3 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO DETERMINÍSTICOS E HEURÍSTICOS

Neste capítulo serão discutidos e apresentados os conceitos relacionados ao conceito de otimização, problemas de otimização, bem como as ferramentas matemáticas determinísticas e aos métodos heurísticos que foram utilizados para solucionar os problemas de otimização discutidos no capítulo 4.

O capítulo está subdividido em cinco seções: a primeira seção é introdutória e apresenta a formalização (enunciado formal) de um problema de otimização e uma classificação básica dos problemas de otimização quanto a natureza de suas equações e inequações, variáveis e funções. A segunda seção apresenta os conceitos relacionados à otimização convexa, desde a definição básica de convexidade para conjuntos e funções, até o método de decomposição dual de Lagrange (LAGRANGE, 1811). A terceira seção tem como foco os fundamentos de programação fracional não linear e, de forma mais específica, o método de Dinkelbach (DINKELBACH, 1967). Na quarta seção são apresentados os conceitos de teoria de jogos (VON NEUMANN; MORGENSTERN, 1944), equilíbrio de Nash (NASH, 1950b) e jogos não cooperativos (NASH, 1951). Finalmente, na última seção do capítulo são apresentados os métodos heurísticos utilizados neste trabalho: a otimização por enxame de partículas (do inglês, *particle swarm optimization*, PSO) (KENNEDY; EBERHART, 1995) e o algoritmo dos vaga-lumes (do inglês, *firefly algorithm*, FA) (YANG, 2008).

3.1 Problemas de Otimização

A otimização é um aspecto muito importante em todo problema que envolve tomadas de decisão, seja este um problema de engenharia, economia, logística, biologia ou qualquer outra área do conhecimento. Escolher a melhor alternativa dentre todas as possibilidades existentes ou possíveis sem necessariamente observar os resultados provenientes de cada alternativa em particular é o objeto de estudo de uma área da matemática conhecida como pesquisa operacional (BRADLEY; HAX; MAGNANTI, 1977; CHONG; ZAK, 2001).

Note que o conceito de melhor escolha ou melhor decisão está sempre atrelado a alguma função objetivo ou indicador de desempenho que avalia numericamente o quão boa uma alternativa é. Adicionalmente, a tomada de decisão pode ser submetida a restrições que devem ser satisfeitas alterando então o conjunto de possíveis alternativas (candidatas a solução) também conhecido como domínio do problema de otimização (NOCEDAL; WRIGHT, 2006; CHONG; ZAK, 2001). Um problema de otimização apresenta o seguinte formalismo (BOYD; VANDENBERGHE, 2004):

$$
\begin{array}{rll}
\text{minimizar} & f(\mathbf{x}) & \\
\text{sujeito à} & g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, & i = 1, \ldots, m \\
& h_i(\mathbf{x}) = 0, & i = 1, \ldots, k
\end{array}
\tag{3.1}
$$

No problema de otimização em (3.1) a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada função objetivo, o vetor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ é a variável de decisão, as funções $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $i = 1, \ldots, m$ são denominadas restrições de desigualdade do problema, as constantes b_i são os limites para cada restrição, e $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $i = 1, \ldots, k$ são as restrições de igualdade. Um vetor $\mathbf{x}^*$ é denominado ótimo ou solução do problema (3.1) se ele possui o menor valor de função objetivo entre todos os vetores que satisfazem as restrições, i.e. para qualquer $\mathbf{z}$ que satisfaça $g_1(\mathbf{z}) \leq b_1, \ldots, g_m(\mathbf{z}) \leq b_m$ e $h_1(\mathbf{z}) = \ldots = h_k(\mathbf{z}) = 0$ temos que $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{z})$. É importante observar também que embora a forma tradicional defina um problema de minimização como o em (3.1) o problema de maximização pode ser definido utilizando o negativo da função objetivo (CHONG; ZAK, 2001; BOYD; VANDENBERGHE, 2004).

