TEORIA DOS CONJUNTOS

INTRODUÇÃO

O conceito de classe ou conjunto de objetos é um dos mais fundamentais em toda a matemática.

Podemos pensar num conjunto como sendo uma reunião de objetos, mas não tomaremos tal afirmação como definição de conjunto.

Vamos aceitar o conjunto como uma noção primitiva.

Faremos isso, em razão de que sendo a noção de conjunto uma noção básica, seria perda de tempo tentarmos defini-lo, pois para isso teríamos de usar entes que ainda não foram definidos. E se tentarmos definir tais entes teremos que utilizar outros que ainda não foram definidos também.

É claro que para o nosso curso, esse processo de definições não pode ser prolongado; temos, então que adotar um ponto de partida.

Então, nada mais simples que adotar a noção de conjunto para ponto de partida, sem procurarmos defini-lo. Os exemplos a seguir, ilustrarão melhor o que entendemos por conjunto:

1. Conjunto das vogais do nosso alfabeto:
   a, e, i, o, u
2. Conjunto solução da equação $2x - 6 = 0$
3. Conjunto dos países da América do Sul
4. Conjunto dos múltiplos de 2

A partir destes exemplos podemos entender que um conjunto fica **perfeitamente determinado**, mediante uma propriedade que cada elemento considerado deve possuir ou não; aqueles que possuem a propriedade **pertencem** ao conjunto.

Assim, no conjunto do exemplo numero 2, todo elemento que seja solução da equação $2x - 6 = 0$ pertence ao conjunto. O número 4, por exemplo, não pertence ao conjunto citado, pois não é solução da equação $2x - 6 = 0$.

Aliás, o único elemento de tal conjunto é o número 3, pois só ele possui a propriedade que caracteriza o conjunto.

Note que não são os elementos que determinam o conjunto, e sim a **pertinência** dos elementos.

Um conjunto de pessoas vivas com 200 anos de idade está bem determinado: o elemento deve ser **pessoa viva** e ter **200 anos** de idade. Mas não há elemento com tais atributos, logo o **conjunto determinado por este atributo é vazio**, que representamos por { } ou $\varnothing$.

O conjunto dos números ímpares divisíveis por 2 existe, pois existem os atributos dos elementos: serem números ímpares e serem divisíveis por 2, mas não há elemento com tais propriedades, logo o **conjunto existe**, mas é **vazio**. Do mesmo modo o conjunto dos números simultaneamente pares e primos é **unitário**, cujo único elemento é o número 2.

Observe que conjunto não indica pluralidade. Se tenho 5 selos de mesma estampa (o mesmo selo), tenho um **conjunto** de selos, mas não posso dizer que tenho uma **coleção** de selos.

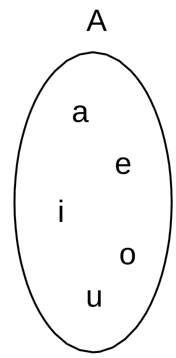
NOTAÇÃO E SIMBOLOGIA

Geralmente usamos as letras maiúsculas de nosso alfabeto, A, B, C, . . ., etc., para dar nomes aos conjuntos. Os elementos dos conjuntos, quando necessários são representados por letras minúsculas: a, b, c, . . ., etc.

É usual, quando representamos um conjunto por meio de uma lista de seus elementos, colocar tais elementos entre chaves, ou dentro de uma curva fechada simples, conhecida como DIAGRAMA DE VENN.

Por exemplo, o conjunto 1, será escrito da seguinte maneira:

A = { a, e, i, o, u } ou



Mas, se o conjunto é conhecido através de uma propriedade P que o caracteriza, usamos a seguinte notação: C = {x / x tem a propriedade P} que será lida: o conjunto C é o conjunto

dos elementos x, tais que possuem a propriedade P.
Por exemplo, com essa notação, os exemplos descritos anteriormente, ficarão assim:

1. V = {x / x é vogal}
2. S = {x / x é solução de $2x - 6 = 0$ }
3. P = {a / a é um país da América do Sul}
4. M = {m / m é um múltiplo de 2}

Observe que o traço (/) significa tal que.

