Mathématiques

Vincent Arel-Bundock

1. Exposants
2. Logarithmes
3. Opérateur de somme: Σ
4. Calcul différentiel pour les nuls
    - Intuition
    - 4 règles simples
    - Maximisation
    - Exemples

Exposants


APPRÉHENSION
2. PHILOS. Acte par
pensée, comprend qqch.
APPRENANT, E n.
ment.
APPRENDRE v.t. [61]
1. Acquérir la connaissa
dre un métier, les mathé
connaissance, la pr
savoir, une inform
enfant. Il m'a app

Exposant: Exemples

Si z est la "base" de l'exposant, alors

$$z^3 = z \cdot z \cdot z$$

Exposant: Exemples

Si z est la "base" de l'exposant, alors

$$z^3 = z \cdot z \cdot z$$

$$z^0 = 1$$

Exposant: Exemples

Si z est la "base" de l'exposant, alors

$$z^3 = z \cdot z \cdot z$$

$$z^0 = 1$$

$$z^{1/2} = \sqrt{z}$$

Exposant: Exemples

Si z est la "base" de l'exposant, alors

$$z^3 = z \cdot z \cdot z$$

$$z^0 = 1$$

$$z^{1/2} = \sqrt{z}$$

$$z^{-a} = \frac{1}{z^a}$$

Exposant: Manipulation

$$z^a \cdot z^b = z^{a+b}$$

Exposant: Manipulation

$$z^a \cdot z^b = z^{a+b}$$

$$(z^a)^b = z^{a \cdot b}$$

Exposant: Manipulation

$$z^a \cdot z^b = z^{a+b}$$

$$(z^a)^b = z^{a \cdot b}$$

$$\frac{z^a}{z^b} = z^{a-b}$$

Exposant à base e

Un exposant important est celui à base e, où e représente la "constante de Néper":

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \approx 2,71828$$

Exposant à base e

Un exposant important est celui à base e, où e représente la "constante de Néper":

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \approx 2,71828$$

Nous avons donc

$$e^1 \approx 2,71828$$
$$e^2 \approx 7,38906$$

Logarithmes

Logarithme: Définition

Le logarithme de x à base b s'écrit $log_b(x)$. Il est égal à l'exposant y auquel il faut élever b pour obtenir x :

$$b^y = x$$

$$log_b(x) = y$$

Logarithme: Exemples

$$b^y = x$$

$$log_b(x) = y$$

$$log_b(b) = 1$$

$$10^3 = 1000 \implies log_{10}(1000) = 3$$

$$4^5 = 1024 \implies log_4(1024) = 5$$

$$8^0 = 1 \implies log_8(1) = 0$$

Logarithme à base e

L'expression ln est appellée "logarithme naturel" ou "logarithme népérien," et représente le logarithme à base e.

$$\begin{aligned} e^1 = e \qquad &\implies \qquad ln(e) = log_e(e) = 1 \\ e^3 \approx 20 \qquad &\implies \qquad ln(20) = log_e(20) \approx 3 \end{aligned}$$

Logarithme: Manipulation

3 règles:

1. $log_b(w \cdot z) = log_b(w) + log_b(z)$
2. $log_b(w/z) = log_b(w) - log_b(z)$
3. $log_b(w^z) = z \cdot log_b(w)$

Logarithme: Manipulation

Puisque que $log_{10}(10) = 1$, nous savons que:

$$log_{10}(100) = log_{10}(10 \cdot 10) = log_{10}(10) + log_{10}(10) = 1 + 1 = 2$$

Logarithme: Manipulation

Puisque que $log_{10}(10) = 1$, nous savons que:

$$log_{10}(100) = log_{10}(10 \cdot 10) = log_{10}(10) + log_{10}(10) = 1 + 1 = 2$$

$$log_{10}(100) = log_{10}(1000/10) = log_{10}(1000) - log_{10}(10) = 3 - 1 = 2$$

Logarithme: Manipulation

Puisque que $log_{10}(10) = 1$, nous savons que:

$$log_{10}(100) = log_{10}(10 \cdot 10) = log_{10}(10) + log_{10}(10) = 1 + 1 = 2$$

$$log_{10}(100) = log_{10}(1000/10) = log_{10}(1000) - log_{10}(10) = 3 - 1 = 2$$

$$log_{10}(100) = log_{10}(10^2) = 2 \cdot log_{10}(10) = 2 \cdot 1 = 2$$


Somme =

Somme: $\sum$

$$\sum_{i=1}^{4} 2 \cdot i$$

- *Sous* $\sum$: valeur de départ du compteur $\boldsymbol{i}$.
- *Au-dessus* de $\sum$: la valeur finale du compteur.
- *À droite* de $\sum$: additionnée à notre total toutes les fois que $\boldsymbol{i}$ change.

Somme: $\sum$

$$\sum_{i=1}^{4} 2 \cdot i$$

- *Sous* $\sum$: valeur de départ du compteur i.
- *Au-dessus* de $\sum$: la valeur finale du compteur.
- *À droite* de $\sum$: additionnée à notre total toutes les fois que i change.

La somme de $2 \cdot i$ pour toutes les valeurs de i entre 1 et 4.

Somme: $\sum$

$$\sum_{i=1}^{4} 2 \cdot i$$

- *Sous* $\sum$: valeur de départ du compteur i.
- *Au-dessus* de $\sum$: la valeur finale du compteur.
- *À droite* de $\sum$: additionnée à notre total toutes les fois que i change.

La somme de $2 \cdot i$ pour toutes les valeurs de i entre 1 et 4.

$$\sum_{i=1}^{4} 2 \cdot i = (2 \cdot 1) + (2 \cdot 2) + (2 \cdot 3) + (2 \cdot 4) = 20$$

Somme: Exemples

$$\sum_{i=1}^{6} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

Somme: Exemples

$$\sum_{i=1}^{6} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Somme et ensembles

Définissons la lettre $\mathbf{X}$ comme une ensemble de 4 éléments:

$$\mathbf{X} = \{4, 2, 7\}$$

Somme et ensembles

Définissons la lettre $\mathbf{X}$ comme une ensemble de 4 éléments:

$\mathbf{X} = \{4, 2, 7\}$

On peut référer à des éléments de cette ensemble en donnait un indice à X. Par exemple:

$$X_1 = 4$$

$$X_2 = 2$$

$$X_3 = 7$$

Somme et ensembles

L'opérateur de somme peut opérer sur des ensembles comme $\mathbf{X} = \{4, 2, 7\}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} 2 \cdot X_i &= (2 \cdot X_1) + (2 \cdot X_2) + (2 \cdot X_3) \\
&= (2 \cdot 4) + (2 \cdot 2) + (2 \cdot 7) \\
&= 26
\end{aligned}$$

Somme: Règle 1

L'opérateur de somme peut être manipulé à l'aide trois règles.

