高等数学

- $y > x$在直线$y = x$上面，$y < x$在直线$y = x$下面。
- 截距式$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，两点式$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$。
- 做题顺序：填空，前两道大题，最后两道大题，选择，剩下的大题。
- 【检查】：①符号，空间线面积分的符号、投影。
- 积分公式

◇$\int \tan x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$、$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\int \csc x\,\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$；

◇$\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x+C$、$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C(a>0)$；

◇$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d} \overset{x=\sin\theta}{=} \arcsin x+C$、$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C(a>0)$；

◇$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$、$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C(|x|>|a|>0)$；

◇$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{x=a\sin\theta}{=} \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C(a>|x|\geq 0)$、

$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x \overset{x=a\sec\theta}{=} \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C$，记住代换即可。

- 小坑

◇求单调区间或极值点先求函数定义域，在**定义域端点上的$f'(x_0)=0$不是极值点**；

◇积分平均值可以为负；

◇求函数值时可将X、Y作为自变量和因变量，但求轨迹方程时应该尽量使用x_0和x，然后使用$x_0=\varphi(x)$消去x_0等得到轨迹方程；

◇【形如Σ: $\frac{\left(x^2+y^2+z^2+x\right)^2}{x^2+y^2+z^2}$的被积空间区域】：使用$\begin{cases} y=r\sin\varphi\cos\theta \\ z=r\sin\varphi\sin\theta \\ x=r\cos\varphi \end{cases}$化简为$r=2+\cos\varphi$；

▲ 球坐标变换公式并不是固定的，哪个方向不好处理就将其和原来的z调换位置；

◇【$x\to+\infty$，$f\left(x+\frac{1}{x}\right)-f(x)$】：不能直接使用拉格朗日中值定理化为$\frac{1}{x}f(x)$【×】，这相当于在极限中部分求值，需要先将$f\left(x+\frac{1}{x}\right)-f(x)$分别代入原$f(u)$后对转化后的已知式子再进行拉格朗日。

▲ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$，若$f(u)=\sin\pi x^2$，则$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\sin\pi\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$。

- 【级数公式】：

◇$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$，$x\in[-1,1)$；

◇对于$S(x)=\sum a_n x^n$，有$S(-x)=\sum(-1)^n a_n x^n$，$S(x)+S(-x)=2\sum a_{2n}x^{2n}$；

◇$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$、$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$；

◇$\ln(x+1)=\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$、$\arctan x=\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2x+1}}{2n+1}$；

◇$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$、$\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$、$\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$；

◇$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$、$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

- 选择题技巧

◇若多重积分和极限同时出现，则必定使用积分中值定理，$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=f(\xi,\eta)S_D$；

◇【若……则……】，善用**逆否命题**选择；

◇可导/可微推存在的题：**先都拿常函数和$f(x)=kx+x^2\sin\frac{1}{x}$过一遍**。对于一元可导函数，**可导推存在、为零**的选项概率较大；对于多元函数，**为零推（只能为零）推可微**的选项概率较大；

◇$f(a_n)$收敛求证a_n在某点收敛：画出图像解方程$f(x)=A$，有解即收敛，无解发散；

◇$\sum\frac{1}{n^a\ln^b n}$收敛：$a>1$时始终收敛；$a=1$时当且仅当$b>1$时收敛；

◇反常积分永远先审敛；

◇**只要分式的分母可以因式分解就一定先尝试将分式分解**；

◇间断点的题，若在$x=0$处补充定义，则一般在此处连续；

◇若题上只给了一个非规范格式的二阶微分方程的解说明该解为特解直接带入原方程先求参数再求同解即可；

◇对于$f(x)+f(x+A)=B\neq 0$且给出了$f(x),x\in[a,b]$，则在$[a-A,b-A]$上应有$f(x)=B-f(x+A)$，注意此处的$f(x+A)$需要在上面所给函数的基础上把x换为$x+A$；

◇一阶微分方程先尝试分离$\mathrm{d}y$和$\mathrm{d}x$，再考虑换元；

◇若函数图像同时关于 y 轴和$x=a$对称，则其在$[0,2a]$上的积分恒为零；

◇二阶极限善用不等式；

◇【关于 x 的方程$f(x)=0$的根的个数】：求$f'(x)$，一般函数在定义域上单调，零点最多一个；

◇**【系数对称的多项式】**：令$u=x+x^{-1}$可以降低幂次；

◇零作指数的底数时，若其次数为负，则原式未定义或为间断点；

◇若在选择题中存在两个选项互为逆否命题，则这两个选项在说法上均正确（**级数相关常用**）；

▲ 例如，若选项【若$\sum a_n$收敛，则$\sum b_n$收敛】与【若$\sum b_n$发散，$\sum a_n$发散】同时出现，则他们均正确。

- 一些推论，主要是反例

◇极限存在性：$sinx$（$x\to\infty$不存在）；

◇若函数的导函数存在间断点则一定是第一类间断点；

◇【导数大于等于 0】、【函数单调递增】：充分不必要条件。

▲ 后者改为单调不减即可。

◇【函数在闭区间上连续】、【函数在闭区间上有界】：充分不必要条件。反例：狄利克雷函数（无理数取 0 有理数取 1）。

◇【函数在开区间上连续】、【函数在开区间上有界】：既不充分也不必要条件。

◇【导函数在有限区间有界】、【函数在其上有界】：充分不必要条件。反例：$f(x)=\sin\frac{1}{x}$，函数有界但 x=0 时不可导。

◇【函数在某点的导数大于 0】、【函数在该点某领域内单调递增】：既不充分也不必要条件。$f(x)=x+2x^2\sin\frac{1}{x},x\neq 0;\ 0,x=0$，在 x=0 时有$f'(0)=1>0$但函数在 x=0 没有单调递增。

▲ 前者增加一阶导数连续或二阶导数存在即可。

◇【数列的部分和有界】、【数列的极限存在】：充分不必要条件。反例：$a_n=1$。

◇【函数在某点可导】只能推【函数在该点连续】不能推【函数在该点某领域连续】。反例：无理数取x^2有理数取 0，在 x=0 处连续且可导，其余点极限不存在不连续不可导。

● 【凹凸性不等式】：对于$F''(x)\geq 0$，即$F(x)$是**凸**函数，对于$\forall x_1,x_2\in I$，（均可直接使用）

◇有$\frac{F(x_1)+F(x_2)}{2}\geq F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$；

◇$\forall\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$，且$\lambda_1+\lambda_2=1$，有$\lambda_1F(x_1)+\lambda_2F(x_2)\geq F(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)$；

◇$F(x)\geq F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0)$，即函数在切线上面。

● 【常用不等式】：$|a\pm b|\leq|a|+|b|$、$|\,|a|-|b|\,|\leq|a-b|$、$e^x-1>x>\ln(x+1)$、$\sin x<x<\tan x$、$\sin x<1$。

● **【证明题一般分类】**：

◇【$f'(\xi)=0$】：①反证法，假设导函数恒大于零或小于零推出矛盾；②区间内两点函数值相等，使用**罗尔定理**（**最常用**）；③区间内存在两点导数值异号，使用导数介值定理；④区间内部存在极值点，使用**费马定理**，需排除端点；

◇【含$f^{(n)}(x)$的等式或不等式在$x=\xi$处成立】：

◇【$a_{n+1}=g(a_n)$，$g(x)$中可能包含$f(x)$，证明a_n收敛】：先试求$g(x)$单调，只能用**单调有界**；

◇**【单调有界】**：①单调，$g(x)$单调、$x_{n+1}-x_n$大于小于零恒成立

● **【证明题小技巧】**

◇若第一问进行了分情况讨论而某些情况与第二问题设矛盾可直接舍去；

◇若$f'(x)\leq 0$，且某区间$[a,b]$上$f(a)=f(b)$则直接有$f(x)\equiv f(a)$；

◇若函数在区间上连续不变号，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则在该区间上$f(x)\equiv 0$；

◇若题中给出了不等式，将其当成等式构造辅助函数；

◇若出现了两个参数，一定想办法将其化为一个参数，此时善用$\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$；

◇不能使用基本不等式的情况，试着在不等式两边同时取ln；

◇证明的式子含定积分的首先想到将积分上限换为 x 构造函数；

◇【n 为正整数】：$f(x)>\frac{1}{n}f(x)$；

◇**证明题要求证数列极限存在，只有单调有界和夹逼两种办法**；

◇求$\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}-g(x)$的符号，若$f(x)>0$、$g(x)>0$即$\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}+g(x)>0$时，则可另设$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-g^2(x)$方便计算；

◇连续函数在闭区间定义域端点上取得最大\小值，且导函数连续，则该点导数值大于\小于零；

◇【$\exists\xi$属于闭区间】：则**一定会用介值定理处理**。

◇【注意定义域$\forall x_0\in \mathrm{I}$】：①$\mathrm{I}=[0,1]$，$x_0<1$，$\frac{\square}{x_0}>\square$；②I为对称闭区间，泰勒展开后的$\int_a^{-a}x f'(0)\mathrm{d}x=0$；③$\mathrm{I}=[0,2]$，会利用$x=1$搞事情。

◇若$|f''(x)|\leq 1$，则$|f''(\xi_1)g_1+f''(\xi_2)g_2|\leq|g_1+g_2|$。

- **【证明题整理】：第一问一定要先尝试用辅助函数**

◇【$|f'_x|<M$，$f(0)=0$】：则$|f(x)|=|f(x)-f(0)|<|f'(x)|x=Mx$；

◇【一问证明数列x_n满足某条件，二问证数列收敛】：证明使用单调有界，常使用严格单调函数的性质，将对应的$f(x_{n+1})$与$f(x_n)$比较；

◇【一问证明$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(x_0)+\cdots$，二问证$f(1)-f(0)-f'(x_0)=\cdots$】：第二问把第一问结论中的$f(x)$全部换为$f'(x_0)$即可；

