probability

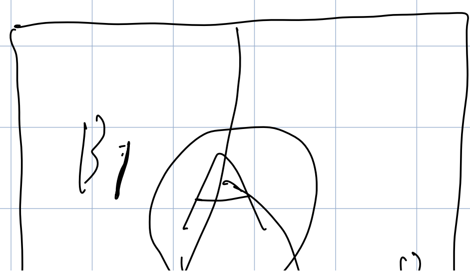
全概率公式

1、完备事件组

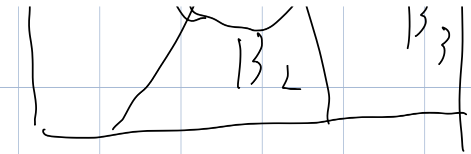
1、$B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots n)$　　互斥

2、$\sum_{i=1}^{n} B_i = \Omega$　　相加 $= \Omega$

2、deducing:



$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A\Omega) \\
&= P(A(B_1 + B_2 + B_3)) \\
&= P(AB_1 + AB_2 + AB_3)
\end{aligned}
$$



$$= P(AB_1) + P(AB_2) + P(AB_3)$$

$$\begin{aligned} &= P(B_1)P(A|B_1) + \\ &\quad P(B_2)P(A|B_2) + \\ &\quad P(B_3)P(A|B_3) \end{aligned}$$

贝叶斯公式（后验公式）

$$P(B_iA) \xRightarrow{\text{乘法公式}} P(B_i)P(A|B_i)$$

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_iA)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B)}$$

$$P(A) \xRightarrow[\text{全概率}]{} \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B)$$

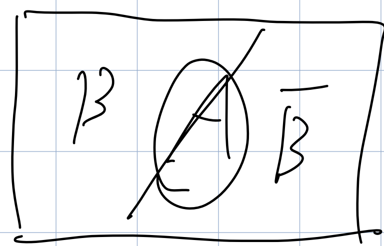
50个球，20个黄，30个白

两人依次随机取一球不放回

则第二人取黄球概率为______

设 B 为第一人取黄球

A 为第二人取黄球



$$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})$$

$$=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{19}{49}+\frac{3}{5}\cdot\frac{20}{\ }$$

$$) \quad 11 \quad 5 \quad 49$$

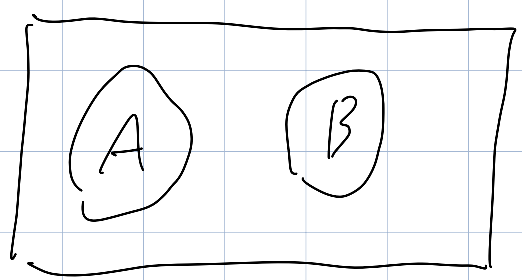
$$= \frac{38}{245} + \frac{12}{49}$$

$$= \frac{2}{5}$$

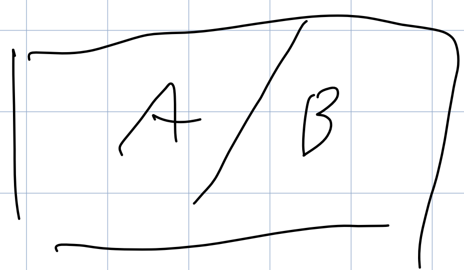
1、$A \subset B$ A发生，B发生

2、$A = B$ A和B同时发生/不发生

3、$AB = \varnothing$ 互斥(互不相容)



4、$AB=\varnothing$ 且 $A \cup B = \Omega$ 对立



越交越小，越并越大

$$A \cdot AB = AB$$

$$A + AB = A$$

加法公式

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A+B+C)=\underbrace{P(A)+P(B)+P(C)}_{+}\underbrace{-P(AB)-P(AC)-P(BC)}_{-}\underbrace{+P(ABC)}_{+}$$

直到事件ABC都出现

减法公式

$$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$$

被减数−减数=被减数减两者的交集

条件概率公式

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

分子全体

分母

乘法公式

$$P(AB)=P(B)\,P(A|B)$$

B发生，B发生的条件下A发生

强化112 设A,B为两个随机事件，且$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(A|B)=\frac{1}{3}$，$P(B|A)=\frac{1}{6}$，则$P(\overline{A}\overline{B})=$（　　）.

