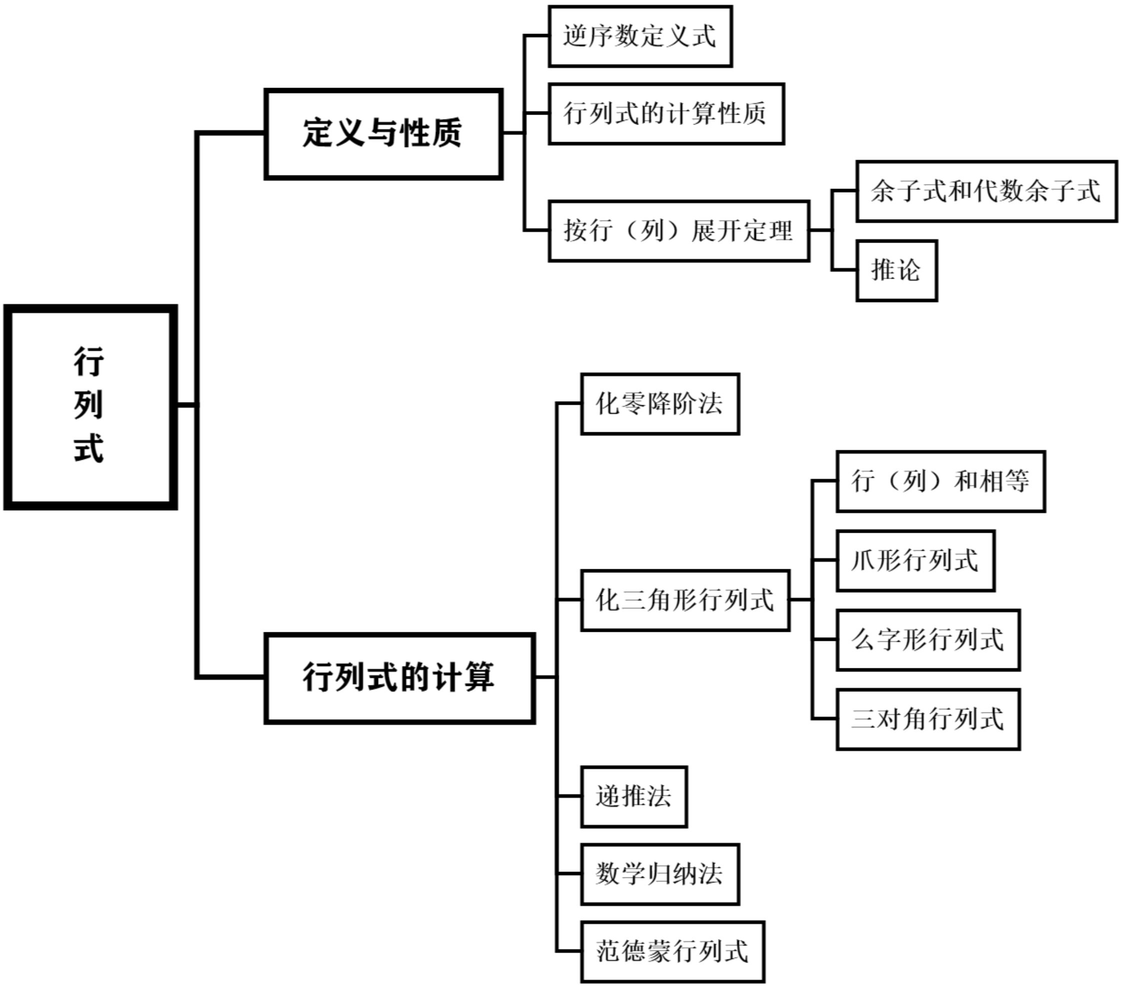
目录

第一章 行列式

知识图解



考试要求

1．了解行列式的概念，掌握行列式的性质.
2．会应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式.

知识讲解

一、排列和逆序数

1. 排列：将 n 个不同元素按一定顺序排成一列，叫做这 n 个元素的全排列，简称排列. 比如 354216 就是这 6 个元素的一个排列.

注：不同的 n 元排列共有 $n!$ 个.

2. 逆序与逆序数： n 级排列 $j_1...j_n$ 中，若一对数 $j_s j_t$，小数排在大数后面，即 $j_s > j_t$，则 $j_s j_t$ 构成了一个**逆序**. 一个排列中逆序的总和叫做这个排列的**逆序数**，记为 $\tau(j_1...j_n)$.

逆序数的计算方法：数出每个数的逆序个数,所有数的逆序个数求和就是排列逆序数. 例如，求 436512 的逆序数，$\overset{3\,2\,3\,2\,0\,0}{436512}$，$\tau\left(436512\right)=3+2+3+2+0+0=10.$

3. 奇排列和偶排列：逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列为**奇排列.**

【例 1.1】 求排列 $n\left(n-1\right)\cdots 321$ 的逆序数

二、行列式的概念

1. 行列式的形式和意义

1）形式：将 n^2 个数排成一个 n 行 n 列的表格，两边界以竖线，就成为一个 $\boldsymbol{n}$ **阶行列式**:

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $D_n=\det\left(a_{ij}\right)$.

2）意义：行列式是一个算式，即把这 n^2 个元素按一定法则运算，得到的数值称为这个行列式的值.

2. 行列式的定义（完全展开式）

1）一阶行列式的计算公式：

$$D_1=\left|a_{11}\right|=a_{11}$$

2）二阶行列式的计算公式：

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

3）三阶行列式的计算公式：

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

【例 1.2】 $\begin{vmatrix} j & m & w \\ m & w & j \\ w & j & m \end{vmatrix}=$（　　　）

（A）$jmw-j^3-m^3-w^3$　　　　（B）$j^3+m^3+w^3-jmw$

（C）$3jmw-j^3-m^3-w^3$　　　　（D）$j^3+m^3+w^3-3jmw$

4）n 阶行列式完全展开式（逆序数定义）：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

称此式为 n 阶行列式的**完全展开式**. 其值是所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，各项正负号由列标对应的排列 $j_1,j_2\cdots j_n$ 的逆序数决定. 当 $j_1,j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项取正号，当 $j_1,j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项取负号.

注：

1）对角线法则仅适用于二阶行列式和三阶行列式.

2）用完全展开式求行列式通常计算量很大.只在有行列式大量元素为 0，只有少数项不为 0 时，或在分析线性因子的特定问题中，才考虑使用定义法. 例如，由行列式定义易得：

a)上、下三角行列式的值：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

b)次上、下三角行列式的值：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1}a_{(n-1)2}\cdots a_{1n}.$$

【例 1.3】 写出 $f(x)$ 中（I） x^3 的系数（II）常数项.

$$f(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x & 3 \\ x & -x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3x \end{vmatrix}$$

三、行列式的性质

性质 1 行列式的行与列(按原顺序)互换，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注：互换后的行列式称为**行列式的转置**.

性质 2 行列式的两行（列）互换，行列式的值反号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 如果行列式中有两行（列）完全相同，则行列式的值为零.

性质 3 行列式的某行(列)每个元素都乘常数 k，则等于用 k 乘此行列式的值.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1) 若行列式中某行（列）元素全为零，则行列式的值为零;

2) 若行列式中某行（列）有公因子 k ，则可将 k 提到行列式外；

3) 若行列式中两行（列）对应元素成比例，其值为零.

性质 4 如果行列式某行(列)元素都写成两数之和，则该行列式可以写成两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例：二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+x & b+y \\ z & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ z & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$$

性质 5 将行列式的某行（列）的每个元素都乘常数 k ，再加到另一行（列）的对应元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j + kr_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (i \neq j)$$

【例 1.4】 设$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=M\neq 0$，则$\begin{vmatrix} 3a_1 & 4a_1-b_1 & -c_1 \\ 3a_2 & 4a_2-b_2 & -c_2 \\ 3a_3 & 4a_3-b_3 & -c_3 \end{vmatrix}=$______.

(A) $-3M$　　(B) $3M$　　(C) $12M$　　(D) $-12M$

结论（拉普拉斯公式）：设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$分别为$m$与$n$阶行列式，则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,\qquad \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

【例 1.5】 计算行列式$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$.

四、行列式按行（列）展开

1. 余子式和代数余子式

1）余子式M_{ij}：在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行第j列划去后，由剩余的元素按原位置顺序所构成的$n-1$阶行列式，称为元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}.

2）**代数余子式**A_{ij}： $(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素a_{ij}的代数余子式，记为A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

注：

1. 余子式和代数余子式都是**行列式**；

2. 余子式和代数余子式值与a_{ij}的具体取值无关，只与a_{ij}的位置有关.

【例 1.6】 计算$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$的余子式$M_{12}$？代数余子式$A_{12}$？

2. 行列式按行（列）展开定理

定理：行列式的值等于其任一行(列)的各元素与其对应代数余子式的乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,3\cdots n),$$

$$\text{或} D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+...+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,3\cdots n)$$

五、行列式按行（列）展开定理的推论

【例 1.7】 设行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，记$A_{ij}$为元素$a_{ij}$的代数余子式，证明

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0.$$

1. 行列式按行（列）展开定理的推论：

设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 任一行(列)各元素与**另一行(或列)**对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+...+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$$

$$或\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+...+a_{ni}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$$

这是因为，当 $i\neq j$ 时，

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\left|\begin{array}{cccc} & \cdots & \cdots & \\ \vdots & * & * & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & * & * & \vdots \\ & \cdots & \cdots & \end{array}\right|\begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}=0$$

更一般地，

$$x_1A_{i1}+x_2A_{i2}+\cdots+x_nA_{in}=\left|\begin{array}{cccc} & * & * & \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ & * & * & \end{array}\right|\begin{array}{l} \\ i\text{行} \\ \\ \end{array}$$

【例 1.8】 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$， 求：

（1）第四行各元素余子式之和；

（2）$2A_{12}+A_{22}-A_{42}$.

六、计算行列式的常见题型与方法

1. 化零降阶法（坚守原则："打洞"、"降阶"）

方法：先利用性质将行列式的某一行或某一列化到只有一个元素不为0，再用行列式展开定理化为低一阶的行列式（化零降阶法是计算行列式的主要方法）.

【例 1.9】 计算下列行列式：

（1）$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

（2）$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

2. 化三角形行列式

类型 1 各行（列）元素之和相等的行列式（各行全部加到第一行（列））

【例 1.10】 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$.

类型 2 爪型行列式（各行倍加到第一行，“消去平爪”）

【例 1.11】 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&a&0&0\\1&0&b&0\\1&0&0&c\end{vmatrix}(abc\neq 0)$

类型 3 三对角行列式（逐行相减，化三角行列式；递推法）

【例 1.12】 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{vmatrix}$

3. 递推法（强化）

4. 数学归纳法（见【例 1.13】）

数学归纳法是证明（计算）行列式常用的方法.首先建立递推关系，当递推关系仅涉及相邻两阶行列式时,采用第一归纳法;当递推关系涉及相邻三阶行列式时,采用第二归纳法.

1）第一数学归纳法：

①设有一个与自然数 n 有关的命题，若当 $n=1$ 时命题成立

②假设当 $n=k$ 时命题成立，可以推出当 $n=k+1$ 时命题成立

那么命题对一切自然数 n 都成立.

2）第二数学归纳法：

设有一个与自然数 n 有关的命题，若

①当 $n=1$ 和 $n=2$ 时命题成立

②假设对 $n<k$ 的一切自然数都成立，则 $n=k$ 时命题也成立

那么命题对一切自然数 n 都成立

5. 范德蒙行列式

定义：形如

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}\left(x_j-x_i\right)$$

的行列式称为范德蒙行列式.

范德蒙行列式的特点：

1）第一行全为 1.

2） 每列元素 $1,x_i,x_i^2,\cdots,x_i^{n-1}$ 按 x_i 的升幂排列，构成一个以 x_i 为公比的等比数列.

