湖州學院

HUZHOU COLLEGE

线性代数

Linear Algebra

期末复习

佴炜（电子信息学院）

niwei@zjhzu.edu.cn

主要内容

1 选择题

2 计算题

3 综合题

选择题

- 有一定难度，功在平时，小题大做
  （建议考试的时候先做大题，更贴近作业，最后做选择题）
- 难度最大类似我们第二章B类题中做过的2-3、2-13等
- 2-3. 设A，B均为n阶方阵，则必有（　　）。
  （A） $|A+B| = |A| + |B|$
  （B） $AB = BA$
  （C） $|AB| = |BA|$
  （D） $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
- 2-13. 若A为三阶方阵，且$|A|=1/2$，求$|(3A)^{-1} - 2A^*|$
- 解： $|A|=1/2$，故$r(A) = 3$， $A^* = |A|A^{-1}$
  $(3A)^{-1} - 2A^* = (1/3)A^{-1} - 2(1/2)A^{-1} = -(2/3)A^{-1}$
  故$|(3A)^{-1} - 2A^*| = |-(2/3)A^{-1}| = -(8/27)|A^{-1}| = -16/27$

- 2-11. 设方阵A满足$A^2 - A - 2E = 0$，证明：A及$A+2E$都可逆，并求A^{-1}及$(A+2E)^{-1}$
- 证明：由$A^2 - A - 2E = 0$，知$A(A-E) = 2E$
  故$|A|\,|A-2E| = |2E| \neq 0$，故$A$可逆
- 又$A + 2E = A^2$，因A可逆故A^2也可逆
  故$|A+2E| = |A^2| \neq 0$，故$A+2E$也可逆

- 解：由$A(A-E) = 2E$，知$A^{-1}A(A-E) = 2A^{-1}$
  故$A^{-1} = (A-E)/2$
- 由$A + 2E = A^2$，知$(A+2E)^{-1} = (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 = [(A-E)/2]^2$

主要内容

1. 选择题
2. 计算题
3. 综合题

■ 题型一：行列式计算

（参考1-8. 计算下列n阶行列式）

（1）$D_n=\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$

■ 解：考查的是对例11题型的掌握，这种行（列）和一样的题，不妨各行（列）加到第一行（列），再提公因子

$$D_n=[x+(n-1)]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix} \underline{\underline{r_n-r_1}} [x+(n-1)]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)](x-1)^{n-1}$$

■ 题型二：求代数余子式之和

（参考第一章【例16】设n阶行列式D_n求其第一行各元素的代数余子式之和 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$）

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

■ 解：充分理解行列式的意义，余子式的值和第一行是什么没关系，所以我们可以构造行列式来求所求之和

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\1&2&0&\dots&0\\1&0&3&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\dots&n\end{vmatrix}\xlongequal[(i\neq1)]{r_i-\frac{r_1}{i}}\begin{vmatrix}1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i}&1&1&\cdots&1\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

■ 题型三：矩阵运算

（参考2-3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

（1）计算$AB-2A$，$AB-BA$

■ 解：

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad -2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

■ 题型四： 求逆矩阵

（参考2-25. 利用初等变换求下列矩阵的逆矩阵）

$$(1)\begin{bmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{bmatrix}$$

■ 解： 对$(A\mid E)$作初等行变换

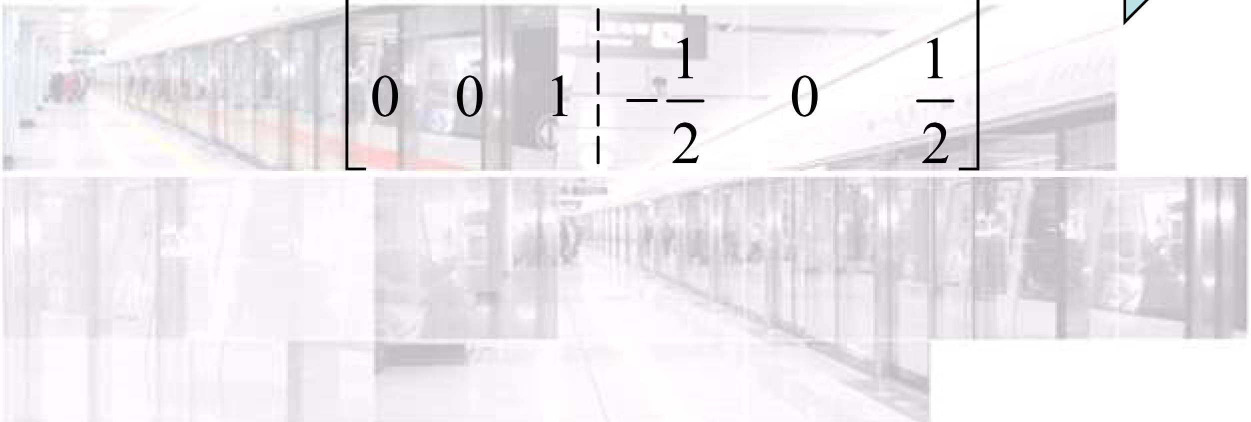
$$(A\mid E)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\3&1&5&0&1&0\\3&2&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r[3+1(-1)]]{r[2+1(-1)]}\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\0&-1&4&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r\left[3\left(\frac{1}{2}\right)\right]]{r[2(-1)]}\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\0&1&-4&1&-1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right]\xrightarrow[r[2+3(4)]]{r[1+3(-1)]}\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&2&0&\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&-1&2\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

计算题

$$
\left[\begin{array}{ccc:ccc}
3 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
\xrightarrow{r[1+2(-2)]}
\left[\begin{array}{ccc:ccc}
3 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{r\left[1\left(\frac{1}{3}\right)\right]}
\left[\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
\Rightarrow
\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix}
\frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\
-1 & -1 & 2 \\
-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}
\end{bmatrix}
$$