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{5}{12}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{7}{12}$

112.

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{6}$$

$$P(AB) = \frac{1}{12}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = 3 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{8}{12}$$

$$1 - \frac{8}{12} = \frac{1}{3}$$

强化113 设A,B,C是随机事件，A与C互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则$P(AB\mid\bar{C})=$(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

113.

$$AC=\varnothing$$

$$P(AB\mid\bar{C}) = \frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(AB\bar{C})}{1-P(C)} = \frac{P(AB-C)}{1-P(C)}$$

$$= \frac{P(AB)-P(ABC)}{\quad} \qquad \frac{P(AB)}{\quad} = \frac{\frac{1}{2}}{\quad} = \frac{3}{\quad}$$

$$1-P(C) = \overline{\qquad} \quad 1-P(C) \quad 1-\frac{1}{3} \quad 4$$

强化114 设A,B为两个随机事件，且$P(\overline{A})=0.2$，$P(B)=0.6$，$P(A\overline{B})=0.4$，则$P(B|(A\cup\overline{B}))=$(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

114.

$$P(B|(A+\overline{B}))$$

$$=\frac{P((A+\overline{B})B)}{P(A+\overline{B})}$$

$$=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$$

$$=\frac{0.4}{1-0.2+1-0.6-0.4}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

$$0.4=1-0.2-P(AB)$$

$$\therefore P(AB)=0.4$$

强化115 设A,B为随机事件，若$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则$P(A|B)>P(A|\bar{B})$的充分必要条件是（　　）.

A. $P(B|A)>P(B|\bar{A})$.　　B. $P(B|A)<P(B|\bar{A})$.

C. $P(\bar{B}|A)>P(B|\bar{A})$.　　D. $P(\bar{B}|A)<P(B|\bar{A})$.

115.

取 $A=B$

$P(A|B)=1$

$P(A|\bar{B})=P(A|\bar{A})=0$

A. $1>0$　B. $1<0$ ×　C. $0>0$ ×　D. $0<0$ ×

强化116 设A,B,C为三个随机事件，且$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$，则$A,B,C$中恰有一个事件发生的概率为（　　）

A. $\frac{3}{4}$.　　B. $\frac{2}{3}$.　　C. $\frac{1}{2}$.　　D. $\frac{5}{12}$.

116.

$P(A\bar{B}\bar{C})=P(A\bar{B}-C)=P(A\bar{B})-P(A\bar{B}C)$

$=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$

$$= P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$$

$$= \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{12} + 0$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$P(\bar{A}B\bar{C}) = P(B) - P(AB) - P(BC) + P(ABC)$$

$$= \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{12} + 0$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$P(\bar{A}\bar{B}C)$$

$$= P(\bar{A}C - B) = P(\bar{A}C) - P(\bar{A}BC)$$

$$= P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + 0$$

$$= \frac{1}{12}$$

$\therefore D$

强化117 假设一批产品中一、二、三等品各占60%、30%、10%，从中随意取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

117.

一等品　$A_1 = 0.6$

二　$A_2 = 0.3$

三　$A_3 = 0.1$

$$P(A_1|\bar{A_3}) = \frac{P(A_1\bar{A_3})}{P(\bar{A_3})} = \frac{P(A_1)-P(A_1A_3)}{1-P(A_3)} = \frac{0.6}{1-0.1} = \frac{2}{3}$$

独立性：$P(AB)=P(A)P(B) \Leftrightarrow \dfrac{P(AB)}{P(B)}=P(A)$

A与B发生无关

互斥 $\not\Leftrightarrow$ 独立

当 $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$ 时

互斥 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 独立

强化118 已知事件 A,B 相互独立，且 $P(\overline{B})=\dfrac{1}{3}$，$P(\overline{A})>0$，则 $P(A\cup B|\overline{A})=($　　$)$.