【例 1.13】 证明：范德蒙行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}\left(x_j-x_i\right)$

【证明】用数学归纳法

(1)　当 $n=2$ 时 $D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{1\le i<j\le 2}(x_j-x_i)$,

(2)　设 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立， 则

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}\xlongequal[]{\substack{r_n-x_1r_{n-1}\\ r_{n-1}-x_1r_{n-2}\\ \vdots\\ r_2-x_1r_1}}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_{n-1}-x_1 & x_n-x_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & x_2^{n-3}(x_2-x_1) & \cdots & x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1}-x_1) & x_n^{n-3}(x_n-x_1)\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_1) & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

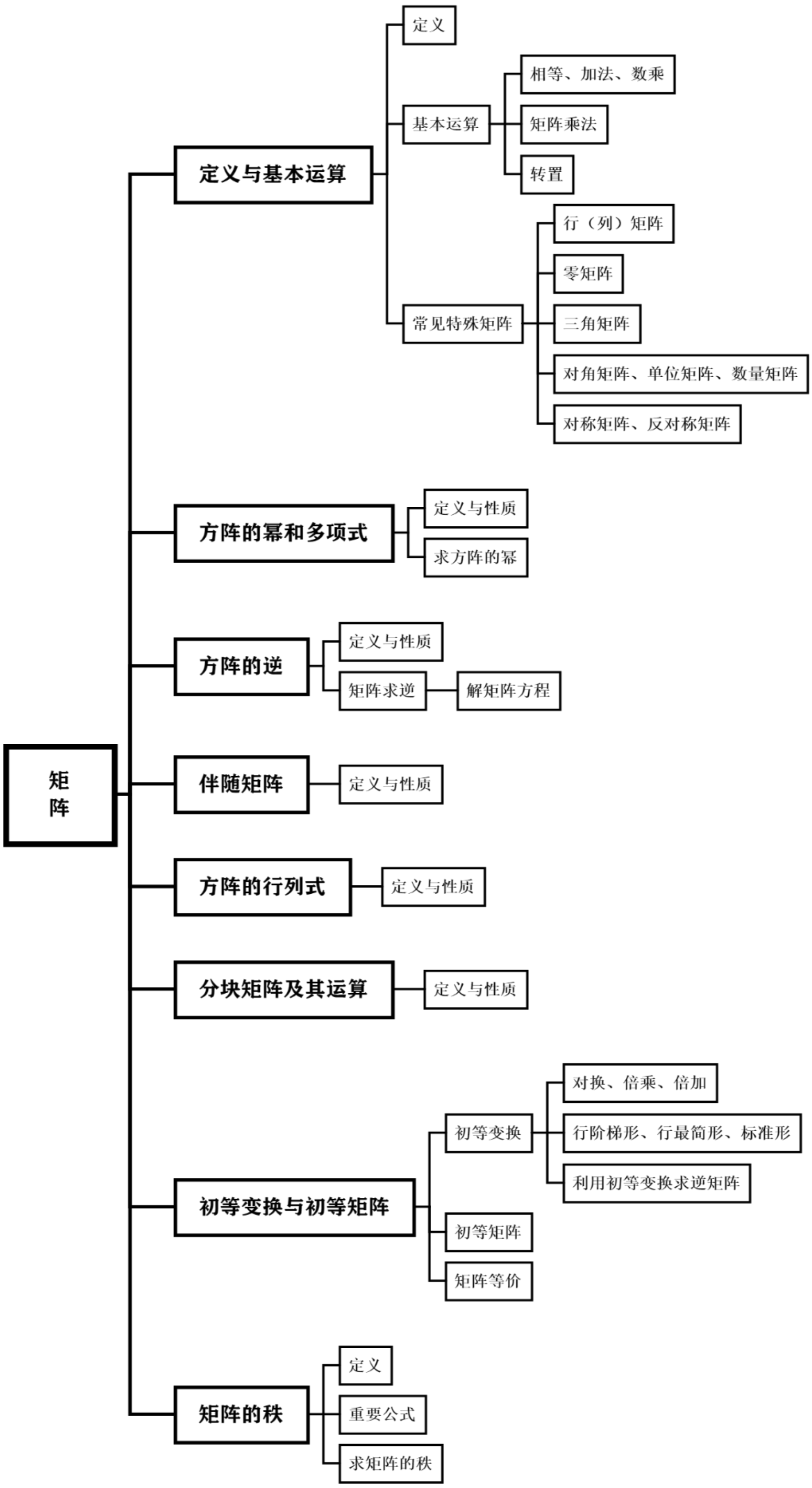
$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\le i<j\le n}(x_j-x_i)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

【例 1.14】 计算行列式$D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

思考：将行列式最后一行换到第一行，其他行顺序不变，该如何操作？此时新行列式的值与原行列式的值有何关系？

第二章 矩阵

知识图解


矩阵
定义与基本运算
定义
基本运算
相等、加法、数乘
矩阵乘法
转置
常见特殊矩阵
行（列）矩阵
零矩阵
三角矩阵
对角矩阵、单位矩阵、数量矩阵
对称矩阵、反对称矩阵
方阵的幂和多项式
定义与性质
求方阵的幂
方阵的逆
定义与性质
矩阵求逆
解矩阵方程
伴随矩阵
定义与性质
方阵的行列式
定义与性质
分块矩阵及其运算
定义与性质
初等变换与初等矩阵
初等变换
对换、倍乘、倍加
行阶梯形、行最简形、标准形
利用初等变换求逆矩阵
初等矩阵
矩阵等价
矩阵的秩
定义
重要公式
求矩阵的秩

考试要求

1. 理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质.
2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质.
3. 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵.
4. 理解矩阵初等变换的概念，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.
5. 了解分块矩阵及其运算.

知识讲解

一、矩阵的概念

1. 定义：

1）矩阵 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，记作 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}_n$ 为 n 阶矩阵(或 n 阶方阵). $|\boldsymbol{A}|$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.

2）元素 这 $m\times n$ 个数 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素，简称为元. 以数 a_{ij} 为元素的矩阵可简记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，其中横排为行，竖排为列.

注：特别地，1×1 矩阵 (a_{11}) 是一个数，可以直接记为 a_{11}.

3）实矩阵 元素是实数的矩阵称为实矩阵（考研仅考察实矩阵）

2. 常见矩阵关系：

1）同型矩阵：行数、列数都相同的矩阵称为同型矩阵.

2）矩阵相等：如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 的各元素也对应相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

3. 矩阵与行列式的区别：

1）矩阵是一个数表，行数和列数可以不相等；行列式是一个算式，行数和列数必须相等；

2）两个矩阵相等是指两个矩阵同型且对应元素完全相同；两个行列式的值相等不一定有对应元素相等，甚至阶数也不一定相等.

二、矩阵的运算

1. 矩阵的线性运算

1）矩阵的加法：

■ **矩阵加法定义：**设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，规定

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注：只有同型矩阵才能相加.

■ **矩阵的加法满足运算律：**

① 交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$； ② 结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

③ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$； ④ $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

2）矩阵的数量乘法（数乘）

■ **矩阵数乘定义** 设 k 是任意常数，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，将 k 乘到矩阵的每个 $\boldsymbol{A}$ 元素上，即

$$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

■ **矩阵的数乘满足运算律**

① 加乘分配律: $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$，$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

② 数乘结合律：$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$

③ $c\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\Leftrightarrow c=0$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

2. 矩阵的乘法

1）定义

设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 和 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$，则

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

即矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 第 i 行的 n 个元素与 $\boldsymbol{B}$ 第 j 列对应的 n 个元素分别相乘的乘积之和，有

$$i\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ & \vdots & \\ \vdots & b_{nj} & \vdots \end{pmatrix}_{n\times s} \\ j \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{m\times s} \\ j \end{array} i$$

【例 2.1】 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解：$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+0+6-1 & 8-1+0+2 \\ 1+0+0-3 & 2+1+0+6 \\ 0+0+3-4 & 0+6+0+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ -2 & 9 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$

【例 2.2】 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix} \text{与} \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$$

的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{BA}$

2）矩阵乘法满足的运算律

①结合律： $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

②左、右分配律： $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$; $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$;

③数乘结合律： $(k\boldsymbol{A})(l\boldsymbol{B})=(kl)(\boldsymbol{AB})$;

④ $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$；

⑤ $\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O}$

3）注意矩阵乘法与数的乘法的区别：

①矩阵乘法左边矩阵的列数必须与右边矩阵的行数相同，否则不能相乘；

②矩阵乘法不满足交换律，一般 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；

③矩阵乘法中， $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；

3. 矩阵的转置

1）矩阵转置的定义：

将 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$ 的行与列的元素互换位置，得到的一个 $n\times m$ 矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^T$，即

$$\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

2）转置矩阵的运算性质：

① $(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}$；② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$；③$(k\boldsymbol{A})^T=k\boldsymbol{A}^T$；④$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

【例 2.3】 设$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^T,\boldsymbol{\beta}=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)^T$，求$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$.

4. 常见特殊矩阵：

1）行矩阵（列矩阵）：只有一行的矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$称为行矩阵，又称行向量. 只有一列的矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$称为列矩阵或列向量.

2）零矩阵： $m\times n$个元素全为零的矩阵称为零矩阵，记作$\boldsymbol{O}$.

注：不同型的零矩阵不相等.

3）三角矩阵：主对角线下方元素全为 0 的 n 阶矩阵称为上三角矩阵，主对角线上方元素全为 0 的 n 阶矩阵称为上三角矩阵，上、下三角矩阵合称为三角矩阵. 形状分别如下：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

上（下）三角矩阵具有如下性质：

① 如果$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为**同类型**的三角矩阵，则$k\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$仍为三角矩阵；

② 如果$\boldsymbol{A}$为上（下）三角矩阵，则$\boldsymbol{A}^T$为下（上）三角矩阵；

③$|\boldsymbol{A}|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

4）对角矩阵：主对角线上的元素是任意常数，其余元素都为 0 的 n 阶矩阵，称为 n 阶对角矩阵(简称对角阵)，记作$\boldsymbol{\Lambda}$，即

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

或记作 $diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

对角矩阵有如下性质：

① 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶对角矩阵，则 $k\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}$ 仍为同阶对角矩阵；

② 若 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$；

③ 若 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵，则 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

5）单位矩阵： 主对角线上的元素都为 1 的 n 阶对角矩阵,，称为 n 阶单位矩阵(简称单位阵)，记作 $\boldsymbol{E}$.

注：单位矩阵的作用类似常数 1，如 $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$ 等

6）数量矩阵： 若对角矩阵主对角线上的元素相等，则称为**数量矩阵.**

数量矩阵有如下性质：

① 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶数量矩阵，则 $k\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}$ 仍为同阶的数量矩阵；

② $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$；

③ $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{E}$ （a 为 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元）；

④ $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=a\boldsymbol{B}$,（$\boldsymbol{A}$ 为数量矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵）；

⑤ $|\boldsymbol{A}|=a^n$.

7）对称矩阵： 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 n 阶矩阵，如果 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,...,n)$，即 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.

【例 2.4】 设列矩阵 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 满足 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}=1$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{XX}^T$,证明 $\boldsymbol{H}$ 是对称矩阵，且 $\boldsymbol{HH}^T=\boldsymbol{E}$

8）反对称矩阵： 设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)$ 是一个 n 阶矩阵，如果 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,...,n)$，即 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵.

反对称矩阵有如下性质：

①反对称矩阵的主对角元 a_{ii} 全为零;

②对于奇数阶的反对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $\left|\boldsymbol{A}\right|=0$.

注：任何一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可以表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和，即

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T\right)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T\right)$$

【例 2.5】 证明对于奇数阶的反对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $\left|\boldsymbol{A}\right|=0$.

