

流體的不穩定性與波

說明

- (1) 以下符號 $i = \sqrt{-1}$ 、 j 作為角標，不要搞混了。
- (2) 在本題中我們僅考慮震盪項的一次方項，忽略高次項。
- (3) 除了 **D** 部分以外，流體皆為非壓縮性。
- (4) 所有介質皆為非磁性物質。

數學公式

∇ 為梯度算符，在直角坐標下的定義為

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

以下則為梯度算符的一些性質：

- (1) 若向量 $\mathbf{A} = \nabla f$ ，且 \mathbf{A} 沒有奇點，則 $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ 。
- (2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$
- (3) $\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$
- (4) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$
- (5) $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \frac{1}{2} \nabla (A^2) + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{A}$

令 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ ， $f = f_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ ，其中 $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ ，且 $\mathbf{A}_0, f_0, \mathbf{k}, \omega$ 為常數，則

- (6) $\nabla f = i f \mathbf{k}$
- (7) $\nabla \cdot \mathbf{A} = i \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}$
- (8) $\nabla \times \mathbf{A} = i \mathbf{k} \times \mathbf{A}$

介紹

以下我們將探討流體力學中的波與不穩定性，而描述流體力學的方程式為

(1) 納維爾－斯托克斯方程式 (Navier Stokes equation)

已知流體的密度為 ρ 、速度為 \mathbf{v} 、壓力分布為 P ，則方程式可表達為

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \mathbf{f} + \eta \nabla^2 \mathbf{v}$$

其中 \mathbf{f} 為單位體積所受的力，又可寫作 $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$ ， \mathbf{g} 為液體所受的加速度場、 η 為黏滯係數。

本題為簡化模型，僅考慮流體為非壓縮性、無黏滯力 ($\eta = 0$) 且為無旋流。注意無旋流的定義為速度場的旋度為零，即 $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ 。

(2) 楊－拉普拉斯方程式 (Young-Laplace equation)

已知表面張力係數為 σ ，則表面張力造成的壓力 ΔP 為

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

R_1 、 R_2 為兩個主要曲率半徑。

在本題的所有模型中總會有一個維度具有平移性，因此我們皆只有考慮表面張力在二維空間的作用，而根據主要曲率半徑的定義，可知在 xy 平面上，主要曲率半徑的理論式為

$$R_1 = \frac{(1 + y_x^2)^{3/2}}{y_{xx}}, \quad R_2 = \infty$$

其中 y_x 為 $\partial y / \partial x$ 、 y_{xx} 為 $\partial^2 y / \partial x^2$ 。

A 部分 時變的白努力方程式 (10 pt)

本大題僅考慮重力場，即 $\mathbf{g} = -g\hat{z}$ ， g 為重力加速度量值。

A.1 證明速度場可寫作函數 ϕ 的梯度，也就是 $\mathbf{v} = \nabla \phi$ 。或者也可說 ϕ 符合 1 pt

$$\phi = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

就如同勢能的定義。以下將 ϕ 稱為速度勢。

A.2 證明 5 pt

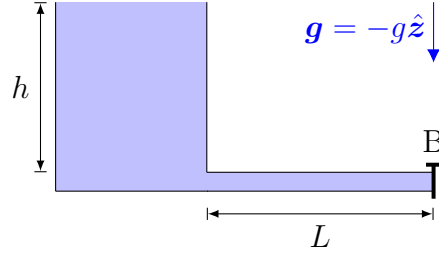
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{P}{\rho} + gz = \text{const.}$$

上式稱為時變的白努力方程式。注意到是整個區域任意處皆為同個常數。

- A.3** 考慮深度為 h 、截面積為 A 的容器，下方接著一條長度為 L 、截面積為 $a(a \ll A)$ 的水管，如下圖所示。在 $t = 0$ 時，將閥門 B 打開。試求當時間為 t 時，水管開口處的流速 $v(t)$ 。在本題所考慮的時間尺度遠小於液面下降的時間尺度，也就是計算時可以忽略液面下降。

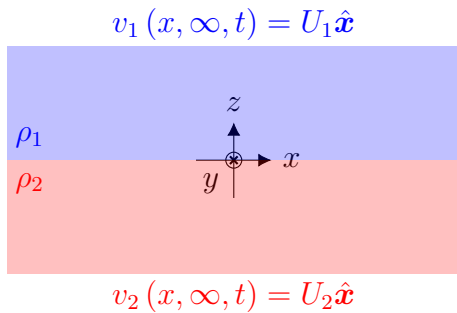
積分公式：

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a}$$



B 部分 開爾文-亥姆霍茲不穩定性 Kelvin-Helmholtz instability (32 pt)

