线代必背10页纸—考研数学777

公式的总结没有尽头，过于详细或过于简略都不是最佳选择；本篇背诵宝典不是书本中定理概念的堆砌，而是删去过于常用和简单的公式和过于书面严谨的定理表达，真正选择考试的核心精华必记结论，才能成为大家上考场前的必背10页纸。更为详细的题型总结、方法归纳、细致讲解请回归线代专题课讲义。

目 录

一、行列式、伴随、逆的公式

1.行列式	4.穿脱原则
$\lvert kA\rvert = k^n \lvert A\rvert$ $\lvert A^*\rvert = \lvert A\rvert^{n-1}$ $\lvert A^{-1}\rvert = \frac{1}{\lvert A\rvert}$	$(AB)^T = B^T A^T$ $(AB)^* = B^* A^*$ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
2.伴随矩阵	**5.换位思考**
$A^* = \lvert A\rvert A^{-1}$ $AA^* = \lvert A\rvert E$ $(kA)^* = k^{n-1} A^*$ $(A^*)^* = \lvert A\rvert^{n-2} A$	$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ $(A^T)^* = (A^*)^T$
3.逆矩阵	**6.加法拆开**
$A^{-1} = \frac{A^*}{\lvert A\rvert}$ $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$	$(A+B)^T = A^T + B^T$ $(A+B)^* =$ 不能拆开 $(A+B)^{-1} =$ 不能拆开
7.k 家族	
$\lvert kA\rvert = k^n \lvert A\rvert$ $(kA)^T = kA^T$ $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ $(kA)^* = k^{n-1} A^*$	

二、2 阶矩阵的伴随——主对调，副反号，得伴随

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

（注意：主对调 副反号口诀得到的是伴随，不是逆，逆矩阵还需乘 $\frac{1}{|A|}$ ）

三、$\mathbf{a_{ij} = A_{ij}}$ 结论

设 A 是 3 阶非零矩阵，则 $a_{ij} = A_{ij} \Leftrightarrow A^T = A^* \Leftrightarrow A^T A = E\,(A\text{正交}) \Rightarrow |A| = 1$

$$a_{ij} = -A_{ij} \Leftrightarrow A^T = -A^* \Leftrightarrow A^T A = E\,(A\text{正交}) \Rightarrow |A| = -1$$

【余子式】M_{ij}：$|\mathbf{A}|$中去掉第 i 行 第 j 列元素后的 $n-1$ 阶子式

【代数余子式】A_{ij}： $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

四、初等矩阵的逆与行列式

	矩阵	意义	逆	行列式
对调	$\mathbf{E}_{ij}$	交换第 i 行与第 j 行(或交换第 i 列与第 j 列)	$(\mathbf{E}_{ij})^{-1}=\mathbf{E}_{ij}$	$\lvert\mathbf{E}_{i,j}\rvert=-1$
倍乘	$\mathbf{E}_i(k)$	第 i 行(或第 i 列)乘以非零常数 k	$(\mathbf{E}_i(k))^{-1}=\mathbf{E}_i(\frac{1}{k})$	$\lvert\mathbf{E}_i(k)\rvert=k$
倍加	$\mathbf{E}_{ij}(k)$	第 i 行的 k 倍加到第 j 行(或第 j 列的 k 倍加到第 i 列)	$(\mathbf{E}_{ij}(k))^{-1}=\mathbf{E}_{ij}(-k)$	$\lvert\mathbf{E}_{ij}(k)\rvert=1$

注：常见讲义对于 $\mathbf{E}_{ij}(c)$ 的解释有所不同，第 i 行的 k 倍加到第 j 行与第 j 行的 k 倍加到第 i 行均可，只是一个记号，但需记住，当你选定一种记法，就须“从一而终”。