◇【一问证明级数收敛$\sum a_n$，二问证明与其相关的级数收敛（如$\sum\frac{b_n}{a_n}$、$\sum\frac{a_{n+1}}{a_n}$）】：第二问直接使用比较收敛法证明$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_n}{a_n}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n^2}$存在即可（可以为零）；

◇【没有明显特征，但经常出现的】：能直接对所求关系式使用积分得到辅助函数的优先使用辅助函数，可以保留一次积分，二重积分可能需要换次序；

▲ 【$\xi f''(\xi)+2f'(\xi)>f(\xi)$】：$\int xf''(x)+2f'(x)\mathrm{d}x-\int f(t)\mathrm{d}t$算出来设辅助函数为$F(x)=xf'(x)+f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$；

◇【①绝对值；②$f(A)=A$；③$x_{n+1}=f(x_n)$】：此时使用递推公式，注意不要把绝对值去掉了；

$$0<|x_{n+1}-A|=f'(\xi)|x_n-A|<\frac{1}{M}|x_n-A|<\cdots<\frac{1}{M^n}|x_1-A|$$

◇【$\theta\in(0,1)$】：使用变形的拉格朗日中值定理$F(a)-F(b)=(a-b)F'[a+\theta(a-b)]$，常用$F(x)-F(0)=xF'[\theta x]$；

◇【证明题求极限，且参数在$F(\theta x)$里面】：用**带皮亚诺余项的泰勒展开**；

◇【$f(x_1)=f(x_2)$】：①特别需要注意ln的应用；②最终目的均为令$u=\frac{x_1}{x_2}$；

▲ 【证明$x_1+x_2>2$，条件为$x_1-x_2=\ln x_1-\ln x_2$】：$x_1+x_2>2\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$即$\ln u>2\frac{u-1}{u+1}$。

◇【连续区间最大绝对值M】：①常用$F(x)=f(x)-Mx$；

◇【$\cdots\geq 4M$】：$\cdots\geq\frac{M}{x_0(1-x_0)}\geq 4M$。

◇【一坨（确信）把积分当指数的不等式】：当成整式证明，可能需要用到一阶微分方程的公式；

◇【二阶导$f''(x)$】：泰勒公式。可能需要$f(x)$和$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$同时展；

● **【证明题构造函数】**

◇【$f(x)+f'(x)\cdot g(x)$】：$\left[f(x)\cdot e^{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\right]'$，**注意$g(x)$有可能是有关$f(x)$的函数或零或一等常数。**

● 常用反例：默认取$x\to 0$时

◇极限存在：x存在为零、$\frac{\sin x}{x}$存在不为零；

◇有界但不存在：$\sin\frac{1}{x}$、$(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}$、$f(x)=-1,x>0;1,x<0$；

◇无界但不是无穷：$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$、$f(x)=\frac{1}{x},x$为有理数、$0,x$有无理数。

● 常用不等式及其用法

◇【$ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$】：①常用于正项级数$\sum a_nb_n$在已知$\sum a_n^2$收敛时的审敛，注意b_n可以为$a_{n=1}$等；

◇【$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$】：常用于$\sum f(a_n,n^p)$的审敛；

◇【$|a\pm b|\leq|a|+|b|$、$|\,|a|-|b|\,|\leq|a-b|$】

● 常用凹凸函数：x^2，x^3，$\frac{1}{x}$均为凹函数；$x^{\frac{1}{n}}$均为凸函数。

● 判断凹凸：切线在曲线下方则为凹，切线在曲线上方则为凸。

● 叹为观止

◇【$\int\frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x$】：$\mathrm{I}=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$后略；

◇【$\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$，求$\mathrm{I}=\iint_\Sigma(x^4+y^4+z^4)\,\mathrm{d}S$】：单位法向量有$\mathrm{n}_0=(x,y,z)$，$\mathrm{I}=\iint_\Sigma x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$后略；

◇【$f(x)=\frac{x}{1-x+x^2}$转级数】：$f(x)=\frac{x}{1-x+x^2}=\frac{x(x+1)}{1+x^3}=(x+1)\sum_{n=0}(-1)^n x^{3n}$；

◇【$\mathrm{I}=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{d}y\int_y^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$】：$0\le x\le y\le z\le 1$，$\mathrm{I}=\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x$，即**写出变量关系后可以直接换，不用画图**；

◇【$\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}\mathrm{d}x$】：$\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{x}}{(e^{x}+1)^2}\mathrm{d}x$后略，若直接$\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}x\ \mathrm{d}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$进行分部积分可能会导致前半部分为无穷而后半部分为发散积分，此时亦可先求其一个原函数在分别带代入计算；

◇$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2x}{1+\sec^2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{2+\tan^2x}$;

◇$a_n=\int_0^{n\pi}x\mid\sin x\mid\mathrm{d}x\overset{x=n\pi-t}{\Rightarrow}\int_0^{n\pi}(n\pi-t)\mid\sin t\mid\mathrm{d}x=n^2\pi\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}x-a_n$，故$a_n=\frac{1}{2}n^2\pi\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}x=n^2\pi$；

▲ 类似$\int_0^b x\sin t\mathrm{d}x$的都可以这样；

◇$y'=\sqrt{y-x^2}+2x$，则$y'-2x=\sqrt{y-x^2}$，令$u=y-x^2$后略。

● 连续函数的单调有界：若函数在**闭区间**上**单调有界**，则其在其上任意一点极限存在，且只可能存在第一类间断点。

● 【求$y(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$定义域】：若$f(x)$存在无穷间断点，则$y(x)$的定义域为$f(x)$在$x=0$附近的连续区间和『使积分收敛的间断点的集合』的并集。

◇即若某间断点使积分发散，则它一定不属于该定义域。

● 洛必达，分母趋于无穷时，分子不为无穷也可以继续洛。

● 【$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，且函数二阶导函数**连续**】：$f(0)=f'(0)=0$。

● $1+\sin2x=(\sin x+\cos x)^2$。

● $\sqrt{(x-a)(x-b)}$：当且仅当$x\le a,x\ge b$，若讨论渐近线，只需讨论$x=a,b$的单侧。

● 【$f[\alpha(x)]=\beta(x)$】：记$u=\alpha(x)$，则$f(u)=\beta(x)$，则对于$g(x)$可由$u=\alpha(x)$化简为简单的关于x的函数时$\int g(x)f(x)\mathrm{d}x=\int g(u)f(u)\mathrm{d}u=\int g(u)\beta(x)u'_x\mathrm{d}x$。

● 变积分上限的无穷小比阶：若被积函数和积分上限都是无穷小量，则分别等价于对应的无穷小量，不能直接把积分拆开；若被积函数不是无穷小量且极限存在为A，积分上限是无穷小量等价于$h(x)$，则整个积分等价于$Ah(x)$。

● $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$；$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

● $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$；$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$。

● $\sqrt{[f(x)]^2}=|f(x)|$：无论$f(x)$正负，结果始终非负。

● $\left[\sqrt{f(x)}\right]^2=f(x)$：还原为$f(x)$，但仅在$f(x)\ge0$时有定义。

- 常见图形：**摆线、心形线和星形线考前一定要看一眼！**

◇椭圆：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

▲ 面积的公式为：$S=\pi ab$。

▲ 或椭圆公式写为$Ax^2+By^2=C$，则椭圆面积的公式为：$S=\frac{C}{\sqrt{AB}}\pi$。

◇心形线：$r(\theta)=a(1-\cos\theta)$。

▲ 面积的公式为：$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2\,(1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi a^2}{2}$。

▲ 周长的公式为：$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta=8a$。

◇伯努利双纽线：$r^2=a^2\cos(2\theta)$。

▲ 面积为其在第一象限的面积的4倍：$S=2\times\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}a^2\cos(2\theta)\,d\theta=a^2$

◇摆线：$\begin{cases}x=r(\theta-\sin\theta)\\y=r(1-\cos\theta)\end{cases}$，其中$r$为滚动的圆的半径。

▲ 单个摆线弧段的面积为：$S=3\pi r^2$。

▲ 单个摆线弧段的周长为：$L=8r$。

◇星形线：$\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\y=a\sin^3\theta\end{cases}$或$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$。

▲ 面积的公式为：$S=\int_0^{2\pi}a\sin^3\theta(-3a\cos^2\theta\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi a^2}{8}$。

▲ 周长的公式为：$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-3a\cos^2\theta\sin\theta)^2+(3a\sin^2\theta\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=6a$。

◇球的体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$。

◇椭球的体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi abc$。

- $f(x)$与导函数$f'(x)$

◇一个函数$f(x)$可导，**并不一定意味着**它的导函数$f'(x)$连续。$f(x)$在$x=x_0$可导仅能说明左右导数存在且相等$f_+{}'(x_0)=f_-{}'(x_0)$。

◇奇偶性互换、周期性不变。

- 【$f(x)$连续，$F(x)$为其一个原函数】：①若$f(x)$为奇函数，则$F(x)$必为偶函数；②若$f(x)$为偶函数，则$F(x)$奇函数当且仅当$F(0)=0$。

- 常见奇函数：

$$\mathrm{sinx},\mathrm{tanx},\mathrm{arcsinx},\mathrm{arctanx},\ln\frac{1-\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}}$$
$$\ln\left(\mathrm{x}+\sqrt{1+\mathrm{x}^2}\right),\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+1},\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}(-\mathrm{x})$$