開爾文-亥姆霍茲不穩定性 (Kelvin-Helmholtz instability) 是在有剪力梯度的連續流體內部或有速度差的兩個不同流體介面之間發生的不穩定現象。常見的例子是在飛機飛過對流層上方時，你會看見類似圖 1 的卷形雲霧。以下我們將討論不穩定性發生的條件。本題中僅考慮 xz 平面上的振動，物理量不隨 y 座標變化。見圖 1，考慮兩個半無限大的區域。定 xy 平面為交界面。介質交界面上的深度隨時間的變化為 $z = h(x, t)$ 。上層的介質為介質 1，在無窮遠處的速度為 $\mathbf{v}_1(x, \infty, t) = U_1 \hat{\mathbf{x}}$ ，下層的介質則為介質 2，在無窮遠處的速度為 $\mathbf{v}_2(x, -\infty, t) = U_2 \hat{\mathbf{x}}$ 。其中 U_1, U_2 皆可視為定值。介質 i 的速度勢為 ϕ_i ，密度為 ρ_i 。以下題目除了 B.5 以外皆忽略重力的影響。



(a) 模型架設



(b) 開爾文-亥姆霍茲雲

圖 1

B.1 證明在介質交界處的邊界條件為

2 pt

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z}$$

為了避免複雜計算，假設擾動極為微小，因此可將 ϕ 線性化作為良好的近似

$$\begin{aligned}\phi_1(x, z, t) &= U_1 x + \varphi_1(x, z, t) \\ \phi_2(x, z, t) &= U_2 x + \varphi_2(x, z, t)\end{aligned}\quad (1)$$

其中 φ_i 為微小振動項，有 $\varphi_i \ll \phi_i$ 的關係。以下僅考慮 φ_i 的一次項，忽略其高次項。

B.2 證明在介質交界處的動態邊界條件為

3 pt

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)$$

假設介面的擾動有正弦波的形式

$$h(x, t) = h_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (2)$$

其中 h_0 遠小於任何尺度。

B.3 證明

7 pt

$$\varphi_1(x, z, t) = \varphi_{10} e^{-kz} e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\varphi_2(x, z, t) = \varphi_{20} e^{kz} e^{i(kx - \omega t)}$$

為符合微分方程式與邊界條件的其中一組解。其中 $\varphi_{10}, \varphi_{20}$ 為常數。

B.4 試求出擾動角頻率 ω 。以速度差 $u = U_1 - U_2$ 和角波數 k 表達答案， 7 pt

你可能會算出兩種結果，則請取正根者作為你的答案。並求出在何種條件下，擾動會呈指數型增長。

以上皆未考慮表面張力與重力的影響，請你綜合上述 B.1 至 B.4 的推導，並代入(1)(2)式、B.3 的假設，重新求出考慮表面張力與重力的結果。已知介面的表面張力係數為 σ 、重力加速度 $\mathbf{g} = -g\hat{z}$ 。假設擾動幅度很小， $|\partial h / \partial x| \ll 1$ 。

提示 參數的擾動幅度皆很小，因此皆可寫為無擾動情況下的解加上擾動項。

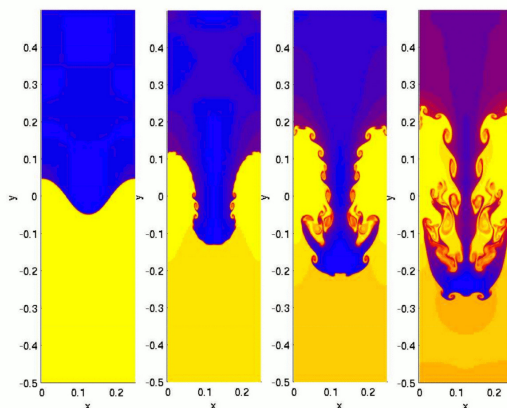
B.5 試求出考慮表面張力與重力的擾動角頻率 ω 。以速度參數 $u = U_1 - U_2$ 14 pt
和角波數 k 以及其他物理常數表達答案。同 B.4，請取正根者作為你的答案。

B.6 試求出當 $\rho_2 > \rho_1$ 時能產生不穩定擾動的最低速率差 u_c 。 4 pt

在 B.4 與 B.5 中 ω 皆取正根，而導致有不穩定性，相反地，若我們取負根，擾動則會呈指數型衰減，系統則為穩定態。事實上只有取正根是符合物理現象的，以下我們將藉由 C.1 來說明。

C 部分 瑞利－泰勒不穩定性 Rayleigh-Taylor instability (7 pt)