五、初等行变换

初等行变换不改变列向量组的线性关系

初等列变换不改变行向量组的线性关系

初等行变换，A 与 B 的行向量组等价

六、A 可逆

A_{nxn} 可逆

①$|A|\neq 0$

②r(A)=n （A 满秩）

③Ax=0 只有零解

④Ax=β有唯一解

⑤A 的特征值没有 0

⑥A 与单位矩阵等价

⑦A 可仅经过初等行变换化为 E

⑧A 可仅经过初等列变换化为 E

⑨A 可以分解为若干个初等矩阵的乘积

七、矩阵的秩

① r（AB）⩽ min{r（A），r（B）} 越乘越小

② r（A，B）⩾ r（A） 越拼越大

③ r（A±B）⩽ r（A）+r（B） 分开加最大

④ r（A）=r（A^T）=r（AA^T）=r（A^TA） 乘转置不变秩

⑤ 若 AB=0，则 r（A）+r（B）⩽n n 为 A 的列数，B 的行数

⑥ 若 P,Q 可逆，则 r（PAQ）=r（A） 乘可逆阵不变秩

↓

[进阶！]
左乘列满秩，不变秩 r（PA）=r（A） 要求 P 列满秩
右乘行满秩，不变秩 r（AB）=r（A） 要求 B 行满秩

【两条路径】①r（AB）⩽r（A）⩽r（A，B）⩽r（A）+r（B）

②r（A±B）⩽r（A，B）⩽r（A）+r（B）

八、r（A）与 r（A*）

$$
r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n\text{时} \\ 1 & r(A)=n\text{-}1\text{时} \\ 0 & r(A)<n\text{-}1\text{时} \end{cases}
$$

九、秩 1 矩阵　$A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}(\qquad)$

（1）特征值：0，0，…，0，迹

（2）特征向量：迹对应的特征向量是 α （A 的一列）

（3）可以相似对角化条件 ⇔ tr（A）≠0

（4）n 次幂：$A^n=[tr(A)]^{n-1}A$

（5）1 列乘 1 行：抄第一列，看倍数

十、列满秩、行满秩结论

1.$A_{m\times n}$ 列满秩	（1）[秩]	r（A）=n，A 的列向量组线性无关
	（2）[左乘列满秩]	左乘列满秩，不变秩　r(AB)=r(B)
	（3）[左消去律]	若 AB=AC，则 B=C
	（4）[齐次]	AX=0 仅有零解
	（5）[同解]	ABX=0 与 BX=0 同解
	（6）[三秩相等]	$r(B)=r(AB)=r\begin{pmatrix} B \\ AB \end{pmatrix}$
	（7）[行组等价]	B 的行向量组与 AB 的行向量组等价
2.$A_{m\times n}$ 行满秩	（1）[秩]	r（A）=m，A 的行向量组线性无关
	（2）[右乘行满秩]	右乘行满秩，不变秩　r(BA)=r(B)
	（3）[右消去律]	若 BA=CA，则 B=C
	（4）[非齐]	Ax=b 有解　m=r（A）≤r（A，b）≤m
	（4）[同解]	$A^TB^Tx=0$ 与 $B^Tx=0$ 同解

十一、分块矩阵

1.行列式	$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix}=\lvert A\rvert\lvert B\rvert$　（A：m 阶　B：n 阶） $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\lvert A\rvert\lvert B\rvert$
2.转置 **“大转小也转”**	$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^T=(A^T,B^T)$ $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$
3.逆	$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$　记忆：主对角线：不用换序，直接添逆

	$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$　　副对角线：先要换序，再去添逆 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ 同行在左，同列在右，再添负号 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a_3} \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ （a_i 代表数字）
4.秩	$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$=r（A）+r（B） $r\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$=r（A）+r（B） $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$≥r（A）+r（B） $r\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$≥r（A）+r（B） 若 A 可逆，则 $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$=r（A）+r（B） （因为 n 个线性无关的 n 维向量可以表示任何一个 n 维向量）

5.n 次幂	$\begin{pmatrix} A & & & \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ & & & C \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A^n & & & \\ & B^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & C^n \end{pmatrix}$ （注：分块副对角矩阵没有这样的规律）

十二、线性相关性总结

线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为 0 的数，使得 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s=0$ 成立

$\Leftrightarrow$ 至少有 1 个向量，可以由其余向量线性表示

$\Leftrightarrow r(a_1,a_2,\cdots a_s)<s$

$\Leftrightarrow$ 方程组 $Ax=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow (a_1,a_2,\cdots,a_s)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}=0$ 有非零解

线性无关

$\Leftrightarrow$ 当且仅当 k 全为 0 时使得 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s=0$ 成立

$\Leftrightarrow$ 任何 1 个向量，都不可由其余向量线性表示

$\Leftrightarrow r(a_1,a_2,\cdots a_s)=s$

$\Leftrightarrow$ 方程组 $Ax=0$ 仅有零解

$\Leftrightarrow (a_1,a_2,\cdots,a_s)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}=0$ 仅有零解