Pour toute constante $\boldsymbol{a}$,

$$\sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a$$

Somme: Règle 1

L'opérateur de somme peut être manipulé à l'aide trois règles.

Pour toute constante $\boldsymbol{a}$,

$$\sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a$$

Par exemple,

$$\sum_{i=1}^{3} 2 = 2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2$$

Somme: Règle 2

Toute constante a peut "glisser" à travers l'opérateur de somme:

$$\sum_{i=1}^{n} a \cdot X_i = a \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Somme: Règle 2

Toute constante a peut "glisser" à travers l'opérateur de somme:

$$\sum_{i=1}^{n} a \cdot X_i = a \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Par exemple, si $\mathbf{X} = \{0, 2, 4\}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} 5 \cdot X_i &= (5 \cdot 0) + (5 \cdot 2) + (5 \cdot 4) \\ &= 5 \cdot (0 + 2 + 4) \\ &= 30\end{aligned}$$

Somme: Règle 3

La somme d'une somme peut être séparée ainsi:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Somme: Règle 3

La somme d'une somme peut être séparée ainsi:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Par exemple, si $X = \{0, 4\}$ et $Y = \{1, 3\}$,

$$\sum_{i=1}^{2}(X_i + Y_i) = (0 + 1) + (4 + 3) = 8$$

$$\sum_{i=1}^{2} X_i + \sum_{i=1}^{2} Y_i = (0 + 4) + (1 + 3) = 8$$

La moyenne est une somme

La moyenne d'un ensemble $\mathbf{X}$ qui comprend n éléments s'écrit $\bar{\mathbf{X}}$ et se calcule:

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

La moyenne est une somme

La moyenne d'un ensemble $\mathbf{X}$ qui comprend n éléments s'écrit $\bar{\mathbf{X}}$ et se calcule:

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Par exemple,

$$\mathbf{X} = \{1, 2, 3\}$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} X_i = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = 2$$

Quatre observations

Calcul Différentiel

Plan

- Présentation *informelle* du calcul différentiel
- Intuition
- Utilité en sciences sociales
- 4 règles mécaniques simples (recettes)

Calcul différentiel

Question scientifique fondamentale:

> Si X augmente, est-ce que Y augmente, diminue, ou reste constante?

Fonction

> Une relation entre une ou plusieurs variables d'entrée et une variable de sortie.

Fonction

> Une relation entre une ou plusieurs variables d'entrée et une variable de sortie.

$$Y = f(X, Z)$$

X et Z sont les variables d'entrée, Y est la variable de sortie, et $f()$ est la fonction qui explique comment combiner X et Z pour produire Y.

Fonction

> Une relation entre une ou plusieurs variables d'entrée et une variable de sortie.

$$Y = f(X, Z)$$

X et Z sont les variables d'entrée, Y est la variable de sortie, et $f()$ est la fonction qui explique comment combiner X et Z pour produire Y.

Analogie culinaire: X et Z sont les ingrédients, $f()$ est la recette, et Y est le repas.

Fonction

$$Y = f(X, Z)$$

Cette équation est générique: la relation mathématique $f()$ qui lie X, Y, Z n'est pas définie explicitement.

Multitude de formes spécifiques:

$$Y = f(X, Z) = X^2 + Z$$

$$Y = f(X, Z) = \frac{X}{Z}$$

$$Y = f(X, Z) = ln(X) \cdot Z$$

Variables vs. Constantes

Variable:

> Un "objet" ou "symbole" mathématique qui peut représenter plusieurs valeurs numériques différentes.

Constante:

> Un "object" ou "symbole" mathémtique qui représente *une seule* valeur numérique.

Variables vs. Constantes

Variables:

- X, Y, Z, Heures d'ensoleillement, Calories ingérées, etc.

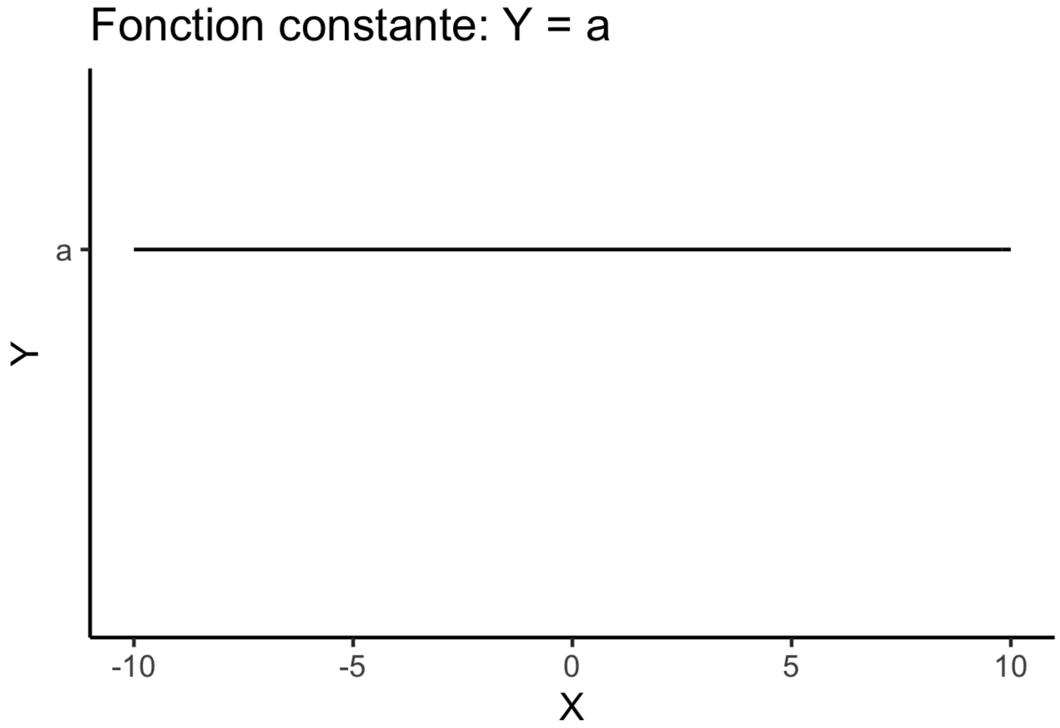
Constantes:

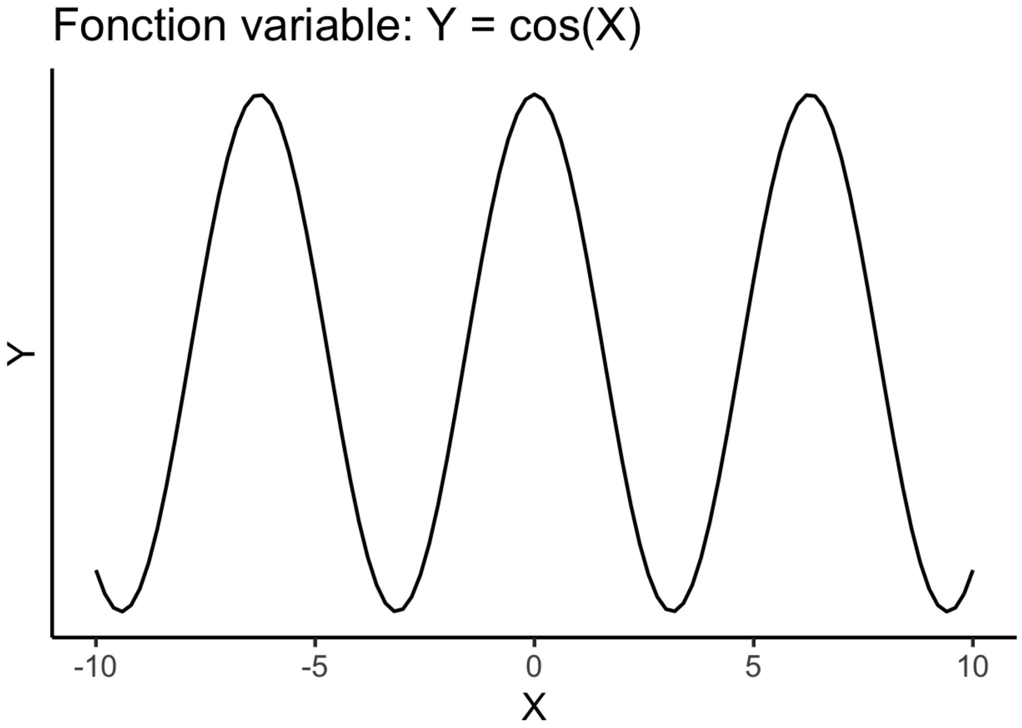
- 0, 5, π, Vitesse de la lumière.

Convention:

- Lettres majuscules représentent des variables: X
- Lettres minuscules représentent des constantes: a

Variables vs. Constantes





Certaines fonctions contiennent des variables *et* des constantes.

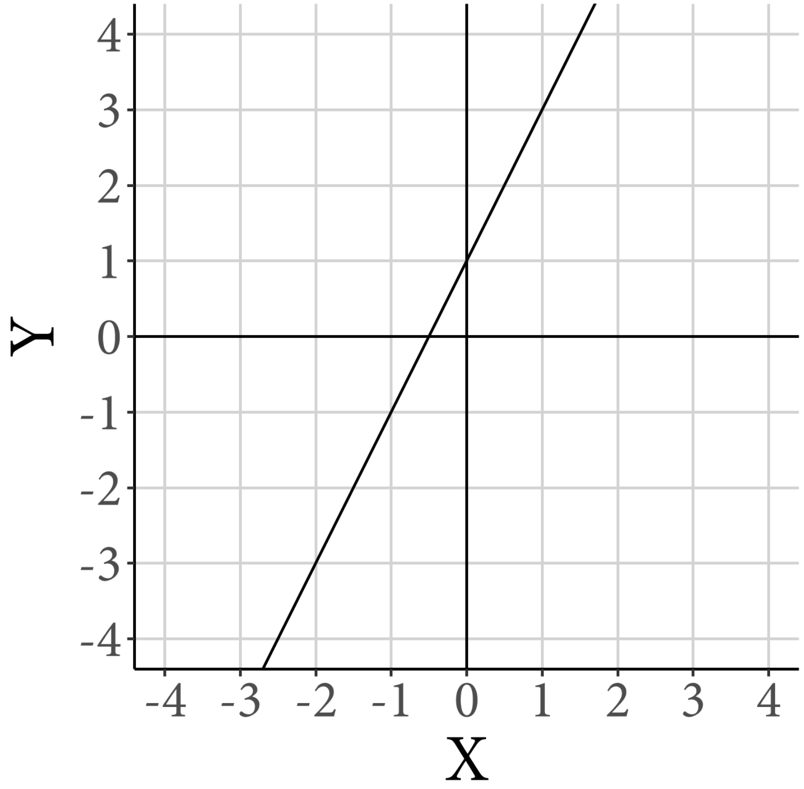
Fonction: Droite

Fonction importante: Droite

$$Y = a + bX,$$

- a: Ordonnée à l'origine
  - Hauteur de la droite lorsque $X = 0$
- b: pente
  - Mouvement vertical associé à un mouvement de 1 unité vers la droite