5. 方阵的幂

1）矩阵可交换

■ **定义：** $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，若有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

■ $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换时，有以下等价命题成立：

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\Leftrightarrow\left(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}\right)^2=\boldsymbol{A}^2\pm2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2\Leftrightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$$

$$\Leftrightarrow\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\boldsymbol{A}^{n-k}\boldsymbol{B}^k$$

【例 2.6】 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\right)^2=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$，则必有（　　）

（A）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$　　（B）$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$　　（C）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　　（D）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

2）方阵的幂

定义： 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，定义 $\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k个\boldsymbol{A}}$，称 $\boldsymbol{A}^k$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂. 特别地，若存在整数 m，使 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$，称 $\boldsymbol{A}$ 为**幂零矩阵**. 规定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$.

运算规律： ① $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{m+n}=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{A}^m$；② $(\boldsymbol{A}^m)^n=(\boldsymbol{A})^{mn}$ （m,n 为正整数）.

注：

1）只有方阵才有幂.

2）显然，方阵的幂是可交换的.

3）若 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{\Lambda}^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k&&&\\&\lambda_2^k&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^k\end{pmatrix}$.

【例 2.7】 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\4&-2&4\\2&-1&2\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}^{100}$.

【例 2.8】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&2&4\\0&\lambda&3\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}^n$.

3）方阵的多项式

定义：设 x 的 k 次多项式 $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，称

$$f(\boldsymbol{A})=a_k\boldsymbol{A}^k+a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}_n,$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 次多项式

性质：

1）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个多项式 $f(\boldsymbol{A})$ 和 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 总是可交换的.（因为 $\boldsymbol{A}^k, \boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{E}$ 都可交换）

2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式可以像数的多项式一样相乘或因式分解. 例如

$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})=-2\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 等.

注： 若 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 为对角矩阵，则

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{\Lambda}) &= a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{\Lambda}+\cdots+a_m\boldsymbol{\Lambda}^m \\
&= a_0\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}+\cdots+a_m\begin{pmatrix}\lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

四、矩阵的逆 $\boldsymbol{A}^{-1}$

1. 逆矩阵的定义：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如果存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵(简称 $\boldsymbol{A}$ 可逆)，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

注：

1）可逆矩阵一定都是方阵.

2）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$. 即只要有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，即可得出 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵的结论，$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$.

3）单位矩阵的逆矩阵是它本身.

【例 2.9】 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则必有（　）

(A) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　　(B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$　　(C) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$　　(D) $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$

【例 2.10】 已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $3\boldsymbol{A}^2+9\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}\right)^2$，试判断矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 是否可逆，若可逆，求其逆矩阵.

【例 2.11】 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，并求 $\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)^{-1}$.

2. 逆矩阵的性质：

1）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 唯一.

证：设 $\boldsymbol{AB}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{AB}_2=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{AB}_2=\boldsymbol{EB}_2=\boldsymbol{B}_2$.

2）$\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\left|\boldsymbol{A}\right|\neq 0$，此时 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{\left|\boldsymbol{A}\right|}\boldsymbol{A}^*$.

3）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^T$，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 均可逆，且有 $(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T$, $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

4）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $k\neq 0$，则 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$.

5）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

推广：①$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{-1}=\boldsymbol{A}_s^{-1}\boldsymbol{A}_{s-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$；② $\boldsymbol{A}^{-k}\triangleq(\boldsymbol{A}^k)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^k$

6）$\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|^{-1}$.

7）如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆，且 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^*$.

注：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不一定可逆；若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，也不一定有 $\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 成立.

【例 2.12】 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{-1}=$________.（用 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}^{-1}$ 表示）

五、伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$

1. 伴随矩阵的定义：

设 A_{ij} 为方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中 a_{ij} 的代数余子式，定义

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\left(A_{ij}\right)_{n\times n}^T$$

为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^*$.

注：1）为什么将 $\boldsymbol{A}^*$ 定义为代数余子式转置？分析——

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & 0 \\ 0 & 0 & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

$$A^*A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}&a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}&a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}\\a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}&a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}&a_{13}A_{12}+a_{23}A_{22}+a_{33}A_{32}\\a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}&a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+a_{32}A_{33}&a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}|A|&0&0\\0&|A|&0\\0&0&|A|\end{pmatrix}=|A|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=|A|E$$

综上，有 $A^*A=AA^*=|A|E$.

2）对于二阶矩阵，用“主对角线互换，副对角线反号”即得伴随阵.

2. 伴随矩阵的性质（“一招通关”）

1) 核心公式：$AA^*=A^*A=|A|E$

若 A 可逆，则 $A^*=|A|A^{-1}$，$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$，$\left(A^*\right)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$

2) $|A^*|=|A|^{n-1}$ ，其中 A 为 n 阶方阵 $(n\ge 2)$.

3) $\left(A^*\right)^*=|A|^{n-2}A$, 其中 A 为 n 阶方阵 $(n\ge 2)$.

4) $\left(A^*\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^*,\left(A^T\right)^*=\left(A^*\right)^T$.

5) $\left(AB\right)^*=B^*A^*$（A,B 均为 n 阶方阵）.

6) $\left(kA\right)^*=k^{n-1}A^*$（$k$ 为数，A 为 n 阶方阵）.

【例 2.13】 证明 $|A^*|=|A|^{n-1}$, 其中 A 为 n 阶方阵 $(n\ge 2)$.

【例 2.14】 设 n 阶方阵 A 可逆，证明 $\left(A^*\right)^*=|A|^{n-2}A$ $(n\ge 2)$.

【例 2.15】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，证明 $\left(\boldsymbol{AB}\right)^{*}=\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{A}^{*}$.

3. 利用伴随矩阵求逆矩阵（低阶数值型矩阵求逆）**：**

公式： $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^{*}}{|\boldsymbol{A}|}$

【例 2.16】 求下列矩阵的逆

（1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$；　　（2） $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$.

【例 2.17】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$，求 $\left(\boldsymbol{A}^{*}\right)^{-1}$.

六、方阵行列式

1. 方阵行列式的运算律

1) $\left|\boldsymbol{A}^{T}\right|=|\boldsymbol{A}|$；　2) $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^{n}|\boldsymbol{A}|$；　3) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ ；

4) $\left|\boldsymbol{A}^{k}\right|=|\boldsymbol{A}|^{k}$；　5) $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$；　6) $\left|\boldsymbol{A}^{*}\right|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ ；

注： 1）一般地，$|\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|\pm|\boldsymbol{B}|$；

2）若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$，但 $|\boldsymbol{A}|=0$ 推不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

【例 2.18】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，则下列结论成立的是（　　）

(A) $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$；　　(B) $|\boldsymbol{A}|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

(C) $|\boldsymbol{AB}|=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{O}$ 或 $|\boldsymbol{B}|=\boldsymbol{O}$；　　(D) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=1$.

【例 2.19】 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha},3\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3\right),\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3\right)$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 为 3 维列向量，且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=24,|\boldsymbol{B}|=3$，求 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

【例 2.20】 已知 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-1,|\boldsymbol{B}|=2$，求 $\left|2\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^{-1}\right)^2\right|=$________，$\left|2\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{B}^*\right|=$________，$\left||\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{B}\right|=$________.

工具箱：矩阵 $\boldsymbol{A}^T,\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{A}^{-1},|\boldsymbol{A}|,\boldsymbol{A}^k$ 的运算性质（分组默写）

七、分块矩阵及其运算

1. 分块矩阵的定义：

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**子块**，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵.**

2. 分块矩阵的运算：

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则类似.

1）加法：设两个矩阵行数、列数相同，采用相同的分块法，有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_4+\boldsymbol{B}_4 \end{pmatrix}$$

2）数乘：设有分块矩阵和常数 k，有

$$k\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\boldsymbol{A}_1 & k\boldsymbol{A}_2 \\ k\boldsymbol{A}_3 & k\boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix}$$

3）乘法：设两个分块矩阵的子块对应的列数和行数符合矩阵乘法的要求，则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BZ} & \boldsymbol{AY}+\boldsymbol{BW} \\ \boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DZ} & \boldsymbol{CY}+\boldsymbol{DW} \end{pmatrix}$$

【例 2.21】已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是三维列向量，矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,5\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+3\boldsymbol{\alpha}_1)$，若 $|-\boldsymbol{B}|=5,|\boldsymbol{C}|=20,$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

4）转置：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1k} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{m1} & \boldsymbol{A}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mk} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^T & \boldsymbol{A}_{21}^T & \cdots & \boldsymbol{A}_{m1}^T \\ \boldsymbol{A}_{12}^T & \boldsymbol{A}_{22}^T & \cdots & \boldsymbol{A}_{m2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1k}^T & \boldsymbol{A}_{2k}^T & \cdots & \boldsymbol{A}_{mk}^T \end{pmatrix}$$

5）分块三角矩阵的逆矩阵：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_m & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{B}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{B}_n & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

6）分块（副）对角矩阵的逆矩阵（假设每个子块都可逆）:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_n^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_n & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & \boldsymbol{A}_n^{-1} \\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{bmatrix}.$$

【例 2.22】 求矩阵$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$的逆矩阵.

7）分块对角矩阵的幂：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_n \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^{n} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_n^{n} \end{bmatrix}$$

注： 分块副对角矩阵的幂无此规律.

8）拉普拉斯公式：

① $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$, $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$,

② $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$, $\begin{vmatrix} * & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$,

③若 $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$，$|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_k|$，$|A_i| \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, k)$（设 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，A_i 为方阵，$i = 1, 2, \cdots, k$）

注：设 $G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 为 $k(k \geq 3)$ 阶分块矩阵，且 $|G| \neq 0$，则一般下列等式不成立

①$|G| = |AD - BC|$；②$G^* = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$；③$G^{-1} = \dfrac{1}{|G|}\begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$

【例 2.23】设 A^*, B^* 分别为 n 阶可逆矩阵，A, B 对应的伴随矩阵，$C^* = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^* =$____________.（用 A^*, B^* 表示）

八、矩阵的初等变换

引入：消元法解线性方程组（方程组的同解变换）

线性方程组	增广矩阵
$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 6 & (1) \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 & (2) \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
$\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 & (1) \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 6 & (2) \end{cases}$	$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$
$\xrightarrow{(2)\div 2} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 & (1) \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 & (2) \end{cases}$	$\xrightarrow{r_2 \div 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
$\xrightarrow{(2)-2(1)} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 & (1) \\ 0 + 6x_2 - 6x_3 = -1 & (2) \end{cases}$	$\xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

1. 初等变换的定义：

对矩阵施行以下三种变换称为矩阵的初等变换

(1) 交换矩阵的两行（列），即 $r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $c_i \leftrightarrow c_j$；

(2) 以一个**非零**的数 k 乘矩阵的某一行（列），即 kr_i 或 kc_i， $k \neq 0$；

(3) 将矩阵的某一行（列）乘以常数 k 加到另一行（或列），即 $r_i + kr_j$ 或 $c_i + kc_j$.

2. 初等矩阵：

1）定义：对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 作一次初等(行或列)变换所得的矩阵.

2）三种初等矩阵（对应三种初等变换）：

$\boldsymbol{E}_{ij}$: 交换 $\boldsymbol{E}$ 的 i, j 两行(或列)所得到的矩阵.

$\boldsymbol{E}_i(k)$: 用**非零**数 k 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行(或列)所得到的矩阵.

$\boldsymbol{E}_{ij}(k)$: 把 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上(或把第 i 列的 k 倍加到第 j 列上)所得到的矩阵.

例如: $\boldsymbol{E}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_3(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{21}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3）定理 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等行(列)变换，相当于用一个相应的初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 左(右)乘 $\boldsymbol{A}$.