线性表示

β 可由 a_1,a_2,a_3 线性表示

$\Leftrightarrow \beta=k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3$

$\Leftrightarrow$ 非齐次方程组 $(a_1,a_2,...,a_s)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_s \end{pmatrix}=\beta$ 有解

$\Leftrightarrow$ 非齐次方程组 $\mathrm{Ax}=\beta$ 有解

$\Leftrightarrow r(a_1,a_2,...,a_s)=r(a_1,a_2,...,a_s,\beta)$

若 $r(a_1,a_2,...,a_n)\neq r(a_1,a_2,...,a_n,\beta)\Leftrightarrow Ax=\beta$ 无解 $\Leftrightarrow$ 不能表示

若 $r(a_1,a_2,...,a_n)=r(a_1,a_2,...,a_n,\beta)=n\Leftrightarrow Ax=\beta$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ 唯一表示

若 $r(a_1,a_2,...,a_n)=r(a_1,a_2,...,a_n,\beta)<n\Leftrightarrow Ax=\beta$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow$ 无穷多表示

线性相关性	无关，子集也无关 无关，拉长也无关 无关，加 1 个相关，那么加的能被唯一表示 无关，加 1 个不能被表示，全都无关
	相关，再加几个也相关 相关，缩短也相关
	以少表多，多必相关 个数>维数，一定相关 3 个无关的 3 维向量一定可以表示任意一个三维向量
	若 β 可以被 a_1,a_2,a_3 表示 $\Rightarrow\Rightarrow r(a_1,a_2,a_3,\beta)=r(a_1,a_2,a_3)$

	若 β 不可以被 a_1,a_2,a_3 表示 $\Rightarrow \Rightarrow r\left(a_1,a_2,a_3,\beta\right)=r\left(a_1,a_2,a_3\right)+1$ 若向量组(I)可以由(II)表示 $\Rightarrow r\left(I\right)\le r\left(II\right)$ （谁厉害谁秩大）

十三、AB=0 ，AB=C， AB=E 结论

AB=0

①r(A)+r(B)≤n

②B 的列向量均是 AX=0 的解

③A 有特征值：0；有特征向量：B 的非零列向量

④若 A，B 非零矩阵，A 列相关，B 行相关

AB=C

①AB 的列向量可由 A 的列向量线性表示

②AB 的行向量可由 B 的行向量线性表示

③BA 的列向量可由 B 的列向量线性表示

④BA 的行向量可由 A 的行向量线性表示

⑤若 A 可逆，则 B 的行与 AB 的行等价

⑥若 B 可逆，则 A 的列与 AB 的列等价

⑦ $r(A)=r(A,AB)$

⑧ $r(B)=r\begin{pmatrix} B \\ AB \end{pmatrix}$

⑨若 A 列满秩，则 ABx=0 与 Bx=0 同解

⑩若 B 行满秩，则 $B^TA^Tx=0$ 与 $A^Tx=0$ 同解

AB=E

①A 行满秩，B 列满秩

十四、AB=BA 总结

AB 与 BA

①AB 与 BA 有相同的特征值

A_{mxn}，B_{nxm}，AB 与 BA 的非零特征值相同（重数都一样）

A_{nxn}，B_{nxn}， AB 与 BA 的特征值完全相同（重数也一样）

②AB 与 BA 的迹相同 （无需方阵）

③AB 与 BA 不一定相似，但若 A 或 B 有一个可逆，则 AB~BA

④AB 与 BA 的秩不一定相同

n 阶方阵 A，B 满足 AB=aA+bB（ab≠0），则

①AB=BA

②r（A）=r（B）

③A，B 的特征向量相同

n 阶方阵 AB=BA，A 与 B 有公共的特征向量

十五、方程组解的判定

设 **A** 是 $m\times n$ 矩阵

① 齐次$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}\begin{cases}\text{只有零解}\Leftrightarrow r(\mathbf{A})=n,\\ \text{有非零解}\Leftrightarrow r(\mathbf{A})<n.\end{cases}$

② 非齐次$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\begin{cases}\text{无解}\Leftrightarrow r(\mathbf{A})\neq r(\mathbf{A},\mathbf{b}),\\ \text{有解}\Leftrightarrow r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A},\mathbf{b})\begin{cases}\text{唯一解}\Leftrightarrow r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A},\mathbf{b})=n,\\ \text{无穷多解}\Leftrightarrow r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A},\mathbf{b})<n.\end{cases}\end{cases}$

