Algebra

Determinant

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-4) = 7$$

$D=0$时 表示 1.有无穷多解 2.无解

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12-(-2) = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-24 = -21$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3$$

逆序对

1. $t(32514) = 2+1+2 = 5$ 奇排列

   $t(23514) =$ 偶排列 对换两数改变奇偶

2. $t(n, n-1, \cdots 1) = \frac{n(n-1)}{2}$

3. 判断 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 及 $a_{14}a_{23}a_{41}a_{32}$ 的符号

$t(1\,3\,2\,4)=1$ 负

$t(4\,3\,2\,1)=\frac{4\times 3}{2}=6$ 正

D 性质

1. 行列地位等同，$|D|=|D^T|$

2. 交换两行/列，反号

3. 可提取一行/列公因子到行列式外

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4. 可拆

5. 倍加

余子式，代数余子式

$tr(A)$ 主对角元之和

设3阶D某行为a，$(a\neq 0)$，$D=1$，求D中所有代数余子式和

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ & & \\ & & \end{vmatrix}=1 \qquad 求\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & \\ & & \end{vmatrix}=\frac{1}{a}$$

$$A_{21}+A_{22}+A_{23}\begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & 1 & 1 \\ & & \end{vmatrix}=0$$

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}\begin{vmatrix} a & a & a \\ & & \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$\therefore$ 所有代数余子式之和为 $\frac{1}{a}$

D $\begin{cases} 1.\ n!\ 项来自不同行列的代数和（每项正负由逆序对 \\ 2.\ 按某行/列的元素×该元素对应的 A_{ij} 的和 \quad 决定） \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 18 & -6 & 0 \\ 21 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (3+2+6) = 11$$

1. $AB \neq BA$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

2. $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ 或 $B = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

3. $AB = AC$ 且 $A \neq 0 \not\Rightarrow B = C$

矩阵初等变换 $A \xrightarrow{r_i \times 2} B$

1、$r_i \longleftrightarrow r_j$ $\quad c_i \longleftrightarrow c_j$ 对换

2、$k r_i$ $\quad k c_i$ $\quad (k \neq 0)$ 倍乘

3、$r_j + k r_i$ $\quad c_j + k c_i$ 倍加

初等矩阵

Definition：对E做一次初等变换

$\begin{matrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$ 不是初等阵

e.g. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$

A为3阶矩阵，将A的第2列加到第1列得到矩阵B，再交换交换第2行与第3行得到E，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

则 $A=$

解：

$$P_2AP_1=E$$

$$P_2^{-1}P_2AP_1P_1^{-1}=P_2^{-1}EP_1^{-1}$$

$$A=P_2^{-1}P_1^{-1}$$

$\because P_2^{-1}$ 为行交换

$\therefore P_2^{-1}=P_2$

$\therefore A=P_2P_1^{-1}$

线性方程组

1. 无解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_2]{r_2\div 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad r(A) < r(A,b)$$

2. 有唯一解

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -1 & -5 & 4 & 10 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2-3r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3+2r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{5r_4+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4\times\frac{1}{2}+r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$r(A,b) = r(A) = 3 = n$$

3. 有无穷多解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\div(-1)]{r_3-\frac{3}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$r(A,b)=r(A)=2<3$$

有效方程个数　　未知数 n

Rank（秩）

1. 非0子式最高阶数
2. 有效方程数
3. 行阶梯形矩阵非0行行数
4. 独立向量个数

e.g. 求 $r(A)$, $r(B)$, $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}2&3\\3&-5\end{vmatrix}=-10-9=-19$$

∴ 有2阶非0子式

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{vmatrix}=3-40+42-(36-35+4)$$

$$=0$$

∴ 无3阶非0子式

∴ $r(A)=2$

秩的公式

转置不改变$r(A)$

1、$r(A)=r(A^T)=r(AA^T)=r(A'A)$

2、$r(A)$越乘越小，越拼越大，分开加最大

$$r(AB)\le\left\{\begin{array}{c}r(A)\\ \text{or}\\ r(B)\end{array}\right.\le\left\{\begin{array}{c}r(A,B)\\ \text{or}\\ r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\end{array}\right.\le \begin{array}{c}r(A)+r(B)\\ \rotatebox{90}{$\le$}\\ r(A+B)\end{array}$$

3、$A_{m\times n}\times B_{n\times l}=0$，$r(A)+r(B)\le n$

4、初等变换不改变$r(A)$

5、$0\le r(A_{m\times n})\le \min(m,n)$

向量组的线性表示

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$, 证 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

