Professor Georges

TEORIA DOS CONJUNTOS

Conceito: Teoria dos conjuntos

A noção de conjunto, fundamental na Matemática de nossos dias, não é suscetível de definição precisa a partir de noções mais simples, ou seja, é uma noção primitiva, introduzida de modo explicito no século passado pelo matemático Russo GEORG CANTOR (1845-1918).

Intuitivamente, sob a designação de conjunto entendemos toda coleção bem definida de objetos, não importa de que natureza, considerados globalmente.

Segundo N. BOURBAK: “Um conjunto é formado de elementos suscetíveis de possuírem certas propriedades e de terem entre si, ou com elementos de outros conjuntos certas relações”.

Segundo CANTOR ; “Chama-se conjunto o agrupamento num todo de objetos, bem definidos e discerníveis, de nossa percepção ou de nosso entendimento, chamados os elementos do conjunto”.

Portanto, *conjunto é qualquer lista ou coleção bem definida de objetos.*

Exemplos

a) O conjunto dos alunos desta sala.
b) O conjunto dos meses do ano.
c) O conjunto das letras da palavra MATEMÁTICA.
d) O conjunto das vogais do alfabeto.
e) O conjunto dos números ímpares.
f) O conjunto dos dias da semana.
g) O conjunto dos triângulos isósceles.

Notação dos Conjuntos

Um conjunto designa-se por letras latinas maiúsculas: A, B, C, . . . , X, Y, Z. Os objetos que constituem um conjunto denominam-se ***elementos*** do conjunto, e representa-se habitualmente pelas letras minúsculas : a, b, c, . . . , x, y, z. Daí elementos são os componentes (objetos, integrantes) do conjunto.

Exemplo

O conjunto A cujos elementos são: a, b, c, . . . representa-se pela notação: A = { a, b, c, . . . } que se lê "A é o conjunto cujos elementos são: a, b, c, . . . "

Observe que os elementos estão separados por vírgula e incluídos entre chaves.

Relação de Pertinência

Para indicar que um elemento x pertence ao conjunto A, escreve-se $x \in A$, notação derivada ao matemático Italiano Giuseppe Peano (1858-1932) e que se lê "x pertence a A".

Para indicar que um elemento x não pertence ao conjunto A, escreve-se $x \notin A$, e que se lê "x não pertence a A".

Daí, relação de pertinência é a relação que se estabelece entre elemento e conjunto.

Representação de um conjunto

Um conjunto pode ser representado por:

Extensão : Nomeando seus elementos entre chaves e separados por virgula

Exemplos

O conjunto das vogais do alfabeto português.

A = { a, e, i, o, u }

O conjunto dos números ímpares positivos

B = { 1, 3, 5, . . . }

O conjunto dos dias da semana

C = { Segunda feira, Terça feira, . . . , Domingo}

O conjunto dos números pares positivos menores que 500

D = { 2, 4, 6, 8, . . ., 498}

Compreensão: O conjunto será representado por meio de uma propriedade que caracteriza seus elementos.

Exemplos

A = { x | x é vogal}

B = { x | $x \in \mathbb{N}$ x < 5}

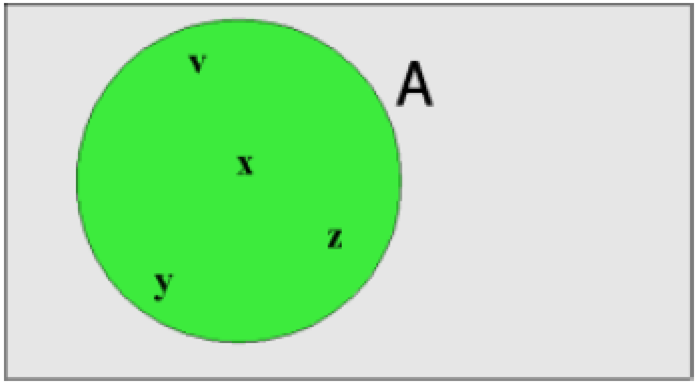
C = { x | $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 - 7x + 6 = 0$ }.

Diagrama de Venn (ou circulo de Euler)

Por um recinto plano delimitado por uma linha fechada qualquer não entrelaçada.

Exemplo

O conjunto A = { v, x, y, z } é representado por :



Conjuntos finitos e infinitos

Os conjuntos podem ser finitos ou infinitos. Intuitivamente, um conjunto é finito se consiste de um número específico de elementos diferentes; caso contrario, é infinito.

Exemplos

Seja A o conjunto dos dias da semana

A = { Segunda feira, Terça feira, . . . , Domingo}

Assim A é finito.