$$Y = 1 + 2X$$

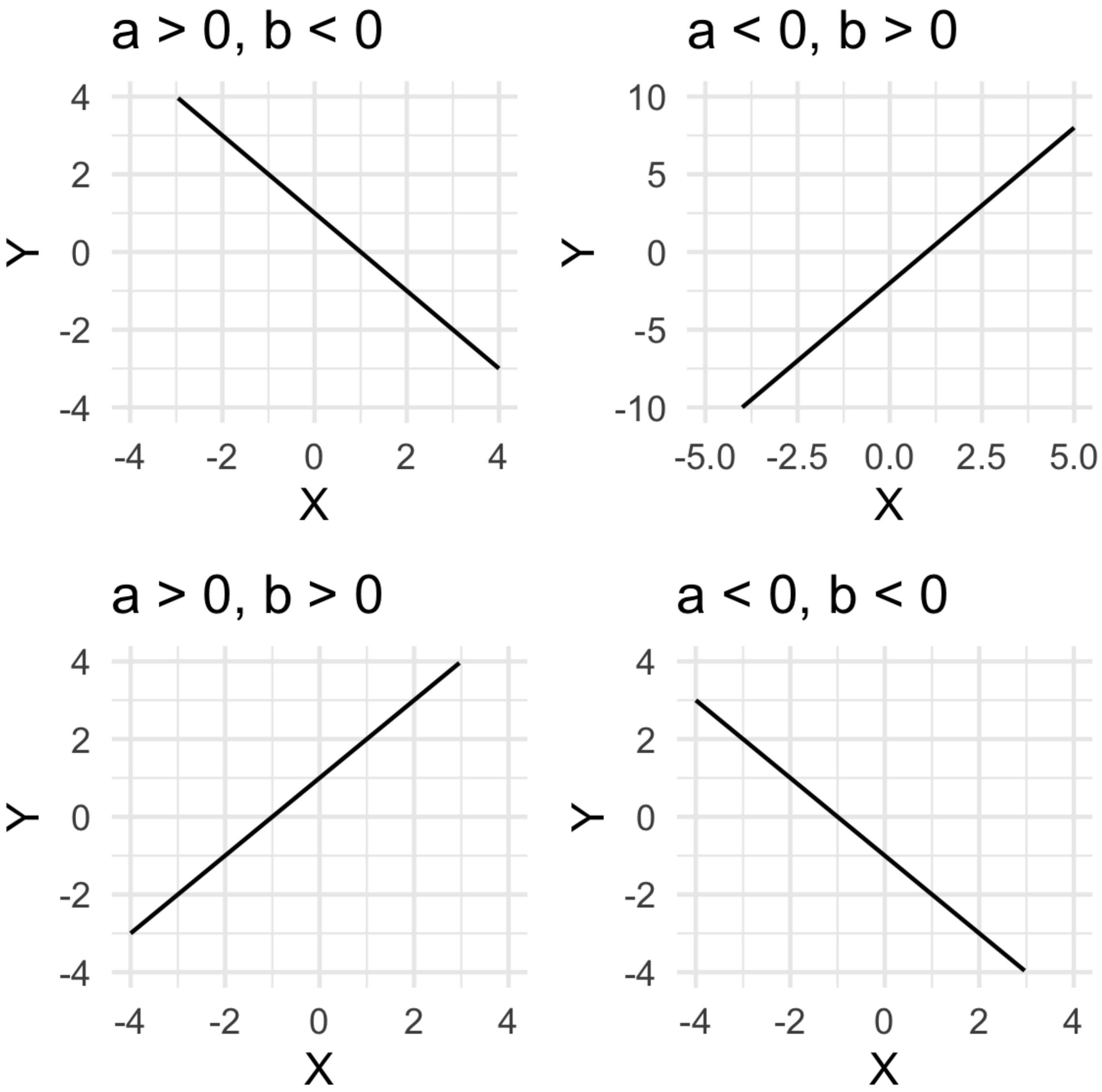


Fonction: Pente d'une droite

Si la pente est:

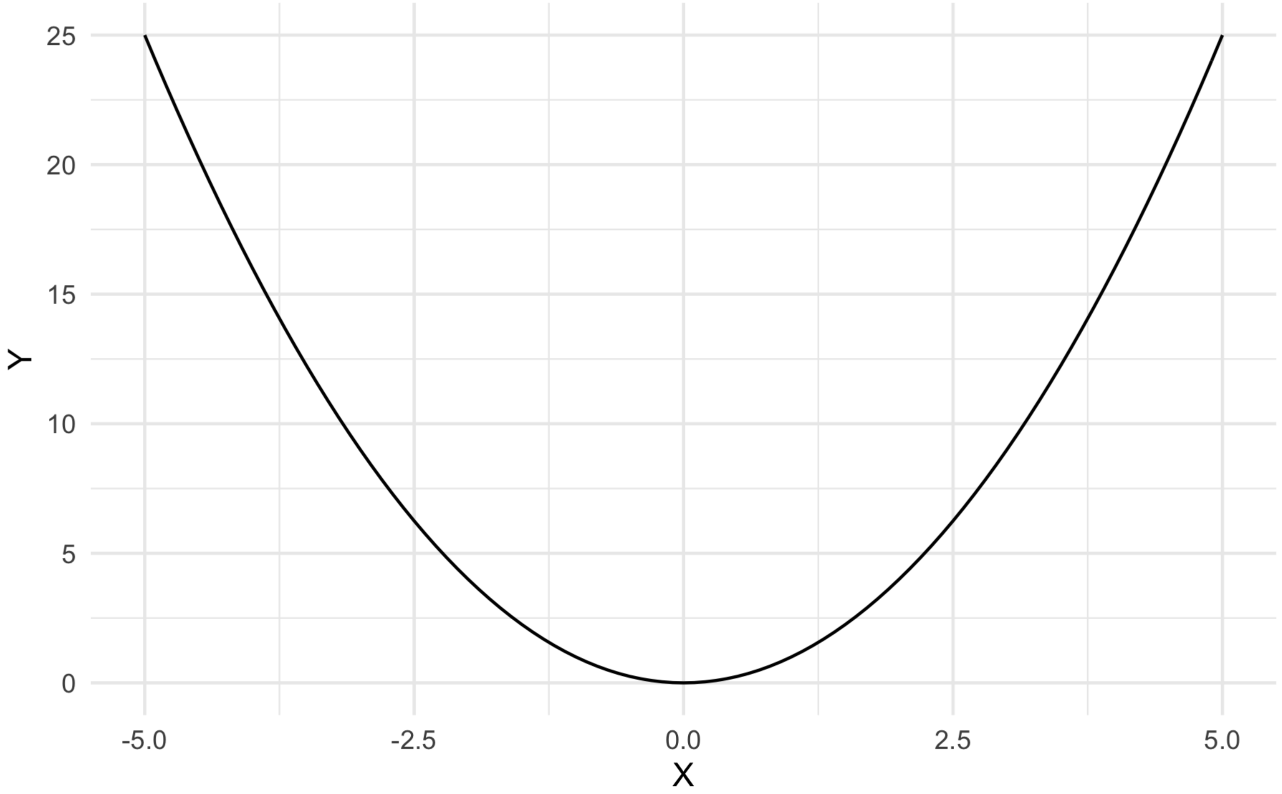
- Positive: $b > 0$
  - augmente lorsqu'on avance de gauche à droite.
- Négative: $b < 0$
  - diminue lorsqu'on avance de gauche à droite.
- Nulle: $b = 0$
  - droite horizontale.

