Método da Rejeição

$$f(x) = 6.22\, x^2 e^{-x}, \quad x \in (0,1)$$

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, \quad x \in (0,1)$$

1º Passo

$g(x)$ com domínio = da $f(x)$

2º Passo

Constante c?

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq c, \ \forall y \Rightarrow \frac{6.22\, y^2 \cancel{e^{-y}}}{\dfrac{\cancel{e^{-y}}}{(1-e^{-1})}}$$

$$\left\{ \frac{a}{\frac{1}{b}} = a \cdot \frac{b}{1} \right\}$$

$$= \underbrace{6.22\, y^2}_{\leq 1} \cdot \underbrace{(1-e^{-1})}_{\leq 1}$$

$y \in (0,1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow c = 6.22\,(1-e^{-1})$$

3º Passo

Algoritmo

Fazer i de 1 até n

1. { gerar y da distrib. $f(y) = \dfrac{e^{-y}}{1-e^{-1}}$
2. Gerar $U \sim$ Uniforme$(0,1)$
3. Se $U \leq \dfrac{f(y)}{g(y)\cdot c} = \dfrac{\cancel{6.22}\, y^2 \cancel{e^{-y}}}{\dfrac{\cancel{e^{-y}}}{\cancel{1-e^{-1}}} \cdot (\cancel{6.22} \cdot \cancel{1-e^{-1}})}$

Se $U \leq y^2 \Rightarrow X_i = y$

c.c volte para passo 1 }

Exercícios

1. Utilizando o método da aceitação-rejeição, obtenha uma amostra de tamanho 1.000 da distribuição Beta($\alpha = 3, \beta = 3$). Na média, quantos números aleatórios devem ser simulados para gerar 1.000 valores da distribuição, compare com o valor encontrado. Faça uma comparação dos decis amostrados com os teóricos.

2. Considere a distribuição triangular dada por

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 4x, \text{se } 0 < x < 1/2 \\
&= 4 - 4x, \text{se } 1/2 \leq x < 1 \\
&= 0, \text{caso contrário}
\end{aligned}
$$

Utilizando o método da transformação inversa e apenas valores da distribuição uniforme, gerar 2.000 valores da distribuição triangular definida acima. Obter o histograma com a curva da distribuição.

(1) $f(x) = \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 3)$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

$\Gamma(k) = (k-1)!$

$$= \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(3)\Gamma(3)} x^2 (1-x)^2$$

$\Gamma(6) = 5! = 120$

$$= \frac{120}{2 \cdot 2} x^2 (1-x)^2$$

$\Gamma(3) = 2! = 2$

$$= 30\, x^2 (1-x)^2$$

Como Beta está no intervalo 1

(2) então $g(x) = 1$

(3) $c = ?$ $\qquad \frac{f(x)}{g(x)}$

$$W = \frac{30x^2 (1-x)^2}{1} \leq C$$

utilizando o gráfico

derivando:

$$\frac{dw}{dx} = [60x^2(1-x)^2 + 60x^2(1-x)\cdot(-1)]$$

$$= [60x^2(1-x)^2 - 60x^2(1-x)]$$

$$= 60x^2(\cancel{1^2} - \cancel{2x} + x^2 - \cancel{1} + \cancel{x})$$

$$= 60x^2(-x + x^2) = 0$$

$a = 1$
$b = -1$
$c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \qquad x = -b \pm \sqrt{\Delta}\,/2a$

$= 1$

$$\frac{+1 \pm 1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ponto de max} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Média de beta:
se $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$
pois $\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{\beta}} = E(X)$

$U \leq \frac{f(y)}{g(y) \cdot c} = 60x^3(1-x)^2$

⇒ Algoritmo

Enquanto (while cont < n)
(não aceitar a qtd. de amostra

1. Gera u ~ Uniforme(0,1)
Gera y ~ Uniforme (0,1) densidade g
conta qtd. de interações
2. Se $U \leq \frac{f(y)}{g(y) \cdot C}$ então $X = y$
conta a qtd de amostra aceita

c.c passo 1

Exercícios

1. Utilizando o método da aceitação-rejeição, obtenha uma amostra de tamanho 1.000 da distribuição Beta($\alpha = 3, \beta = 3$). Na média, quantos números aleatórios devem ser simulados para gerar 1.000 valores da distribuição, compare com o valor encontrado. Faça uma comparação dos decis amostrados com os teóricos.

2. Considere a distribuição triangular dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x, \text{se } 0 < x < 1/2 \\ &= 4 - 4x, \text{se } 1/2 \leq x < 1 \\ &= 0, \text{caso contrário} \end{aligned}$$

Utilizando o método da transformação inversa e apenas valores da distribuição uniforme, gerar 2.000 valores da distribuição triangular definida acima. Obter o histograma com a curva da distribuição.

2) domínio 0 até 1 $\quad c = 1/2 \quad a = 0 \quad b = 1$

$x \sim A(0, 1/2, 1)$

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 4 - 4x & \text{se } x = \frac{1}{2} \\ 4 - 4x & \text{se } \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

$g(x) = U \sim (0, 1)$

$$U \leq \begin{cases} \frac{4y}{1/2} & \text{se } 0 < y < \frac{1}{2} \\ \frac{4 - 4y}{1/2} & \text{se } y = 1/2 \\ \frac{4 - 4y}{1/2} & \text{se } 1/2 < y < 1 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

Enquanto C while cont < n
& não aceitar a qtd. de amostra

1. Gera $u \sim$ Uniforme(0,1)
Gera $y \sim$ Uniforme (0,1) densidade g
conta qtd. de interações

2. Se $U \leq \frac{f(y)}{g(y) \cdot c} = 8y$ $\quad$ então $X = y$
conta a qtd de amostra aceita

c.c passo 1