例如： 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$

4）结论

①初等矩阵均可逆，且其逆是同类型的初等矩阵，即

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij},\ \boldsymbol{E}_i^{-1}(k) = \boldsymbol{E}_i\left(\frac{1}{k}\right),\ \boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(k) = \boldsymbol{E}_{ij}(-k)$$

例如: $\boldsymbol{E}_{12}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_{12}$

$$\boldsymbol{E}_{3}^{-1}(-2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_{3}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{E}_{21}^{-1}(3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_{21}(-3)$$

②$\left|\boldsymbol{E}_{ij}\right|=-1,\ \left|\boldsymbol{E}_{i}(k)\right|=k,\ \left|\boldsymbol{E}_{ij}(k)\right|=1$.

【例 2.24】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第2行与第3行得到单位阵$\boldsymbol{E}$. 记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$=(　　)

（A）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　（B）$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$　　（C）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$　　（D）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

【例 2.25】 $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}^2=$（　　）

（A）$\begin{bmatrix}a_{31}+2ka_{32}&a_{32}\\a_{21}+2ka_{22}&a_{22}\\a_{11}+2ka_{12}&a_{12}\end{bmatrix}$　　（B）$\begin{bmatrix}a_{32}+2ka_{31}&a_{32}\\a_{22}+2ka_{21}&a_{22}\\a_{12}+2ka_{11}&a_{12}\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix}a_{31}&a_{32}+2ka_{31}\\a_{21}&a_{22}+2ka_{21}\\a_{11}&a_{12}+2ka_{11}\end{bmatrix}$　　（D）$\begin{bmatrix}a_{31}&a_{31}+2ka_{32}\\a_{21}&a_{21}+2ka_{22}\\a_{11}&a_{11}+2ka_{12}\end{bmatrix}$

3. 几种初等变换下的特殊矩阵：

1）行阶梯形矩阵

定义 非零矩阵若满足下列条件：

①所有零行在非零行的下面；

②非零行的首非零元所在列在上一行（如果存在的话）的首非零元所在列的右面，

则称此矩阵为**行阶梯形矩阵.**

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2）行最简形矩阵

定义 行阶梯形矩阵若还满足下列条件：

①各非零行的首非零元为 1；

②首非零元所在列的其他元均为 0，

则称此行阶梯形矩阵为行最简形矩阵.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3）矩阵的等价标准形

特点是：

①左上角是一个单位阵；

②其余行列（如果有的话）元素全为 0

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4）定理 任一矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 总可经过初等行变换化为行阶梯形矩阵，再经过初等行变换化为行最简形矩阵，最后通过初等列变换化为标准形

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

【例 2.26】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$，试将 A 通过初等行变换

（1）化为行阶梯形矩阵；（2）化为行最简形矩阵；（3）写出 A 的等价标准形.

七、利用初等变换求逆矩阵/解矩阵方程

1. 利用初等变换求逆矩阵

$$(A \vdots E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \vdots A^{-1}) \text{ 或 } \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

【例 2.27】 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$的逆.

2. 利用初等变换解矩阵方程

矩阵不能规定除法，乘法的逆运算是解**矩阵方程**（含有未知矩阵的等式）：

$$\text{(I) } AX=B. \qquad \text{(II) } XA=B.$$

这里假定 A 可逆，在此条件下，这两个方程的解都是存在并且唯一的，其中矩阵方程(I)的解为 $X=A^{-1}B$，(II)的解为 $X=BA^{-1}$.

用初等变换法解矩阵方程 ***AX=B*、*XA=B*** 和 ***AXB=C.***

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$$

【例 2.28】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足等式 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&2\\2&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

八、矩阵的等价

1. 矩阵等价的定义：

矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 经有限次初等变换化为 $\boldsymbol{B}$，即存在一系列 m 阶初等阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_k$ 和一系列 n 阶初等阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_l$ 使

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{B},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

注：若矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 经有限次初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价；若矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 经有限次初等列变换化为 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价.

2. 矩阵等价的等价命题：

1）$\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$.

2）存在有限个初等阵 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_s,\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$ 使得 $\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{B}$.

3）存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

4）同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$

推论：

1）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{E}$.

2）可逆矩阵可经过有限次初等变换化为单位矩阵.

3）可逆矩阵可以表示为有限个初等矩阵的乘积，即若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则存在有限个初等阵 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}$ ，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s$.

3. 矩阵等价的性质：

1）反身性： $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{A}$

2）对称性：若 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$ ，则 $\boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{A}$

3）传递性：若 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$ ， $\boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{C}$ ，则 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{C}$.

4. 矩阵行等价的等价命题：

1） $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换变成 $\boldsymbol{B}$ ；

2）存在有限个初等阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\ldots,\boldsymbol{P}_s$ ，使得 $\boldsymbol{P}_s\ldots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ ；

3）存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ ，使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.

5. 矩阵列等价的等价命题：

1） $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换变成 $\boldsymbol{B}$ ；

2）存在有限个初等阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\ldots,\boldsymbol{Q}_l$ ，使得 $\boldsymbol{AQ}_1\boldsymbol{Q}_2\ldots\boldsymbol{Q}_l=\boldsymbol{B}$ ；

3）存在可逆阵 $\boldsymbol{Q}$ ，使得 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$.

【例 2.29】 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有（　　）

（A）当 $|\boldsymbol{A}|=a\left(a\neq 0\right)$ 时， $|\boldsymbol{B}|=a$　　　（B）当 $|\boldsymbol{A}|=a\left(a\neq 0\right)$ 时， $|\boldsymbol{B}|=-a$

（C）当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时， $|\boldsymbol{B}|=0$　　　（D）当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时， $|\boldsymbol{B}|=0$

九、矩阵的秩（最得力的解题小帮手！）

1. 矩阵子式的概念：

在矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中，任取 k 行和 k 列（ $0\leq k\leq m,0\leq k\leq n$ ），位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中所处的位置次序而得到的 k 阶<u>行列式</u>，称为矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的 k 阶子式.

注：

1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个元素都是 $\boldsymbol{A}$ 的一个一阶子式.

2) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的唯一 n 阶子式是 $|\boldsymbol{A}|$.

2. 矩阵的秩的概念：

定义 1 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有非零子式的最高阶数，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩. 记作 $r(\boldsymbol{A})$.

定义 2 设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不为 0 的 r 阶子式，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全为 0，则数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

规定 零矩阵的秩等于 0，故有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\Leftrightarrow r\left(\boldsymbol{A}\right)=0$.

易知

1）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个 s 阶子式不为 $0\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})\geq s$；

2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有 t 阶子式全为 $0\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<t$.

【例 2.30】 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则 $\boldsymbol{A}$ 中（　　）

（A）所有 $r-1$ 阶子式都不为 0　　　（B）所有 $r-1$ 阶子式都为 0

（C）至少有一个 r 阶子式不为 0　　　（D）所有 r 阶子式都不为 0

3. 求数量型矩阵的秩：

定理 初等变换不改变矩阵的秩

方法　1）定义法 最高阶子式法

2）初等变换法 可通过初等行变换化矩阵为行阶梯形，非零行的行数即为矩阵的秩.

【例 2.31】 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -4 & 4\end{pmatrix}$ 的秩。

进阶——**含参数矩阵**化行阶梯形、秩的讨论（在方程组和向量部分有大用！）

【例 2.32】 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & a+4 & a+4\\ 3 & a+6 & 2a+8\end{pmatrix}$，试讨论 $r(A)$

4. 矩阵秩的重要结论：

矩阵的秩

1）$r(\boldsymbol{A})=0\Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$， $r(\boldsymbol{A})\geq 1\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ ；

2）$0\leq r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leq\min\{m,n\}$；

3）$r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$，$(k\neq 0)$,

矩阵转置的秩

4） $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^T)=r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)$；

矩阵和、差、积的秩

5）$r(\boldsymbol{A}_{m\times n})+r(\boldsymbol{B}_{n\times s})-n\leq r(\boldsymbol{AB})\leq\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$，

6）$r(\boldsymbol{A})-r(\boldsymbol{B})\leq r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leq r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$；

7）$\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}\leq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leq r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$ ；

8）若$\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times s}$且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leq n$；

9）若$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$可逆, 则$r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{AQ})=r(\boldsymbol{PAQ})=r(\boldsymbol{A})$；

更一般地，若 $\boldsymbol{A}$ 列满秩（即 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})=n$ ）则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$，且有左消去律 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.（同理，$\boldsymbol{A}$ 行满秩时有右消去律）.

矩阵等价的充要条件

10）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$；

伴随矩阵的秩

11） $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n & 若r(\boldsymbol{A})=n \\ 1 & 若r(\boldsymbol{A})=n-1 \\ 0 & 若r(\boldsymbol{A})<n-1 \end{cases}$

分块矩阵的秩

12) $r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$

$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\geq r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$

满秩矩阵的等价命题

13) $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶满秩矩阵 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

【例 2.33】 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为三维列向量，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^T,\boldsymbol{\beta}^T$ 分别为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的转置，证明 $r(\boldsymbol{A})\leq 2$.

【例 2.34】 试证明 $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n & 若r(\boldsymbol{A})=n \\ 1 & 若r(\boldsymbol{A})=n-1 \\ 0 & 若r(\boldsymbol{A})<n-1 \end{cases}$.

【例2.35】 设3阶矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&\lambda&-1\\1&2&1\end{bmatrix}$，$B$为3阶矩阵，且$r(B)=2,r(AB)=1$，则$\lambda=$_______.

【例2.36】 若非零矩阵A为4×3矩阵，且$AB=O$，其中$B=\begin{pmatrix}1&5\\2&7\\3&9\end{pmatrix}$，则$A$的秩$r(A)=$________

附录:

性质6 【证明】对分块矩阵作初等变换得

$$\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}A&B\\O&B\end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix}A+B&B\\B&B\end{pmatrix}$$

得$r(A+B)\le r\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$，同理，

$$\begin{pmatrix}A+B&O\\O&B\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}A+B&B\\O&B\end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix}A&B\\-B&B\end{pmatrix}$$

得$r(A)\le r\begin{pmatrix}A+B&O\\O&B\end{pmatrix}=r(A+B)+r(B)$，得证.

