借Yoneda引理的范畴论阶段复习

刘思雨

2024 年 8 月 27 日

1 Preface

- 虽然范畴的对象有可能不是集合，或许不能沿用集合论的符号，但是还是简记$A \in \mathcal{C}$表示A是范畴$\mathcal{C}$ 的一个对象。
- 与主流记号或许不同，记$\mathcal{C}(A, B)$为范畴$\mathcal{C}$中A到B的态射，而非$Hom(A, B)$或$Mor(A, B)$。
- 提供一些较为繁琐的证明。

2 Yoneda引理的陈述

Definition 2.1 (hom 函子) $\mathcal{C}$ 是一个局部小范畴，$A \in \mathcal{C}$。定义$h_A \in [\mathcal{C}, Set]$如下：

$$For\ X \in \mathcal{C}, h_A(X) := \mathcal{C}(A, X)$$

$$For\ X, Y \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{C}(X, Y). For\ g \in \mathcal{C}(A, X), (h_A(f))(g) := f \circ g$$

Theorem 2.2 (Yoneda) $\mathcal{C}$ 是一个局部小的范畴，$A \in \mathcal{C}$，$F \in [\mathcal{C}, Set]$，h_A是A的hom函子。则

$$[\mathcal{C}, Set](F, h_A) \simeq F(A)$$

这里$\simeq$有三个含义：

① 作为集合范畴内的对象同构

② 当A作为变量在$\mathcal{C}$中变动时，$\simeq$两端可以延拓定义为$\mathcal{C}$到Set的函子，两个函子自然同构。

③ 当F作为变量在$[\mathcal{C}, Set]$中变动时，$\simeq$两端可以延拓定义为$[\mathcal{C}, Set]$到Set的函子，两个函子自然同构。

3 Preliminary

3.1 自然同构判定定理

Lemma 3.1 (自然同构判定定理) $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$是两个范畴，$F, G \in [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$。则

η是F到G的自然同构 $\Longleftrightarrow$ η是自然变换且$\forall A \in \mathcal{C}, \eta(A) \in \mathcal{D}(F(A), G(A))$是同构。

3.2 ②中函子的定义

Goal：定义一个$\mathcal{C}$到Set的函子$[\mathcal{C}, Set](F, h_\bullet)$

1° 作用在对象上已经完成了。

2° 作用在态射上。

$$\text{For } X, Y \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{C}(X, Y),$$

$$[\mathcal{C}, Set](F, h_\bullet)(f) \text{ should be in } Set([\mathcal{C}, Set](F, h_X), [\mathcal{C}, Set](F, h_Y))$$

$$\text{For } \eta \in [\mathcal{C}, Set](F, h_X),$$

$$([\mathcal{C}, Set](F, h_\bullet)(f))(\eta) \text{ should be in } [\mathcal{C}, Set](F, h_Y)$$

再次可以感觉到缺少一个将h_X变到h_Y的自然变换，这样就可以和η复合达到目标。

Definition 3.2 (h函子)

3.3 ③中函子的定义