Seja B o conjunto dos números pares positivos

B = { 2, 4, 6, 8, . . . }

Assim B é infinito.

Conjunto unitário

Chama-se conjunto unitário todo conjunto constituído de um único elemento.

Exemplo

$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 9 = 0\}: \Rightarrow A = \{ 3 \}.$

$B = \{ x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 5\}: \Rightarrow B = \{ 4 \}.$

Conjunto vazio

É o conjunto que não contém nenhum elemento, e representamo-lo pelo símbolo $\varnothing$ ou $\{\ \}$.

Exemplo

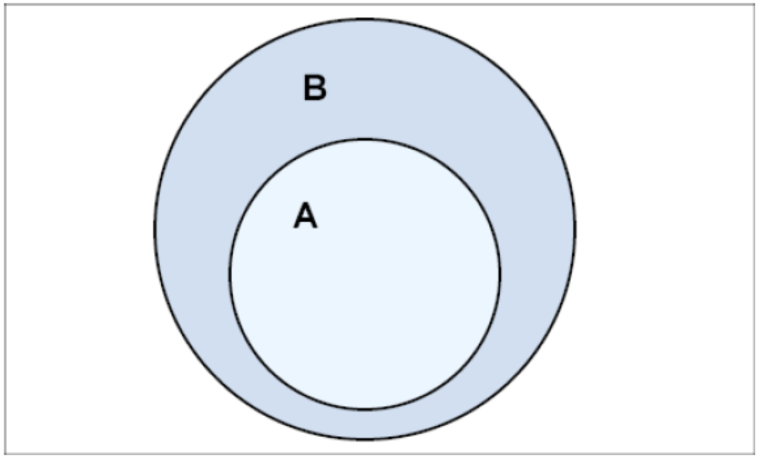
Seja $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 4, x$ é ímpar$\}$.

Então, A é vazio, isto é, $A = \varnothing$ ou $A = \{\ \}$.

Subconjuntos

Um conjunto A é um subconjunto de B e indica-se por $A \subset B$ ou $B \supset A$, se e somente se, cada elemento de A também pertence a B; isto é, $x \in A$ implica $x \in b$.

Podemos também dizer que A está contido em B ou que B contém A.



Exemplo

O conjunto A = { 0, 1, 2, 3, 4 } é um subconjunto do conjunto B = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 }, pois cada elemento pertencente a A também pertence a B.

$A \subset B$ ou $B \supset A$.

OBS: a relação de inclusão: $\subset$, $\supset$, $\not\subset$, $\not\supset$ (relaciona um conjunto com outro conjunto).

Conjunto das Partes

Chama-se conjunto das partes de um conjunto A, denotado por ***P(A),*** o conjunto cujos elementos são todas as partes de ***A***, isto é: $P(A) = \{ x \mid x \subset A\}$.

Exemplo

$A = \{1, 2, 3\}$

$P(A) = \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Conjunto universo

Em qualquer aplicação da Teoria dos Conjuntos, todos os conjuntos em estudo são considerados como subconjunto de um conjunto fixo.

Denominamos este conjunto fixo o conjunto universo e indicamo-lo por U.

Exemplos

a) Na geometria plana, o conjunto universo consiste em todos os pontos do plano.

b) No estudo sobre a população humana, o conjunto universo consiste em todas as pessoas do mundo.

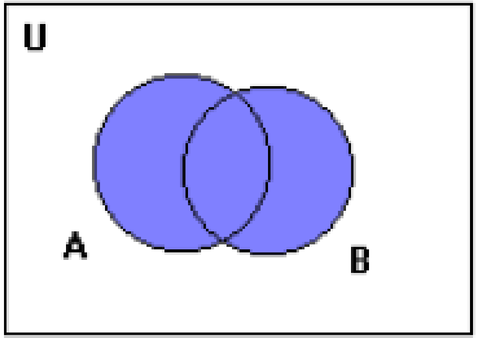
Operações com conjuntos

Reunião ou união de dois conjuntos

Chama-se ***reunião*** (ou união) de dois conjuntos A e B ao conjunto de todos os elementos que pertence a A ou a B.

Indica-se esse conjunto por $A \cup B$, que se lê "A ou B".