性质7 【证明】A的最高阶非零子式也是(A,B)的非零子式

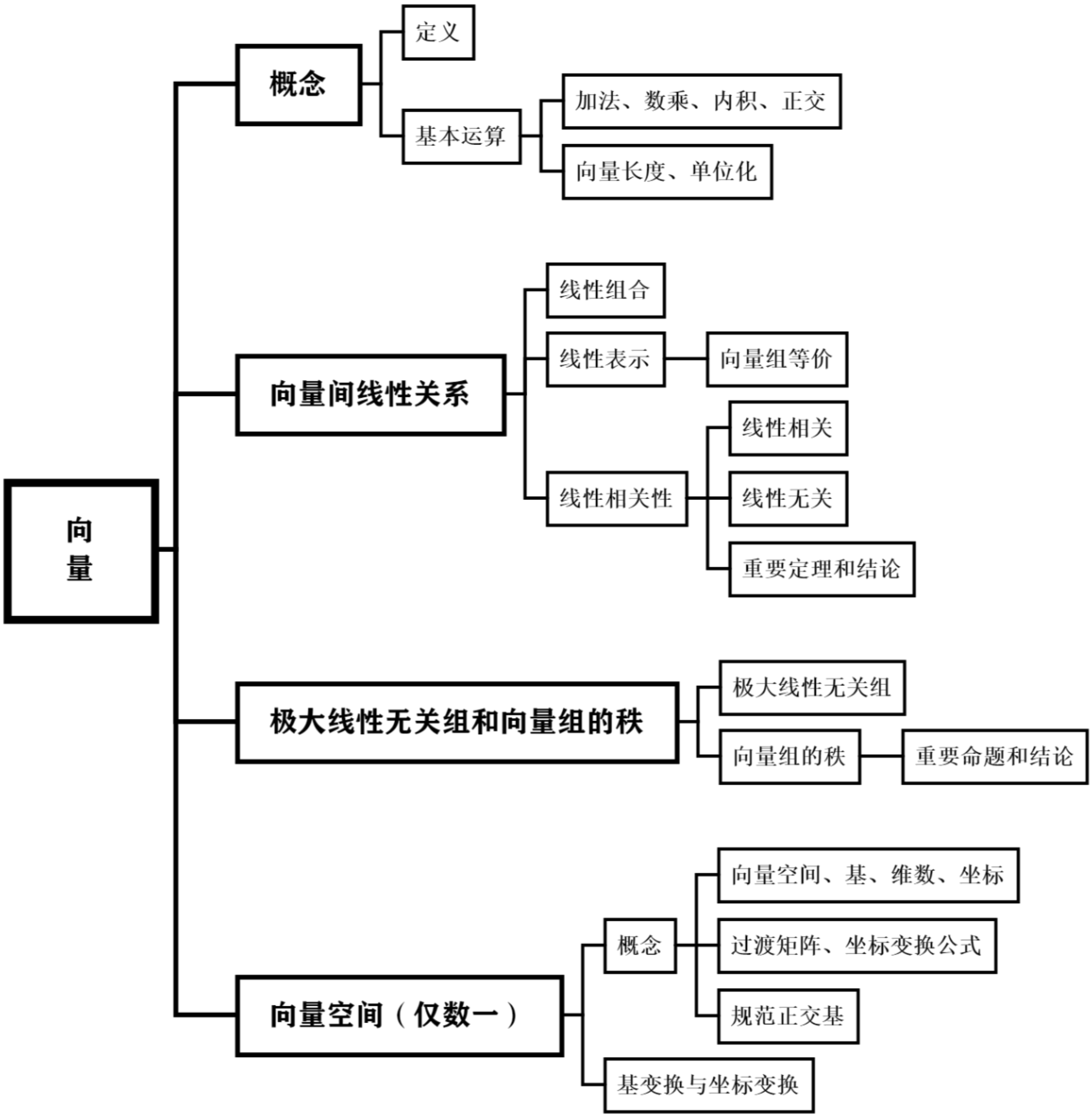
故$r(A)\le r(A,B)$，同理$r(B)\le r(A,B)$. 又$(A,B)\xrightarrow{c}(\tilde{A},\tilde{B})$，其中$\tilde{A},\tilde{B}$为列最简形，故$r(A,B)=r(\tilde{A},\tilde{B})\le r(\tilde{A})+r(\tilde{B})=r(A)+r(B)$

性质9 【证明】由$r(A_{m\times n})=n$，存在m阶可逆矩阵P使$PA=\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}_{m\times n}$，而

$PAB_{n\times s}=\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}B_{n\times s}=\begin{pmatrix}B\\O\end{pmatrix}_{m\times s}$，故$r(AB)=r(PAB)=r\begin{pmatrix}B\\O\end{pmatrix}=r(B)$.

第三章 向量

知识图解



考试要求

1. 理解 n 维向量、向量的线性组合与线性表示的概念，掌握向量的加法和数乘运算法则.
2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.
3. 理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩.

4. 理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行（列）向量组的秩之间的关系．
5. 了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特（Schmidt）方法．了解正交矩阵的概念和性质．
6. 了解n维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念．了解基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵．了解规范正交基的概念以及它们的性质（数一）．

知识讲解

一、向量的概念

1. 向量的定义

向量的定义 由 n 个数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 组成的有序数组，称为一个 n 维向量.

若用一行表示，称为 n 维行向量，即 $1\times n$ 矩阵，记作 $\boldsymbol{\alpha}^T=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$.

若用一列表示，称为 n 维列向量，即 $n\times 1$ 矩阵. 记作 $\boldsymbol{\alpha}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)^T$.

其中 a_i 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量.

注：考研中在没有指明时，都看作列向量.

向量组 由多个同型向量（维数相同且都为行向量或列向量）组成的集合称为向量组.

2. 向量的运算

记 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ ， $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$

1) 向量相等：两个 n 维向量相等当且仅当它们各对应分量都相等，即

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow a_i=b_i\ \ (i=1,2,\cdots n)$$

2)零向量：所有分量全为零的向量称为零向量，记做 $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\Leftrightarrow a_i=0\ (i=1,2\cdots n)$

3）向量加法： $\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,\cdots,a_n\pm b_n)^T$

4）向量数乘： $k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^T$

5）向量内积： $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

向量内积的性质：

①$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$②$(\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$③$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\chi})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\chi})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\chi})$

④当$\boldsymbol{\alpha}=0$时，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$；当$\boldsymbol{\alpha}\neq 0$时，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})>0$

6）向量正交：若$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=0$，称向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$正交.

向量正交的推论：

①$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=0\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$（$\boldsymbol{\alpha}$与自身正交当且仅当$\boldsymbol{\alpha}$是零向量）；

②零向量与任何同型向量正交.

7）向量的长度：令$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}_1^2+\boldsymbol{\alpha}_2^2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n^2}$，$\|\boldsymbol{\alpha}\|$称为$n$维向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度

向量长度的性质：

① **非负性：**当$x\neq 0$时，$\|\boldsymbol{\alpha}\|>0$；当$x=0$时，$\|\boldsymbol{\alpha}\|=0$

② **齐次性：**$\|\lambda\boldsymbol{\alpha}\|=|\lambda|\|\boldsymbol{\alpha}\|$

8）单位化：当$\|\boldsymbol{\alpha}\|=1$时，$\boldsymbol{\alpha}$称为单位向量.若$\boldsymbol{\beta}\neq 0$，取$\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}$，则$\boldsymbol{\alpha}$是一个单位向量.由向量$\boldsymbol{\beta}$得到$\boldsymbol{\alpha}$的过程称为把向量$\boldsymbol{\beta}$单位化.

二、向量间的线性表示

1. 线性组合

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$是一组$n$维向量，$k_1,k_2,\ldots,k_s$是一组常数，则称

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个线性组合.

2. 向量组的线性表示

设有一组n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$，以及向量$\boldsymbol{\beta}$，若存在一组常数$k_1,k_2,\ldots,k_s$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta},$$

则称$\boldsymbol{\beta}$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，或称$\boldsymbol{\beta}$为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个线性组合.

【例 3.1】 试判断下列向量组中 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由其余向量线性表示

1）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$；

2）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$；

3）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$；

注： 1）零向量可由任意一组向量线性表示；

2）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}_j\ (j=1,2,\cdots s)$ 都可由此向量组线性表示.

3. 向量组线性表示的等价命题（紧密结合第四章线性方程组）

1）向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示且表示法唯一

$\Leftrightarrow$ 存在且仅存在一组常数 $k_1,k_2,\ldots,k_s$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$

$\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解

$\Leftrightarrow r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)=r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}\right)=s$

2） 向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示且表示法不唯一（无穷多种）

$\Leftrightarrow$ 存在无穷多组常数$k_1,k_2,\ldots,k_s$使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$

$\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解

$\Leftrightarrow r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)=r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}\right)<s$

3） 向量$\boldsymbol{\beta}$不可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示

$\Leftrightarrow$ 不存在一组常数$k_1,k_2,\ldots,k_s$使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$

$\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}$无解

$\Leftrightarrow r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)<r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}\right)\Leftrightarrow r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)+1=r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}\right)$

4） 向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示

$\Leftrightarrow r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\right)=r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right)$

$\Rightarrow r\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\right)\le r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right)$

注：

1） $r\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\right)\le r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right)$推不出向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

2） 若$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$不可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，无法确定$r\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\right)$与$r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right)$的大小关系.

【例 3.2】 设 3 维向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$$

问：当λ取何值时

（1）$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表达式唯一

（2）$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表达式不唯一

（3）$\boldsymbol{\beta}$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示

4. 向量组等价

1）定义：若向量组(I)中的每一个向量都能由向量组(II)线性表示，向量组(II)中的每一个向量也都能由向量组(I)线性表示，则称向量组(I)和(II)等价.

2）定理：向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$和$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$等价

$\Leftrightarrow \quad r\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\right)=r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right)=r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\right)$

$\Leftrightarrow \quad r\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\right)=r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right)=r\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right)$

【例 3.3】 向量组$\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\a+2\end{pmatrix}$与向量组$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$等价的充要条件是（ ）

（A）$a\neq 2$ （B）$a\neq -1$ （C）$a=2$或$a=-1$ （D）$a\neq 2$且$a\neq -1$

【例 3.4】 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$为两个$n$维向量组，且

$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r$，则（ ）

(A) 两个向量组等价，即可相互线性表示；

(B) $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r$；

(C) 当$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$也可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示；

(D) 当$s=t$时，两向量组等价.

三、向量组的线性相关与线性无关

1. 定义

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$是一组$n$维向量. 如果存在$m$个**不全为零**的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关. 否则，即如果$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$必有

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=0,$$

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

注：

1） 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表示.

2） 单个零向量线性相关；单个非零向量线性无关.

3） 含有零向量的向量组必线性相关.

4） 两个向量线性相关的充要条件是对应分量成比例.

【例 3.5】 判断下列向量组的线性相关性

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,6,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,0)^T$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,6)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,7,5)^T$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,3)^T$；

【例 3.6】 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\,(m\geq 3)$线性无关的充要条件是（　　）

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任意一个向量都不能由其余$m-1$个向量线性表出；

（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中存在一个向量，它不能由其余$m-1$个向量线性表出；

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任意两个向量线性无关；

（D）对于全为零的常数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，恒有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$.

【例 3.7】 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 个线性无关的向量，则以下向量组线性相关的是（　　）

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$　　（D）$2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

2. 向量组线性相关（无关）的等价命题

1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$**线性相关**$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\mathbf{0}$有非零解

$\Leftrightarrow r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)<s$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 至少有一个向量可由其余 $s-1$ 个向量线性表示

2）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$**线性无关**$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\mathbf{0}$只有零解

$\Leftrightarrow r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)=s$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每一个向量都不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示

推论：

①n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充要条件是行列式$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right|=0$；

②$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

【例 3.8】 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\t\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\-t\end{pmatrix}$线性相关，求$t$的值.

【例 3.9】 设线性无关的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表出，则必有（ ）

（A）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性相关 （B）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关

（C）$s\geq 4$ （D）$s<4$

【例 3.10】 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$均为$n$维列向量，$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵,下列选项正确的是( )

(A)若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关；

(B)若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关；

(C)若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关；

(D)若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

3. 重要定理和结论

1）若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中有一部分向量线性相关，则整个向量组必线性相关；

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则其中任一部分向量组必线性无关；

2）n 维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则把这些向量各自添加$m$个分量所得到的新$m+n$维向量组（即接长组）必线性无关；若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，那么它们各去掉对应的$m$个分量所得到的新向量组也是线性相关的.

【例 3.11】 下列向量组中线性无关的是（　　）.

（A）$(1,-1,0,2),(0,1,,-1,0),(0,0,0,0)$；

（B）$(a,b,c),(b,c,d),(c,d,a),(d,a,b)$；

（C）$(a,1,b,0,0),(c,0,d,1,0),(e,0,f,0,1)$；

（D）$(1,2,1,5),(1,2,1,6),(1,2,1,7)$.

3）如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关,而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$线性相关,则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示,且表示法唯一.（重要！）

【例 3.12】 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关,向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关,问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出？证明你的结论.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出？证明你的结论.

4）向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示,且$s>n$，则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性相关.

推论：向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关,且可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示,则$s\le n$.

【例 3.13】设向量组$\mathrm{I}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\mathrm{II}:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，下列命题正确的是（　　）.

(A) 若向量组I线性无关，则$r\le s$； (B) 若向量组I线性相关，则$r>s$；

(C) 若向量组II线性无关，则$r\le s$； (D) 若向量组II线性相关，则$r>s$.

