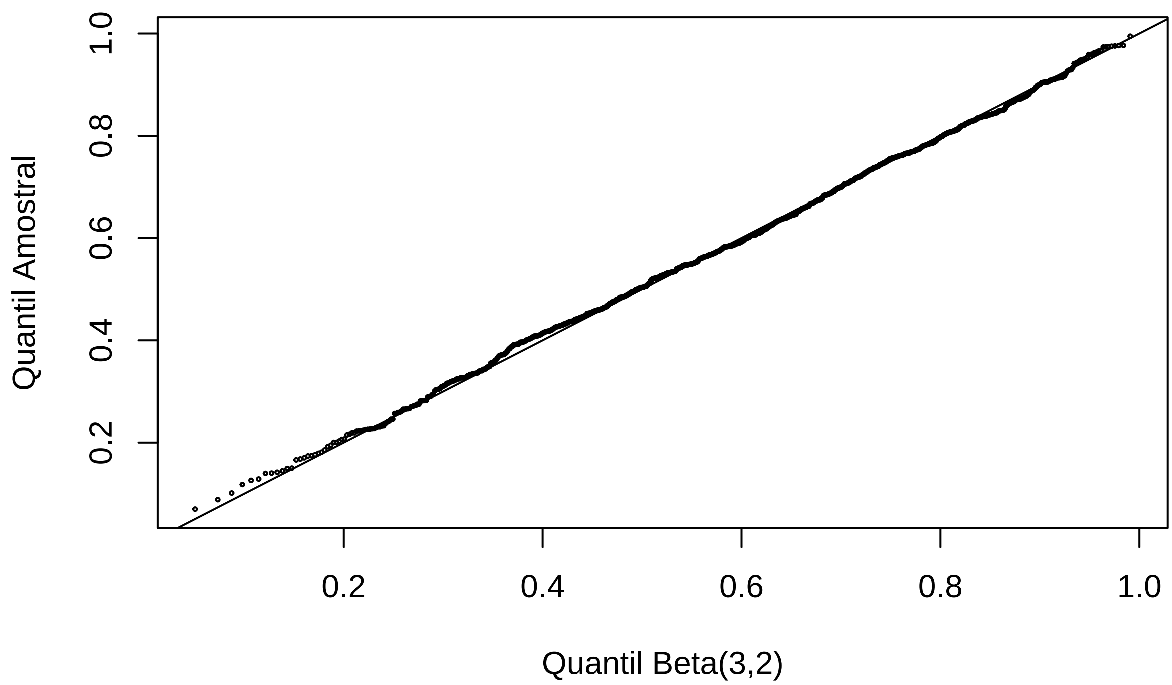
```
set.seed(2022)

# so usei rgamma pq ainda nao sabemos gerar da distribuicao gama

r_beta <- function(n,a,b){
  u <- rgamma(n, shape=a, rate=1)
  v <- rgamma(n, shape=b, rate=1)
  x <- u/(u + v)
  return(x)
}

# considerando a=3 e b=2

x <- r_beta(1000, 3, 2)

hist(x, prob=T, main="Beta(3, 2)", ylab="Densidade")
aux<-seq(0, 1, 0.01)
# curva da densidade beta(3,2)
lines(aux, dbeta(aux, 3, 2), col="red")
```



```r
# Para comparar a amostra obtida por meio dos decis - percentis

p <- seq(0.1, 0.9, 0.1)
Dhat <- quantile(x, p)
D <- qbeta(p, 3, 2)

round(rbind(Dhat, D), 3)
```

```
##        10%   20%   30%   40%   50%   60%   70%   80%   90%
## Dhat 0.327 0.429 0.496 0.554 0.607 0.668 0.731 0.783 0.845
## D    0.320 0.418 0.492 0.555 0.614 0.671 0.728 0.788 0.857
```

```r
# Grafico qqplot - quantil -quantil

q <- qbeta(ppoints(1000), 3, 2)
qqplot(q, x, xlab="Quantil Beta(3,2)", ylab="Quantil Amostral", cex=0.25)
abline(0,1)
```



Convolução

As somas e combinações de variáveis aleatórias são tipos especias de transformações.

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d com $X_j \sim X$, e seja $S = X_1 + \ldots + X_n$. A função densidade/probabilidade da soma S é chamada de convolução n vezes de X e é denotada por $F_X^{*(n)}$. Sendo assim, é muito simples simular uma convolução gerando diretamente de $X_1, \ldots, X_n$ e calculando a soma.

Vejamos a seguir alguns exemplos de transformações utilizando apenas soma de variáveis aleatórias.