瑞利－泰勒不穩定性 (Rayleigh-Taylor Instability) 常見在雲與激波系統中。當密度較高的流體浮在密度較低的流體上，達成平衡時介面是完全平行的，但是若給予介面的輕微擾動，較重的物質因為重力作用而下沉，而輕的物質被替換而上升。向下運動的不規則形狀很快的就會指數型增長成所謂的「Rayleigh-Taylor Finger」。



最有名的例子即是在 1,000 年前爆炸的超新星將物質噴發和掃掠過蟹狀星雲，在爆炸中產生的脈衝風星雲供給了蟹狀星雲的能量，因而產生此種效應。下圖即可明顯的看到 Rayleigh-Taylor Finger。

C.1 將瑞利－泰勒不穩定性的發生情況套用在 B 部分的模型中，試說明 1 pt
為何在 B.4 與 B.5 中角頻率 ω 皆只能取正根。

C.2 本小題所有參數皆與 B 部分相同。當介質沒有相對速度，且給予介面微小擾動時，介面會產生瑞利－泰勒不穩定性。在忽略表面張力的情況下，已知此時擾動尺度的增長為 $e^{\gamma t}$ ，試求常數 γ 。 3 pt

- C.3** 已知角波數為 k 、介面的表面張力係數為 σ 、水的密度為 ρ 、重力加速度為 g 。假設擾動幅度很小，且忽略空氣的質量。試求水波在深水處的擾動角頻率 ω 。 3 pt

D 部分 磁流體波 magnetohydrodynamic wave (17 pt)

磁流體波分為阿爾芬波 (Alfvén wave) 與磁聲波 (magnetosonic waves)。前者為橫波，後者則為橫波與縱波的疊加。在一般情況下，阿爾芬波的頻率遠低於等離子體的迴旋頻率，是一種線偏振的低頻橫波。但是當處於極端環境下，例如太陽表面附近的低密度和高磁場，阿爾芬波則變為主要的能量傳遞模式。

已知在電導率為 σ 的磁流體中，歐姆定律須修正為 $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ， \mathbf{J} 為電流密度、 \mathbf{E} 為電場、 \mathbf{B} 為磁場。以下我們考慮 σ 接近於無限大，而這個假設在太陽表面附近大致正確。

我們考慮微小震盪，因此物理量可寫為常數項加上震盪項，且震盪項遠小於常數項，所以磁場 \mathbf{B} 、流體密度 ρ 以及壓力分佈 P 可寫為

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t), \quad P(\mathbf{r}, t) = P_0 + p(\mathbf{r}, t)$$

$\mathbf{B}_0, \rho_0, P_0$ 分別為穩定態時的磁場、流體密度和壓力。而流體速度分布為 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ 。

- D.1** 請證明下式成立

3 pt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + c^2 \nabla \tilde{\rho} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \mathbf{b}) &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) &= 0 \end{aligned}$$

並求出 c 的表達式。以上即為微擾情況下的磁流體方程式 (MHD equation)。

- D.2** 請由 D.1 所得的方程式證明 \mathbf{v} 會符合

2 pt

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - c^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v}_A \times \{ \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A)] \} = 0$$

並求出 \mathbf{v}_A 的表達式。

將 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ 寫為行進波的形式，即令 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ ，其中 $\mathbf{v}_0, \mathbf{k}, \omega$ 為常數。波的相速度的定義為 $v = \omega/k$ 。

D.3 請證明行進波的色散關係為

3 pt

$$\omega^2 v_0 = (c^2 + v_A^2) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{k} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A) [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A) \mathbf{v}_0 - (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_A) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_A]$$

此即為描述磁流體波的方程式。

以下令 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = k B_0 \cos \theta$ ，而我們將討論不同速度方向所對應到的震盪頻率。

D.4 當速度 \mathbf{v}_0 與波向量 \mathbf{k} 垂直時，此波為橫波也就是阿爾芬波。試求出 2 pt

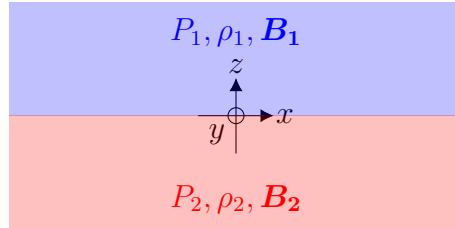
阿爾芬波的相速度 v_T 。

D.5 已知符合 D.3 的波除了 D.4 的橫波還有另一種波為橫波與縱波的疊 7 pt

加，也就是磁聲波。試求出磁聲波的相速度 v_M 。

E 部分 阿爾芬波與表面波 (34 pt)

在天文物理中，阿爾芬波常用於解釋太陽對流區的能量擴散。對流區在光球表面產生的電磁波動與表面不同的壓力梯度產生阿爾芬波。這些波攜帶能量和帶電的等離子體離開表面，穿過色球層和過渡區並與電離等離子體相互作用。因為光球表面會有類似層狀的密度分布，再加上不可忽略重力，所以色散關係會與 D.4 與 D.5 稍有不同。以下為模型說明。