É comum usarmos as reticências pra indicar que um conjunto "não tem fim" – trata-se de um conjunto infinito (que tem infinitos elementos). Às vezes empregamos as reticências também em conjuntos finitos (que têm número finito de elementos) com grande número de elementos. Por exemplo, o conjunto **I** dos números naturais ímpares menores que 100, pode ser indicado assim: **I** = {1, 3, 5, 7, . . ., 99}

RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Para indicar que um elemento a pertence a um conjunto A, escrevemos: a $\in$ A que se lê: a pertence ao conjunto A. Quando não pertence a A, escrevemos a $\notin$ A, que se lê: a não pertence ao conjunto A.
Assim, se A = {2, 3, 5, 6}, temos:
2 $\in$ A; 3 $\in$ A; 5 $\in$ A; 6 $\in$ A; 1 $\notin$ A; 4 $\notin$ A; 7 $\notin$ A

Se considerarmos o conjunto unitário $B = \{ 7 \}$, temos que $7 \in$ B, isto é, $7 \in \{ 7 \}$ e não é correto escrever $7 = \{7\}$.

Um conjunto unitário e o elemento desse conjunto são duas coisas distintas, assim, como uma caixa contendo uma bala não é a mesma coisa que a bala sozinha.

Há conjuntos cujos elementos são também conjuntos. Por exemplo, no conjunto $M = \{\varnothing; \{2\}; \{3\}; \{2; 3\}\}$ os elementos são os conjuntos $\varnothing; \{2\}; \{3\}; \{2; 3\}$. Assim, temos que: $\varnothing \in M$; $\{ 2 \} \in M$; $\{ 3 \} \in M$ e $\{ 2; 3 \} \in M$.
Note que 2 $\notin$ M e também 3 $\notin$ M, pois 2 e 3 não são elementos de M.
Finalmente, observamos que $\{\varnothing\}$ é um conjunto unitário cujo único elemento é $\varnothing$ (o conjunto vazio). Assim, podemos dizer que $\varnothing \in \{\varnothing\}$

Veja, então, que a relação de pertinência é uma relação exclusiva entre elemento e conjunto.

IGUALDADE ENTRE CONJUNTOS

Um conjunto A será igual a um conjunto B, se ambos possuírem os mesmos elementos, isto é, se cada elemento que pertence ao conjunto A pertencer também ao conjunto B e vice-versa. Por exemplo, seja A o conjunto das vogais da palavra BOLA: A = {o, a}, e seja B o conjunto das vogais da palavra BANCO:
B = {a, o}.
É fácil ver que A = B (a ordem em que escrevemos os elementos não importa).

Considere os conjuntos C = {2, 3, 2, 8}, D = {3, 2, 2, 8} e E = {2, 3, 8}.
Note que C = D = E, pois todo elemento de C é também elemento dos outros dois D e E, e vice-versa, todo elemento de E, ou todo elemento de D, é também elemento de C.

Observe que a ordem e os elementos repetidos não influem na formação do conjunto. Assim: {a, b} = {b, a} e {2, 2, 2} = {2}.

SUBCONJUNTOS – INCLUSÃO

Se cada elemento de um conjunto A pertence a um conjunto B, dizemos que A é subconjunto de B, ou que é parte de B, e indicamos tal fato pelo símbolo: A $\subset$ B que se lê, o conjunto A está contido no conjunto B, ou ainda B $\supset$ A que se lê, o conjunto B contém o conjunto A.

Caso exista ao menos um elemento de A que não pertença a B, então a sentença A $\subset$ B é falsa; nesse caso devemos escrever A $\not\subset$ B que se lê: A não está contido em B, ou então B $\not\supset$ A que se lê: B não contém A.

PROPRIEDADES DA INCLUSÃO

1. $\varnothing \subset$ A (o conjunto vazio é subconjunto de todo conjunto, inclusive dele mesmo);
2. A $\subset$ A (propriedade reflexiva);
3. Se A $\subset$ B e B $\subset$ A $\Leftrightarrow$ A = B (propriedade anti-simétrica);
4. Se A $\subset$ B e B $\subset$ C $\Leftrightarrow$ A $\subset$ C (propriedade transitiva).

CONJUNTO DAS PARTES

Quando vamos escrever os subconjuntos de um dado conjunto A devemos incluir os conjuntos ∅ e A. Por exemplo, seja A = {a, e, u}.
São seus subconjuntos:

- Com nenhum elemento: ∅
- Com um elemento: {a}; {e}; {u}
- Com dois elementos: {a, e}; {a, u}; {e, u}
- Com três elementos: {a, e, u}

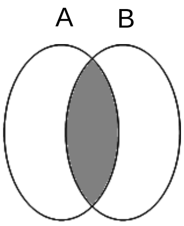
Podemos formar um conjunto cujos elementos são todos subconjuntos de A, que vamos indicar por P(A), onde P(A) = {∅; {a}; {e}; {u}; {a, e}; {a, u}; {e, u}; {a, e, u}}.

