Aula 11: Otimização numérica - Método Escore

Prof. Dr. Eder Angelo Milani

14/06/23

Método Escore

No método Escore (scoring em inglês), substitui-se o hessiano $H(\theta)$ pelo seu valor esperado, que é a matriz de informação de Fisher com sinal negativo, sugerindo o esquema recursivo

$$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + [I(\theta^{(i)}]^{-1} g(\theta^{(i)}).$$

Como $I(\theta)$ é uma aproximação do hessiano, o método escore tem taxa de convergência menor do que o método de Newton-Raphson. A vantagem é que em determinadas situações, é mais fácil calcular $I(\theta)$ do que $H(\theta)$.

Exemplo

Considere uma distribuição de Cauchy, com densidade

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\pi[1 + (x - \theta)^2]}.$$

Para uma amostra $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de X, a verossimilhança é

$$L(\theta|x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi[1 + (x_i - \theta)^2]},$$

a função log-verossimilhança é dada por

$$l(\theta) = -\sum_i \log\{\pi[1 + (x_i - \theta)^2]\},$$

de modo que o estimador de máxima verossimilhança de θ é obtido resolvendo a equação de estimação

$$\frac{dl(\theta)}{d\theta} = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \theta)}{1 + (x_i - \theta)^2} = 0,$$

que não tem solução explícita. Como

$$\frac{d^2 l(\theta)}{d\theta^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(x_i - \theta)^2 - 2}{[1 + (x_i - \theta)^2]^2} = 0,$$

a informação de Fisher é

$$I(\theta) = -E_\theta\Big[\frac{d^2 l(\theta)}{d\theta^2}\Big] = -\int \frac{d^2 l(\theta)}{d\theta^2} L(\theta|x) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \frac{n}{2}.$$

O resultado acima foi retirado do livro “Estatística e Ciência de Dados” dos autores Pedro Morettin e Julio Stern.

Exercício

Programar os metodos de Newton-Rapshon e Escore para o exemplo acima. Verifique qual dos dois métodos é mais rápido e compare os valores obtidos (para uma comparação mais justa, utilize o mesmo chute inicial). Considere tamanho amostral igual a 100, $\theta = 2$, chute inicial igual a 2,5, $\epsilon = 0,001$, `rcauchy(n, location=theta, scale=1)` e critério de convergência $|\theta^{(i+1)} - \theta^{(i)}| < \epsilon$.

Obs.: entregar o exercício no Google Sala de Aula.