- 常见偶函数：$x^2, |x|, \cos x, f(x)+f(-x)$。
- 【数列$a_{n+1}=f(a_n)$】：把注意力放到f上，①f是否有反函数，若有先试着求反函数；②若$f(A)=A$且$|f'(x)|\le k<1$，则$0<|x_{n+1}-A|=f'(\xi)|x_n-A|<k|x_n-A|$即有$\lim_{n\to\infty}x_n=A$；③若$\lim_{n\to\infty}x_n=A$，则$n$足够大时$|x_n-A|$小于任意一个正实数一般取$|x_n-A|<\frac{1}{2}$。
- ①在数列a_n有界的前提下，有【a_n收敛$\to a_n$单调，但不可反推】；②在数列a_n单调的前提下，有【a_n收敛$\Leftrightarrow a_n$有界】;③若a_n发散，则a_n存在两个收敛于不同值的子列。
- 周期函数：①若$f(x)$为以T为周期的周期函数，则$\int_0^x[f(t)-f(-t)]\,\mathrm{d}t$也一定为周期函数；②见上，周期函数的导函数一定为周期函数，原函数不一定是周期函数；③常值函数$f(x)\equiv 1$等同样为周期函数，$\forall T>0$均为其周期，可用本条验证上一条。
- $\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{Q(x)}{P(x)}\right]^{-1}$：两个极限存在时即成立。
- 【$f(t)$表示$g(x)=t$的解】：$g[f(t)]=t$，即$f(t)$是$g(x)$的反函数。
- 【反函数，若$y=f(x)$存在反函数$g(x)=y$】：①当且仅当$y=f(x), x\in \mathrm{I}$，上单调，此时两函数的图像关于$y=x$对称；②一阶导互为倒数，$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}|_{y=f(x)}$；③二阶导$y''_{xx}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{x'_y}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3}$。
- 直接根据方程判断对称性

  ◇对于一个二维平面或曲线$F(x,y)=0$：若其关于 x-轴对称则有【若(x,y)在曲线上，则$(x,-y)$也在曲线上】，即若$F(x,-y)=F(x,y)$则该平面或曲线关于 x 轴对称。

  ◇对于一个三维平面或曲线$F(x,y,z)=0$：关于xOy坐标平面对称则有【若(x,y,z)在曲线上，则$(x,y,-z)$也在曲线上】，即若$F(x,y,-z)=F(x,y,z)$则该平面或曲线关于xOy坐标平面对称。
- 【$f^{(n)}(x_0)$】：①$\mathrm{e}^x, \ln(1+x), \sin x, \cos x, \frac{1}{1+x}$（及其亲戚）使用**泰勒公式系数唯一性**；②若为$f(x)(ax^2+bx+c)$等，则使用莱布尼茨公式$h^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$,，求导后只剩三项。

  ◇例【$(x)=\frac{x}{1-x+x^2}$，求$f^{(10)}(0)$】：$f(x)=\frac{x}{1-x+x^2}=\frac{x(x+1)}{1+x^3}=(x+1)\sum(-1)^n x^{3n}=\sum(-1)^n x^{3n+1}+\sum(-1)^n x^{3n}$，$x^{10}$系数为$-1$，故$\frac{f^{(10)}(0)}{10!}=-1$，$f^{(10)}(0)=-10!$。
- 【n阶导数公式】：※**考前记一记**。

  ◇$(e^x)^{(n)}=e^x$、$(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$；

  ◇$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$，$[\ln(1+x)]^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$；

  ◇$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$，$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$。

- 【$f^{(n)}(0)$且$f(x)$为奇函数（记$\alpha=1$）或偶函数（记$\alpha=0$）】：$f^{(n)}(0)=0$当且仅当$n+\alpha$为奇数。
- 【$\Delta y=f(x,y)\Delta x+o(\Delta x)$、线性主部问题等】：①$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$；
- 曲率

$$k=\frac{|y''(x)|}{\left(1+\left(y'(x)\right)^2\right)^{3/2}}$$

曲线在该点的曲率半径$R=\frac{1}{k}$，曲率半径为该点处曲率圆的半径。

- 曲率圆：①曲率圆半径$R=\frac{1}{k}$；②曲率圆与函数相切，即交点处斜率一致；③根据曲率圆在函数图像上方或下分可判断函数在该点处的二阶导符号，即凹凸函数；④直接对曲率圆求导可以直接求得该点处的一阶导值和二阶导值。
- 拉格朗日余项泰勒公式：常用于含高阶导数的证明题。

$$\begin{cases} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)^2 \\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi)(x-a)^3. \end{cases}$$

- 二元函数$f(x,y)$在原点处的二次泰勒展开式为

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}xy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y^2\right]$$

- 定积分定义相关

◇能直接化定积分的（n、k的次数相加均相等）：$\frac{k}{n}$、$an+bk$、n^2+k^2、n^2+nk，直接把n提出来；

◇放缩形：对通项进行放缩，放缩到$\left(\frac{k}{n}\right)^m$和$\left(\frac{k+C}{n}\right)^m$之间，其中两端同次数且仅对$k$整体进行放缩。

◇以下分割方法均在$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$中：几何平均值$\sqrt{\frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n}}$、均方根$\sqrt{\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}{2}}$、调和平均值$\frac{2\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n}}{\frac{k}{n}+\frac{k-1}{n}}$，线性组合$\lambda\frac{k-1}{n}+(1-\lambda)\frac{k}{n}$。

- 原函数（不定积分）存在：①连续（或单侧连续）②仅存在振荡间断点。
- 定积分存在：①连续②有界且间断点个数有限③进存在有限个第一类间断点。
- 函数的导函数应当满足存在原函数的条件，即**导函数能存在且只能存在振荡间断点**，如$f(x)=\begin{cases}-x, x\le 0\\ x\sin\frac{1}{x}, x>0\end{cases}$。

- 【对$\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$求导】：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t = [x, b(x)] \cdot b'(x) - f[x, a(x)] \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}t$，其中若被积函数不含$x$则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} g(t)\,\mathrm{d}t = g\big(b(x)\big) \cdot b'(x) - g\big(a(x)\big) \cdot a'(x)$，即上限代入乘求导减下限代入乘求导。
- 分段函数的$C_1 C_2$一定保证分段点连续。
- 使用分部积分法求积分时若出现**前一项为无穷大后一项为发散积分**时可以先**求出其一个原函数**再代值计算。
- 【$f(x) = \int_0^1 |x-t|\,\mathrm{d}t$】：类似这样的函数都可以分三段写出定义式，且**函数及其一阶导函数必定连续**，所以可以只算想要的点。
- 反对幂指三：排前面的不动，排后面的放d后面。
- 积分换元的前提条件：可导且可逆（具有反函数，单调即可）。
- 【有理函数的积分】

  ◇$(ax+b) \to \frac{A}{ax+b}$、$(ax+b)^2 \to \frac{A_1}{ax+b}, \frac{A_2}{(ax+b)^2}$、$(px^2+qx+r) \to \frac{Ax+B}{px^2+qx+r}$、$(px^2+qx+r)^2 \to \frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r}, \frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2}$;

  ◇注意，优先令x^k相关系数为零，如果常数项不好计算可以先将ABCD等用某一个字母表示，然后取特殊值代入，**最后不要忘了把常数项化为一（对应拆开前）**；

  ◇此外如果拆开前的式子中含有x以外的变量，应将其视为常数，在常数项中保留，**最后不要忘了把常数项化为一（对应拆开前）**；
- 令$u = \tan x$，则由万能公式，$\sin 2x = \frac{2u}{1+u^2}$，$\cos 2x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$，$\tan 2x = \frac{2u}{1-u^2}$。
- 积分公式

  ◇$\int \csc\theta \sec\theta \mathrm{d}\theta = \int \frac{\mathrm{d}(\tan\theta)}{\mathrm{d}\tan\theta} = \ln\tan\theta + C$；
- $\sqrt{a^2-x^2}$：$x = a\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = a\cos(\theta)\,d\theta$。
- $\sqrt{x^2+a^2}$：$x = a\tan(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = a\sec^2(\theta)\,d\theta$。
- $\sqrt{x^2-a^2}$：$x = a\sec(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = a\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta$。
- 积分公式

  ◇$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x) + f(-x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\,\mathrm{d}x$。

  ◇$\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\mathrm{d}x = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$。
- 华里士公式：其中双阶乘是阶乘的拓展，表示**隔一个数乘一次**。证明题可以直接用。

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2k,\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n=2k+1.\end{cases}$$

- $\int_0^{\pi}\sin x\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin^k x\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\cos^k x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos^k x\mathrm{d}x=0$其中$k$为奇数。
- 反常积分审敛：$\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$在$p<1$时均收敛（可以小于等于零），$\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{1}{x^a\ln^b x}\mathrm{d}x,\alpha>1$在$a>1$或$a=1,b>1$时收敛。
- 旋转体体积：曲线$L:y=f(x)$在$[a,b]$上所围区域绕定直线$L_0:Ax+By+C=0$旋转。

◇万能公式：$r(x,y)=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，$V=2\pi\iint_D r(x,y)\mathrm{d}\sigma$。

◇绕x轴：$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$；绕$y$轴：$V=2\pi\int_a^b x\,f(x)\,dx$。

◇参数方程$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$直接将上式中的 x 和 y 替换为对应函数即可，例如绕x轴：$V=\pi\int y^2(t)\mathrm{d}[x(t)]=\pi\int y^2(t)x'(t)\mathrm{d}t$；

◇极坐标，设曲线$r=r(\theta)$在区间$\theta\in[\alpha,\beta]$上绕极轴旋转，$V=\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta}r^3(\theta)\sin\theta\,d\theta$。

- 极坐标化为直角坐标系下参数方程：对于$r=r(\theta)$有$x=r(\theta)\cos\theta$、$y=r(\theta)\sin\theta$。
- 偏导数定义公式：$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x,b)-f(a,b)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$
- 全微分

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-A\Delta x-B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

其中，$A=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)},B=\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$。

- 【对于$f(x,y)$在原点附近有定义，$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}=0$、$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$哪个可以推出全微分？】

◇对于$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}=0$，令$x=0$，有$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y^2}=0$，同理有$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)}=0$，这里注意若原式分母为$\sqrt{x^2+y^2}$则无法推出；后略，存在全微分；

◇对于$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，仅能推出$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$，由$f(x,y)$不连续无法推出更多；反例，$f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2 & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 1 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$。

- 【欧拉碎碎念】：若研究对象为k次齐次函数，即$f(tx,ty)=t^k f(x,y)$，则$xf'_x=yf'_y=kf$。
- 【拉格朗日乘数法】：①求最大最小值时，应使约束条件尽可能简洁；②有两个约束条件时，例如$-\mu=4\lambda x=\lambda y$时需分别讨论$\lambda=0$或$y=4x$的情况分别讨论以免扣分；

