Algebra

Determinant

$$\begin{cases} 3x-2y=12 \\ 2x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-4) = 7$$

$D=0$时 表示 1.有无穷多解 2.无解

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12-(-2) = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-24 = -21$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3$$

逆序对

1. $t(3\ 2\ 5\ 1\ 4) = 2+1+2 = 5$ 奇排列

   $t(2\ 3\ 5\ 1\ 4) =$ 偶 排列 对换两数改变奇偶

2. $t(n, n-1, \cdots 1) = \frac{n(n-1)}{2}$

3. 判断 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 及 $a_{14}a_{23}a_{41}a_{32}$ 的符号

$t(1324)=1$ 负

$t(4321)=\frac{4\times3}{2}=6$ 正

D 性质

1. 行列地位等同，$|D|=|D^T|$

2. 交换两行/列，反号

3. 可提取一行/列公因子到行列式外

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4. 可拆

5. 倍加

余子式，代数余子式

设3阶D某行为a,(a≠0), D=1, 求D中所有代数余子式和

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ & & \\ & & \end{vmatrix} = 1 \qquad 求 \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{11}+A_{12}+A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & \\ & & \end{vmatrix} = \frac{1}{a}$$

$$A_{21}+A_{22}+A_{23} \begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & 1 & 1 \\ & & \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31}+A_{32}+A_{33} \begin{vmatrix} a & a & a \\ & & \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

∴ 所有代数余子式之和为 $\frac{1}{a}$

D
1. n!项来自不同行列的代数和(每项符号由逆序对决定)
2. 按某行/列的元素×该元素对应的A_{ij}的和

左行右列

Rank (秩)

1. 非0子式最高阶数
2. 有效方程数
3. 行阶梯形矩阵非0行行数
4. 独立向量个数

e.g. 求 $r(A)$, $r(B)$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10-9 = -19$$

∴ 有2阶非0子式

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 3-40+42-(36-35+4)$$

$$=0$$

∴ 无3阶非0子式

∴ $r(A)=2$

秩的公式

转置不改变 $r(A)$

1、$r(A) = r(A^T) = r(AA^T) = r(A^TA)$

2、$r(A)$ 越乘越小，越拼越大，分开加最大

$$r(AB) \le \left\{\begin{matrix} r(A) \\ \text{or} \\ r(B) \end{matrix}\right. \le \left\{\begin{matrix} r(A,B) \\ \text{or} \\ r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \end{matrix}\right. \le \begin{matrix} r(A)+r(B) \\ \text{\rotatebox{90}{$\le$}} \\ r(A+B) \end{matrix}$$

3、$A_{m\times n} \times B_{n\times l} = 0$，$r(A)+r(B) \le n$

4、初等变换不改变 $r(A)$

5、$0 \le r(A_{m\times n}) \le \min(m,n)$