并写出表达式

解: 可被线性表示意思是方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 有解

方程组有解 $\Longleftrightarrow$ 系数矩阵的秩 = 增广矩阵 即 $r(A)=r(A,b)$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-r_2}]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&-3&6&3\\0&2&-4&-2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3\Leftrightarrow r_4]{r_3+3r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&2&-4&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\therefore \begin{array}{l}x_1+3x_3=2\\x_2-2x_3=-1\end{array}$$

$$\begin{cases}x_1=2-3x_3\\x_2=-1+2x_3\\x_3=x_3\end{cases}$$, 令 x_3 为任意常数 k $\qquad X=\begin{pmatrix}-3k+2\\2k-1\\k\end{pmatrix}$

$\beta=(-3k+2)\alpha_1+(2k-1)\alpha_2+k\alpha_3$

e.g. $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix}$, $\beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\beta_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$, 证 $\alpha_1\alpha_2$ 与 $\beta_1\beta_2\beta_3$ 等价

两向量组等价, 即可互相线性表示 $\Longleftrightarrow r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$

若 I 能由 II 线性表示, $r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$

则 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II},\mathrm{I})=r(\mathrm{II})$

$$\left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-r_1 \\ r_4+r_1}]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 = r_2 \div 2}]{r_3+\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$\therefore$ 等价

向量组相关无关性

给定向量组: $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \cdots \alpha_m$,

若∃不全为0的数 $k_1\ k_2\ k_3 \cdots k_m$,

使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_m\alpha_m=0$

则为线性相关

也就是齐次线性方程组仅有0解

则 $r(A)=r(A,b)<n$

给定向量组: $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \cdots \alpha_m$,

当且仅当 $k_1=k_2=k_3=\cdots k_m=0$

使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_m\alpha_m=0$

则为线性无关

也就是齐次线性方程组仅有0解

即 $r(A)=r(A,b)=n$

e.g. $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$, 试讨论 α_1,α_2 及 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性相关性

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\div 2]{r_3-\frac{5}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=2<3$ (向量个数)

$\therefore$ $\exists$ 多余 vector

$\therefore$ 线性相关

e.g. 已知向量组 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性无关, $b_1=\alpha_1+\alpha_2$, $b_2=\alpha_2+\alpha_3$, $b_3=\alpha_3+\alpha_1$, 证 $b_1b_2b_3$ 线性无关

解: 设 $\exists$ $x_1x_2x_3$ 使 $x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$

$$x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+x_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$$

$(x_1+x_3)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3=0$

$$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$$

法1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$D_2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$\therefore x_1=x_2=x_3=0$

法2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$$

$\therefore r(A)=r(A,b)=n$

又∵齐次

∴仅有0解

两个vector内积 = 外积的迹(主对角元

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow |A|$满秩$\Leftrightarrow A$可逆

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

反交换

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ (代数余子式 $= (-1)^{i+j}$ 余子式)

M_{ij} 为划去 i 行 j 列的 D

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & & & & \vdots \\ A_{13} & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

二阶 A^*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

则 $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

主对换，副反号

若 $P^{-1}AP=\Lambda$

则A可对角化

$P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, 若 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$, 求 A^n

解: $PP^{-1}APP^{-1}=P\Lambda P^{-1}$

$$A=P\Lambda P^{-1}$$

$$A^n=P\Lambda \underbrace{P^{-1}P}\Lambda \underbrace{P^{-1}\cdots P}\Lambda P^{-1}$$

$$=P\Lambda^n P^{-1}$$

$$P^{-1}=\frac{P^*}{|P|}=\frac{\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}}{-1-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&3^n\\1&-3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1-3^n&-1+3^n\\-1+3^n&-1-3^n\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n&1-3^n\\1-3^n&1+3^n\end{pmatrix}$$

特征值与特征向量

$Ax=\lambda x\ (x\neq 0)$　A为系数矩阵　x为列向量 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$Ax=\lambda Ex$

$Ax-\lambda Ex=0$

$(A-\lambda E)x=0$ 非齐次方程

又∵ $x\neq 0$ ∴有无穷多解

∴ $A-\lambda E$ 不满秩

∴ $|A-\lambda E|=0$ ⟹ 得出特征值 $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$

$$|A-\lambda E|=0 \begin{cases} \lambda_1 \longrightarrow (A-\lambda_1 E)x=0 \longrightarrow \xi_1 \\ \lambda_2 \longrightarrow (A-\lambda_2 E)x=0 \longrightarrow \xi_2 \\ \lambda_3 \longrightarrow (A-\lambda_3 E)x=0 \longrightarrow \xi_3 \end{cases}$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

--对应

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

e.g. 求Matrix $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量

1. 求特征值：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=0$　$\lambda_1=2$　$\lambda_2=4$

2. 求特征向量：

当 $\lambda_1=2$

$(A-2E)x=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix} x_1-x_2=0 \\ x_2=k_1 \end{matrix}\Rightarrow x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_1 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_2=4$

