借Yoneda引理的范畴论阶段复习

刘思雨

2024 年 9 月 8 日

1 Preface

- 虽然范畴的对象有可能不是集合，或许不能沿用集合论的符号，但是还是简记$A \in \mathcal{C}$表示A是范畴$\mathcal{C}$ 的一个对象。
- 与主流记号或许不同，记$\mathcal{C}(A, B)$为范畴$\mathcal{C}$中A到B的态射，而非$Hom(A, B)$或$Mor(A, B)$。
- 提供一些较为繁琐的证明。

2 Yoneda引理的陈述

Definition 1 (hom 函子). $\mathcal{C}$ 是一个局部小范畴，$A \in \mathcal{C}$。定义$h_A \in [\mathcal{C}, Set]$如下：

$$For\ X \in \mathcal{C}, h_A(X) := \mathcal{C}(A, X)$$

$$For\ X, Y \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{C}(X, Y). For\ g \in \mathcal{C}(A, X), (h_A(f))(g) := f \circ g$$

Theorem 1 (Yoneda). $\mathcal{C}$ 是一个局部小的范畴，$A \in \mathcal{C}$，$F \in [\mathcal{C}, Set]$，h_A是A的hom函子。则

$$[\mathcal{C}, Set](h_A, F) \simeq F(A)$$

这里$\simeq$有三个含义：

① 作为集合范畴内的对象同构

② 当A作为变量在$\mathcal{C}$中变动时，$\simeq$两端可以延拓定义为$\mathcal{C}$到Set的函子，两个函子自然同构。

③ 当F作为变量在$[\mathcal{C}, Set]$中变动时，$\simeq$两端可以延拓定义为$[\mathcal{C}, Set]$到Set的函子，两个函子自然同构。

3 Preliminary

3.1 自然同构判定定理

Lemma 1 (自然同构判定定理)**.** $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$是两个范畴，$F, G \in [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$。则

η是F到G的自然同构 $\Longleftrightarrow$ η是自然变换且$\forall A \in \mathcal{C}, \eta(A) \in \mathcal{D}(F(A), G(A))$是同构。

3.2 ②中函子的定义

Goal：定义一个$\mathcal{C}$到Set的函子$[\mathcal{C}, Set](h_\bullet, F)$

1° 作用在对象上已经完成了。即，

$$\text{For } X \in \mathcal{C}, [\mathcal{C}, Set](h_\bullet, F)(X) := [\mathcal{C}, Set](h_X, F)$$

2° 作用在态射上。

$$\text{For } X, Y \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{C}(X, Y),$$

$$[\mathcal{C}, Set](h_\bullet, F)(f) \text{ should be in } Set([\mathcal{C}, Set](h_X, F), [\mathcal{C}, Set](h_Y, F))$$

$$\text{For } \eta \in [\mathcal{C}, Set](h_X, F),$$

$$([\mathcal{C}, Set](h_\bullet, F)(f))(\eta) \text{ should be in } [\mathcal{C}, Set](h_Y, F)$$

在此可以感觉到缺少一个将h_Y变到h_X的自然变换，这样就可以和η复合达到目标。

Definition 2. 对于hom函子h_A，让A在$\mathcal{C}$中变动可以延拓定义一个$\mathcal{C}^{op}$到$[\mathcal{C}, Set]$的函子h。定义如下：

1° 作用在对象上已经完成了。即，

$$For\ A \in \mathcal{C}, h(A) := h_A$$

2° 作用在态射上。

$$For\ X, Y \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{C}(X, Y),$$

$$h(f)\ should\ be\ in\ [\mathcal{C}, Set](h_Y, h_X)$$

$$For\ A \in \mathcal{C}, h(f)_A\ should\ be\ in\ Set(h_Y(A), h_X(A)) = Set(\mathcal{C}(Y, A), \mathcal{C}(X, A))$$

$$For\ g \in \mathcal{C}(Y, A), (h(f)_A)(g) := g \circ f.$$

Pf.（良定义证明）.