四、向量组的极大线性无关组、向量组的秩

1. 极大线性无关组

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中存在$r$个向量$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$线性无关，且再添加任一个$\boldsymbol{\alpha}_j\left(j=1,2\cdots s\right)$就有$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir},\boldsymbol{\alpha}_j$线性相关，则称$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个**极大线性无关组**.

注：

1）零向量组成的向量组没有极大线性无关组，含有非零向量的向量组一定存在极大线性无关组.

2）向量组中任一个向量均可由向量组的极大线性无关组表示.

3）向量组的极大线性无关组不唯一，但所包含的向量个数一定相等.

4）若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则其极大无关组为自身.

2. 向量组的秩

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的极大线性无关组$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$中所含向量个数$r$，称为**向量组的秩,**记作$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.

注：零向量组成的向量组没有极大线性无关组，规定秩为0.

3. 重要命题和结论

①任一向量组与自己的极大线性无关组等价.

推论 1：向量组的任意两个极大无关组等价.

推论 2：等价向量组的极大无关组等价.

②向量组任意两个极大无关组所含的向量个数相等.

推论：若 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$，则从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任取 r 个无关向量，即为其极大无关组.

向量组的秩与矩阵的秩

③矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩= $\boldsymbol{A}$ 行向量组的秩（行秩）= $\boldsymbol{A}$ 列向量组的秩（列秩）.

【例 3.14】矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的行向量组为 $\boldsymbol{A}$，列向量组为 $\boldsymbol{B}$，则（　　）.

（A）$r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{B})$　　（B）$r(\boldsymbol{A})>r(\boldsymbol{B})$

（C）$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$　　（D）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不是同维向量组，故它们的秩不能比较

4. 通过初等行变换求向量组的极大无关组和秩

原理： 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价；$\boldsymbol{A}$ 的任意 k 个列向量与 $\boldsymbol{B}$ 中对应的 k 个列向量有相同的线性相关性；

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\xrightarrow{r}B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0\ \xrightarrow[\text{同解}]{r}\ x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$$

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-1 \qquad x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-1$$

$$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2 \qquad \beta_3=\beta_1+2\beta_2$$

【例 3.15】 写出下列向量组的秩，极大无关组，并用极大无关组表示其余向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,4,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-6,6)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-2,2,-9)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,-2,7)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,4,4,9)^T$.

注：事实上，向量组中任选 r 个无关向量即为极大线性无关组，但上述方法可以保证选出的部分组一定无关.

【例 3.16】 设 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$，且 $\left|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right|=-6$，则 $r\left(\boldsymbol{A}\right)=$________，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组是__________.

五、向量空间（数一专项）

1）向量空间 n 维实向量的全体构成的集合称为 n 维向量空间，记为 R^n.设 V 是 R^n 的一个非空子集，且对加法和数乘运算封闭，则称 V 是 R^n 的一个子空间,简称为向量空间 V.

2）基 向量空间 V 的一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，且 V 中每个向量都能由它线性表示，则称它为向量空间的一个基.

3）维数 向量空间的基所含向量个数 r 为该空间的维数.

4）坐标 设$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r$称$(x_1,x_2,\cdots,x_r)$为$\boldsymbol{\alpha}$在这组基下的坐标.

5）过渡矩阵 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$为$n$维向量空间$V$中的两组基，若

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=c_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\beta}_2=c_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \cdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=c_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{cases}$$

则矩阵$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_n$称为**从基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵**.将上述基变换表达式简记为$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$，称之为**基变换公式**.

6）坐标变换公式 设向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$和基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标分别为

$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}$为基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵，则有

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix},$$

称为向量在不同基下的坐标变换公式.

7）正交基与规范（标准）正交基 向量空间的一组基，如果其中的向量两两正交，称为正交基，若每个向量都是单位向量，则称为规范正交基.

【例 3.17】 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\5\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\5\\-7\\-4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\6\\17\\9\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$生成空间的维数和基.

【例 3.18】 已知三维线性空间的一组基为$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，则向量$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$在上述基底下的坐标是_________.

【例 3.19】 已知三维向量空间的两个基为

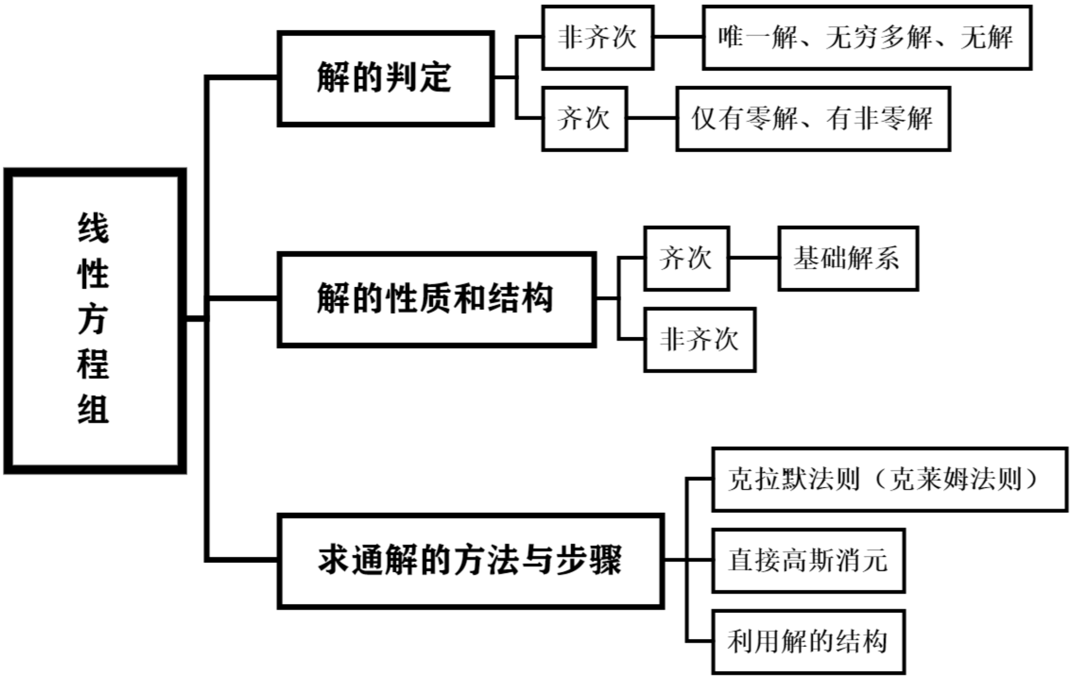
$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^T$与$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(2,3,4)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,3)^T$

（I） 求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵$\boldsymbol{P}$；

（II） 设$\boldsymbol{\xi}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标为$(1,1,-1)$，求$\boldsymbol{\xi}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标.

第四章 线性方程组

知识图解



考试要求

1. 会用克拉默法则.
2. 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件，掌握非齐次线性方程组有解和无解的判定方法.
3. 理解齐次线性方程组的基础解系、通解的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.
4. 理解齐次线性方程组解空间的概念. （数一）
5. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.
6. 掌握用初等行变换求解线性方程组的方法.

一、线性方程组的基本概念

1. 非齐次线性方程组：

设有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

当常数项 $b_1, b_2, \ldots, b_m$ 不全为 0 时，称为 n **元非齐次线性方程组.**

2. 齐次线性方程组：

当(*)式中 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 全为零时，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为 n **元齐次线性方程组**，也称为原方程组(*)的**导出方程组**.

3. 线性方程组的三种表示方法

① **方程组形式：** $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

② **矩阵形式：** $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

称为方程组(*)的**增广矩阵**.

③ **向量形式：** $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\left(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj}\right)^T \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

注：以上三种变形一般混同使用而不加区分，并都称为线性方程组或线性方程，解与解向量亦不加区别.

二、克拉默法则

设含有 n 个方程的 n 元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

如果其系数行列式 $D\neq 0$，则方程组必有唯一解：

$$x_j=\frac{D_j}{D}, j=1,2,\cdots,n,$$

其中 D_j 是把 D 中第 j 列换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 后得到的行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【证明】 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},|\boldsymbol{A}|\neq 0\Rightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ 唯一

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{pmatrix}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix}$$

得证.

注：

1.克拉默法则的适用条件是方程组个数与未知量个数相同.

2. 若系数行列式 $D=0$，则线性方程组有无穷多解或无解.

【例 4.1】 用克拉默法则解方程$\begin{cases} x_1+ax_2+a^2x_3=1 \\ x_1+bx_2+b^2x_3=1 \\ x_1+cx_2+c^2x_3=1 \end{cases}$（其中$a,b,c$互不相等）.

三、线性方程组解的判定

引例——二元线性方程组解的情况

1. n **元齐次线性方程组解** $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ **的判定**

① $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ **有非零解**

$\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})<n$（即矩阵A的列数）

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$的列向量组线性相关

$\Leftrightarrow$ 当$\boldsymbol{A}$为n阶方阵时，$|\boldsymbol{A}|=0$

推论 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$阶矩阵，若$m<n$，则齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$必有非零解.

② $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})=n$（即矩阵 A 列满秩）

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的列向量组线性无关

$\Leftrightarrow$ 当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$

【例 4.2】 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+kx_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2+x_3=0 \\ kx_2+3x_3=0 \end{cases}$ 只有零解，则 k 应满足的条件是

___________.

2. $\boldsymbol{n}$ 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的判定

① $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解

$\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})+1=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$；

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$ 不能由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示

$\Rightarrow$ 当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵时，$|\boldsymbol{A}|=0$

② $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

$\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，且表示法唯一

$\Leftrightarrow$ 当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，可用克拉默法则解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的列向量组线性无关

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

③ $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

$\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，且表示法不唯一（无穷多种）

$\Rightarrow$ 当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵时，$|\boldsymbol{A}|=0$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的列向量组线性相关

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

【例 4.3】 已知非齐次线性方程组的系数行列式为 0，则（　　）

（A）方程组有无穷多解　　（B）方程组可能无解，也可能有无穷多解

（C）方程组有唯一解或无穷多解　　（D）方程组无解

【例 4.4】 λ 为何值时，方程组 $\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2=4 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2 \\ 5x_1-2x_2-x_3=4 \end{cases}$ 有唯一解，无解，有无穷解？有无穷多解时求出通解.

换一种问法：已知向量组 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\\lambda\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}\lambda\\-1\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，问 λ 为何值时：

（I）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示法唯一；

（II）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示法不唯一（并写出表示法）；

（III）$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

3.矩阵方程 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times s}=\boldsymbol{B}_{m\times s}$ 解的判定

注：即求解 s 个方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{b}_i$，只要其中一个方程组无解，则矩阵方程无解.

① **$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解**

$\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$；

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{B}$ 的列向量组不能由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示.

② **$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解**

$\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=n$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，且表示法唯一

$\Leftrightarrow$ 当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，可用初等变换法解出 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的列向量组线性无关

③ **$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解**

$\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})<n$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，且表示法不唯一

当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵时，$|\boldsymbol{A}|=0$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的列向量组线性相关

四、线性方程组解的性质

1. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 解的性质

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_s$ 都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则解的线性组合

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，$k_1,k_2,...k_s$ 是任意常数

2. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的性质

①设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是它的导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

②设$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,...,\boldsymbol{\eta}_s$都是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，则

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s\begin{cases}\text{是 }\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\text{ 的解，当}k_1+k_2+\ldots+k_s=1,\\ \text{是 }\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\text{ 的解，当}k_1+k_2+\ldots+k_s=0.\end{cases}$$

③设$\boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个解，$\boldsymbol{\xi}$是它的导出组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解,则$\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解.

五、线性方程组解的结构

1. 齐次线性方程组的基础解系

1）基础解系的定义：设一组向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$，若满足：

① $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一组解；

② $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性无关；

③ $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的任何一个解$\xi$都可由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性表示，

则称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$为该齐次方程组的基础解系.