Dentro do conjunto de todos os problemas de otimização existem diversas categorias que são identificadas por características específicas. De uma forma mais simples, os problemas de otimização podem, primeiramente, ser divididos em problemas de otimização contínuos e discretos: o primeiro quando as variáveis de decisão puderem assumir quaisquer valores no conjunto dos números reais, o segundo por sua vez quando as variáveis de decisão assumirem valores em um conjunto discreto, normalmente um subconjunto dos números inteiros (BRADLEY; HAX; MAGNANTI, 1977). Os problemas em (3.2) apresentam uma versão contínua e uma discreta do problema de otimização em (3.1).

$$\underbrace{\begin{array}{lll} \text{minimizar} & f(\mathbf{x}) & \\ \text{sujeito à} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, & i = 1, \ldots, m \\ & h_i(\mathbf{x}) = 0, & i = 1, \ldots, k \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n & \end{array}}_{\text{Problema de Otimização Contínuo}} \quad \underbrace{\begin{array}{lll} \text{minimizar} & f(\mathbf{x}) & \\ \text{sujeito à} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, & i = 1, \ldots, m \\ & h_i(\mathbf{x}) = 0, & i = 1, \ldots, k \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n & \end{array}}_{\text{Problema de Otimização Discreto}} \tag{3.2}$$

Em segundo lugar, os problemas de otimização podem ser classificados em com ou sem restrições. Problemas com restrição possuem m funções do tipo $g_i(\mathbf{x})$ de restrição de desigualdade e k funções do tipo $h_i(\mathbf{x})$ de restrição de igualdade, como é possível observar em (3.1), e podem abranger desde simples restrições até complexos sistemas de (in)equações que moldam a relação entre as variáveis de decisão. Problemas sem restrições por sua vez são muito comuns visto que problemas com restrição podem, muitas vezes, ser transformados em problemas sem restrição através do uso de um termo penalizador na função objetivo (ANTONIOU; LU, 2007).

O terceiro ponto a partir do qual emergem classes de problemas é quanto ao número de objetivos existentes no problema: nenhum, um ou vários objetivos. Os problemas de otimização sem objetivos normalmente envolvem a solução de sistemas de (in)equações e muitas vezes são tratados como casos especiais de problemas de otimização uni/multi-objetivo. Um exemplo deste caso é o problema linear complementar (MURTY, 1988) cujo primeiro algoritmo para solução foi desenvolvido em 1968 por Richard W. Cottle e George B. Dantzig (COTTLE; DANTZIG, 1968). Dado uma matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um vetor coluna $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, o problema linear complementar é encontrar $\mathbf{w} = [w_1, \ldots, w_n]^T$ e $\mathbf{z} = [z_1, \ldots, z_n]^T$ que satisfaçam:

$$\begin{cases} \mathbf{w} - \mathbf{M}\mathbf{z} = \mathbf{q} \\ \mathbf{w} \geq 0 \\ \mathbf{z} \geq 0 \\ w_i z_i = 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{3.3}$$

Note que no problema apresentado em (3.3) não há função objetivo. Adicionalmente, observa-se que as duas inequações e as duas equações representam restrições do problema. Não obstante, as definições enunciadas anteriormente da matrix $\mathbf{M}$ e do vetor $\mathbf{q}$ determinam que o problema em questão deve ser classificado como problema de otimização contínuo com restrições sem objetivo (MURTY, 1988; University of Wisconsin - Madison, 2013).

De forma análoga e com o intuito de diferenciar os casos uni-objetivo e multi-objetivo os seguintes problemas são apresentados (BRANKE et al., 2008):

$$\underbrace{\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito à} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, k \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{array}}_{\text{Problema de Otimização Uni-objetivo}} \qquad \underbrace{\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \{f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})\} \\ \text{sujeito à} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, k \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{array}}_{\text{Problema de Otimização Multi-objetivo}} \tag{3.4}$$

Note que no caso uni-objetivo apenas uma função deve ser minimizada enquanto no problema multi-objetivo existem n funções a serem minimizadas simultaneamente. É importante frisar que os objetivos podem ser conflitantes, o que implica que o vetor $\mathbf{x}$ que minimiza uma determinada função não é necessariamente o mesmo que minimiza outra função. De fato, em muitos problemas práticos, o vetor que minimiza uma determinada função do conjunto de objetivos pode ser exatamente o mesmo que maximiza outra função do mesmo conjunto.

A figura 13 sintetiza esta classificação simplificada para problemas de otimização.