$$Y = a + bX$$



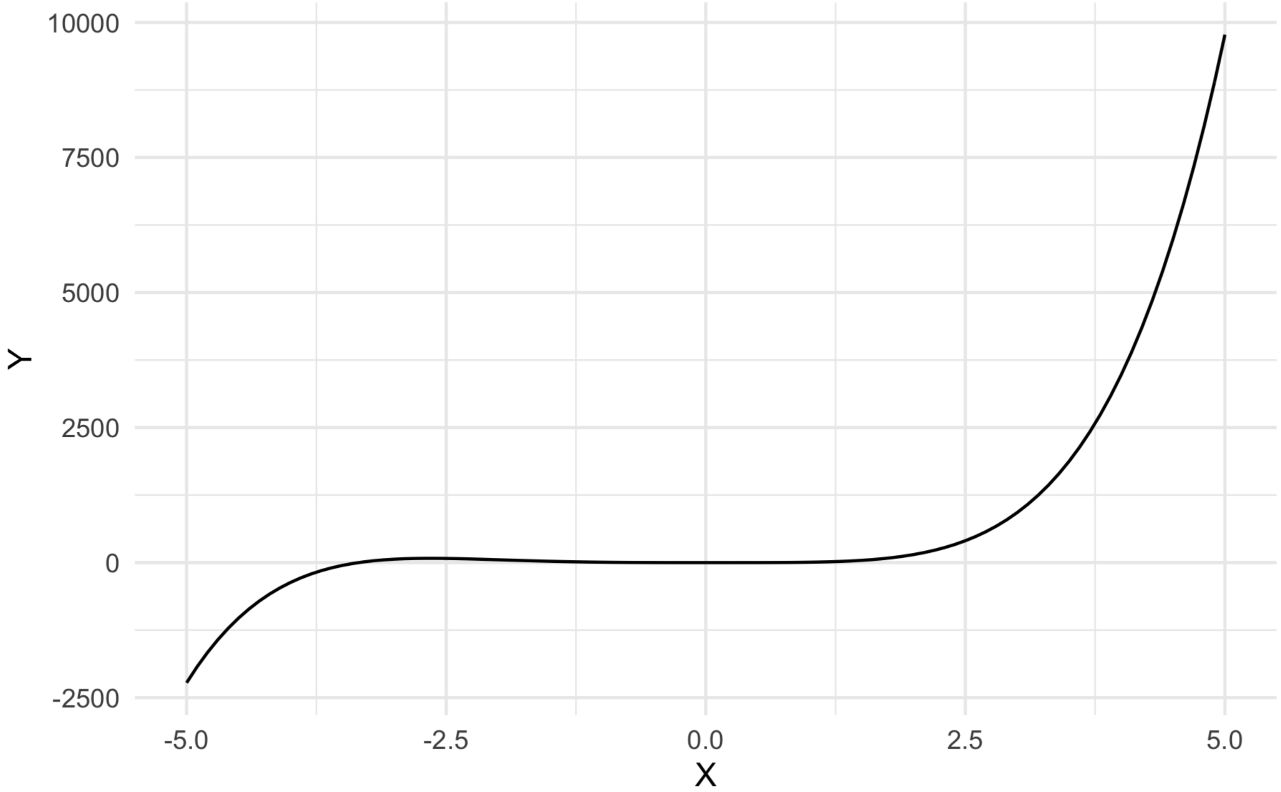
Fonction: Quadratique

$$Y = X^2$$



Fonction: Bizarre

$$Y = X^2 - 2X^3 + 6X^4 + 2X^5$$



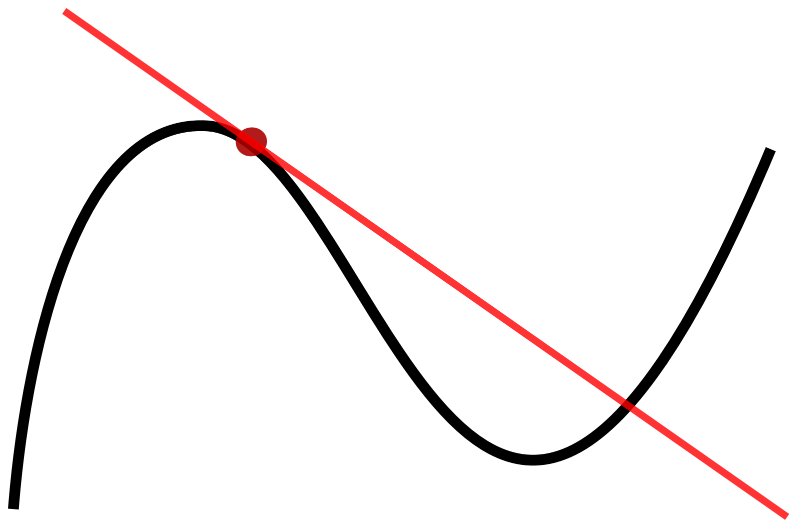
Tangente

Définition:

> Droite qui touche à un seul point d'une fonction.

Intuitif:

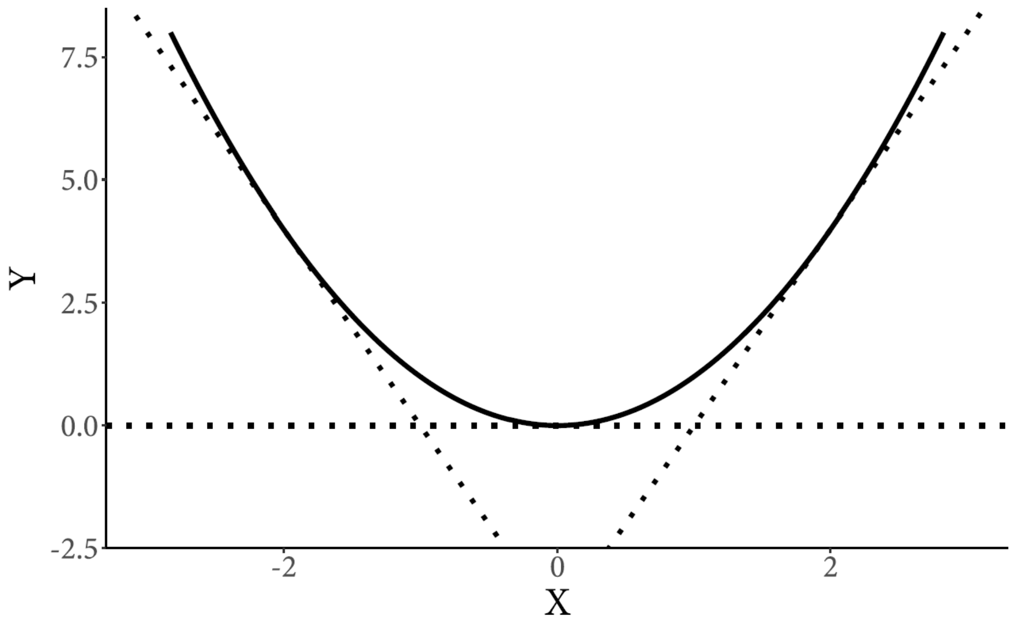
> Droite "perpendiculaire" à une région d'une fonction.