2）重要结论：设矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n}$，

① $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系含$n-r(\boldsymbol{A})$个线性无关的解向量；

② $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的任意$n-r(\boldsymbol{A})$个线性无关的解都可构成$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

【例 4.5】　设$\boldsymbol{A}$为四阶方阵，且$r(\boldsymbol{A})=3$，则齐次线性方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$（$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵）的基础解系所包含的线性无关解向量的个数为________.

【例 4.6】　设$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一组基础解系，考查下列向量组

①$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_3$；　　　　②$\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3$；

③$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_3$；　　　　④$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3$.

上述向量组中，仍是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系的是（　　）

（A）①②　　（B）①③　　（C）①④　　（D）②③

2. 齐次线性方程组的通解

设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意数.

注：齐次线性方程组所有解的集合构成一个向量空间，称为该齐次线性方程组的**解空间**（仅数一）.

3. 非齐次线性方程组的通解

当非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解时，它的通解可以表示为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

其中$\boldsymbol{\eta}^*$是方程$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个特解，$r=r(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$为导出组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

【例 4.7】 已知$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个不同解向量，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，$k_1,k_2$为任意常数，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解为（　　）

（A）$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　（B）$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\left(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\right)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

（C）$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\left(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2\right)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　（D）$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\left(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2\right)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

六、求齐次线性方程组的通解、基础解系

法一：高斯消元法解同解方程组

法二：求基础解系，利用齐次方程组解的结构求解

【例 4.8】 求线性方程组$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=0 \\ -3x_1+x_2+2x_3-4x_4=0 \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$的一个基础解系及其通解.

【例 4.9】 求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

七、求非齐次线性方程组的通解

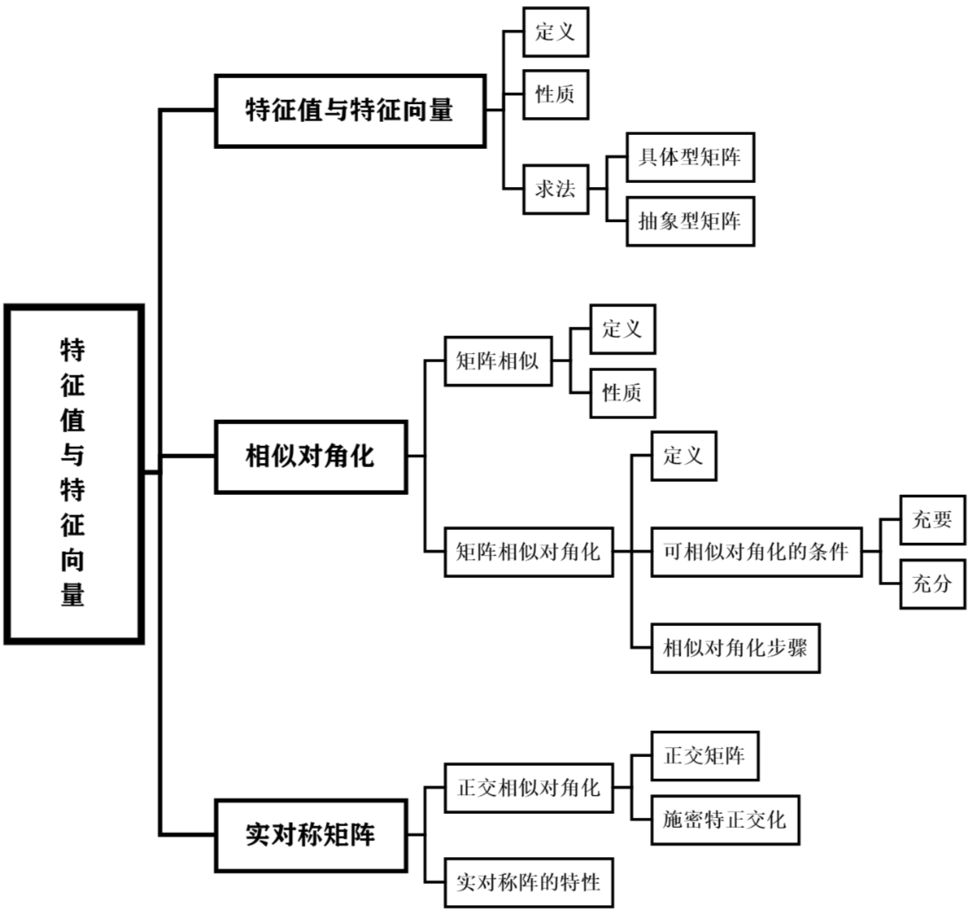
法一：高斯消元法解同解方程组；

法二：求导出方程组的基础解系，利用非齐次方程组解的结构求解

【例 4.10】 求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$

第五章 特征值与特征向量

知识图解



考试要求

1．理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量．

2．理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法．

3．掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质．

一、矩阵的特征值和特征向量

1. 特征值和特征向量的定义

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若存在数 λ 和 n 维**非零**列向量 $\boldsymbol{x}$ 使 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ 成立，即 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，此时，非零解 x 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值λ的特征向量.

注：由定义，λ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\Leftrightarrow$ $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，这时，齐次方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\-3&2&2\\-2&-3&6\end{bmatrix}$，有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，故 $\lambda=1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda=1$ 特征向量.

【例 5.1】 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称阵，各行元素之和均为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^T$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

2. 特征多项式和特征方程

关于 λ 的 n 次多项式

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**（也可写作 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$），它的根称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征根**，$\boldsymbol{A}$ 的特征根即 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**.

3. 求具体矩阵的特征值和特征向量

第一步 解特征方程$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，求$\boldsymbol{A}$的特征值

第二步 对于每个特征值，解$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$得对应特征向量（基础解系即为对应无关特征向量，全部非零解即为对应全部特征向量）

【例 5.2】 求$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 6\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$的特征值.

注：上（下）三角的特征值为主对角线元素.

【例 5.3】 求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$的全部特征值与特征向量.

4. 特征值和特征向量的有关性质

1）设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量，则非零向量 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量.

2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于不同特征值的特征向量线性无关.

【证明】设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2\ (\lambda_1\neq\lambda_2)$ 的特征向量，

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，两端以 $\boldsymbol{A}$ 左乘得 $k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=k_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$ (1)

两端乘 λ_1，得 $k_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$ (2)

$(1)-(2)$ 得 $k_2(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$. 由于 $\lambda_2-\lambda_1\neq 0,\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}\Rightarrow k_2=0$

由 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，故可得 $k_1=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，得证.

推论 1： $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 s 个不同特征值的特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

推论 2： 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

【证明】

反证法，设 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\mu(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2\Rightarrow(\mu-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\mu-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，有 $\mu-\lambda_1=\mu-\lambda_2=0$，即 $\mu=\lambda_1=\lambda_2$，与条件矛盾.

3）k 重特征值至多有 k 个（至少有 1 个）线性无关的特征向量；

4）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则有 $tr(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$，$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$；

推论：$\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $\lambda_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$

【例】$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=0$

对比常数项 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\boldsymbol{A}|$

对比 λ^2 系数得 $a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$

【例 5.4】 “0 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值”是“$\boldsymbol{A}$ 不可逆”的（　　）

（A）充分条件　（B）充要条件　（C）必要条件　（D）无关条件

5）设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是对应特征向量：

① $f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_0\boldsymbol{E}$，则 $f(\lambda)$ 为 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值，对应特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$.

注：

a）由①可知，若 $f\left(\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ 都满足方程 $f(\lambda)=0$（即特征值只能取 $f(\lambda)=0$ 的解），但 $f(\lambda)=0$ 的解不一定都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

b）有以下常用结论成立（设 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$）：

- $a\boldsymbol{E}+b\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $a+b\lambda_1,a+b\lambda_2,\cdots,a+b\lambda_n$；
- $\boldsymbol{A}^m$ 的全部特征值为 $\lambda_1^m,\lambda_2^m,\cdots,\lambda_n^m$；

②若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\lambda\neq 0$，且 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，对应特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$；

④ 若 $\lambda\neq 0$，则 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值，对应特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$；

④若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则 λ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，对应特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

6） n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}^T$ 有相同的特征值，但对应的特征向量不一定相同.

【例 5.5】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶可逆矩阵，其逆矩阵的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，则

1） $\boldsymbol{A}$ 的特征值为________________；

2） $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为________________；

3） $\left|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*\right|$ 的值为________________.

【例 5.6】 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 $a(a\neq 0)$ 且 $|\boldsymbol{A}|=2a$，则 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^*+2\boldsymbol{A}^*-4\boldsymbol{E}$ 的一个特征值为___________.

【例 5.7】 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一特征值为 3，且 $tr\left(\boldsymbol{A}\right)=|\boldsymbol{A}|=6$,求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值.

二、相似矩阵及其性质

1. 相似矩阵的定义

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，满足

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

2. 矩阵相似的性质

若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则

① $f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$（$f(x)$ 为多项式），$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$（若可逆），$\boldsymbol{A}^T\sim\boldsymbol{B}^T$，$\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$；

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$.

② $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\ |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|,\ r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B}),\ tr(\boldsymbol{A})=tr(\boldsymbol{B})$；

若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\sim\boldsymbol{D}$，则 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}$

【例 5.8】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&x&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{bmatrix}$ 相似，则

$x=$______, $y=$_______ .

【例 5.9】 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值 $0,1,2,\cdots,n-1$，且方阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似，则 $|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|=$__________.

三、矩阵可相似对角化的充要条件

1. 相似对角化的定义

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化，记为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，称 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形.

注：

1) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$ 时，$\boldsymbol{\Lambda}$ 主对角线上的元素即为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

2) $\boldsymbol{P}$ 的各列向量为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量，且顺序与 λ_i 对应.

【例 5.10】 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵，$r(\boldsymbol{A})=2,\ \boldsymbol{A}^2=3\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为________.

【例 5.11】 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}^{10}=$__________.

A. $\boldsymbol{E}$　　B. $\boldsymbol{A}$　　C. $-\boldsymbol{E}$　　D. $10\boldsymbol{E}$

2. 矩阵可相似对角化的充要条件

$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 恰有 n 个线性无关的特征向量；

$\Leftrightarrow$ 对于 $\boldsymbol{A}$ 的每个 k_i 重特征值 λ_i，都有 k_i 个无关特征向量；

$\Leftrightarrow$ 对于 $\boldsymbol{A}$ 的每个 k_i 重特征值 λ_i，$n-r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=k_i$

3. 矩阵可相似对角化的充分条件

①n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值 $\Rightarrow \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$（高频）

②n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵 $\Rightarrow \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$（高频）；

【例 5.12】 判断下列矩阵是否可相似对角化

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

4. 相似对角化的步骤（求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$）

第一步 解矩阵方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，求 $\boldsymbol{A}$ 所有的特征值和对应特征向量；

第二步 将 $\boldsymbol{A}$ 的特征值作为主对角元写成对角阵，即为 $\boldsymbol{\Lambda}$，对应特征向量作为列向量，依次按顺序排成 $\boldsymbol{P}$.

注：由上述过程可知，相似变换阵 $\boldsymbol{P}$ 实际上由若干方程组的基础解系组成. 由于方程组的基础解系不唯一，因此 $\boldsymbol{P}$ 不唯一.

【例 5.13】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ ，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵.

【例 5.14】 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 1，1，2，与之对应的三个线性无关的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ ，令 $\boldsymbol{\Lambda}=diag(1,1,2)$，则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 的相似变换阵 $\boldsymbol{P}=$（　　）.

（A）$(2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})$　（B）$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$　（C）$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})$　（D）$(2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$

四、实对称矩阵及其性质

1. 实对称矩阵的定义

对于实矩阵$\boldsymbol{A}$，若$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，则$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵.