Notamos então, que A tem 3 elementos e formamos 8 subconjuntos. De modo geral, se um conjunto tem n elementos, então ele tem 2^n subconjuntos.

Note que o número de elementos de P(A) é 8, ou seja 2^3 . Este conjunto é denominado conjunto das partes de A.

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

1. **INTERSECÇÃO:** Chamamos intersecção de dois conjuntos A e B, o conjunto formado pelos elementos pertencentes ao conjunto A e ao conjunto B ao mesmo tempo.
   Simbolizamos: A ∩ B.

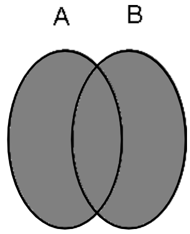


PROPRIEDADES DA INTERSECÇÃO
(Para quaisquer A, B e C)

1. A ∩ A = A
2. A ∩ ∅ = ∅
3. A ∩ B = B ∩ A
4. (A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C)
5. Se A ⊂ B ⇒ A ∩ B = A

CONJUNTOS DISJUNTOS: dois conjuntos são chamados disjuntos, quando a sua intersecção é o conjunto vazio.

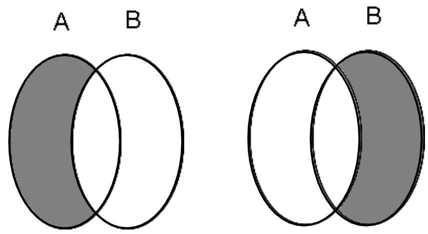
2. **UNIÃO:** Chamamos união ou reunião de dois conjuntos A e B, o conjunto formado pelos elementos pertencentes ao conjunto A ou ao conjunto B. Simbolizamos A ∪ B.



PROPRIEDADES DA UNIÃO
(Para quaisquer A, B e C)

1. A ∪ A = A
2. A ∪ ∅ = A
3. A ∪ B = B ∪ A
4. (A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C)
5. Se A ⊂ B ⇒ A ∪ B = B

3. **DIFERENÇA:** Dados dois conjuntos A e B, chamamos de diferença A – B ao conjunto formado pelos elementos que pertençam ao conjunto A e não pertençam ao conjunto B. Simbolizamos A – B.

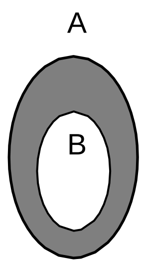


A - B   B - A

PROPRIEDADES DA DIFERENÇA
(Para quaisquer A, B e C)

1. A – A = ∅
2. A – ∅ = A
3. ∅ – A = ∅
4. Se B ⊂ A ⇒ B – A = ∅
5. Se A ≠ B ⇒ A – B ≠ B – A

4. **COMPLEMENTAR:** Quando dois conjuntos A e B são tais que A ⊂ B, dá-se o nome de complementar de A em B à diferença B – A.



Simbolizamos A ⊂ B ⇒
⇒ $C_B A = B – A$

PROPRIEDADES
(Para qualquer A)

1. $C_A A = ∅$
2. $C_A ∅ = A$
3. $C_∅ ∅ = ∅$

EXERCÍCIOS

Questão 01
Sejam os conjuntos A = {0, 3, 7} e B = {0, 3, 5}. Utilizando os símbolos $\in$ e $\notin$, relacione:

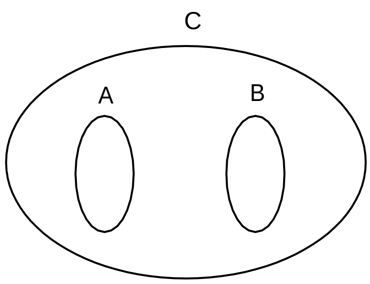
a) ( ) 3 e A
b) ( ) 1 e B
c) ( ) 3 e B
d) ( ) 0 e A
e) ( ) 5 e A
f) ( ) 7 e A
g) ( ) 7 e B
h) ( ) 2 e B

Questão 02
Considere os conjuntos A = {1, 2}, B = {1, 2, 3}, C = {1, 2, 3, 7, 8} e D = {3, 7}. Utilizando os símbolos $\subset$ e $\not\subset$, relacione entre si os conjuntos:

a) ( ) A e B
b) ( ) A e C
c) ( ) A e D
d) ( ) B e C
e) ( ) D e A
f) ( ) D e B
g) ( ) D e C