十六、同解

若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

① 【初等行变换】　A 经过初等行变换变成 B

② 【行向量组等价】　A 的行与 B 的行等价

③ 【三秩相等】　r(A)=r(B)=r$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

④ 【均是解】　Ax=0 的解均是 Bx=0 的解，Bx=0 的解均是 Ax=0 的解

⑤ 【1 解+1 秩】　Ax=0 的解均是 Bx=0 的解，且 r(A)=r(B)

⑥ 【左行右列】　存在可逆矩阵 P，使得 $PA=B$

若 $Ax=\beta$ 与 $Bx=\gamma$ 同解

① 【初等行变换】　$(A\,\vdots\,\beta)$经过初等行变换变成$(B\,\vdots\,\gamma)$

② 【行向量组等价】　$(A\,\vdots\,\beta)$的行与$(B\,\vdots\,\gamma)$的行等价

③ 【三秩相等】　$r(A\,\vdots\,\beta)=r(B\,\vdots\,\gamma)=r\begin{pmatrix}A&\vdots&\beta\\B&\vdots&\gamma\end{pmatrix}$

④ 【同解+公共解】　Ax=0 与 Bx=0 同解且 $Ax=\beta$ 与 $Bx=\gamma$ 有公共解

十七、若 Ax=0 的解均是 Bx=0 的解

①r(A)≥r(B)

②B 的行向量组可由 A 的行向量组表示

③Ax=0 与$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$x=0 同解

④ $r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

十八、同解方程组

①Ax=0 与 $A^TAx=0$ 同解　　　　$A^TA\xrightarrow{行变换}A$

②$A^Tx=0$ 和 $AA^Tx=0$ 也同解　　　　$AA^T\xrightarrow{行变换}A^T$

③若 P 列满秩，则 PBx=0 与 Bx=0 同解

十九、正交矩阵

（1）定义：$AA^T=E$ / $A^TA=E$　（定义）

（2）性质：$A^{-1}=A^T$　（充要）

$|A|$ 只能是±1

$|\lambda|$ 只能是±1

（3）重要：两两正交——任 2 行（列）内积为 0

单位向量——行（列）向量模长为 1

二十、反对称矩阵　$A^T=-A$

(1) $a_{ij}=-a_{ji}$

(2)主对角线元素都是 0

(3)奇数阶反对称矩阵 $|A|$ =0

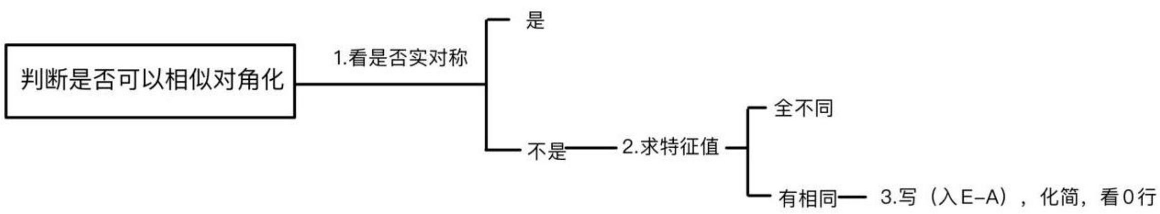
二十一、$A^{-1}, A^T, A^*, (A+kE)$ 的特征值与特征向量

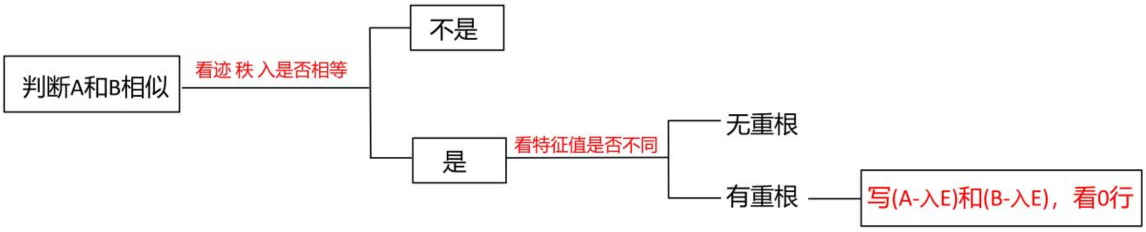
A	A^T	A^{-1}	A^*	A^n	A+kE	f（A）	$P^{-1}AP$
λ	λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ^n	λ+k	f（λ）	λ
α	/	α	α	α	α	α	$P^{-1}\alpha$