- 边界条件应该包含等号，若均为严格不等号则不需要考虑边界条件。
- 【$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^\alpha y^\beta}{(x^2+y^2)^k}$极限为零】：当且仅当$\alpha+\beta>2k$，等于也不行。
- 【判断二重极限是否存在】：先看分母，**取特殊路径将分母化为只含x**。分母为①【$x+y$】，可取特殊路径令$y=kx$、$y=-x+\sqrt{kx}$、$y=-x+kx^3$等；②【x^2+y】，$y=kx^2$等。
- 若$k\ge f(x,y)$恒成立，则$k\ge f_{\max}$；若$k\le f(x,y)$恒成立，则$k\le f_{\min}$。
- 在闭区域中求最值时直接求边界上最值和内部驻点进行比较即可，不需要判断二阶导。
- 一阶微分方程-齐次型：分离变量。
- 一阶微分方程-y 的次数较大：伯努利方程，对于$y'+P(x)y=Q(x)y^n$，令$z=y^{1-n}$。
- 一阶微分方程-二阶导和 x 平方在一起：欧拉方程，对于$x^2y''+axy'+by=0$，当$x>0$时，令$x=e^t,t=\ln x,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$。
- $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是某一阶非齐次线性微分方程的两个不同解，则$\frac{1}{2}[y_1(x)+y_2(x)]$仍为该方程的解，$y_1(x)-y_2(x)$是对应齐次方程的通解。
- n阶常系数线性微分方程的解
    1. 若λ为单实根，对应$Ce^{\lambda x}$；
    2. 若λ为k重实根，对应$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$；
    3. 若λ为单复根$r=\alpha\pm\beta i$，对应$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$；
    4. 若λ为双重复根$r=\alpha\beta\pm i$，对应$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x+C_3x\cos\beta x+C_4x\sin\beta x)$。
- 求微分方程存在某种解，即求存在常数 C 使方程成立。证明微分方程某解的唯一性，常使用反证法假设存在不同的y_1y_2均为符合条件的解，而后使用$\frac{1}{2}[y_1(x)+y_2(x)]$仍为该方程的解或$y_1(x)-y_2(x)$是对应齐次方程的通解推出矛盾。
- **微分方程亦可根据求导法则解题**。
- 【y'^2+yy''】：如上，$y'^2+yy''=(y'y)'$。同理，$f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2\right]'$。
- 【$y'-Py=Q$求极值点或拐点】：不用算出来，直接算对应点的值，二阶导对等式两边同时对 x 求导。
- 解方程解出来$\ln\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)=x$：由$\ln\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)=-x$有$e^x=\sqrt{p^2+1}+p$、$e^{-x}=\sqrt{p^2+1}-p$，则$p=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$。
- 若$\lambda=\alpha\pm\beta i$为二阶常微分方程的根，则原方程为$(\lambda-\alpha)^2+\beta=0$。
- 微分方程的换元

◇$y'=f(ax+by+c)$：令$u=ax+by+c$，则$u'=a+f(u)$；

◇齐次式$y'=f\left(\frac{x}{y}\right)$或$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$：令$u=\frac{x}{y}$或$u=\frac{y}{x}$，则$x=uy,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$解出$u=u(y)$或$y=ux,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$解出$u=u(x)$；

◇伯努利方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$：先化为$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$，令$u=y^{1-n}$，则$\frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$，原式化为$\frac{du}{dx}+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x)$，解出$u=u(x)$；

◇缺 y 的二阶微分方程$y''=f(x,y')$：令$p=y'$此时$p=p(x)$，则$y''=p'$；

◇缺 x 的二阶微分方程$y''=f(y,y')$：令$p=y'$此时$p=p(y)$，则$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$;

◇欧拉方程$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+by=f(x),x>0$：令$u=\ln x$，则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$，且$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}$（两个都是负二次方）。

- 微分方程换元的本质：在微分方程中引入中间变量$u=f(x,y)$，两边同时对 x 求导$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$可算出一阶导，二阶导直接使用一阶导继续对 x 求导即可（**注意 u 和 y 都是关于 x 的函数**）。
- $\int_0^{x+T}=\int_0^T+\int_T^{x+T}$。
- 【$f=f(x,y)$，$f\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$】：记$u=\frac{\partial f}{\partial x}$，则$f\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=u\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$，故对于$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{f}\right)=\frac{f\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-u\cdot\frac{\partial f}{\partial y}}{f^2}=0$，故$\frac{u}{f}=\varphi(x)\to u=f\cdot\varphi(x)$。
- 傅里叶级数-求余项正弦级数：$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$，一般使用表格法求积分，注意被积函数里面cos和sin中 x 的系数是$n\pi\div l$；需要注意的是，半周期l可能会在傅里叶级数的表达式中给出。
- 傅里叶级数-求$S(x_0)$：注意奇偶延拓。
- 级数展开：其中$f(0)=0$的从 1 展开。
- 【函数$f(x)$展开为幂级数$\sum u_n x^n$】：①若展开的幂级数不为标准形态为类似$\sum u_n(x-a)^n$的形式时，不能先展开再转化为要求形式，必须在函数$f(x)$中凑【$x-a$】或可令$u=x-a$再对$g(u)$进行展开；

◇$\ln(a+bx)=\ln a+\ln\left(1+\frac{b}{a}x\right)=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}x^n$，$a\neq 0$。

◇$\left(\frac{1}{a-x}\right)'=\frac{1}{(a-x)^2}$，$\left(\frac{x}{a-x}\right)'=\frac{a}{(a-x)^2}$。

- 【$\sum_{n=0}u_n x^n$的和函数为$\ln(x+a)$】：$\ln(a+x)=\ln a+\ln\left(1+\frac{1}{a}x\right)=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{na^n}$，**注意两个级数的起始项**，有$u_n=\begin{cases}\ln a, n=0\\ \frac{(-1)^{n-1}}{na^n}, n\geq 1\end{cases}$。

- 已知收敛半径，不能倒推数列前后项关系（可能不存在）。
- 无穷级数审敛：**趋于无穷时极限不为零可直接推为发散**

◇n 在次数上时，试用**根值法**；

◇给出**数列递推公式**的正项级数，常用**比值法、前项减后项**等；

◇收敛加减收敛必收敛，收敛加减发散必发散；

◇正项级数发散加减发散必发散，不是正项级数不一定；

◇【$\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$】：使用积分中值定理化为$f(\xi)(a_{n+1}-a_n)$便于构造；

◇$\sum \frac{1}{x\ln^p x}$当且仅当$p>1$时收敛；

◇$\sum \frac{1}{x^p\ln^a x}$当且仅当$p>1$时收敛，此时可以无视$\ln x$次数；

◇以常用不等式为基本方向：

▲ $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$；

▲ 正项级数常用：$|ab| \le \frac{a^2+b^2}{2}$；$ab \le \frac{a^2+b^2}{2}, a>0, b>0$；

▲ 绝对收敛常用：$|a \pm b| \le |a|+|b|$；

▲ $|\,|a|-|b|\,| \le |a-b|$；

▲ 糖水不等式：$\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}, c>0$。

◇**正项级数**收敛则其绝对收敛，**证绝对收敛时可以尝试构造正项级数**；

◇**正项级数**$\sum a_n$收敛时，$\sum a_n^2$收敛。不是正项级数时不一定。故预证$\sum a_n$收敛也可先证$\sum\sqrt{a_n}$收敛；

◇若级数绝对收敛，则其奇偶次项级数一定分别收敛；

◇$\sum a_{n+1}-a_n$收敛时，数列a_n极限存在；

◇如果数列$\{a_n\}$极限存在，则级数$\sum(a_n-a_{n-1})$收敛；

◇正项级数$\sum a_n$发散时，其奇偶项级数$\sum a_{2n-1}$、$\sum a_{2n}$均发散；

◇$\sum(-1)^{n-1}a_n$条件收敛：$\sum(-1)^{n-1}a_n=\sum a_{2n-1}-a_{2n}$收敛，$\sum a_n$发散；

◇【$\sum\ln[f(a_n)]$收敛】：首先**试着令**$f(a_n)\equiv 1$取a_n判断选项是否收敛；

◇【特别地$\sum\ln[f(a_n,a_{n+1})]$】：常将其化为（或**放缩**为）ln分式的形式，然后使用$\sum\ln a_{n+1}-\ln a_n$审敛；

◇任意级数$\sum u_n$收敛时，$\sum u_n \pm u_{n-1}$分别收敛；

◇任意级数$\sum u_n^2$收敛时，$\sum\frac{u_n}{n}$绝对收敛【$\left|\frac{u_n}{n}\right| \le \frac{1}{2}\left(u_n^2+\frac{1}{n^2}\right)$】、$\sum u_n^3$收敛、$\sum u_n u_{n+1}$收敛；

◇若数列u_n有界，则$\sum\frac{u_n}{n^2}$绝对收敛，$\left|\frac{u_n}{n^2}\right| < M\cdot\frac{1}{n^2}$；

◇【$a_n \le c_n \le b_n$，其中$\sum a_n$、$\sum b_n$均收敛】：首先，三个级数均不一定为正项级数，不能直接使用$ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$判断$\sum a_n c_n$收敛（反例$a_n = c_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$）；应先将原式化为$0 \le c_n - a_n \le b_n - c_n$，则$\sum b_n - c_n$收敛、$\sum c_n - a_n$收敛，故$\sum c_n = \sum(c_n - a_n) + \sum a_n$收敛；

◇【$u_n = \begin{cases} 1, n = k^2 \\ \frac{1}{n^2}, n \ne k^2 \end{cases}$】：类似这样仅在某些特殊位置取非零常数的数列，其子列$\{u_{k^2}\}$和$\{u_{k^2+1}\}$极限不相等，故其极限不存在，故$\sum u_n$发散；但对于类似的$\sum \frac{u_n}{1+nu_n}$的级数的任意子列极限均为零故其极限为零，不能直接判断其发散；