考慮兩層不可壓縮流體，在沒有擾動時，壓力分布為 $P(\mathbf{r}, t)$ 、密度為 $\rho(\mathbf{r}, t)$ 、介質中的磁場為 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$

$$P(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} P_1(z), & z > 0 \\ P_2(z), & z < 0 \end{cases}, \rho(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \rho_1(z), & z > 0 \\ \rho_2(z), & z < 0 \end{cases}, \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \mathbf{B}_1(z), & z > 0 \\ \mathbf{B}_2(z), & z < 0 \end{cases}$$

在經過很長的時間後，所有微小振盪項 \mathbf{A} 皆可寫為行進波的形式，即

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A_0(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} = \sum_i A_i(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{e}}_i$$

且 A_i 為 \mathbf{A} 在 i 方向上的分量， $\hat{\mathbf{e}}_i$ 為 i 方向的單位向量。在此我們考慮的情況相對於初始

狀態已過長久的時間，因此所有物理量的振盪角頻率 ω 和波向量 \mathbf{k} 皆因耦合作用而變為相同值。

- E.1** 我們先不考慮振盪。試求出在無振盪情況下的計示壓力分佈 $P(z)$ 。 4 pt
注意你必須表達出 $z > 0$ 與 $z < 0$ 區域之間的關係。答案可含一個待定常數。

以下題目考慮 B 只有 x, y 分量。

- E.2** 請證明以下微分方程組成立 6 pt

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}$$

- E.3** 請證明 E.2 可以化簡為 10 pt

$$\frac{du_z}{dz} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{b} = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u}$$

$$\rho \omega^2 u_j = i\bar{p}k_j - \frac{i}{\mu_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) b_j$$

$$\rho \omega^2 u_z = \frac{d\bar{p}}{dz} - \frac{i}{\mu_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) b_z$$

其中 $j = x, y$ 。並試求出參數 \bar{p} 的表達式。

- E.4** 請證明 $u_z(z)$ 的解可以是 $u_z = u_{z0}e^{-k'|z|}$ 其中 u_{z0} 為常數。並求出常數 k' 。 4 pt

- E.5** 請證明波動的色散關係為 9 pt

$$\omega^2 = \frac{2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2}{\mu_0(\rho_1 + \rho_2)} - gk \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)$$

阿爾芬波所攜帶的能量足以使日冕的溫度達到比太陽表面高 200 到 400 倍，並使太陽風的速度達到 150 萬英里每小時。至於這些能量是否真的能完全轉化為熱能，目前還不得

而知。直至今日，阿爾芬波可以解釋日冕和太陽風的能量來源，但沒有足夠的能量來解釋日冕物質拋射 (CME) 時拋射出的大量等離子物質。圖 2 左圖是 SDO(Solar Dynamics Observatory) 以紅外線頻率拍攝的阿爾芬波實際照片。

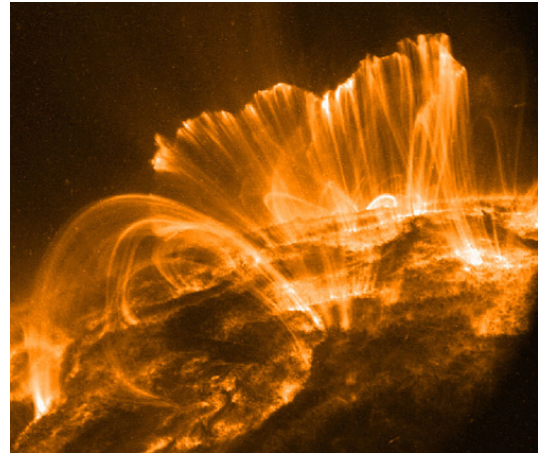
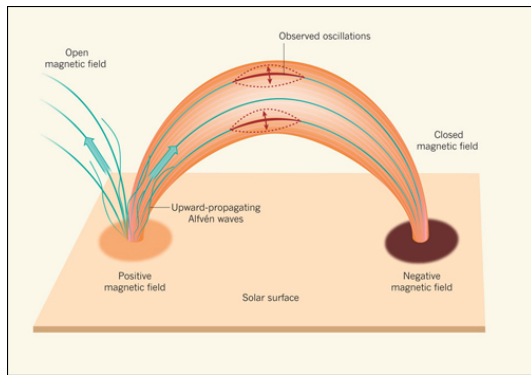


圖 2. 左圖是 SDO(Solar Dynamics Observatory) 以紅外線頻率拍攝的阿爾芬波實際照片。