1. Se $v > 0$ for um número inteiro, a distribuição qui-quadrado com v graus de liberdade é a convolução de v variáveis aleatórias independente e identicamente distribuídas normais padrão ao quadrado.
2. A distribuição binomial negativa $\text{NegBin}(r, p)$ é a convolução de r variáveis aleatórias independente e identicamente distribuídas $\text{Geom}(p)$.
3. A convolução de r variáveis aleatórias independente e identicamente distribuídas com $\text{Exp}(\lambda)$ tem distribuição $\text{Gama}(r, \lambda)$.

Exemplo 2

Repetir o exemplo anterior, substituindo a função `rgamma`.

Para gerar valores da distribuição gama inicialmente precisamos gerar valores da distribuição exponencial. Para isso, utilzamos o método da transformação inversa.

Note que, se $X \sim Exp(\alpha)$, então

$$f(x) = \alpha \exp(-\alpha x)$$

e

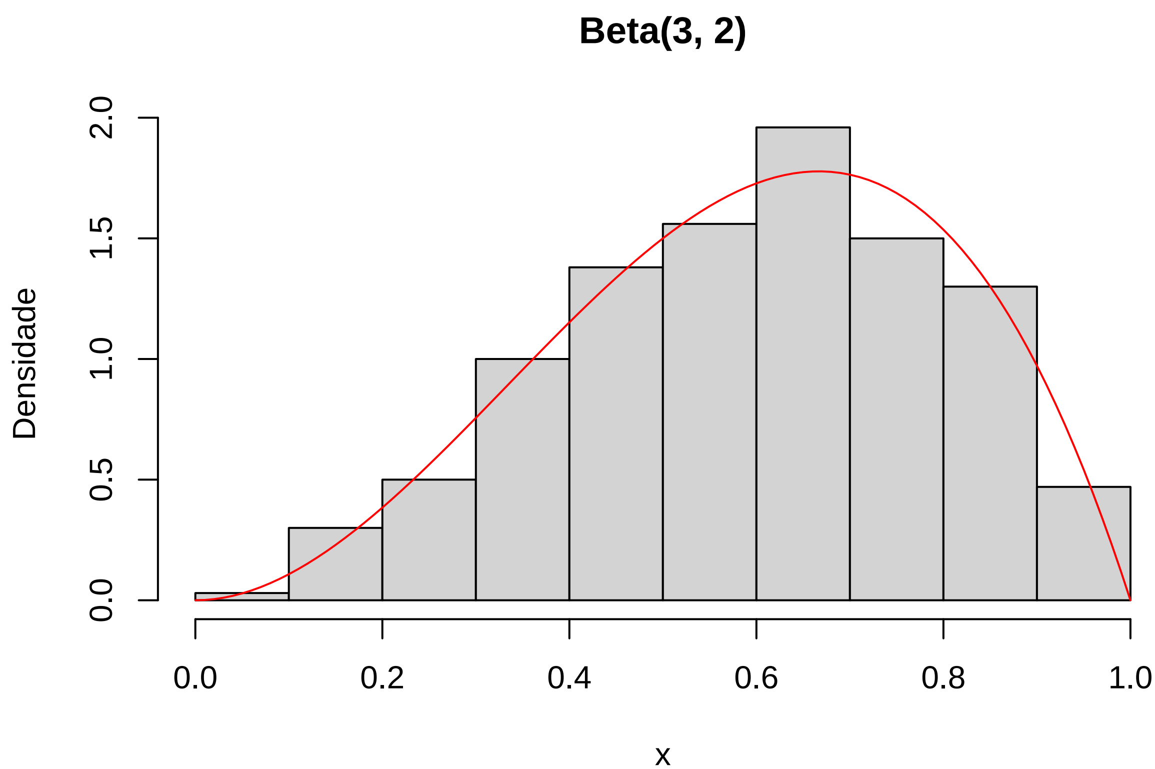
$$F(x) = 1 - \exp(-\alpha x)$$

Logo, a função inversa é dada por

$$F^{-1}(u) = -\log(1 - u)/\alpha$$

```
set.seed(2022)

r_exp <- function(n,alpha){
  u <- runif(n)
  x <-  -log(1-u)/alpha
  return(x)
}


r_gama <-  function(m, alpha, beta){
  x <- numeric(m)
  for(k in 1:m){
  aux <- 0
    for(i in 1:beta){
      aux <- aux + r_exp(1, alpha)
    }
  x[k] <- aux
}
  return(x)
}

r_beta <- function(n, a, b){
  u <- r_gama(n, 1, a)
```