Questão 03
No diagrama abaixo, A, B e C são três conjuntos não vazios. Marque V ou F a cada uma das sentenças, conforme ela seja verdadeira ou falsa:

a) ( ) $A \subset C$
b) ( ) $B \subset C$
c) ( ) $C \subset A$
d) ( ) $A \subset B$
e) ( ) $C \not\subset A$
f) ( ) $A \not\subset B$
g) ( ) $C \supset A$
h) ( ) $A \not\supset C$
i) ( ) $B \supset C$
j) ( ) $C \subset B$



Questão 04
Dado o conjunto A = {0, 1, 2, {3}}, diga se as proposições a seguir são verdadeiras (V) ou falsas (F):

a) ( ) $0 \in A$
b) ( ) $1 \subset A$
c) ( ) $\{3\} \in A$
d) ( ) $\{3\} \subset A$
e) ( ) $\{1, 2\} \subset A$
f) ( ) $\varnothing \subset A$
g) ( ) $\varnothing \in A$
h) ( ) $3 \in A$
i) ( ) $\{3\} \notin A$
j) ( ) $0 \subset A$

Questão 05
Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3}, B = {0, 2, 3, 5}, C = {0, 2, 4, 6, 8} e D = {5, 7, 9}, determine:

a) $A \cup B$
b) $A \cup C$
c) $A \cup D$
d) $B \cup C$
e) $B \cup D$
f) $C \cup D$
g) $(A \cup B) \cup C$
h) $(B \cup C) \cup D$
i) $(A \cup C) \cup D$
j) $(B \cup D) \cup A$

Questão 06
Com os dados da questão anterior, calcule:

a) $A \cap B$
b) $A \cap C$
c) $A \cap D$
d) $B \cap C$
e) $B \cap D$
f) $C \cap D$
g) $(A \cap B) \cap C$
h) $(B \cap C) \cap D$
i) $(A \cap C) \cap D$
j) $(B \cap D) \cap A$

Questão 07
Com os dados da questão anterior, calcule:

a) $A - B$
b) $A - C$
c) $A - D$
d) $B - C$
e) $B - D$
f) $C - D$
g) $(A - B) - C$
h) $(B - C) - D$
i) $(A - C) - D$
j) $(B - D) - A$

Questão 08
Considere os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {0, 2, 5}, C = {1, 3, 5, 7} e D = {2, 4, 6}. Determine:

a) $C_A\, B$
b) $C_A\, C$
c) $C_A\, D$
d) $C_A\, (B \cap C \cap D)$

Questão 09

Numa pesquisa sobre a preferência em relação a dois jornais, foram consultadas 470 pessoas e o resultado foi o seguinte: 250 delas lêem o jornal A, 180 lêem o jornal B e 60 lêem os dois jornais. Pergunta-se:

a) Quantas pessoas lêem apenas o jornal A?
b) Quantas pessoas lêem apenas o jornal B?
c) Quantas pessoas lêem jornais?
d) Quantas pessoas não lêem jornais?

Questão 10

Numa cidade são consumidos três produtos A, B e C. Foi feito um levantamento de mercado sobre o consumo desses produtos e obteve-se o seguinte resultado:

Produtos	Nº de consumidores
A	150
B	200
C	250
A e B	70
A e C	90
B e C	80
A, B e C	60
Nenhum dos três	180

Pergunta-se:

a) Quantas pessoas consomem apenas o produto A?
b) Quantas pessoas consomem o produto A ou o produto B ou o produto C?
c) Quantas pessoas consomem o produto A ou o produto B?
d) Quantas pessoas foram consultadas?

Questão 11

Uma prova era constituída de dois problemas. 300 alunos acertaram somente um dos problemas, 260 acertaram o segundo, 100 alunos acertaram os dois e 210 erraram o primeiro. Quantos alunos fizeram a prova?