1° 为证明h(f)的确定义了一个自然变换，应证明:

$$\text{For } A, B \in \mathcal{C}, g \in \mathcal{C}(A, B),$$

$$h(f)_B \circ h_Y(g) = h_X(g) \circ h(f)_A$$

这是因为左右都是$g \circ \bullet \circ f$，即在左边复合g，在右边复合f。

2° 为证明h的确是个函子，应证明：

$$\text{For } X, Y, Z \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{C}(X, Y), g \in \mathcal{C}(Y, Z)$$

$$h(f \circ g) = f \circ g \circ \bullet = h(f) \circ h(g)$$

□

继续之前的定义

$$\text{For } \eta \in [\mathcal{C}, Set](h_X, F),$$

$$([\mathcal{C}, Set](h_\bullet, F)(f))(\eta) := \eta \circ h(f)$$

良定义证明从略

3.3 ③中函子的定义

Goal 1：定义一个$[\mathcal{C}, Set]$到Set的函子$[\mathcal{C}, Set](h_A, \bullet)$

1° 作用在对象上已经完成了。即，

$$\text{For } F \in [\mathcal{C}, Set], [\mathcal{C}, Set](h_A, \bullet)(F) := [\mathcal{C}, Set](h_A, F)$$

2° 作用在态射上。

$$\text{For } F, G \in [\mathcal{C}, Set], \eta \in [\mathcal{C}, Set](F, G),$$

$$[\mathcal{C}, Set](h_A, \bullet)(\eta) \text{ should be in } Set([\mathcal{C}, Set](h_A, F), [\mathcal{C}, Set](h_A, G))$$

$$\text{For } \mu \in [\mathcal{C}, Set](h_A, F),$$

$$([\mathcal{C}, Set](h_A, \bullet)(\eta))(\mu) := \eta \circ \mu$$

Goal 2：定义一个$[\mathcal{C}, Set]$到Set的函子$\bullet(A)$

1° 作用在对象上已经完成了。即，

$$\text{For } F \in [\mathcal{C}, Set], \bullet(A)(F) := F(A)$$

2° 作用在态射上。

$$\text{For } F, G \in \mathcal{C}, \eta \in [\mathcal{C}, Set](F, G), \bullet(A)(\eta) := \eta_A$$

4 Yoneda引理的证明

4.1 ①：作为集合范畴内的同构

1° $[\mathcal{C}, Set](h_A, F) \longrightarrow F(A)$的映射

$$\text{For } \eta \in [\mathcal{C}, Set](h_A, F), \hat{\eta} := \eta_A(id_A) \in F(A)$$

2° $F(A) \longrightarrow [\mathcal{C}, Set](h_A, F)$的映射

$$\text{For } s \in F(A), X \in \mathcal{C}, f \in h_A(X), \tilde{s}_X(f) := (F(f))(s)$$

$$\tilde{s} \in [\mathcal{C}, Set](h_A, F)$$

Lemma 2.

1°

$$For\ \eta \in [\mathcal{C}, Set](h_A, F), \tilde{\hat{\eta}} = \eta$$

2°

$$For\ s \in F(A), \hat{\tilde{s}} = s$$

Pf.

1°

$$\begin{aligned}
&\text{For } X \in \mathcal{C}, f \in h_A(X),\\
&\tilde{\tilde{\eta}}_X(f)\\
=&\widetilde{\eta_A(id_A)}_X(f)\\
=&(F(f))(\eta_A(id_A))\\
=&(\eta_X \circ h_A(f))(id_A)\\
=&\eta_X(f \circ id_A)\\
=&\eta_X(f)
\end{aligned}$$

2°

$$\begin{aligned}
&\widehat{\widetilde{s}}\\
=&\widetilde{s}_A(id_A)\\
=&(F(id_A))(s)\\
=&s
\end{aligned}$$

□

4.2 ②：A变动时的自然同构

Goal: $\hat{\star}_\bullet$ （$\star$是 ^ 的作用占位符，$\bullet$处是4.1中定义的 ^ 中A变动的位置）是$[\mathcal{C}, Set](h_\bullet, F)$到$F(\bullet)$的自然同构