若 A 的特征向量是 α，$B=P^{-1}AP$，则 B 的特征向量是___ $P^{-1}\alpha$ _

若 B 的特征向量是 α，$A=PBP^{-1}$，则 A 的特征向量是____ Pα __

二十二、判断 A 是否可以相似对角化/判断 A、B 相似





二十三、普通矩阵与实对称矩阵

		普通矩阵	实对称矩阵
1	【特征向量】	普通矩阵不同特征值对应的特征向量线性无关	实对称矩阵不同特征值对应的特征向量相互正交
2	【对角化】	普通矩阵不一定可以相似对角化	实对称矩阵一定可以相似对角化
3	【对角化】	普通矩阵一般用可逆矩阵 P 对角化（若可相似对角化）	实对称矩阵可以用正交矩阵 Q 对角化
4	【特征值】	普通矩阵的特征值可能是虚数	实对称矩阵的特征值一定是实数
5	【设问方式】	求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$（用可逆矩阵相似对角化）	求正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$（用正交矩阵相似对角化）
6	【求解步骤】	【求可逆矩阵 P 步骤】 ①求特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ ②求特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ③拼起来 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$	【求正交矩阵 Q 步骤】 ①求特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ ②求特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ③正交化 ④单位化 η_1,η_2,η_3 ⑤拼起来 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$

二十四、施密特正交化

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,\\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2\end{cases}$$

二十五、相似 合同 等价

1.相似：A,B 均为 n 阶方阵，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$

2.合同：A,B 均为 n 阶方阵，存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=B$

3.等价：$\mathbf{A},\mathbf{B}$ 是两个同型矩阵，若 $\mathbf{A}$ 经过有限次初等变换化为 $\mathbf{B}$，称矩阵 $\mathbf{A}$ 与矩阵 $\mathbf{B}$ 等价

等价的充要条件：①同型秩相等

②$\mathbf{A}$ 经过有限次初等变换化为 $\mathbf{B}$

③存在可逆矩阵 P，Q，使得 $PAQ=B$

相似一定等价
合同一定等价

普通矩阵相似与合同没关系
实对称矩阵相似一定合同

实对称矩阵相似一定合同
实对称矩阵只能与实对称矩阵合同
实对称矩阵相似的充要条件：特征值相同
实对称矩阵合同的充要条件：正负惯性指数相同（特征值正负）

二十六、二次型 keywords

可逆的线性变换==合同==特征值正负个数相同==有相同的规范形
正交变换==合同且相似==特征值相同==有相同的标准形

求标准形==法①正交变换法—标准形的系数是特征值
法②配方法 —标准形的系数往往不是特征值

求规范形/求正负惯性指数==法①求特征值，看正负
法②配方法，看平方项前正负

告知标准形（正交变换）===告诉特征值
告知标准形（配方法）== ===告诉特征值正负
告知规范形/正负惯性指数===告诉特征值正负

二次型最值：最大值=$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\cdot\lambda_{\max}$　　　　最小值=$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\cdot\lambda_{\min}$

二十七、二次型设问

相似对角化：　　存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$
正交相似对角化：存在正交矩阵 P，使得 $P^{T}AP=\Lambda$
合同对角化：　　存在可逆矩阵 P，使得 $P^{T}AP=\Lambda$

二十八、正定二次型

二次型 x^TAx 正定 $\Leftrightarrow$ A 的

（1）$\Leftrightarrow$ 对任意 $\boldsymbol{x}\neq 0$. 都有 $x^TAx>0$
（2）$\Leftrightarrow$ 特征值全为正
（3）$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p=n=r(A)$
（4）$\Leftrightarrow$ 与单位矩阵 E 合同，$P^{\mathrm{T}}AP=E$
（5）$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P，使得 $A=P^TP$.
（6）$\Leftrightarrow$ 顺序主子式全大于 0
（7）$\Rightarrow$ 主对角线元素 $a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$. （必要条件）

二十九、二次型的几何应用(数一)

特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 正负	$f(x_1,x_2,x_3)=1$
3 正	椭球面
2 正 1 负	单叶双曲面
1 正 2 负	双叶双曲面
2 正 1 零	椭圆柱面
1 正 1 负 1 零	双曲柱面