Tangente

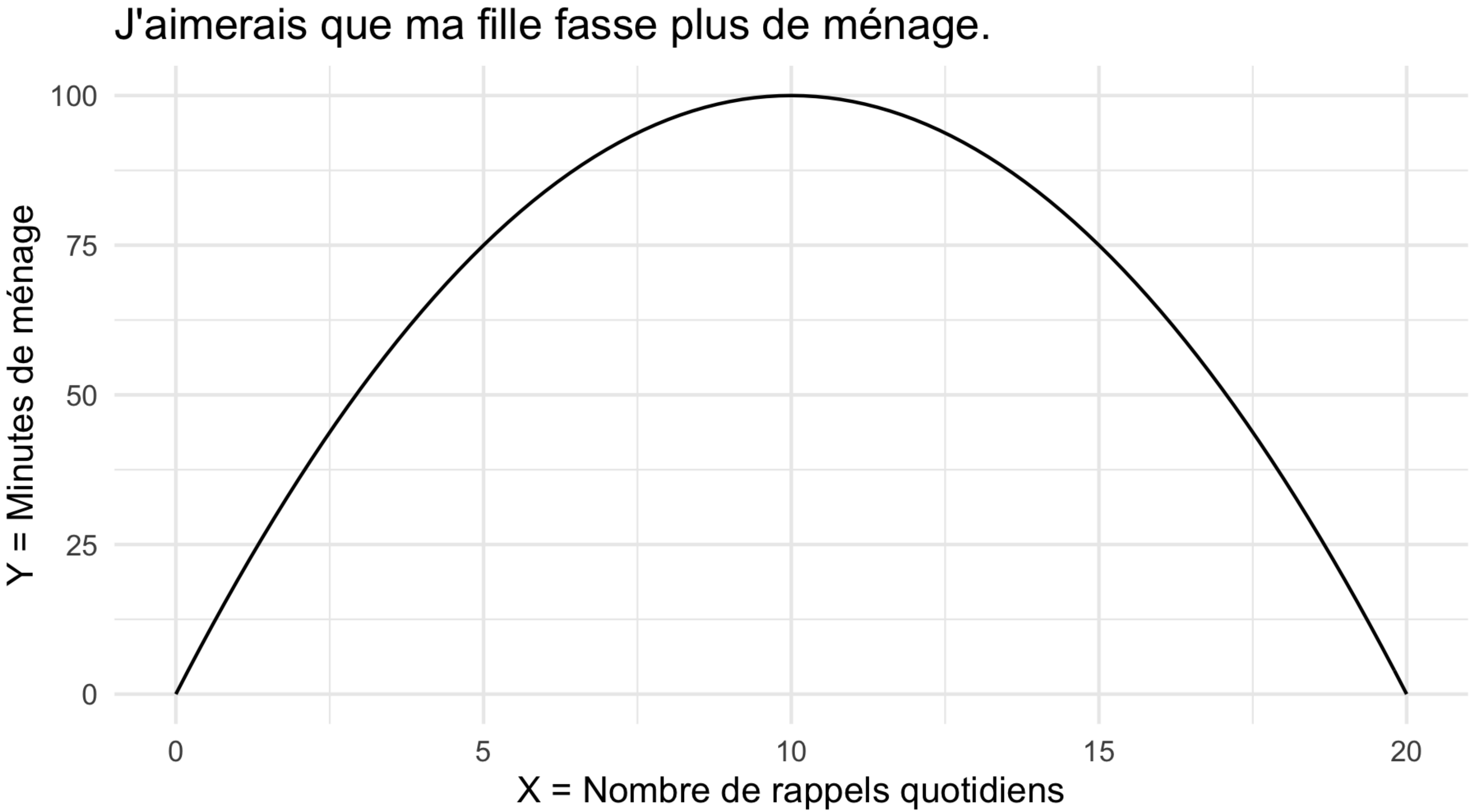
- Pente négative: Fonction diminue
  - ↑ de X est associée à ↓ de Y
- Pente nulle: Fonction plate
  - ↑ de X est associée à aucun changement de Y
- Pente positive: Fonction augmente
  - ↑ de X est associée à ↑ de Y

$$Y = X^2$$



Exemple: La chambre de ma fille

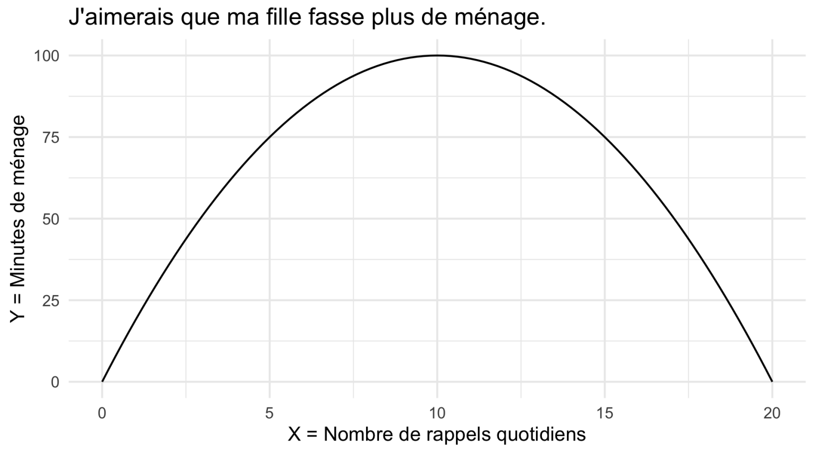
Exemple: La chambre de ma fille



Exemple: La chambre de ma fille

- Pente positive:
  - Rappels efficaces
- Pente nulle:
  - Rappels inefficaces
- Pente négative:
  - Rappels contre-productifs

Causes à effets = Pentes de fonctions



Calcul différentiel

Calcul différentiel:

> Règles qui permettent de trouver une seule équation qui caractérise la pente de toutes les tangentes possibles d'une fonction.

Nous permet de déterminer si Y augmente, diminue, ou reste constante pour toute valeur de X.

Dérivée

> Une équation qui représente la pente de toutes les tangentes possibles d'une fonction.

Dérivée

> Une équation qui représente la pente de toutes les tangentes possibles d'une fonction.

Si Y est une fonction de X, la dérivée s'écrit $\frac{\partial Y}{\partial X}$, et se dit "dérivée de Y par rapport à X."

Dérivée

> Une équation qui représente la pente de toutes les tangentes possibles d'une fonction.

Si Y est une fonction de X, la dérivée s'écrit $\frac{\partial Y}{\partial X}$, et se dit "dérivée de Y par rapport à X."

Interprétation:

- la pente de la tangente au point X
- la pente de la fonction autour du point X
- l'effet d'un petit changement dans X sur Y.

Dérivée partielle

Pour calculer la dérivée d'une fonction à plusieurs variables, il faut spécifier quelle relation nous intéresse.
Si,

$$Y = 2X + 4Z,$$

Alors,

- $\frac{\partial Y}{\partial X}$ représente l'effet de X sur Y
- $\frac{\partial Y}{\partial Z}$ représente l'effet de Z sur Y.

Dérivée partielle

Écrire $\partial Y/\partial X$ signalle que toutes les composantes d'une équation sont traitées comme des constantes, sauf X.

Si, $Y = a + bX + cZ^2$

alors $\frac{\partial Y}{\partial X}$ se dit:

> la dérivée de Y par rapport à X$

Cela indique que a, b, c, Z seront toutes traitées comme des constantes dans nos calculs.