- ▲ 即这样的数列只能推出其本身的极限不存在，其他级数的审敛应该使用常规方法；
- ▲ 事实上，$\sum \frac{u_n}{1+nu_n} < \sum \frac{1}{1+k^2} + \sum \frac{1}{k^2+k} < 2\sum \frac{1}{k^2}$收敛；
- ▲ 其中，**原级数小于两个数列的级数相加**，且$\frac{u_n}{1+nu_n} = \begin{cases} \frac{u_{k^2}}{1+k^2 \cdot u_{k^2}} = \frac{1}{1+k^2}, n = k^2 \\ \frac{\frac{1}{k^2}}{1+k \cdot \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{k^2+k}, n \ne k^2 \end{cases}$；
- ▲ 类似的级数均这样处理；

◇常用反例

- ▲ $(-1)^n \frac{1}{n}$，$(-1)^n \frac{1}{n\ln n}$：收敛但不绝对收敛；
- ▲ $\sum \frac{|a_n| - a_n}{2}$一定为正项级数；
- ▲ $a_n = \frac{2+(-1)^n}{4}$：正项级数$\sum a_n$收敛，但$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$不存在，**根值法不能反过来**；

- ● 在幂级数的收敛区间内部（不包含两端点），该幂级数必然**绝对收敛**。
- ● 幂级数的收敛半径小于等于其奇偶次项级数的收敛半径。
- ● 对幂级数进行求导时，若求导前起始项为$n = 0$则求导后从$n = 1$开始，否则不变。
- ● 求和函数时，最后应该检查是否在定义域上收敛，特别是$x = 0$、$x = 1$时。
- ● 两向量相交：方向向量线性无关。
- ● 两向量平行：**叉乘**为零。
- ● 两向量垂直：**点乘**为零。
- ● 三向量共面：**混合积**为零。
- ● 方向导数：**场**在某一特定方向上的**变化率**，**标量**。

◇不可微分，定义式：记$t = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$，方向余弦$\mathbf{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，方向余弦是**单位向量**。

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

【任意方向的方向导数存在】也是使用这个式子验证（函数可微可以直接推出任意方向的方向导数存在）。

◇存在全微分，计算公式

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}|_{P_0}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}|_{P_0}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}|_{P_0}\cos\gamma$$

其中，**方向余弦使用题给方向构造而不是使用函数f，函数f指的是场的函数**，与空间曲面方程无关。

- 【空间曲面$u=u(x,y,z)$上的最大方向导数】：会出现三个函数，场函数$f(x,y,z)$、方向$\vec{l}$和空间曲面$u=u(x,y,z)$；首先明确一点，**在场函数$f(x,y,z)$下，空间中任意一点在给定方向$\vec{l}$下的方向导数$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$是固定的**，动的是点不是方向，这种问题本质上是**求算出来的$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$在约束条件$u=u(x,y,z)$下的最值**，使用拉格朗日乘数法解题即可。
- 给定方向导数的方向与模：不是直接等于题给向量，应为方向导数与题给向量平行（**叉乘**为零），再根据题给向量的模确定具体值。
- 梯度：指向函数值增加最快的方向，与最大方向导数**方向一致**，向量。**梯度的模**为方向导数的最大值，**梯度模的相反数**为方向导数的最小值。
- 散度：向量场发散或汇聚**程度**，标量。
- 旋度：描述了向量场的旋转**方向**和旋转强度，向量。
- 二型曲线积分的奇偶性：奇函数一致为 0，偶函数不一致为 0。

  ◇一致：$x\rightarrow dx$。
- 二型曲面积分的奇偶性：偶函数一致为 0，奇函数不一致为 0。

  ◇一致：$x\rightarrow dydz$。
- (1,1,1)和 $(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$是不一样的概念，后者是一个**向量**，前者是该向量在基下的**坐标**。
- **他妈的三维球坐标的转换公式还没记住，乘的是$r^2\sin\varphi$。**
- 他妈的都这个时候了$\iint_{D_{xy}:Ax^2+By^2\leq C}\mathrm{d}\,x\mathrm{d}y=\pi\frac{C}{\sqrt{AB}}$还要忘记加$\pi$。
- 含参数的线面积分可能只在参数取个别值时存在奇点，需要特殊讨论。
- L_1、L_2分别是任意两条不重合的包含原点在内的同向简单闭曲线，则区域D表示以L_1和L_2为边界的有界闭区域**不包含原点**。
- 直接给出一型曲面积分要求计算的大题一般需要**将其转化为二型曲面积分再使用高斯公式**。
- 三维直线的方向向量：对于$L:F(x,y,z)=0,G(x,y,z)=0$，分别计算两个平面的法向量$\overrightarrow{n_1}$、$\overrightarrow{n_2}$，所求方向向量$\vec{l}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$。

- 【空间有向曲线&法向量的方向】：若空间有向曲线Γ在在某平面上，则【从Z轴正半轴向负半轴看去Γ为逆时针】、【Γ为正向曲线】、【$\vec{n}\cdot(0,0,1)>0$】互为充要条件。**一定要检查方向**。
- 两向量的夹角：$\cos\theta=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$，$\theta\in[0,2\pi]$。
- 空间关系

◇圆心为点P半径为R的空间球体与平面$\pi{:}\,f(x,y,z)=0$相切，求切点：设平面π的法向量为$\vec{n}_0$，L是以$\vec{n}_0$为方向向量且过点P的直线，联立L与π即为切点。特别注意不要联立L与球体，这样会解出来两个点；

◇点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$。

◇计算三维二型曲面积分转为平面二次积分：某空间曲面Σ的投影到某个坐标平面上，若Σ的法向量与该坐标平面的正法向量（即其上的正半轴）的夹角为锐角则投影后平面二次积分符号不变，若为钝角符号相反；

◇圆锥$z=\sqrt{x^2+y^2}$和抛物面$z^2=x^2+y^2$的主要区别是**圆锥的天顶角**$\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$**，的天顶角**$\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$**，抛物面的天顶角**$\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$；

◇曲面与平面相切：①切点在两面上；②切点处曲面法向量与平面法向量**平行**（不一定相等）。

◇曲线切向量：当曲线在某点P_0处有$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}\neq0$时，有曲线切向量或法平面的法向量$\boldsymbol{\tau}=$

$$\left.\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ F'_x & F'_y & F'_z\\ G'_x & G'_y & G'_z\end{vmatrix}\right|_{P_0}$$ 。

◇在三维直线的点向式中，规定若分母为0，则分子整个为0；

◇若Γ为三维空间中某平面和球面的交线，且平面过球心，则Γ的形心为球面球心；

▲ 若球面球心恰好为原点，则有$\int_\Gamma x\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma z\,\mathrm{d}s=0$；

◇形心坐标公式，看清楚是曲面还是空间区域；曲面的形心坐标可以选择性放弃

◇两向量共面求垂直于该平面的第三向量：所求向量与前两向量的**叉乘**平行。

- 线面积分：**计算前统一先用对称性！！！**

◇二维一型曲线积分$\int_L\square\,\mathrm{d}s$：①还原全微分直接代入起点到终点；

◇二维二型曲线积分$\int_L\square\,\mathrm{d}x+\square\,\mathrm{d}y$：①积分与路径无关，换路径；②使用$\begin{cases}x=x(\theta)\\ y=y(\theta)\end{cases}$化为定积分；③$L$封闭为$D$且$D$中无奇点时使用格林公式，注意是$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$；

▲ 换路径不一定总是使用简单路径，先观察积分，路径需要使积分$\mathrm{I}=\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_a^b\left[P\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t$中的被积函数最简，最好能把复杂的部分直接消掉，常用$y=x$等；

▲ 或被积函数含有抽象函数$f(u)$其中$u=u(x,y)$，则应该直接将其设为路径；

◇三维二型曲线积分$\int_\Gamma \square\,\mathrm{d}x+\square\,\mathrm{d}y+\square\,\mathrm{d}z$：①**斯托克斯公式**转化为二型曲面积分；②被积曲线化为参数形式$\begin{cases}x=x(\theta)\\y=y(\theta)\\z=z(\theta)\end{cases}$，注意**参数只有一个，不能化成一个参数就不能用**；③某曲面的单位法向量好求（如平面）或能简化被积函数时转化为一型曲面积分；

▲ 斯托克斯公式转化后的Σ可为任意绷在曲线上的曲面，若原曲面不能直接连成平面常取题上**任一曲面被截的有界部分**。

◇三维二型曲面积分$\iint_\Sigma \square\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\square\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\square\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$：①三合一公式

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=\ &\pm\iint_D\left(-P\frac{\partial z}{\partial x}-Q\frac{\partial z}{\partial y}+R\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

，可以转换投影到一个坐标平面上（**注意符号**）；②高斯公式（**今年最有可能使用的**）；③拆积分一个一个算（一投二代三计算）；

● **【空间积分最重要的公式】：标量场乘上方向转化为向量场**，$\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\alpha}=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{\cos\beta}=\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\cos\gamma}=\mathrm{d}S$，注意d都在分子上。

◇$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\beta\mathrm{d}S=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-z'_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中单位法向量为$\mathbf{n}=\frac{1}{\|\mathbf{n}\|}\left(-f_x,-f_y,1\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，故$\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{-1}{f_x}$、$\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}=\frac{-1}{f_y}$、$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{f_x}{f_y}$。

● 【全微分大观】：不用记能直接看出路径与积分无关就行，$\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)$、$\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)$、$\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$、$\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\right)$。

● 积分应用

◇弧长微元$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}t$；

◇三维空间中的微分长度元$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\ \mathrm{d}t$；

◇三维空间中曲面$\Sigma: z=f(x,y)$的面积微元：$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$在$D_{xy}$上；

◇二维曲线长度$\int_L \mathrm{d}\,s$，三维曲线长度$\int_\Gamma \mathrm{d}\,s$，

◇二维旋转体表面积：绕 x 轴转$S=2\pi\int_a^b y\,\mathrm{d}s$、绕 y 轴转$S=2\pi\int_a^b x\,\mathrm{d}s$；