2. 正交矩阵

1）定义：若n阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，称$\boldsymbol{A}$是正交矩阵；

2）性质：

①$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，则$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T$；

②正交矩阵的行列式等于 1 或-1；

③正交矩阵的行（列）向量长度均为 1，且行（列）向量两两正交..

证：设正交矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$，由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{E}$有

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

有$\begin{cases} a_1^2+a_2^2+a_3^2 & =1 \\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & =0 \\ a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 & =0 \end{cases}$，$\begin{cases} b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3 & =0 \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2 & =1 \\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 & =0 \end{cases}$，$\begin{cases} c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3 & =0 \\ c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3 & =0 \\ c_1^2+c_2^2+c_3^2 & =1 \end{cases}$

若令$\alpha_1=(a_1,a_2,a_3)^T$，$\alpha_2=(b_1,b_2,b_3)^T$，$\alpha_3=(c_1,c_2,c_3)^T$

$$\text{即}\begin{cases} \alpha_1^T\alpha_1=1 & \alpha_1^T\alpha_2=0 & \alpha_1^T\alpha_3=0 \\ \alpha_1^T\alpha_2=0 & \alpha_2^T\alpha_2=1 & \alpha_2^T\alpha_3=0 \\ \alpha_1^T\alpha_3=0 & \alpha_2^T\alpha_3=0 & \alpha_3^T\alpha_3=1 \end{cases} \quad \square$$

3. 实对称矩阵的$\boxed{\text{特性}}$（背）：

1）特征值全是实数，特征向量均为实向量；

2）必能相似对角化，且存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$；

注：能通过正交矩阵$\boldsymbol{Q}$相似对角化的矩阵一定是对称矩阵，非对称矩阵一定不能

通过正交矩阵$\boldsymbol{Q}$相似对角化.

（由$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^T=\left(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^T\right)^T=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{A}$）

3）不同特征值的特征向量必定**正交**；

【证明】设$\lambda_1\neq\lambda_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$，有$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^T=\left(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1\right)^T=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1\right)^T=\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{A}$两端以$\boldsymbol{\alpha}_2$右乘，得$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1^T\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2$，故$\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2=0$，即$\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2=0$，得证.

4）k重特征值必定有k个线性无关的特征向量；

5）非零特征值的个数（重根按重数计）等于矩阵的秩.

【例 5.15】 设$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\5\\a\end{pmatrix}$分别是属于$\boldsymbol{A}$的相异特征值$\lambda_1$与$\lambda_2$的特征向量，则$a=$__________.

4. 实对称阵的正交相似对角化（求正交阵$\boldsymbol{Q}$和对角阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$）

第一步 求$\boldsymbol{A}$所有的特征值和对应特征向量；

第二步 将属于同一特征值的特征向量正交化，再将所有特征向量单位化；

第三步 写出$\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{\Lambda}$.

施密特（Schmidt）正交化方法

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$无关

令$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\quad\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{\left(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\right)}{\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\right)}\boldsymbol{\beta}_1$，$\quad\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\dfrac{\left(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1\right)}{\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\right)}\boldsymbol{\beta}_1-\dfrac{\left(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2\right)}{\left(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\right)}\boldsymbol{\beta}_2$；

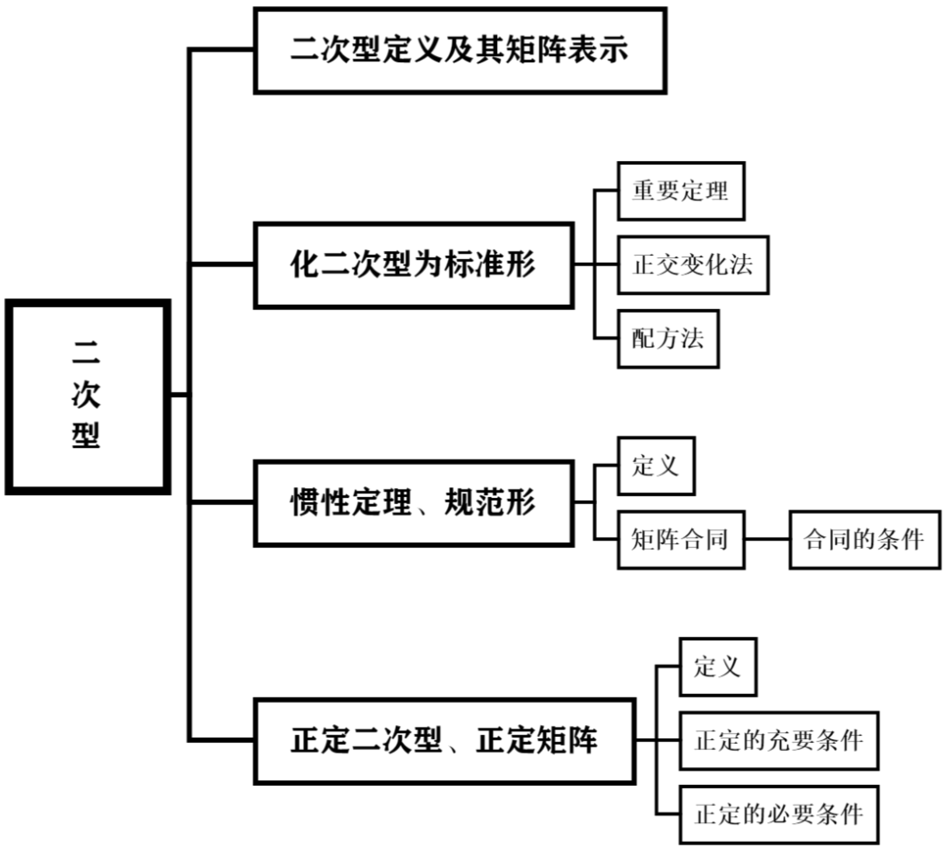
则向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$两两正交，且与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$等价，这一过程称为*Schmidt* **正交化.**

注：线性无关向量组正交规范化后得到的结果不唯一.

【例 5.16】 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵.

第六章 二次型

知识图解



考试要求

1．掌握二次型及其矩阵表示，了解二次型秩的概念，了解合同变换与合同矩阵的概念，了解二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理．

2．掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，会用配方法化二次型为标准形．

3．理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法．

一、二次型及其矩阵表示

1. 二次型： 含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \text{，}$$

其中 $a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$，称为 n 元二次型，简称二次型.

由此推导出二次型的矩阵形式：

$$\begin{aligned}
f &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\
&= x_1\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right) + x_2\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\right) + x_3\left(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\right) \\
&= \left(x_1, x_2, x_3\right)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} \\
&= \left(x_1, x_2, x_3\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

2. **二次型的矩阵：**

二次型可改写成矩阵向量形式

$$f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\text{，}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)^T$， $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$为对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 称为**二次型 f 的矩阵**， $\boldsymbol{A}$ 的秩称为**二次型 f 的秩**.

注： 二次型与对称矩阵之间存在一一对应的关系，f 称为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型.

【例 6.1】 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2tx_2x_3$ 的秩为 2，则 $t =$__________.

【例 6.2】 试求二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}1&0&3\\4&-1&2\\3&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$.

3. 可逆线性变换：

如果

$$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\ldots+c_{1n}y_n\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\ldots+c_{2n}y_n\\\cdots\\x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\ldots+c_{nn}y_n\end{cases}\qquad (*)$$

满足 $|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$ ，称（＊）为从变量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$ 到 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$ 的可逆线性变换，记作 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ ，其中 $\boldsymbol{C}$ 可逆.

注： 若 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵，则称 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 为正交变换.

二、化二次型为标准形

1. 标准形

如果二次型中只含有变量的平方项，即

$$f=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\ldots+d_ny_n^2,$$

称为二次型 f 的**标准形**.

注：

1）二次型 f 的标准形的矩阵为对角矩阵.

2）二次型 f 的标准形不是唯一的，与所做的可逆线性变换有关.

2. ★重要定理

1）n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$（其中 $\boldsymbol{C}$ 为可逆阵）化为 y 的 n 元二次型 $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$（与原二次型的矩阵合同）；

矩阵表述：任一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 也是实对称矩阵.

2）任一个 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，都可以通过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$（其中 $\boldsymbol{C}$ 为可逆阵）化为标准形 $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，即

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=d_1{y_1}^2+d_2{y_2}^2+\cdots+d_n{y_n}^2 \text{（其中 } d_i \text{ 为实数）}$$

矩阵表述：任一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$，即必有 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 合同.

3）任一个 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，都必存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$（$\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵），使得该二次型化为标准形

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lambda_1{y_1}^2+\lambda_2{y_2}^2+\cdots+\lambda_n{y_n}^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

矩阵表述：任一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，必存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

3. 正交变换化二次型为标准形

【例 6.3】 设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$，试写出二次型的矩阵，并用正交变换法将 f 化为标准形.

4. 计算：通过配方法化二次型为标准形

【例 6.4】 用配方法将二次型

$$f=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$$

化为标准形，并写出所用的可逆线性变换矩阵.

三、惯性定理、二次型的规范形

1. 惯性指数

设二次型的标准形为

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

其中，正平方项的个数称为**正惯性指数**，用 p 表示；负平方项的个数称为**负惯性指数**，用 q 表示.

2. 惯性定理

对一个二次型，虽然选取不同可逆线性变换得到的标准形不唯一,但标准形平方项系数中,正平方项的个数 p 和负平方项的个数 q 是由原二次型唯一确定的. 事实上，在可逆线性变换下，二次型的**秩，正、负惯性指数，正定性**都保持不变.

推论：

对于二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $r(\boldsymbol{A}) = p + q$，即实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $p+q$ 个非零特征值.

3. 二次型的规范形

二次型的规范形的定义：当标准形中的系数 d_i 为 1，-1 或 0 时,则称其为二次型的规范形.

定理：任一实二次型 f 都可经可逆线性变换化为规范形.

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

其中，r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩；p 为正惯性指数；$r-p$ 为负惯性指数，且规范形唯一.

【例 6.5】 二次型 $f = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 的规范形 $f =$________，秩是________，正惯性指数是________，负惯性指数是________.

4. 矩阵的合同：

1）合同的定义：设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵,若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{C},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

2）关于合同的命题

①任一实对称矩阵合同于一个对角矩阵

② 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 有相同的正负惯性指数.

③ 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同 $\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$， $\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}^T$ 合同， $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 合同.

④ 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

【例 6.6】 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ 是否等价、相似、合同？

四、正定二次型、正定矩阵

1. 二次型正定（对称矩阵 A 正定）

定义 设二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，如果对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 都有

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,$$

则称 f 为**正定二次型**，并称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**正定矩阵.**

2. 二次型 f 正定（实对称矩阵 A 正定）的充要条件

$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定

$\Leftrightarrow$ 对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 恒有 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$（定义，证 f 正定常用）；

$\Leftrightarrow$ $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准形的 n 个系数全大于 0；

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 合同于单位矩阵，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$；

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数 p 等于其阶数 n;

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都是正数（证 f 正定常用）；

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于 0（证 f 正定常用）.

推论： 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，则 $f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_0\boldsymbol{E}$（其中 $a_i\geq 0$ 且不全为 0）， $\boldsymbol{A}^{-1}$， $\boldsymbol{A}^*$ 都是正定矩阵.

3. 二次型 f 正定（实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定）的必要条件

$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定$\Rightarrow$

①$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵；

②$a_{ii}>0,\ \forall i$（常用）；

③$|\boldsymbol{A}|>0$（常用），从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆;

③ $\boldsymbol{A}$ 中最大的数落在主对角线上.

【例 6.7】 下列矩阵为正定的是（　　）

（A）$\begin{bmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　（B）$\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　（C）$\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&5&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$　（D）$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&2&5\end{bmatrix}$.

【例 6.8】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵，且 $\boldsymbol{A}^3+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$.试证：$\boldsymbol{A}$ 正定