Simbolicamente, temos: $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$

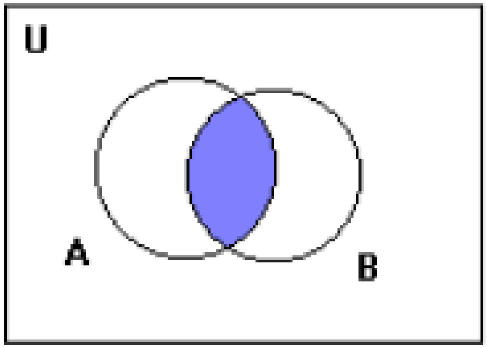


Interseção de dois conjuntos

Chama-se ***intersecção*** de dois conjuntos A e B ao conjunto de todos os elementos que pertencem simultaneamente a A e A B.

Indica-se esse conjunto por $A \cap B$, que se lê “A e B”.

Simbolicamente: $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

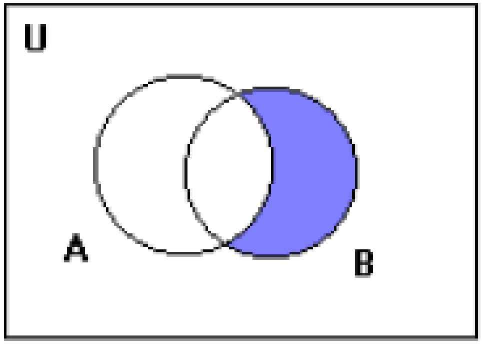


Complementar relativo (ou diferença) de dois conjuntos

Chama-se ***complementar relativo*** (ou diferença) entre dois conjuntos B e A ao conjunto de todos os elementos de B, mas que não pertence a A.

Indica-se esse conjunto por B – A, que se lê "B menos A".

Simbolicamente: $B - A = \{ x \mid x \in B \text{ e } x \notin A \}$.



Exemplo

Sejam $A = \{2, 4, 5, 6, 8\}$

$B = \{1, 4, 5, 9\}$

Encontre:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A - B$

Exemplo

Sejam $A = \{2, 4, 5, 6, 8\}$

$B = \{1, 4, 5, 9\}$

Encontre:

a) $A \cup B$

$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$

b) $A \cap B$

$A \cap B = \{4, 5\}$

c) $A - B$

$A - B = \{2, 6, 8\}$

Leis da álgebra dos conjuntos

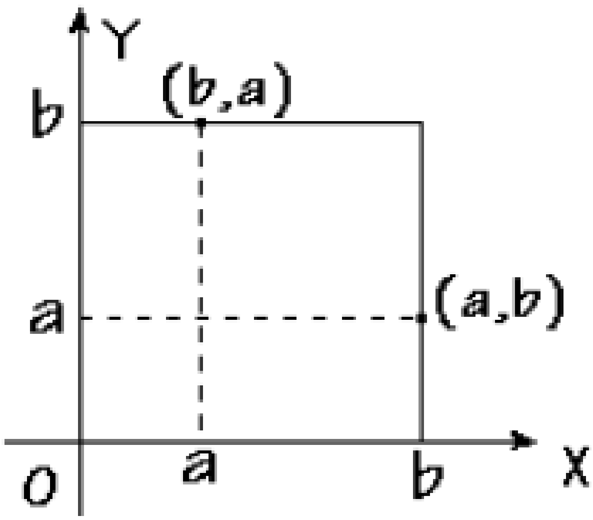
LEIS	UNIÃO	INTERSEÇÃO
IDEMPOTENTES	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
COMUTATIVAS	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
ASSOCIATIVAS	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
DISTRIBUTIVAS	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Produto Cartesiano