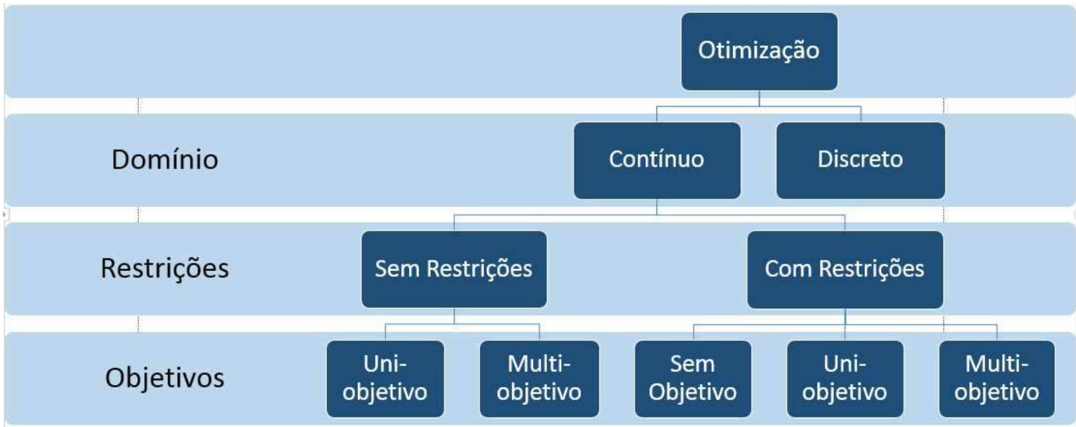

Figura 13: Classificação dos problemas de otimização de um ponto de vista simples considerando tipo de domínio, restrições e número de objetivos.

Este esboço a respeito da classificação dos problemas de otimização é simples e não considera outras características como a linearidade e convexidade, ou ainda, a não-linearidade e a não-convexidade. Adicionalmente, esta classificação não oferece a opção de classificação para um problema híbrido com variáveis de decisão contínuas e discretas de forma simultanea. Sendo assim, a subseção a seguir apresenta uma análise taxonômica dos diferentes tipos de problemas de otimização de forma mais completa que a apresentada anteriormente.

3.1.1 Taxonomia dos Problemas de Otimização

Para analisar de forma mais completa as diferentes classes de problemas de otimização, define-se primeiramente que apenas os problemas com objetivo único serão analisados. Em seguida, é possível separá-los em problemas discretos e contínuos, de tal forma que problemas discretos são compostos exclusivamente por variáveis de decisão discretas e nos problemas contínuos podemos considerar ambos os tipos de variável. Esta divisão inicial é apresentada na figura 14.

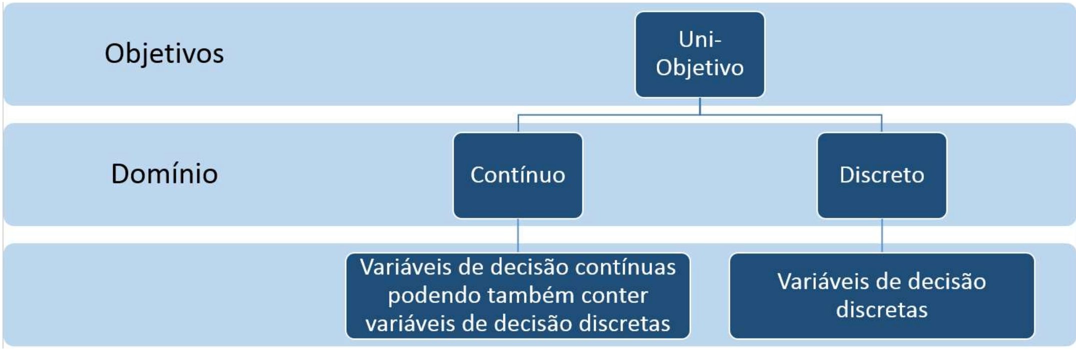

Figura 14: Classificação dos problemas de otimização acerca do tipo de domínio.

Os problemas de otimização discretos podem ser subdivididos em problemas de otimização combinatória e programação inteira. A diferença entre estes está na natureza do problema: enquanto as ferramentas que encontram a solução para problemas de otimização combinatória são utilizadas para qualquer conjunto discreto, as técnicas de programação inteira resolvem problemas cujo domínio são os números inteiros. É importante lembrar que, salvo exceções, os problemas de otimização combinatória podem ser reformulados como problemas de programação inteira e vice-versa (HAMMER; KORTE, 1979).