◇三维曲面薄片表面积：$\iint_\Sigma \mathrm{d}\,S$。

◇转动惯量：二维曲面$\iint_D r^2\,\mathrm{d}m$，三维立体$\iiint_\Omega r^2\,\mathrm{d}m$；

- ▲ 微分质量元：二维曲面$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\sigma$，三维空间$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}v$；
- ▲ r^2即为旋转半径的平方；

线性代数

- 特殊矩阵

◇幂等矩阵：**实对称**且**仅有 0、1 特征值**。满足$A^2=A$。

▲ 若对于非零矩阵$A_{m\times n}$、$B_{n\times m}$有 AB 为幂等矩阵且 A 列满秩 B 行满秩，则$BA=E_{n\times n}$。

◇反对称矩阵：$A^T=-A$。满足：①对角线元素恒为零；②对于$\forall x$为n维向量，$x^TAx\equiv 0$；③由上条亦可推出【对于$\forall\alpha$为n维向量，$\alpha\perp A\alpha$】。

◇【实对称矩阵】：①若A、B为实对称矩阵，则A^*、A^{-1}、$A^T=A$和$A+B$均为实对称矩阵，但是AB**不一定为实对称矩阵**（**当且仅当$AB=BA$时成立**）；

- 选择题看到奇奇怪怪的（？）尝试考虑**线性空间**。

◇β可由向量组α_1,α_2线性表示：β在由向量组α_1,α_2张成的平面A上。

▲ $\beta\perp\vec{n}$，其中$\vec{n}$为A法向量，故$\vec{n}=\alpha_1\times\alpha_2$。

◇β可同时由向量组α_1,α_2和γ_1,γ_2线性表示：β同时在由向量组α_1,α_2和γ_1,γ_2张成的平面上。

▲ $\beta\perp\overrightarrow{n_1},\beta\perp\overrightarrow{n_2}$，其中$\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$分别为两平面法向量；

▲ 故有β与$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$同向。

- 【矩阵相加、相乘时进行转置、求逆和求伴随】：①$(AB)^T=B^TA^T$、$(A+B)^T=A^T+B^T$，转置两个都可以拆；②$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，求逆的不能拆相加$(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$；③$(AB)^*=B^*A^*$求伴随，也是不能拆相加$(A+B)^*\neq A^*+B^*$。

- 【$f(x)=|A_x|$，其中矩阵A_x为含 x 的方阵，求关于 x 的系数（$f^{(k)}(0)$等）】：先将行列式化简，使含 x 的式子只存在于主对角线上，然后根据$\prod_{i=1}^{n}(a_ix+b_i)$求其系数，**注意计算**；**每个含 x 的式子都有常数项就不要用逆序数了**。

- **【某行元素的代数余子式之和】**：除了将对应行全换为一的做法之外，不好算时，尤其是每行只有一个元素时，还可以利用逆矩阵直接算出伴随矩阵。

- 【齐次方程$Ax=0$和非齐次方程$Ax=b$的规范解】：齐次方程通常令自由项为1等正整数、非齐次方程的特解一般令自由项为零。

- 【$k_1\xi_1+k_2\xi_2$】：若ξ_1、ξ_2分别是A中属于两个不同特征值的特征向量，则对于$k_1k_2\neq 0$，$k_1\xi_1+k_2\xi_2$**不是任何一个A的特征向量**。

- 伴随矩阵为原矩阵每个元素对应的**代数余子式所组成矩阵的转置**，代数余子式不与当前元素相乘。

- **四个三维向量必定线性相关**。

- 对于三维向量组α_i,β_i，$i=1,2$，分别线性无关，则一定存在非零三维向量ξ能同时被两个向量组线性表示。

  ◇$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$是**四个三维向量，则他们必定线性相关**，即存在k_i不全为零使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\beta_1+k_4\beta_2=0$，故取$\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=-k_3\beta_1-k_4\beta_2\neq 0$。
- 向量组AB与B等价的充要条件：矩阵A的作用不改变B的列向量之间的线性关系；AB可以相互表示。
- 若$n\geq 3$阶矩阵 A 的秩有$r(A)\leq n-1$，则$AA^*=0$，且伴随矩阵A^*的列向量均为$AX=0$的解向量。
- 【矩阵 A 与 B 的行向量组等价】、【方程$AX=0$与$BX=0$同解】是充要条件。
- 【$AB=C$】：C的行向量是B的行向量组的线性组合、C的列向量是A的列向量组的线性组合。
- 【方程组$A^*x=0$的基础解系】：此时一般有$r(A)=n-1$，则该基础解系为A线性无关的列向量。$A^*A=|A|E=0$。
- 【β与齐次方程组$A^Tx=0$的解均正交】：有$\alpha\perp\beta$，其中α可由方程组$A^Tx=0$的基础解系线性表示，即α与A的列向量（即原方程组中A^T的行向量）均正交，故β可由A的列向量线性表示，即非齐次方程组$Ay=b$有解。
- 韦达定理：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$、$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$，适用于求特征值和惯性指数时。
- 若 A 列满秩，则$AX=0$仅存在零解，此时有$A\cdot f(A,B)=0\rightarrow f(A,B)=0$。
- $r(A)+r(B)\geq r(A-B)\rightarrow r(A+aE)+r(A-bE)\geq r[(a+b)E]=n$。
- 【$AB=0$】：对于$A_{m\times n}$、$B_{n\times s}$，有$r(A)+r(B)\leq n$，其中n为AB连接点即A的列数、B的行数。
- 若C列满秩且$CA=CB$则$A=B$，若C行满秩且$AC=BC$则$A=B$。
- 【A 为三阶方阵，对于$\exists B$非零，$r(AB)<r(B)$】：$r(A)<3$。
- 【$A_{a\times n}$、$B_{m\times n}$均行满秩，有$AB^T=O$，b为$Ax=0$的任一非零解，求$B^Ty=b$的解】：由$AB^T=O$，即B的每个行向量的转置均为方程$Ax=0$的解，又B行满秩，故b可由B的每个行向量的转置线性表示，则对于$B^Ty=b$有$r(B^T)=r(B^T,b)=m$，故方程$B^Ty=b$有唯一解。
- 【两矩阵的迹】：对于任意$A_{n\times m}$、$B_{m\times n}$，$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$且$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$。
- 【k个n维向量共同组成矩阵为A】：①若$\mathrm{r}(A)<k$，则其线性相关；②若$\mathrm{r}(A)=k$，则其线性无关；
- 若$\mathrm{tr}(A^TA)=0$，则$A=\mathrm{O}$。
- 若题给条件$|\lambda_i\mathrm{E}-A|\neq 0$则可设$|\lambda_i\mathrm{E}-A|=\lambda_i^3+a\lambda_i^2+b\lambda_i+c$，然后分别代入解出系数。
- 只有实对称矩阵可以用相似推合同，一般矩阵相似不一定合同。

- 矩阵为 n 阶实对称矩阵：充要条件是其**有 n 个正交的特征向量**。$\xi_i \cdot \xi_j = 0$，$\xi_i \cdot \xi_i$不一定为 1，需要单位化。
- 【$PP^T = E$】：若矩阵 P 不为方阵，则其不一定是正交矩阵，正交矩阵相关性质也失效，但**其行向量组一定是标准正交向量组**。
- 【A为正定矩阵，求D使$D^TD = A$】：$\exists Q$正交，$Q^TAQ = \Lambda \to$取$D = Q^T\Lambda^{\frac{1}{2}}Q$。
- 【$P^T = P^*$，P 可逆】：$|P| = 1$。
- **非齐次方程组有解时，线性无关的解向量个数为$n - r(A) + 1$。**
- 【$A^TAx = A^Tb$】：该非齐次方程组必有解。
- 【$B(A - B) = 0$】：$B^2 = BA$，$B^n = BA^{n-1}$。
- 【两矩阵各阶主子式之和分别相等】：是【这两个矩阵相似】的**必要非充分条件，矩阵的各阶主子式之和由矩阵特征多项式的系数决定**。
- 【两个矩阵相似】：能推出两矩阵各阶主子式之和分别相等；能推出两矩阵对应的伴随矩阵相似；无法推出两矩阵对应的逆矩阵相似（不一定可逆）。
- 当且仅当矩阵实对称时，$\xi_1 \perp \xi_2$，但ξ_2和ξ_3不一定正交，$\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$。
- 矩阵 A 经**初等列变换**变成矩阵 B，则 AX=B 有解，即$r(A) = r(A, B)$。
- 二次型$f = 0$，其中f为三个平方相加，当且仅当各平方等于 0。
- 若 A 不能相似对角化，则【**$f(A)$特征值为$f(\lambda)$**】**仍不失效**，$A^2 = O \to A$的特征值全为 0。
- $\forall \beta, A^n\beta$：一般有 A 可相似对角化，则其特征向量$\{\xi_i\}$线性无关，则$\forall \beta = \sum k_i\xi_i$，故$A^n\beta = A^n(\sum k_i\xi_i) = \sum k_i\lambda_i^n\xi_i$。
- α已知，若【对于任意β使$\beta^T\alpha = 0$】：$\alpha^T\beta = 0$，由$s = 3 - r(\alpha^T) = 2$，则有存在β_1, β_2线性无关，故上述β可以用β_1, β_2线性表示。
- 方程组同解：A 的零空间和 B 的零空间完全相等，即$r\binom{A}{B} = r(A) = r(B)$

  ◇零空间维数$s = n - r(A)$，其中 n 为 A 的列数即自变量个数。
- 若方程$Ax = 0$的解均为$Bx = 0$的解，但他们不同解，则$r\binom{A}{B} = r(A) > r(B)$。
- 若$(\lambda_0E - A)B = 0$，则矩阵B的所有列向量全为矩阵A的对应于特征值λ_0的特征向量，注意若矩阵B不满秩需要选择线性无关的几个列向量。
- 【配方法】：①先确定配方顺序，配的时候把所有相关项放在一起；
- 【※※※实对称A、B均不是对角矩阵】：对应二次型函数分别为f、g