根据自然同构判定定理，需证明

1°

$$\forall A \in \mathcal{C}, \hat{\star}_A \text{ 是从 } [\mathcal{C}, Set](h_A, F) \text{ 到 } F(A) \text{ 的同构}$$

这已经在4.1中证明。

2° $\hat{\star}_\bullet$ 是良定义的，即一个自然变换。

这需要证明：For $A, B \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{C}(A, B)$，下图交换

$$
\begin{tikzcd}
{[\mathcal{C}, Set](h_\bullet, F)(A)} \arrow[r, "{[\mathcal{C}, Set](h_\bullet, F)(f)}"] \arrow[d, "\hat{\star}_A"'] & {[\mathcal{C}, Set](h_\bullet, F)(B)} \arrow[d, "\hat{\star}_B"] \\
F(\bullet)(A) \arrow[r, "F(\bullet)(f)"'] & F(\bullet)(B)
\end{tikzcd}
$$

Pf.

$$
\begin{aligned}
&\text{For } \eta \in [\mathcal{C}, Set](h_\bullet, F)(A) = [\mathcal{C}, Set](h_A, F), \\
&\quad (\hat{\star}_B \circ [\mathcal{C}, Set](h_\bullet, F)(f))(\eta) \\
&= \hat{\star}_B(\eta \circ h(f)) \\
&= (\eta \circ h(f))_B(id_B) \\
&= (\eta_B \circ h(f)_B)(id_B) \\
&= \eta_B(id_B \circ f) \\
&= \eta_B(f) \\
&\quad ((F(\bullet)(f)) \circ \hat{\star}_A)(\eta) \\
&= (F(\bullet)(f))(\eta_A(id_A)) \\
&= \eta_B(h_A(f)(id_A)) \\
&= \eta_B(f \circ id_A) \\
&= \eta_B(f)
\end{aligned}
$$

□

4.3 ③：F变动时的自然同构

Goal: $\hat{\star}_\bullet$ （$\star$是 ^ 的作用占位符，$\bullet$处是4.1中定义的 ^ 中F变动的位置）是$[\mathcal{C}, Set](h_A, \bullet)$到$\bullet(A)$的自然同构

类似地，根据自然同构判定定理，需证明

1°

$$\forall F \in [\mathcal{C}, Set], \hat{\star}_F \text{ 是从 } [\mathcal{C}, Set](h_A, F) \text{ 到 } F(A) \text{ 的同构}$$

这已经在4.1中证明。

2° $\hat{\star}_\bullet$ 是良定义的，即一个自然变换。

这需要证明：For $F, G \in [\mathcal{C}, Set], \eta \in [\mathcal{C}, Set](F, G)$，下图交换

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{C}, Set](h_A, \bullet)(F)} \arrow[r, "{[\mathcal{C}, Set](h_A, \bullet)(\eta)}"] \arrow[d, "\hat{\star}_F"'] & {[\mathcal{C}, Set](h_A, \bullet)(G)} \arrow[d, "\hat{\star}_G"] \\
\bullet(A)(F) \arrow[r, "\bullet(A)(\eta)"'] & \bullet(B)(G)
\end{tikzcd}$$

Pf.

$$\text{For } \mu \in [\mathcal{C}, Set](h_A, \bullet)(F) = [\mathcal{C}, Set](h_A, F),$$

$$\begin{aligned}
&(\hat{\star}_G \circ ([\mathcal{C}, Set](h_A, \bullet)(\eta))(\mu) \\
=&\hat{\star}_G(\eta \circ \mu) \\
=&(\eta \circ \mu)_A(id_A) \\
=&(\eta_A \circ \mu_A)(id_A) \\
&((\bullet(A)(\eta)) \circ \hat{\star}_F)(\mu) \\
=&(\eta_A)(\mu_A(id_A))
\end{aligned}$$

□