Uma vez que os problemas tratados nesta Tese não tem natureza puramente discreta, a classificação prosseguirá com ênfase no ramo dos problemas de otimização contínuos. Estes podem ser subdividos em problemas de otimização contínuos com restrição ou sem restrição da mesma forma como fora feito na seção anterior. Posteriormente, é possível classificar os problemas quanto a natureza de suas equações e inequações: para problemas sem restrição basta que a função objetivo seja linear para que o problema seja considerado linear, já quando o problema tem restrições este só será considerado linear se tanto a função objetivo quanto as restrições forem lineares, i.e. se as restrições e a função objetivo forem (in)equações lineares (VANDERBEI, 2000). A figura 15 sumariza estas informações do texto a partir da figura 14 até este ponto.

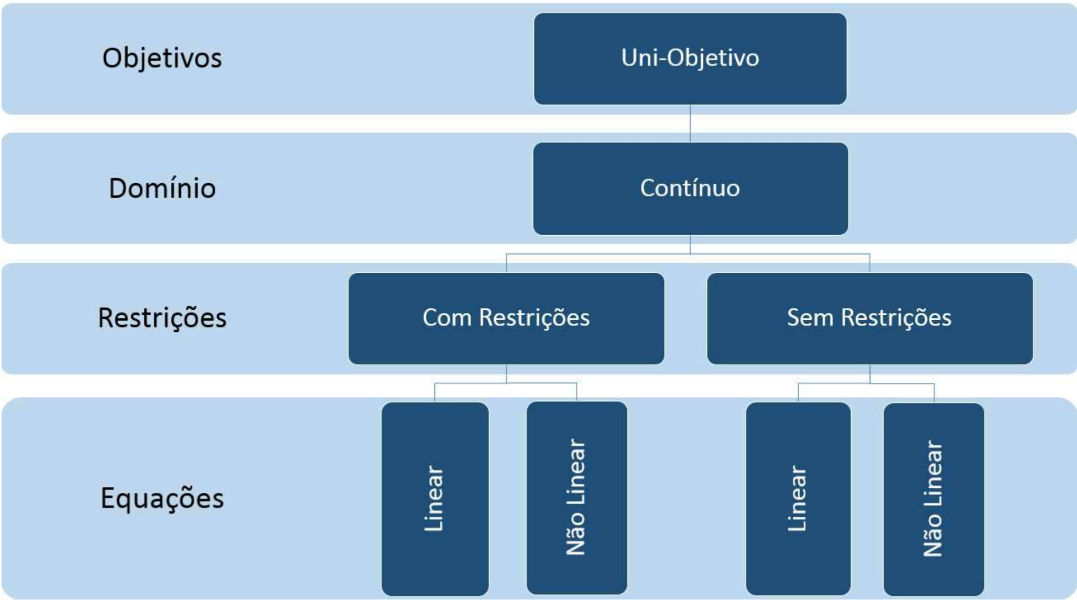

Figura 15: Classificação dos problemas de otimização acerca do tipo de domínio, restrições e linearidade.

Ainda quanto à natureza das equações e inequações os problemas de otimização com restrição ou sem restrição podem ser divididos quanto a sua convexidade. O conceito de convexidade pode ser conferido consultando os tópicos 2.1.4 na página 23 e 3.1.1 na página 67 em (BOYD; VANDENBERGHE, 2004) e são reproduzidos na seção "3.2 - Fundamentos de Otimização Convexa".

Note que os problemas de otimização são denominados convexos quando a função objetivo é convexa e o domínio do problema é um conjunto convexo, i.e. as equações de restrição definem um conjunto convexo. Sendo assim, considerando o problema de otimização genérico:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & f(\mathbf{x}) \\
\text{sujeito à} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
& h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, k
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

o mesmo será classificado como convexo se todas as funções f, $g_1, \ldots, f_m$ e $h_1, \ldots, h_k$ forem convexas (BOYD; VANDENBERGHE, 2004, 1.3, página 7). Portanto se adicionarmos esta classificação à taxonomia dos problemas de otimização presente na figura 15 com foco nos problemas contínuos, observar-se-á a classes de problemas apresentadas na figura 16:

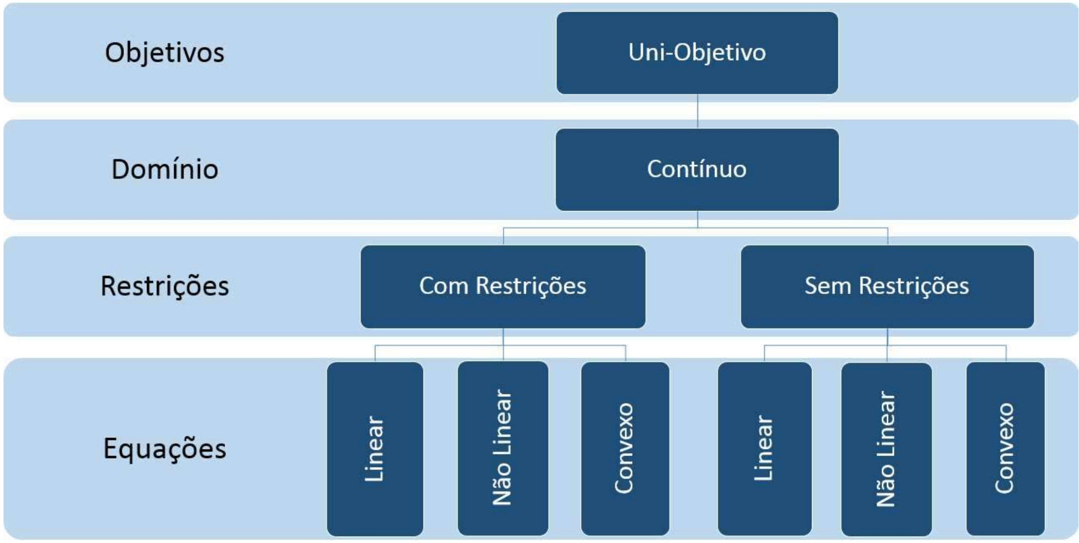

Figura 16: Classificação dos problemas de otimização acerca do tipo de domínio, restrições, linearidade e convexidade.

É importante frisar que a denominação do problema de otimização não linear é utilizada quando no problema de otimização a função objetivo e as restrições não forem lineares e não for possível determinar sua convexidade. Tal distinção é feita uma vez que não existem métodos eficientes para solucionar o problema de otimização não linear arbitrário, i.e. se as funções f, $g_1, \ldots, f_m$ e $h_1, \ldots, h_k$ em (3.5) forem não lineares e for impossível determinar sua convexidade, não existem métodos eficientes para solucionar o problema (BOYD; VANDENBERGHE, 2004, página 9).

Por fim, ainda é possível separar cada nó da árvore taxonômica da figura 16 quanto à presença ou ausência de variáveis discretas. Desta forma, problemas contínuos com ou sem restrições, lineares, não-lineares ou convexos, se possuirem pelo menos uma variável contínua, são denominados problemas de otimização inteiro misto (LEE; LEYFFER, 2011). Adicionalmente, deve-se notar que para cada tipo específico de problema existe uma sub-área da otimização matemática cujo foco do estudo são problemas com características específicas, e.g. os problemas do tipo uni-objetivo contínuos com restrições e linear foram profundamente estudados e podem ser solucionados eficientemente utilizando-se ferramentas de programação linear (VANDERBEI, 2000). Da mesma forma, problemas de otimização uni-objetivo contínuos e convexos (com ou sem restrição) foram exaustivamente estudados por pesquisadores da área de otimização convexa e uma gama de ferramentas eficientes estão disponíveis para solucioná-los (BOYD; VANDENBERGHE, 2004).

Note que esta classificação é importante para compreender as ferramentas apresentadas nesta Tese, uma vez que as mesmas podem ser utilizadas para solucionar apenas tipos específicos de problemas de otimização, i.e. as ferramentas podem ser aplicadas ao problema se o mesmo satisfizer todas as condições necessárias ao funcionamento da técnica. Desta forma, nas seções subsequentes serão apresentadas as ferramentas matemáticas e computacionais utilizadas para solucionar os problemas de otimização em sistemas de telecomunicações apresentados no capítulo 4.

3.2 Fundamentos de Otimização Convexa

Nesta seção serão abordados os conceitos relacionados à otimização convexa. O objetivo desta seção é discutir os problemas de otimização convexa e o método de decomposição dual de Lagrange (LAGRANGE, 1811) que será utilizado para solucionar problemas de otimização em telecomunicações no capítulo 4. Os fundamentos de análise convexa necessários à compreensão do conteúdo deste