  ◇【当A、B合同时，求可逆矩阵D使$A = D^TBD$】：对f、g分别配方（系数需相同），则$\mathbf{z} = D_1\mathbf{x} = D_2\mathbf{y}$，则取$D = D_2^{-1}D_1$；

◇【当A、B相似但均不能相似对角化时，求可逆矩阵P使$A=P^{-1}BP$】：①设$P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$，则有$AP=PB$，其中B应当是相对比较简单的；②使用合同初等变换。

- 合同变换应记录**列变换**所用矩阵。
- 两个非对角阵的矩阵之间转换可以优先考虑合同变换，尤其是两个不能相似对角化的矩阵之间应该优先尝试合同变换。
- 对于三阶二次型$x=Qy$后坐标轴方向依次为A的三个相互正交的特征向量。
- 【二次型的规范型的符号差】：$s=p-q$，即**正减负**。
- 若A、B均为n阶方阵，则分块矩阵$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$的特征值即为$A$、$B$的特征值放在一起。
- 【直接要求$f[P_n(A)]$】：例如$B=(A^2+3A+2E)^{-1}$，此时若有矩阵 B 特征值全为$a\neq 0$，则$B\sim aE$，$B=P(aE)P^{-1}=aE$。
- 对于两个二次型的对应矩阵A、B，

◇他们具有相同的规范型，即 A、B **合同**↔存在可逆矩阵P使$B=P^{-1}AP$，要求正负惯性指数相同；

◇他们具有相同的标准型，即 A、B **相似**↔存在正交矩阵Q使$B=P^TAP$，要求特征值相同；

◇存在可逆矩阵P,Q使$B=PAQ$，即 A、B **等价**。

- 若存在正交矩阵Q使$Q^TAQ=\Lambda$，**则A一定为实对称矩阵**。
- **只有通过正交变换将矩阵化为对角阵时，对角线的主对角线元素才是矩阵的特征值**。

◇故包括手动的合同的变换化为对角阵时所取的变换矩阵（没有单位化）在内，得到的对角阵上的主对角线元素均不能作为矩阵特征值，包括其符号也不能直接作为正负惯性指数；

◇**不知道矩阵特征值的情况下慎用可逆变换**。

- 若矩阵 B 不为实对称矩阵，但题上要求二次型，须通过$A=\frac{1}{2}(B+B^T)$变换得到 A，再继续算。
- 【二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}(a_ix_1+b_ix_2+c_ix_3)^2$】：记$\alpha_i=[a_i,b_i,c_i]^T$，$i=1,2,3$，则该二次型对应矩阵为$A=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\,\alpha_i^T=BB^T$，其中矩阵$B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$。

◇$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}k_i\,(a_ix_1+b_ix_2+c_ix_3)^2$，则$A=\sum_{i=1}^{3}k_i\,\alpha_i\alpha_i^T$。

- 【$|x^TAx|<|x^Tx|$】：$-x^Tx<x^TAx<x^Tx$，故$A+E$和$E-A$均正定。
- 【$P_1^{-1}AP_1=A^T$】：由$P^{-1}AP=\Lambda$两边同时取转置$P^TA^T(P^{-1})^T=\Lambda^T=\Lambda$即$A^T=(P^{-1})^T\Lambda P^T=(P^{-1})^TP^{-1}APP^T$，故取$P_1=PP^T$即为所求。
- 正交矩阵：①列向量彼此正交；②列向量模长为 1。即$\alpha^T\alpha=1$，$\alpha^T\beta=0$。
- 【P 非零，$P^T=P^*$】：P 为正交矩阵；$|P|=|P^T|=|P^*|=|P|^2\to|P|=1$，$P^T=P^*\to PP^T=PP^*=|P|E=E$，得证。

- 【矩阵 A 为二次型对应矩阵，求 P 可逆使$A=P^TP$】：求正交矩阵Q使$Q^TAQ=\Lambda$，另求矩阵P_1使$P_1^T\Lambda P_1=\mathrm{E}$，则所求矩阵即为$P=P_1Q$。
- 【$f''(x)<0$，比较$E[f(X)]$、$f(EX)$】：由$f(x)<f(EX)+f'(EX)(X-EX)$，对两边同时取期望得$E[f(X)]<Ef(EX)=f(EX)$，其中$E(X-EX)=0$。
- 【$\frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$，其中$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$】：$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$是标量，原式$\frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$也是个数，其最大最小值分别为$A$的最大最小特征值（**如果有特殊条件需要具体分析**），$\frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}=\frac{\sum\lambda_iy_i^2}{\sum y_i^2}$。
- 【$\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$是标量】：①对于$\forall A$、B，$\alpha^TAB\alpha=(A^T\alpha)^T(B\alpha)=(B\alpha)^T(A^T\alpha)$，即均为向量$A\alpha$与$B\alpha$的内积；②若$A$存在零特征值，即$\exists\mathbf{x}\neq 0$使$\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=0$故有$\mathbf{x}\perp A\mathbf{x}$。
- 【$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$的最值】：不一定能取到最值，当$A$为正定矩阵时其最小值为零无最大值，当$A$为负定矩阵（特征值全小于零）时其最大值为零无最小值。

  ◇正定矩阵：对于$\forall\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$，有$\mathbf{x}^TA\mathbf{x}>0$。
- 【$\max\{\frac{\mathbf{x}^TA\mathbf{x}}{\mathbf{x}^TB\mathbf{x}}\}$的最值】：当$A$、$B$正定时，最大值为矩阵$B^{-1}A$或$AB^{-1}$的最大特征值。
- 【类似$\alpha^TA\alpha$、$\alpha^TA\beta$等标量在…**恒成立**】：A为（半）正定、（半）负定矩阵。

概率论

- $\int_{\alpha}^{\beta} a\, e^{-ax}\,\mathrm{d}x = e^{-a\alpha} - e^{-a\beta}$。
- 计算分布函数时如果积分求不出来且积分下限为负无穷，应该特别注意其是否为正态分布的分布函数，$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}x$，则$Y \sim \mathrm{N}(\mu，\sigma^2)$。
- 【$AB = \overline{A}\ \overline{B}$】：此时有$A$、$B$对立，即$\begin{cases} A = \overline{B} \\ B = \overline{A} \\ AB = \overline{A}\ \overline{B} = \phi \end{cases}$，且$P(A|\overline{B}) = P(\overline{A}|B) = 1$，$P(A) + P(B) = 1$。

  ◇均可以逆推。
- 【求某概率表达式的最值】：需要特别注意的是，部分概率天然具有范围，例如

  ◇$P(A) + P(B) - 1 \le P(AB) \le \min\{P(A), P(B)\}$；

  ◇$\max\{P(A), P(B)\} \le P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$。
- 【已知参数】：意思就是让你先求出来这个参数是多少。
- 若连续型随机变量 X 的概率密度函数为$f_X(x)$，则$Y = |X|$的概率密度函数为$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y)$，$y > 0$。

  ◇注意连续型随机变量$P\{Y = |X| = 0\} = 0$。
- 【公式法求概率密度】：对于$Y = g(X) \to X = h(y)$，Y 的概率密度函数在正概率区间$[\alpha, \beta]$上为$f_X[h(y)] \cdot |h'(y)|$，要求$g(x)$在X的正概率区间上可微且单调，否则方法失效。
- 【随机变量X、Y独立同分布于$G(p)$，则$Z = \min\{X, Y\} \sim G[1-(1-p)^2]$】：由$P\{X \ge k\} = (1-p)^{k-1}$，$P\{Z \ge k\} = (1-p)^{2(k-1)}$，则$P\{Z = k\} = P\{Z \ge k\} - P\{Z \ge k+1\} = [(1-p)^2][1-(1-p)^2]$，取$q = 1-(1-p)^2$，$Z \sim G(q)$。
- **【混合型随机变量的分布函数】**：例【$P\{X = \pm 1\} = \frac{1}{2}$、当$|X| < 1$时服从均匀分布】，应当特别注意此处的均匀分布**实质上是前提条件为$|X| < 1$的条件分布！**$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & ,|X| < 1 \\ \frac{1}{4} & ,X = \pm 1 \\ 0 & ,else \end{cases}$才是正确的。
- 无记忆性：几何分布和指数分布具有无记忆性，$P(X > m+n \mid X > m) = P(X > n)$。某事件 X 发生的概率为 p，对 X 进行独立重复的观测，直到 X 第 n 次发生时停止，记观测次数为 Y，则$EY = \frac{n}{p}$。
- **连续型随机变量X没有像离散型二项分布一样的随X取值的最大值**，若题上说明是【$X \sim E(\lambda)$落于区间[1,2]的概率最大】指的是$f(\lambda) = P\{1 \le X \le 2\}$在$\lambda = \lambda_0$时取值最大，即$f'(\lambda_0) = 0$。

- 均匀分布的两端点的最大似然估计值分别是样本数据的最小值和最大值。
- 判断各种条件概率之间关系的选择题，公式推不出来说明就是错的。
- 离散型随机变量的分布函数需要进行累加操作，所以**分布函数如果出现了**$n=1,2,3\cdots$**说明没用累加**。
- 若$F(x)$是随机变量X的分布函数则$F(X)\sim \mathrm{U}(0,1)$。
- 若随机变量X和Y独立同分布且期望方差均存在，$F(x)$为其严格单调递增的分布函数，记$\mathrm{U}=F(X)$，则$E(|X-Y|)=4\mathrm{Cov}(X,\mathrm{U})$
- 连续型随机变量取某一点的概率为 0，连续型的概率密度函数**并非**表示取该点的概率，**概率由区间给出**。
- 由上，若$(X,Y)\sim N(0,0;1,1;\rho_{XY})$，则$P(X^2<Y^2)=P(Y^2<X^2)=\frac{1}{2}$。
- 如果 A 和 B 是正相关的（A 对 B 有促进作用），$P(B|A)>P(B)$；如果 A 和 B 是负相关的（抑制），$P(B|A)<P(B)$；如果 A 和 B 独立，$P(B|A)=P(B)$。
- 对于任意事件$B,P(B)>0$，有$P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1$。
- ※※※$\mathrm{Cov}(aX+bY+c)=a^2\mathrm{D}(X)+b^2\mathrm{D}(Y)+2ab\mathrm{Cov}(X,Y)$。
- **随机变量的方差等于零当且仅当其恒为常数，否则方差恒大于零。**
- $P\{|X|\le\alpha\}=2\Phi(\alpha)-1$。
- 若随机变量X的分布函数为$\Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$，则$X\sim N(\mu，\sigma^2)$。
- 若总体X服从正态分布$X\sim N(0,\sigma^2)$【需注意，计算相关方差时$D(aX)=a^2DX$】

