Aula 3 - Exercícios do Método da transformação inversa

Prof. Dr. Eder Angelo Milani

26/04/2023

Exercício 1

Considere a distribuição triangular dada por

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 4x, \text{se } 0 < x < 1/2 \\
&= 4 - 4x, \text{se } 1/2 \leq x < 1 \\
&= 0, \text{caso contrário}
\end{aligned}
$$

Utilizando o método da transformação inversa e apenas valores da distribuição uniforme, gerar 2.000 valores da distribuição triangular definida acima. Obter o histograma com a curva da distribuição.

Solução:

Inicialmente, precisamos calcular a distribuição acumulada, que é dada por

Para $x < 1/2$,

$$F(x) = \int_0^x 4tdt = 2t^2\Big|_0^x = 2x^2$$

Para $1/2 \leq x < 1$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_{1/2}^x 4 - 4tdt = \frac{1}{2} + [4t - 2t^2]_{1/2}^x = \frac{1}{2} + [4x - 2x^2 - 2 + \frac{1}{2}] = -2x^2 + 4x - 1$$

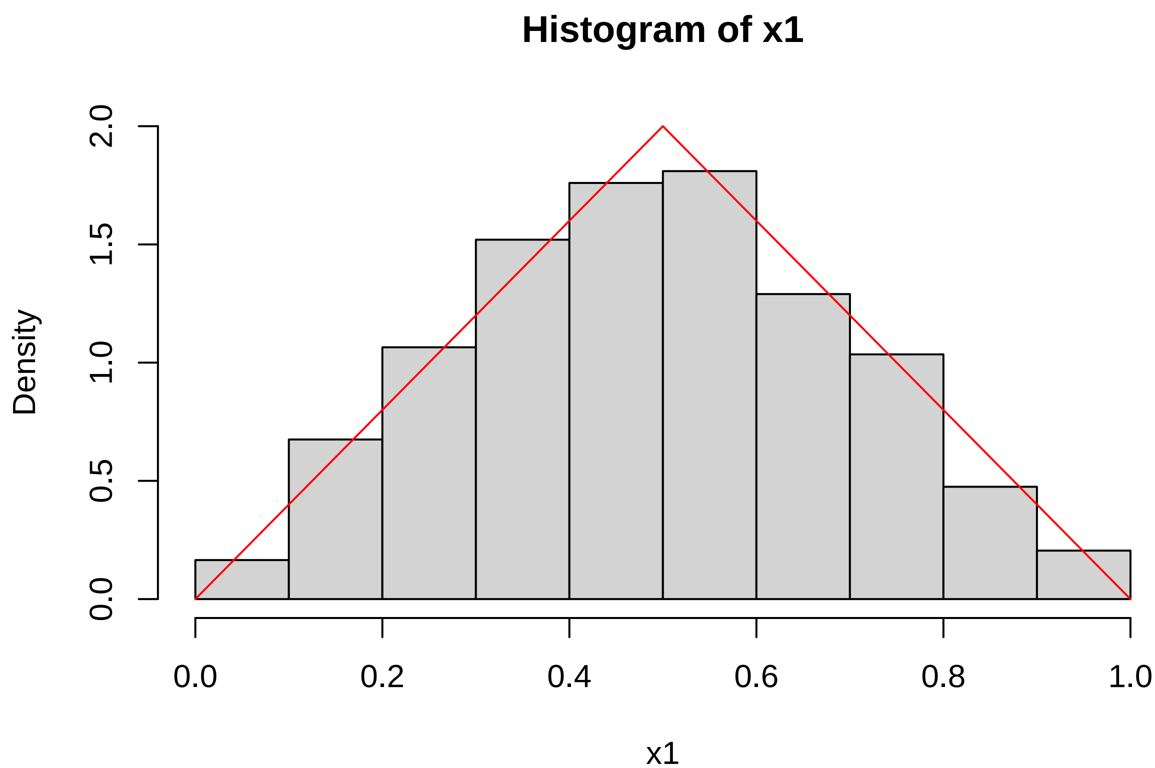
A transformação inversa da parte $0 < u < 1/2$ é obtida isolando x da equação $2x^2 = u$. Enquanto que para $1/2 < u < 1$, é preciso isolar o x da equação de segundo grau dada por $-2x^2 + 4x - 1 - u$. Na equação de segundo grau, será obtido dois valores de x que satisfazem a equação, no entanto, um deles fica fora do intervalo (0,1), que é o intervalo onde a distribuição é definida.

Logo, a transformação inversa é dada por

$$
\begin{aligned}
F^{-1}(u) &= \sqrt{u/2}, \text{se } 0 < u < 1/2 \\
&= 1 - \frac{\sqrt{8(1-u)}}{4}, \text{se } 1/2 \leq u < 1
\end{aligned}
$$

A seguir é programado o método da transformação inversa.

```r
set.seed(2023)
n <- 2000
u <- runif(n)
x1 <- ifelse(u < 0.5, sqrt(u / 2), 1 - sqrt(8 * (1 - u)) / 4)
hist(x1, freq=F, ylim=c(0, 2))
t <- seq(0, 1, by = 0.01)
lines(t, ifelse(t < 0.5, 4 * t, 4 - 4 * t), col="red")
```



Exercício 2

Utilizando apenas a geração de valores aleatórios da distribuição Uniforme(0,1), encontrar uma amostra de tamanho 1.000 da distribuição Exponencial deslocada com parâmetros $\lambda = 0.75$ e $\tau = 10$ ($f(x) = \lambda \exp(-\lambda(x-\tau)),\ x > \tau > 0$). Compare o resultado obtido utilizando o histograma.