Questão 12

Segundo a teoria, um conjunto com m elementos tem exatamente 2^m subconjuntos. Usando esse raciocínio, determine o número de elementos do conjunto A, sabendo que:

1. B é um conjunto de três elementos;
2. $A \cap B$ é vazio;
3. O número de subconjuntos de $A \cup B$ é 32.

Questão 13

Uma editora estuda a possibilidade de lançar novamente as publicações HELENA, SENHORA e A MORENINHA. Para isso, efetuou uma pesquisa de mercado e concluiu que em cada 1.000 pessoas consultadas, 600 leram A MORENINHA, 400 leram HELENA, 300 leram SENHORA, 200 leram A MORENINHA e HELENA, 150 leram A MORENINHA e SENHORA, 100 leram HELENA e SENHORA e 20 leram as três obras.

Pergunta-se:

a) Quantas pessoas leram apenas uma das três obras?
b) Quantas pessoas não leram nenhuma das três obras?
c) Quantas pessoas leram duas ou mais obras?

Questão 14

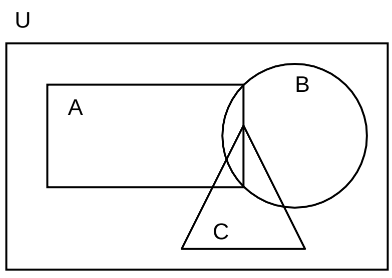
Num grupo de 99 esportistas, 40 jogam vôlei, 20 jogam vôlei e basquete, 22 jogam basquete e futebol, 18 jogam vôlei e futebol, 11 jogam as três modalidades. O número de pessoas que jogam basquete é igual ao número de pessoas que jogam futebol.

Pergunta-se:

a) Quantos jogam futebol e não jogam vôlei?
b) Quantos jogam basquete e não jogam vôlei?
c) Quantos jogam vôlei e não jogam basquete?

Questão 15

Dado o diagrama abaixo, colorir a região $(A \cap B) \cup (A \cap C)$



Questão 16

Responda:

a) Como se chama o conjunto que tem um só elemento?
b) Se $A \cap B = \varnothing$, como se chamam os conjuntos A e B?

c) Se um conjunto A tem 3 elementos e um conjunto B tem 5 elementos, quantos elementos, no máximo, terá o conjunto $A \cap B$?
d) Se A e B são disjuntos, quantos elementos terá o conjunto $A \cap B$?

RESPOSTAS

Questão 01

a) $\in$	b) $\notin$	c) $\in$	d) $\in$
e) $\notin$	f) $\in$	g) $\notin$	h) $\notin$

Questão 02

a) $\subset$	b) $\subset$	c) $\not\subset$	d) $\subset$
e) $\not\subset$	f) $\not\subset$	g) $\subset$	

Questão 03

a) V	b) V	c) F	d) F
e) V	f) V	g) V	h) V
i) F	j) F		

Questão 04

a) V	b) F	c) V	d) F
e) V	f) V	g) F	h) F
i) F	j) F		

Questão 05
a) {0, 1, 2, 3, 5}
b) {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8}
c) {0, 1, 2, 3, 5, 7, 9}
d) {0, 2, 3, 4, 5, 6, 8}
e) {0, 2, 3, 5, 7, 9}
f) {0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
g) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8}
h) {0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
i) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
j) {0, 1, 2, 3, 5, 7, 9}

Questão 06
a) {0, 2, 3}
b) {0, 2}
c) $\varnothing$
d) {0, 2}
e) {5}
f) $\varnothing$
g) {0, 2}
h) $\varnothing$
i) $\varnothing$
j) $\varnothing$

Questão 07

a) {1}	f) {0, 2, 4, 6, 8}
b) {1, 3}	g) {1}
c) {0, 1, 2, 3}	h) {3}
d) {3, 5}	i) {1, 3}
e) {0, 2, 3}	j) $\varnothing$

Questão 08
a) {1, 3, 4, 6, 7}
b) {0, 2, 4, 6}
c) {0, 1, 3, 5, 7}
d) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Questão 09

a) 190	b) 120	c) 370	d) 100

Questão 10

a) 50	b) 420	c) 280	d) 140

Questão 11
450

Questão 12
2

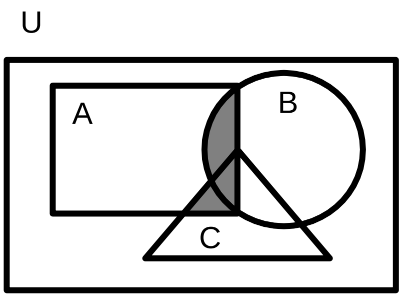
Questão 13

a) 460	b) 130	c) 410

Questão 14

a) 36	b) 34	c) 20

Questão 15



Questão 16
a) Unitário
b) Disjuntos
c) 3
d) 0