■ 题型五：求矩阵的秩

（参考2-26. 求下列矩阵的秩）

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

■ 解:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r(1,4)]{r\left[2\left(\frac{1}{2}\right)\right]} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r[4+2(-1)]]{r[3+2(1)]} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r(3,4)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r\left[3\left(\frac{1}{2}\right)\right]} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r[4+3(2)]} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

计算题

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
\xrightarrow{r\left[4\left(\frac{1}{3}\right)\right]}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\xrightarrow[r[3+4(-1)]]{r[1+4(1)]}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{r[2+3(1)]}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\xrightarrow[c[4+1(-1)]]{c[2+1(-1)]}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\xrightarrow{c[4+2(1)]}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

■ 故$r = 4$

■ 题型六：判断向量组线性相关性

（参考3-4. 判别下列向量组的线性相关性：）

（1）$\alpha_1 = (2, 5)$，$\alpha_2 = (-1, 3)$

（2）$\alpha_1 = (1, 2)$，$\alpha_2 = (2, 3)$，$\alpha_3 = (4, 3)$

■ （1）解：将α_1^{T}，α_2^{T}组成矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

■ 因为$\det A = 11 \neq 0$

■ $r(A) = 2$，故α_1，α_2线性无关

■ （2）解：将α_1^{T}，α_2^{T}，α_3^{T}组成矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

■ 因行数为2，$r(A)$最多为2

■ 又其二阶子式皆非零，故$r(A) = 2$

■ 向量的个数大于向量组的秩，所以α_1，α_2，α_3线性相关

■ 题型六：判断向量组线性相关性

（参考3-4. 判别下列向量组的线性相关性：）

（3）$\alpha_1 = (1, 1, 3, 1)$，$\alpha_2 = (4, 1, -3, 2)$, $\alpha_3 = (1, 0, -1, 2)$

■ 解：将α_1^T，α_2^T，α_2^T组成矩阵并实施初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -3 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & -15 & -4\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 5/3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

■ 可见$r(A) = 3$，故α_1，α_2，α_3线性无关

■ 题型六：判断向量组线性相关性

（参考3-4. 判别下列向量组的线性相关性：）

（4）$\alpha_1 = (1, 1, 2, 2, 1)$，$\alpha_2 = (0, 2, 1, 5, -1)$，$\alpha_3 = (2, 0, 3, -1, 3)$，$\alpha_4 = (1, 1, 0, 4, -1)$

■ 解：将α_1^T，α_2^T，α_3^T，α_4^T组成矩阵并实施初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\1&2&0&1\\2&1&3&0\\2&5&-1&4\\1&-1&3&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&2&-2&0\\0&1&-1&-2\\0&5&-5&2\\0&-1&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&4\\0&0&0&12\\0&0&0&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

■ 可见$r(A) = 3$，向量组中向量的个数大于向量组的秩

■ 故α_1，α_2，α_3，α_4线性相关

主要内容

1 选择题

2 计算题

3 综合题

综合题

- 题型一：向量组的极大线性无关组，线性表示

（参考3-12. 求下列向量组的一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示）

（1）$\alpha_1 = [1, 1, 3, 1]$，$\alpha_2 = [-1, 1, -1, 3]$，$\alpha_3 = [5, -2, 8, -9]$，$\alpha_4 = [-1, 3, 1, 7]$

- 解：还是将向量将α_1^T，α_2^T，α_3^T，α_4^T组成矩阵并作初等变换并化为行最简形矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

综合题

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

■ 由行最简形矩阵能看出，α_1，α_2为向量组的一个极大无关组:

$$\alpha_3 = \frac{3}{2}\alpha_1 - \frac{7}{2}\alpha_2, \quad \alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2$$

■ 题型一： 向量组的极大线性无关组，线性表示

（参考3-12. 求下列向量组的一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示）

（2）$\alpha_1 = [1, 1, 2, 3]$，$\alpha_2 = [1, -1, 1, 1]$，$\alpha_3 = [1, 3, 3, 5]$，$\alpha_4 = [4, -2, 5, 6]$，$\alpha_5 = [-3, -1, -5, -7]$

■ 解：还是将向量将α_1^T，α_2^T，α_3^T，α_4^T，α_5^T组成矩阵并作初等变换并化为行最简形矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

综合题

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■ 由行最简形矩阵能看出，α_1，α_2为向量组的一个极大无关组:

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2,\ \ \alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2,\ \ \alpha_5 = -2\alpha_1 - \alpha_2$$

■题型二：矩阵运算（带表达式）

（参考2-18. 设 $A=\begin{bmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}$，$AB=A+2B$，求$B$）

■解：由$AB=A+2B$，得$(A-2E)B=A$，而

$$|A-2E|=\begin{vmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

■即$A-2E$可逆，故

$$B=(A-2E)^{-1}A=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{bmatrix}$$

■ 题型三：无穷多解的线性方程组

（参考4-3. 解下列非齐次线性方程组：）

（2） $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

■ 解：对方程组的系数增广矩阵实施初等行变换

$$(A \mid b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r[2+1(-2)]]{r[3+1(-1)]} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

典型的有效方程不足
初步判断解的自由度为4 - 2 = 2

■ 得同解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_4 = 0 \\ -2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_4 = 0 \end{cases}$$

综合题

- 把x_2和x_3移到方程组右边
  并令$x_2 = c_1$，$x_3 = c_2$（c_1，$c_2 \in R$）

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

相当于把2个自由度
赋给了x_2和x_3（c_1和c_2）

- 最终，原方程的解可以写为（另加上$x_2 = c_1$，$x_3 = c_2$）

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2个自由度
的体现