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{1}{9}$　　D. $\dfrac{2}{9}$

118. $P((A+B)|\bar{A}) = \dfrac{P((A+B)\bar{A})}{P(\bar{A})} = \dfrac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$

$= \dfrac{P(B)-P(A)P(B)}{1-P(A)} = \dfrac{P(B)(1-P(A))}{1-P(A)} = P(B) = \dfrac{2}{3}$

强化119 设随机事件A与B相互独立，A与C相互独立，$BC=\varnothing$，若$P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(AC|AB\cup C)=\dfrac{1}{4}$，则$P(C)=$(　　)

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

119. $P(AC|AB\cup C) = \dfrac{P(AC(AB+C))}{P(AB+C)} = \dfrac{P(ABC+AC)}{P(AB+C)}$.

$P(AC)$

$$= \frac{\quad}{P(AB)+P(C)-P(ABC)}$$

$$= \frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B)+P(C)-P(ABC)}$$

强化120 设两个相互独立的事件A和B都不发生的概率为$\frac{1}{9}$，A发生B不发生的概率与B发生A不发生的概率相等，则$P(A)=$(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

120. $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{9}$

$P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B)$

$P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB)$

$P(A) = P(B)$

$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1-P(A))(1-P(B))$

$(1-P(A))^2 = \frac{1}{9}$

$P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$

强化122 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为0.6和0.5.现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

122.

$$P(A|A\cup B)=\frac{P(A+AB)}{P(A+B)}=\frac{P(A)+P(AB)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$

$$=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)}=\frac{0.6}{0.6+0.5-0.3}=\frac{0.6}{0.8}=\frac{3}{4}$$

强化123 设A,B,C为随机事件，且A与B互不相容，A与C互不相容，B与C相互独立，$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则$P(B\cup C\mid A\cup B\cup C)=$________.

123.

$AB=\varnothing$

$AB = \phi$
$AC = \phi$

$$P(B+C \mid A+B+C) = \frac{P((B+C)(A+B+C))}{P(A+B+C)} = \frac{P(B+C)}{3P(A) - P(BC) + P(ABC)}$$

$$= \frac{P(B) + P(C) - P(B)P(C)}{3P(A) - P(B)P(C)} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{5}{8}$$

排列 $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!} = C_n^m m!$

124.

$$\underline{0} \quad \underbrace{1 \quad 2 \quad 3}$$

$$P(A) = 1 - P(\text{没取到白球})$$

$$= 1 - \frac{C_7^3}{C_{10}^3}$$

$$= 1 - \frac{7\times6\times5}{3\times2} \div \frac{10\times9\times8}{3\times2}$$

$$= 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$$

125.

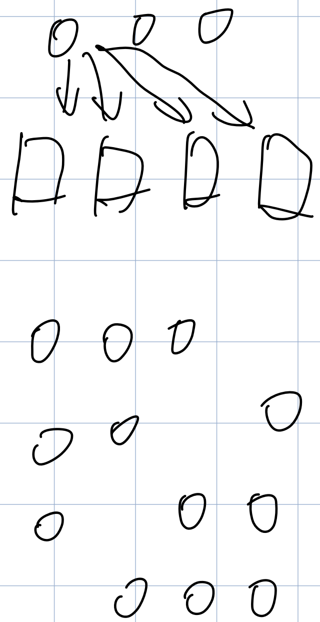
$$P(A) = 1 - P(全红) - P(全白)$$

$$= 1 - \frac{2^5}{4^5} - \frac{2^5}{4^5}$$

$$= \frac{15}{16}$$

126

126.



$N_{\Omega} = 4 \times 4 \times 4 = 64$

$N_A = C_4^3 3! = 24$ 没说相同元素默认不同

$P(A) = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$

127.

11 22 33 44 55

$$N_{\bar{A}} = C_5^1 C_2^1 C_4^3 C_2^1$$

$$N_\Omega = C_{10}^4$$

$$1 - P(\bar{A}) = \frac{10 \times 4 \times 2}{\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2}} = 1 - \frac{8}{21} = \frac{13}{21}$$