Par ordenado

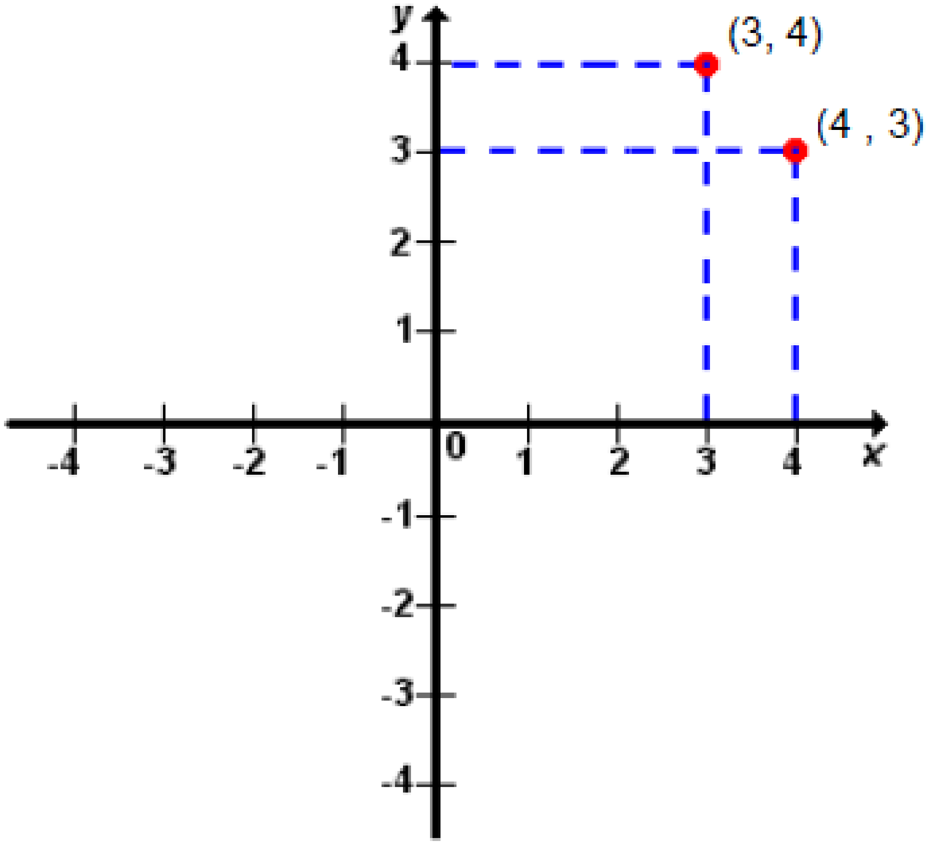
Intuitivamente, um par ordenado consiste de dois elementos, digamos a e b, dos quais um, digamos a, é designado como primeiro elemento e o outro como segundo elemento.

Um par ordenado é designado por: (a, b)



Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se a = c e b = d

Exemplo: Os pares (4 , 3) e (3, 4) são diferentes.



Produto Cartesiano

Def: Sejam A e B dois conjuntos não vazios, chama-se produto cartesiano de A por B ou apenas produto de A por B ao conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tais que o primeiro elemento x pertence a A e o segundo elemento Y pertence a B.

Simbolicamente: **$A \times B = \{(x, y) \in A \times B \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$**

Seu nome provém do matemático R. DESCARTES que no século XVII, foi o primeiro a pesquisar o conjunto $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

OBS: 1°) Se $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, por definição $A \times B = \varnothing$, isto é $A \times \varnothing = \varnothing$ ou $B \times \varnothing = \varnothing$.

2°) se $A = B$, então podemos escrever o produto cartesiano $A \times A$ como A^2, isto é: $A \times A = A^2$.

3°) Sendo A e B não vazios, temos $A \times B \neq B \times A$

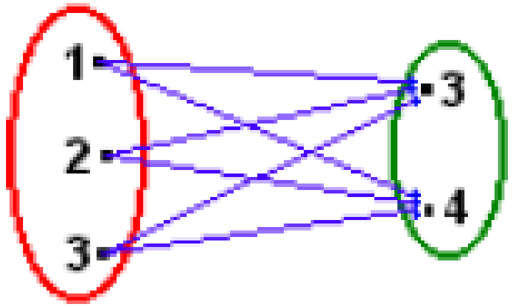
4°) $n(A \times B) = n(A) . n(B)$.

Diagrama de Venn

Exemplo

Sejam os conjuntos A = { 1, 2, 3 } e B = {3, 4}

Então: A X B = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)}



Plano Cartesiano

Exemplo

Sejam os conjuntos: A = {a, b, c} e B = {1, 2, 3}

Então A X B = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 2), (d, 4)}

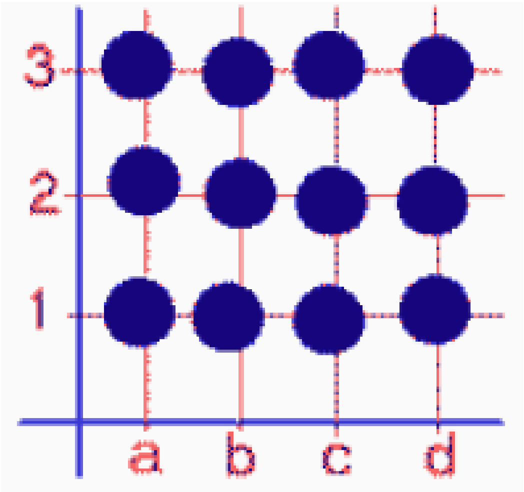


Tabela de duas entradas

Exemplo

Sejam os conjuntos: A = {1, 2} e B = {a, b, c}

Então: A X B = {(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)}

A \ B	a	b	c
1	(1, a)	(1,b)	(1,c)
2	(2, a)	(2, b)	(2,c)