  ◇样本均值$\overline{X}\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right),\frac{n}{\sigma^2}\overline{X}^2\sim\chi(1)$

  ◇样本方差S^2的$\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\sim\chi(n-1)$、$\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}\sim\mathrm{F}(1,n-1)$。
- **泊松分布**：$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,\cdots$。

  ◇$e^{-\lambda}$没有x，期望$E(X)=\lambda$，方差$\mathrm{Var}(X)=\lambda$。
- 泊松定理：若$X\sim B(n,p)$，若$\begin{cases} n\ge 20 \\ p\le 0.05 \\ 1\le np\le 2\end{cases}$，则$X\sim P(np)$。
- **指数分布**：$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},x\ge 0$。

  ◇$e^{-\lambda x}$没有x期望$E(X)=\frac{1}{\lambda}$，方差$\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$。
- 第一类错误（去真）：$\alpha=P(拒绝\ H_0\mid H_0为真)$。其中$\alpha$为显著性水平。
- 第二类错误（存伪）：$\beta=P(不拒绝\ H_0\mid H_1为真)$。
- 若 Z=XY 为离散型随机变量，则应该先把 Z 取值全部表示出来。

- 若总体$X \sim U(a,b)$，则服从于总体的X_i最大值$X_{(n)}$和$X_{(1)}$的期望满足$E\left(X_{(n)}\right)=b-\frac{1}{n}(b-a)$，$E\left(X_{(1)}\right)=a+\frac{1}{n}(b-a)$。
- 不要看到概率密度像是指数分布就直接用无记忆性，老老实实算。
- 若二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布，则$U=X+Y$，$V=X-Y$同样服从二维正态分布，且当$DX=DY$时，$Cov(U,V)=DX-DY=0$即二者不相关故他们相互独立。

  ◇此时有$P\{|X+Y|<\alpha \mid X-Y>\beta\}=P\{|X+Y|<\alpha\}$。
- 若随机变量$X \sim N(0,\sigma_1^2), Y \sim N(0,\sigma_2^2)$，则

  ◇$aX^2 \sim \chi(1)$，$a=\frac{1}{\sigma_1^2}$；

  ◇$b\frac{X}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} Y_i}} \sim t(n)$，$b=\frac{\sqrt{n\sigma_2^2}}{\sigma_1}$；

  ◇$c\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{m} Y_i^2} \sim F(n,m)$，$c=\frac{m\sigma_2^2}{n\sigma_1^2}$。
- 若随机变量含参数，则举例论证不独立时应该将参数解出而不是直接显然。
- X_i和$\overline{X}$**不相互独立**，故$\left(X_1-\overline{X}\right)$的方差不为直接相加的$\frac{n+1}{n}\sigma^2$，应该为$D\left(X_1-\overline{X}\right)=DX_1+\overline{X}-2$，$Cov\left(X_1，\overline{X}\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$。
- 【卷积公式】
- 若随机变量 XY 的相关系数$\rho_{XY}=\pm 1$且$\mathrm{D}(Y)=a^2D(X)$，则可设$Y=\pm aX+b$。
- 若 X 和 Y 独立同分布于标准正态分布，则$Z=\frac{X}{Y} \sim t(1)$。
- 若 X 和 Y 独立同分布于指数分布，则$Z=|X-Y|$也与 XY 同分布，但不独立。
- 若 X 和 Y 独立同分布于指数分布$E(\lambda)$，则$Z=\min\{X，Y\}$，则$Z \sim E(2\lambda)$。

  ◇可推广到n个的情况。
- 【$Y=\sum_{k=1}^{n}\left(X_k+X_{n+k}-2\overline{X}\right)^2$，$X_{1\sim 2n}$来自总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$】：记$T_k=X_k+X_{n+k}$为来自总体$T$的样本，则总体$T$的样本均值$\overline{T}=2\overline{X}$，样本方差为$S_T^2=\frac{1}{n-1}Y$且仍然有$\frac{(n-1)S_T^2}{2\sigma^2} \sim \chi(n-1)$。
- 随机变量 X、Y 独立同分布，则$P\{a<max\{X，Y\}<b\}=F_Y(b)F_X(a)+F_Y(a)F_X(b)-F_Y(b)F_X(b)$，主要是提醒一下最后要减。
- 若随机变量 Z 服从标准正态分布，则$E|Z|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$。

  ◇若随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$E|X|=\sigma \cdot E|Z|+\mu$。
- 对于三个随机变量X,Y,Z，若存在$Z=f(X,Y)$，则 Z 一定不与 X 和 Y 相互独立。
- 若对于三个随机变量X,Y,Z相互独立，则X^k,Y^k,Z^k也相互独立。

- 若随机变量 X 的概率密度函数$f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，则$X\sim t(1)$。
- 求最大似然函数时若存在$|X_i-\theta|$，则可设有 k 个 X 小于θ，即$X_1\le\cdots\le X_k\le\theta\le\cdots\le X_n$。
- 若$X_i\sim E(n\lambda)$独立同分布（$i=1,2,\cdots,n$），当全部 X 均发生时，记最先发生的为Y_1，Y_1发生后**重新计时**，第二次最先发生的记为Y_2，以此类推。则$Y_1\sim E(n\lambda)$，$Y_2\sim E[(n-1)\lambda]$，⋯，$Y_n\sim E(\lambda)$。
- 条件期望：$E(X)=E[E(X|Y)]$，若对于$f(Y)\cdot g(X)$的条件期望$E[f(Y)\cdot X]=E\{E[f(Y)X|Y\in I]\}=E\{f(Y)E[X|Y]\}$，即可以把条件（后面）的随机变量提出来。
- 条件方差：$D(X)=E[D(X|Y)]+D[E(X|Y)]$。
- 条件概率密度$f_{Y|X}(y\mid x)$：①$\int_{-\infty}^{+\infty}f_{Y|X}(y\mid x)\mathrm{d}y=1$；②$\frac{f_{Y|X}(y|x)}{f_{X|Y}(x|y)}=\frac{f(x,y)/f_X(x)}{f(x,y)/f_Y(y)}=\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$。

  ◇若②式等于$\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-g(x)}}{e^{-g(y)}}$，则可设$f_Y(y)=Ae^{-g(y)}$，其中$A$使$\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)=1$。
- 切比雪夫不等式$P(|X-EX|\ge\varepsilon)\le\frac{DX}{\varepsilon^2}$。
- 大题就不要用亚当夏娃了，没分。
- 若随机变量$X\sim F(n,m)$，则$\frac{1}{X}\sim F(m,n)$且$F_{1-\alpha}(n,m)=\frac{1}{F_\alpha(m,n)}$。
- t 分布不需要分子和分母相互独立，F 分布需要分子和分母相互独立。
- (？)极大似然估计计算出来是多少就是多少，不要取整。
- 若随机过程类似于【从头到尾编号并依次从盒子中取球直到事件发生】，记其次数为 X，若该过程有对称性，即①从头到尾等价于从尾取到头②两过程对应的事件发生则一定同时发生，则可记从尾取到头对应的次数为 Y，有$EX+EY=n+1$、$EX=EY=\frac{1}{2}(n+1)$，其中n为盒子数，加一是因为同时发生时该盒子计算了两次。
- 大数定律成立条件

  ◇切比雪夫大数定律：①相互独立或两两不相关；②方差存在且有上界。

  ◇伯努利大数定律是切比雪夫大数定律的特例，同上；

  ◇辛钦大数定律：①相互独立；②同分布；③期望存在。
- 区间估计

  1. 确定分布：σ已知时有$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，$\sigma$未知时有$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，注意分别是分母均为标准差；
  2. 确定置信区间，画出图像；
  3. 以σ已知时为例，有$-U_\alpha<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<U_\alpha$，其中$U_\alpha$表示标准正态分布$Y\sim N(0,1)$在显著性水平$\alpha$下的上分位数，即$P\{Y>U_\alpha\}=\alpha$；

4. 即$|\overline{X}-\mu|<\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_\alpha$，则置信区间长度为$2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_\alpha$，根据拒绝域算出$\overline{X}$或$\mu$范围即可。

▲ 注意两个参数在不等式两边都是加号$-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_\alpha+\mu<\overline{X}<\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_\alpha+\mu$，$-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_\alpha+\overline{X}<\mu<\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_\alpha+\overline{X}$；

▲ 【置信区间长度为 2，拒绝域为$\mu<1$，结果为拒绝H_0】：$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_\alpha=1$，则

$$\left.\begin{matrix}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_\alpha+\overline{X}<\mu<\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_\alpha+\overline{X}\\ \mu<1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overline{X}\le 1-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_\alpha=0。$$

- 假设检验：若对结论P进行检验，应将该结论的否定作为原假设$H_0:\neg P$。
- **假设检验的原假设H_0一般带等号**。
- 一致估计：若估计量T依概率收敛为θ（即$\mathrm{E}T=f(n,\theta)$，$\lim_{n\to\infty}f(n,\theta)=\theta$），则$T$为$\theta$的一致估计。
- 样本均值和样本方差一般为$\mathrm{E}X$和$\mathrm{D}X$的一致估计和无偏估计，但样本标准差一般仅为$\mathrm{D}X$的一致估计，不一定为其无偏估计。