$(A-4E)x=0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1+x_2=0 \\ x_2=k_2 \end{matrix} \Rightarrow x=\begin{pmatrix} -k_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ A的特征值为 2, 4

$k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 A 对应 $\lambda=2$ 时的特征向量

$k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ~

3、相似对角化

$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Lambda=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\therefore P^{-1}AP=\Lambda$

3阶 A的 λ 为 2, 3, λ，若 $|2A|=-48$，求 λ

$|2A|=2^3|A|=8\times2\times3\lambda=-48$

$\therefore \lambda=-1$

矩阵	A	$aA+bE$	A^n	A^{-1}	A^*	A^T
特征值	λ	$\lambda a+b$	λ^n	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ
特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	—

e.g. 3阶 Matrix A，特征值为 1,2,2，E为阶单位阵，求 $|4A^{-1}-E|$

A的特征值：1, 2, 2

A^{-1}的特征值：$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$4A^{-1}$：4, 2, 2

$4A^{-1}-1$：3, 1, 1

$\therefore |4A^{-1}-E| = 3\times1\times1 = 3$

e.g. 设3阶 Matrix 特征值为 1, −1, 2，求 $A^*+3A-2E$ 特征值

A：1, −1, 2

A^*：$|A|, -|A|, \frac{1}{2}|A|$

$3A$：3, −3, 6

$-2E$：−2, −2, −2

$\because |A| = 1\times(-1)\times2 = -2$

$A^*+3A-2E$：$-2+3-2,\ 2-3-2,\ -1+6-2$

$-1 \quad -3 \quad 3$

e.g. 3阶矩阵特征值为 0, -1, 2, 求 $A^*+3A-2E$ 的特征值

$\varphi(A)=A^*+3A-2E \qquad \varphi(\lambda)=\frac{|A|}{\lambda}+3\lambda-2$

$\varphi(0)=\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1}-2=-4$

$\varphi(-1)=\frac{0}{-1}-3-2=-5$

$\varphi(2)=6-2=4$

相似 definition

AB为n阶矩阵, 若∃可逆阵P

使 $P^{-1}AP=B$, 则A与B相似

当B为Λ时, 则相似对角化

properties: 若相似

$$\begin{cases} tr(A)=tr(B) \\ |A|=|B| \\ r(A)=r(B) \\ \lambda_A=\lambda_B \\ |A-\lambda E|=|B-\lambda E| \end{cases}$$

e.g. $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y

解:

$$\begin{cases} tr(A)=tr(B) \\ |A|=|B| \end{cases} \quad \begin{cases} x-4=1+y \\ -2\times(x-2)\times(-2)=-2y \end{cases} \quad \begin{cases} x-4=1+y \\ 4x-8=-2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$$

对角化 Definition

AB为n阶矩阵，若∃可逆阵 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3\cdots,\xi_n)$

使 $P^{-1}AP=\Lambda$，则A可相似对角化

A可相似对角化 $\Longleftrightarrow$ A有n个线性无关特征向量

e.g. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$

的基础解系与通解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \\ 0 & -14 & 10 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4$

$x_2 = \frac{5}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4$

$x_3 = x_3$

$x_4 = x_4$

$$X=\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} k_1 + \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} k_2$$

$k_1\ k_2 \in R$

向量 vector

1、内积（数量积）（点乘）

$$(x,y) = x \cdot y = |x||y|\cos\theta$$

$$(x,y) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

2、外积（向量积）（叉乘）

正交（垂直）

$(x,y) = x \cdot y = 0$ 点乘为0

施密特正交化：

对于$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$，令

内积

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \\ \beta_3 = \alpha_3 - (\alpha_3, \beta_1)\beta \end{cases}$$

1 $\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[illegible]}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_2$

......

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A)=n \Leftrightarrow \exists A^{-1} \Leftrightarrow A$的$\lambda \neq 0$

满秩　　可逆　　A的特征值全$\neq 0$

$\Leftrightarrow AX=0$只有0解$\Leftrightarrow A$的行/列向量组线性无关

$AB=0$ $(A_{m\times n}, B_{n\times s})$，则

1、$r(A)+r(B)\leq n$　n为A的column

2、B的每一列β_i都是线性方程组$AX=0$的解

3、B的列与A的行两两正交

e.g. 二次型$f=x^2-3z^2-4xy+yz$，写出矩阵表达

$f = x^2 - 3z^2 - 4xy + yz$

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ x & 1 & -2 & 0 \\ y & -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ z & 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{array}$$

$\therefore f(x,y,z) = (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

e.g. 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的秩

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 0 & -1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 - 1 + (0+0+0) = -2 \neq 0$

$\therefore r(A) = 3$

标准二次型

$f(x_1, x_2, x_3 \cdots x_n) = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_3x^3 + \cdots + k_nx_n^2$ (不含交叉项)

规范二次型

$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$ ($d = \{0, 1, -1\}$)