Solução

Inicialmente devemos calcular a função distribuição acumulada, que é dada por

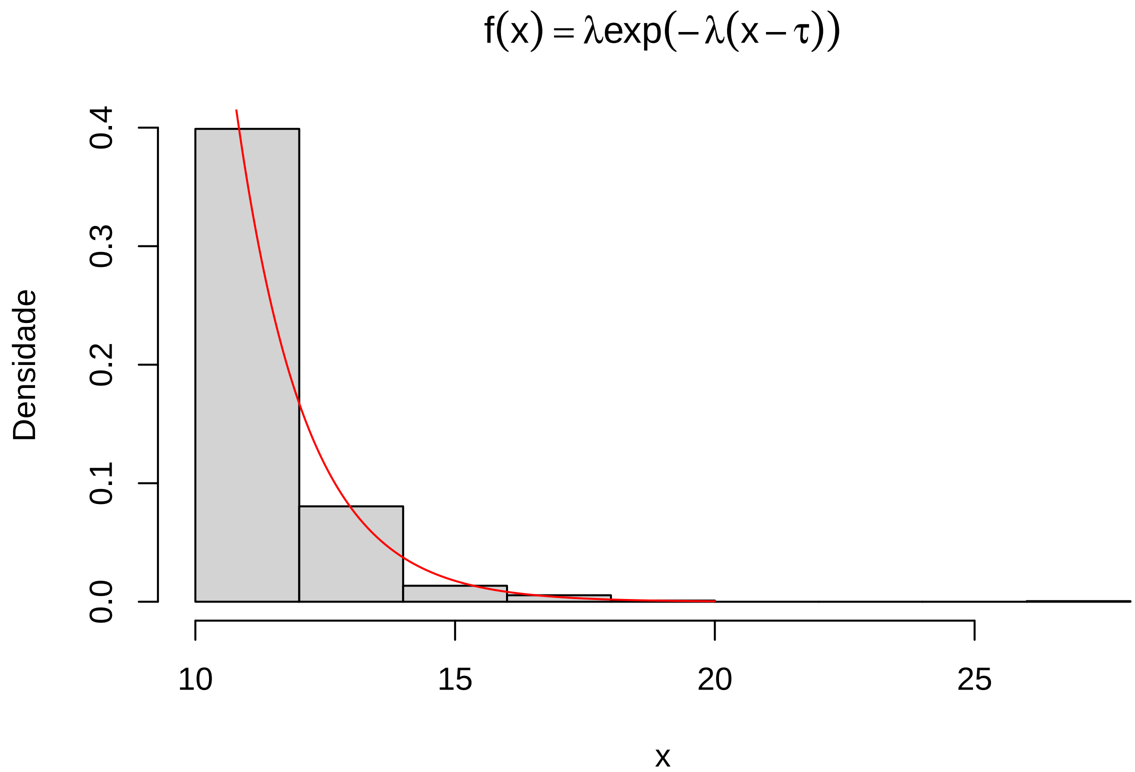
$$\begin{aligned}
F(x) = & \int_{\tau}^{x} \lambda \exp(-\lambda(t-\tau))dx \\
= & \lambda \exp(\lambda\tau)) \int_{\tau}^{x} \exp(-\lambda t)dx \\
= & \lambda \exp(\lambda\tau)) \Big[-\frac{1}{\lambda} \exp(-\lambda t) \Big]_{\tau}^{x} \\
= & \lambda \exp(\lambda\tau)) \Big[\frac{1}{\lambda} \exp(-\lambda\tau) - \frac{1}{\lambda} \exp(-\lambda x) \Big] \\
= & 1 - \exp(-\lambda(x-\tau))
\end{aligned}$$

Com este resultado conseguimos obter a função inversa, que é dada por

$$f^{-1}(u) = -\frac{log(1-u)}{\lambda} + \tau$$

Com essas informações, o código fica da seguinte forma

```
set.seed(2023)
n <- 1000
u <- runif(n)
lambda <- 0.75
tau <- 10
x <- -(1 / lambda) * log(1 - u) + tau
# densidade estimada pelo histograma
hist(x, prob=T, main=expression(f(x)==lambda*exp(-lambda*(x-tau))), ylab="Densidade")
y <- seq(10, 20, 0.01)
# curva da função f(x)
lines(y, lambda * exp(- lambda * (y - tau)), col="red")
```




```r
# resumo dos valores gerados
summary(x)
```

```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##   10.00   10.36   10.86   11.29   11.80   27.26
```

Exercício 3

Simule 10.000 valores da v.a. X que assume apenas os valores $1, 2, 3, 4$ e 5, todos com probabilidade $0, 20$, ou seja, X tem distribuição Uniforme Discreta. Construa uma tabela de frequência e compare os valores empíricos com os valores teóricos.

Solução

```r
#utilizando o método da transformação inversa
set.seed(2023)
n <- 10000
u <- runif(n)
x <- ifelse(u<0.2,1,
            ifelse(u<0.4, 2,
                   ifelse(u<0.6,3,
                          ifelse(u<0.8, 4, 5))))

table(x) / 10000
```

```
## x
##      1      2      3      4      5
## 0.2025 0.2053 0.1957 0.2028 0.1937
```

```r
# não utiliza o método da transformação inversa
set.seed(2023)
n <- 10000
x1 <- round(0.5 + 5 * runif(n))
table(x1) / 10000
```

```
## x1
##      1      2      3      4      5
## 0.2025 0.2053 0.1957 0.2028 0.1937
```