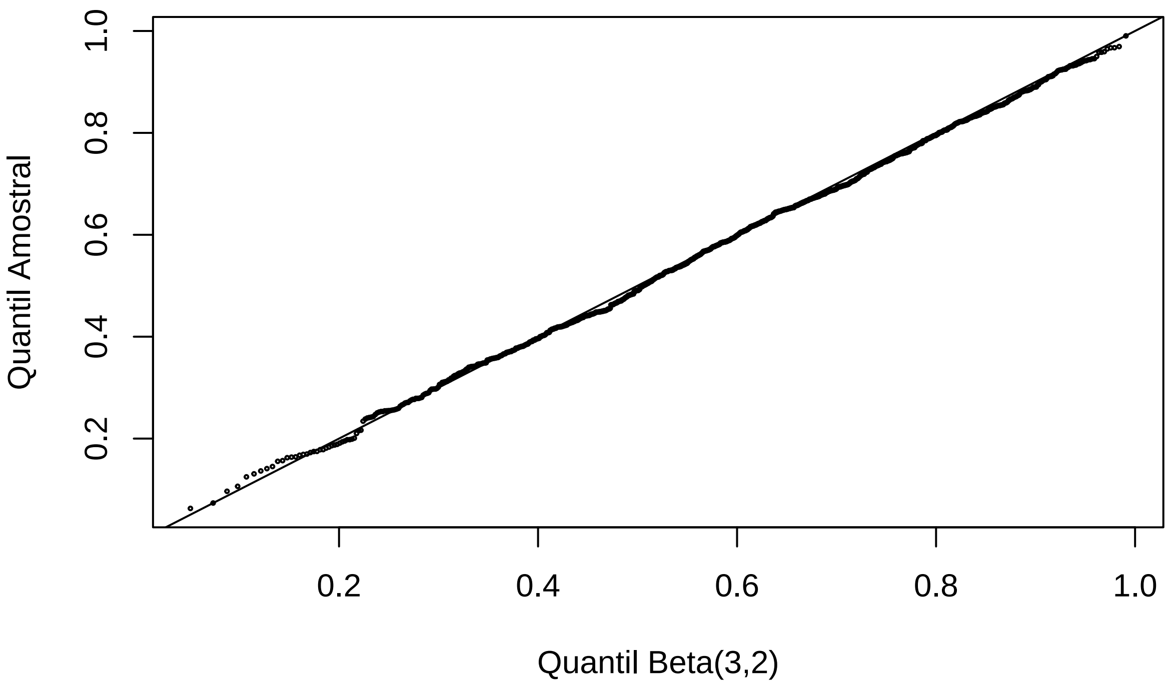
```r
  v <- r_gama(n, 1, b)
  x <- u/(u+v)
  return(x)
}

# considerando a=3 e b=2

x <- r_beta(1000, 3, 2)

hist(x, prob=T, main="Beta(3, 2)", ylab="Densidade")
aux<-seq(0,1,0.01)
# curva da densidade beta(3,2)
lines(aux,dbeta(aux,3,2), col="red")
```




```r
# Para comparar a amostra obtida por meio dos decis - percentis

p <- seq(0.1, 0.9, 0.1)
Dhat <- quantile(x, p)
D <- qbeta(p, 3, 2)

round(rbind(Dhat, D),3)
```

```
##        10%   20%   30%   40%   50%   60%   70%   80%   90%
## Dhat 0.328 0.417 0.481 0.553 0.616 0.667 0.719 0.784 0.850
## D    0.320 0.418 0.492 0.555 0.614 0.671 0.728 0.788 0.857
```

```r
# Grafico qqplot - quantil -quantil

q <- qbeta(ppoints(1000), 3, 2)
qqplot(q, x, xlab="Quantil Beta(3,2)", ylab="Quantil Amostral", cex=0.25)
abline(0, 1)
```



Exercícios

1. Gerar uma amostra da distribuição normal com média $\mu = 2$ e variância $\sigma^2 = 10$. Compare o resultado utilizando o gráfico do quantil teórico com o quantil amostral.
2. Gerar 500 valores da distribuição t-Studente com 4 graus de liberdade, utilizando apenas valores da distribuição uniforme. Compare o resultado utilizando o histograma e a função densidade.
3. Gerar 200 valores da distribuição Binomila$(n = 3, p = 0.2)$, utilizando convolução. Compare os resultados obtidos com os esperados utilizando uma tabela de frequência.

Nota: Veja neste link a relação de algumas distribuições

http://www.math.wm.edu/~leemis/chart/UDR/UDR.html