Dérivée partielle: *Ceteris Paribus*

$\frac{\partial Y}{\partial X}$ représente l'effet d'un changement de X sur Y,

- "Toutes choses étant égales par ailleurs"
- Si toutes les autres variables demeurent constantes
- Si on "fixait" ou "contrôlait" les autres variables du modèle

Dérivée partielle: *Ceteris Paribus*

$\frac{\partial Y}{\partial X}$ représente l'effet d'un changement de X sur Y,

- "Toutes choses étant égales par ailleurs"
- Si toutes les autres variables demeurent constantes
- Si on "fixait" ou "contrôlait" les autres variables du modèle

$\frac{\partial Y}{\partial X}$ nous permet de:

- Tester des arguments *ceteris paribus*.
- "Contrôler" dans un modèle de régression multiple.

Quatre règles pour trouver la dérivée

Règle 1

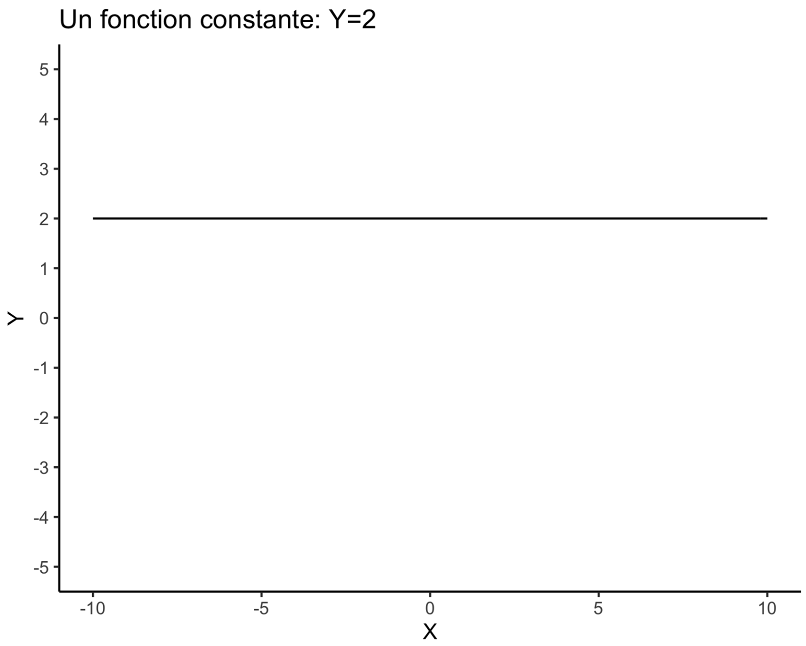
La dérivée d'une constante est 0

Fonction:

$$Y = 2$$

Dérivée:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = 0$$



Règle 2

La dérivée de zX^n par rapport à X est égale à nzX^{n-1}.

$$Y = 2X^4$$

$$\frac{\partial y}{\partial X} = 4 \cdot 2X^{4-1} = 8X^3$$

Règle 2

La dérivée de zX^n par rapport à X est égale à nzX^{n-1}.

$$Y = X^3$$

$$\frac{\partial y}{\partial X} = 3 \cdot 1X^{3-1} = 3X^2$$

Règle 2

La dérivée de zX^n par rapport à X est égale à nzX^{n-1}.

$$Y = X$$

$$\frac{\partial y}{\partial X} = 1 \cdot X^{1-1} = X^0 = 1$$

Règle 2

La dérivée de zX^n par rapport à X est égale à nzX^{n-1}.

$$Y = 2X$$

$$\frac{\partial y}{\partial X} = 2X^0 = 2$$

Règle 3

La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.

Si nous avons

$$Y = Z + X + 2X^3$$

Alors,

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = 0 + 1 + 6X^2$$

$$\frac{\partial(Z)}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial(X)}{\partial X} = 1$$

$$\frac{\partial(2X^3)}{\partial X} = 6X^2$$

Règle 4: Dérivation en chaîne

> La dérivée de deux fonctions imbriquées l'une dans l'autre est égale à la dérivée de l'intérieur multipliée par la dérivée de l'extérieur (règle de dérivation en chaîne).

Dans $Y = (2X^3 + X)^3$, l'expression $2X^3 + X$ est la fonction "intérieure", et le cube est la fonction "extérieure."

On multiplie la dérivée de l'intérieur par la dérivée de l'extérieur:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = (6X^2 + 1) \cdot 3(2X^3 + X)^2$$

Règle 4: Dérivation en chaîne

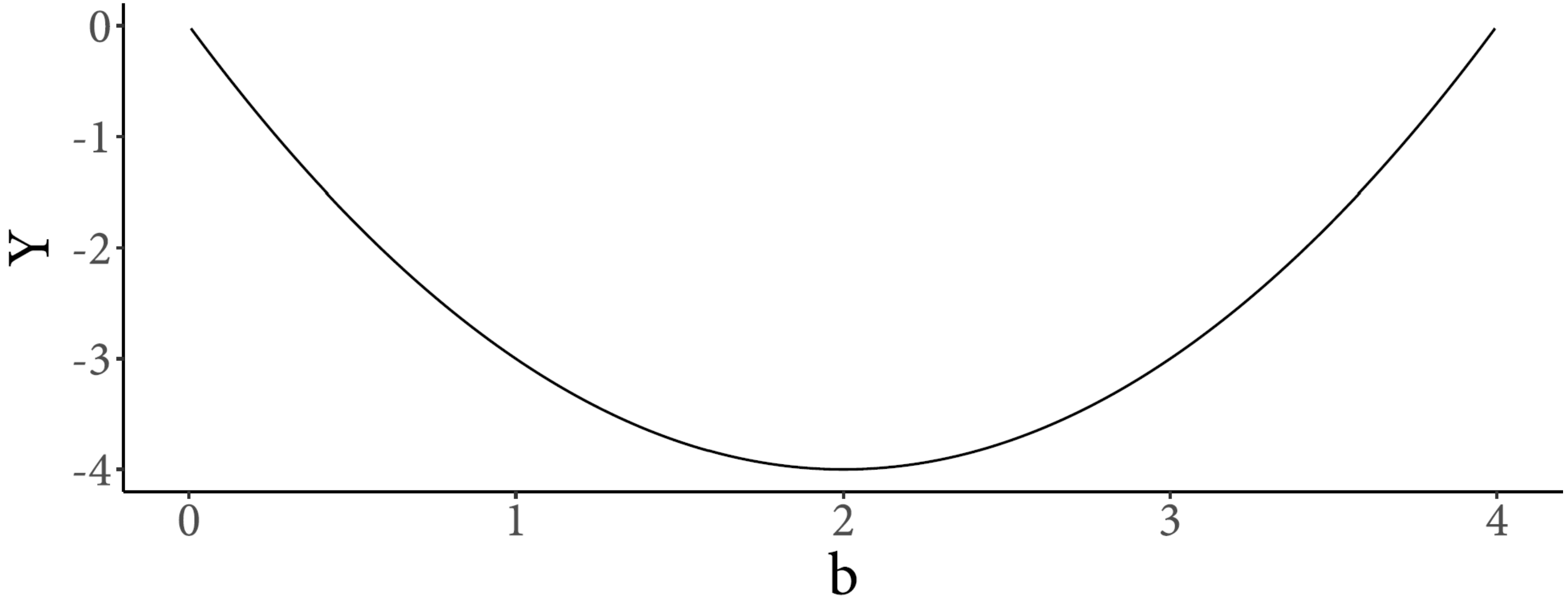
Un autre exemple:

$$
\begin{aligned}
Y &= (4X + X^2 + Z)^2 \\
\frac{\partial Y}{\partial X} &= (4 + 2X) \cdot 2(4X + X^2 + Z)
\end{aligned}
$$

Minimiser une fonction

La variable Y est une fonction de la variable b:

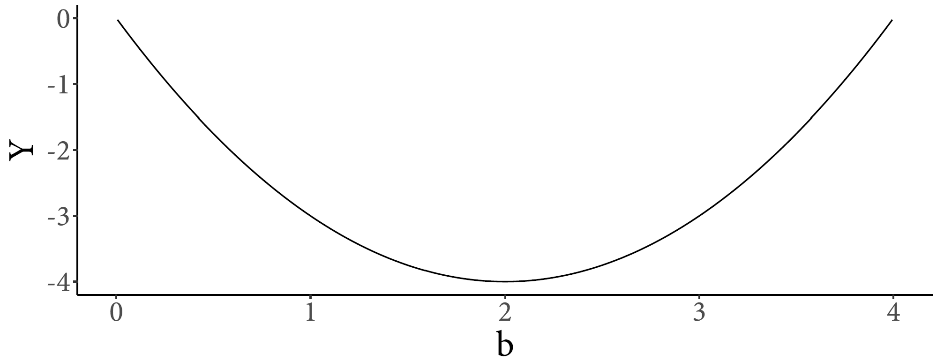
$$Y = -4b + b^2$$



Minimiser une fonction

Quelle est la valeur de b qui *minimise* la valeur de Y?

$Y = -4b + b^2$



Réponse:

> Là où la tangente (c-à-d la dérivée) est égale à zéro.

Minimiser une fonction

Pour trouver la valeur de b où Y est à son minimum, nous allons:

1. Calculer la dérivée (c-à-d la tangente)
2. Trouver la valeur de b où la dérivée est égale à zéro

$$Y = -4b + b^2$$

Étape 1:

$$\frac{\partial Y}{\partial b} = -4 + 2b$$

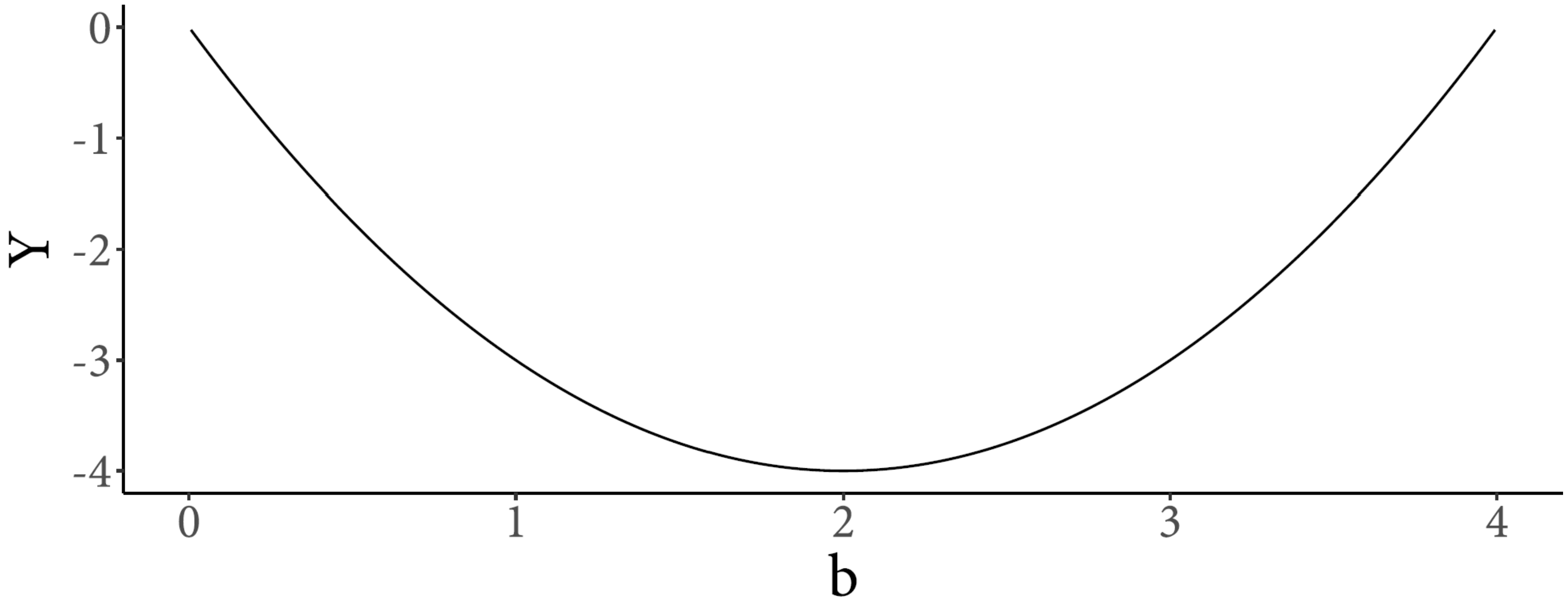
Étape 2:

$$-4 + 2b = 0$$

$$b = 2$$

Minimiser une fonction

$$Y = -4b + b^2$$



Lorsque $\boldsymbol{b = 2}$, $\boldsymbol{Y}$ est à son point minimum.

Minimiser une fonction

Note:

> Une tangente à pente zéro peut indiquer que nous sommes à un minimum *ou* à un maximum. Pour distinguer les deux situations, il faut prendre la dérivée seconde, c'est-à-dire qu'il faut calculer la dérivée de la dérivée en appliquant les règles une deuxième fois. Si la dérivée seconde est positive, la fonction est convexe au point X, et nous sommes à un minimum. Si la dérivée seconde est négative, la fonction est concave au point X, et nous sommes à un maximum.

Fin!