不同坐標系中的應力張量
與納維爾－斯托克斯方程式

王兆國 William Wang
WilliamWang941225@gmail.com

June 18, 2024

目錄

1 壓力與浮力

1.1 壓力

在密度為 ρ 的液體內，若加速度場為 $\boldsymbol{g} = g\hat{\boldsymbol{z}}$，則由靜力平衡可知穩定態時的壓力差為

$$\Delta P = \rho g \Delta z$$

Δz 為選定兩點的 z 座標差。因此易知

$$\boldsymbol{\nabla} P = \rho \boldsymbol{g}$$

1.2 浮力

數學公式

(1) 積分

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} T \,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \oint_S T \,\mathrm{d}\boldsymbol{a} \qquad \int_V (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = -\oint_S \boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

其中 T 為純量、$\boldsymbol{v}$ 為向量，積分範圍 S 為包圍 V 的面。注意以上定理只有在函數在積分範圍內無奇點才成立。

(2) 旋度

$$\boldsymbol{\nabla} \times (a\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} a \times \boldsymbol{r}$$

以下將利用上述公式重新證明浮力相關的定理。

1.2.1 浮力公式

物體沉於液面下的體積為 V，則受到的浮力 $\boldsymbol{F}$ 為

$$\boldsymbol{F} = \oint P\,(-\,\mathrm{d}\boldsymbol{a}) = -\int \boldsymbol{\nabla} P \,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = -\int \rho \boldsymbol{g} \,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = -\rho V \boldsymbol{g}$$

1.2.2 浮心

Theorem 1.1 浮體的浮心為沉於液面下體積的幾何中心。

計算浮力造成的力矩 $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = \oint \boldsymbol{r} \times (-P \,\mathrm{d}\boldsymbol{a}) = \oint \mathrm{d}\boldsymbol{a} \times (P\boldsymbol{r})$$

利用公式可得

$$\oint \mathrm{d}\boldsymbol{a} \times (P\boldsymbol{r}) = \int \boldsymbol{\nabla} \times (P\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \int \boldsymbol{\nabla} P \times \boldsymbol{r}\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

代回得

$$\boldsymbol{\tau} = -\int \boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{g}\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{R}_B \times \boldsymbol{F}$$

$\boldsymbol{R}_B$ 即為浮心的位置向量。比對可得

$$\boldsymbol{R}_B = \frac{\int \boldsymbol{r}\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}$$

1.3 壓力的受力分析

1.3.1 圓柱容器

定徑向向外為正。你可能會很直覺的寫出以下的式子

$$\mathrm{d}F = -\frac{\partial}{\partial r}\left[P(r)\, rh\, \mathrm{d}\theta\right] = -\frac{\partial}{\partial r}\left[P(r)\, r\right] h\, \mathrm{d}\theta$$

但是這是錯的，請看以下的解說。微小質元如下圖。

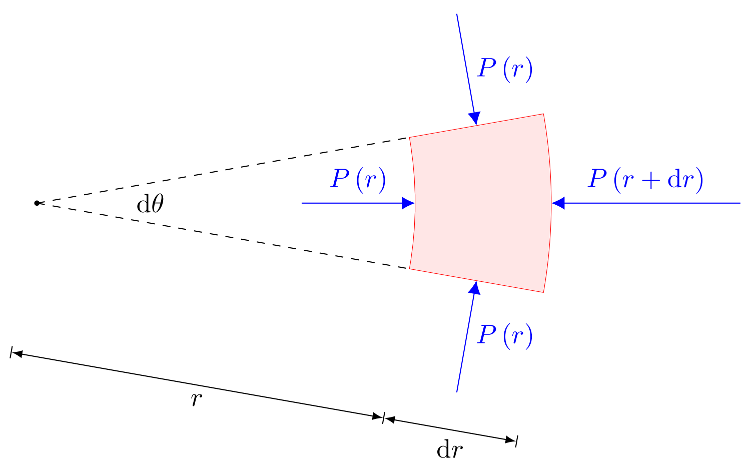


圖 1. 微小質元受力圖

> **Note 1.1** 側邊的壓力也必須計算。

可知徑向合力 $\mathrm{d}F$ 為

$$\mathrm{d}F = 2P(r)\left(\frac{1}{2}h\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\right) - P(r+\mathrm{d}r)\left[(r+\mathrm{d}r)\, h\, \mathrm{d}\theta\right] + P(r)\,(rh\, \mathrm{d}\theta)$$

$$\mathrm{d}F = P(r)\, h\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta - \frac{\partial}{\partial r}\left[rP(r)\right] h\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}F = -\frac{\partial P(r)}{\partial r} hr\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta \tag{1}$$

而結果的確也符合納維爾－斯托克斯方程式，即單位體積所受的力 $\boldsymbol{f}$ 為

$$\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{\nabla} P = -\frac{\partial P(r)}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}}$$

1.3.2 圓球容器

考慮圓球容器，你會得到

$$\mathrm{d}F = -\frac{\partial}{\partial r}\left[P(r)\, r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi\right] \mathrm{d}r + \left[P(r)\, r \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}\phi + \left[P(r)\, r \sin\theta dr d\phi\right] \mathrm{d}\theta$$

利用鏈鎖律，易得

$$\mathrm{d}F = -\frac{\partial P(r)}{\partial r} r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$$

結果同樣也符合納維爾－斯托克斯方程式。

1.3.3 與波茲曼分布的關聯

我們可以證明此結果也會符合波茲曼分布。假設圓柱容器繞其中心軸以角速率 ω 轉動，且各處溫度相同為 T，每一氣體分子的質量為 m，則可列得達到平衡態時符合的方程式為

$$-r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi\, \frac{\partial P(r)}{\partial r} = \left(\rho r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi\right) r\omega^2$$

$$\frac{\partial P(r)}{\partial r} = -\rho r \omega^2$$

代入 $P = \rho k_B T/m$，積分可得

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{m\omega^2 r^2}{2k_B T}\right)$$

波茲曼分布表明 $\rho \propto \exp\left(-E/k_B T\right)$，又 $E = m\omega^2 r^2/2$，故結果相同。

2 表面張力

2.1 楊－拉普拉斯方程式

Theorem 2.1 虛功原理

介面達到熱平衡時，給予介面法向微小位移 $\delta\xi$ 後能量變化為零。

現在對能量 E 做變分

$$\delta E = -\sum_i \int P_i(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}A_i\,\delta\xi_i + \sigma\int \delta A$$

$\mathrm{d}A_i$ 為法向量為 $\hat{\mathbf{e}}_i$ 的面積元，$\delta\xi_i$ 為 $\mathrm{d}A_i$ 向單位向量 $\hat{\mathbf{e}}_i$ 伸長的距離。利用 $\delta E = 0$ 的關係，即可求得楊－拉普拉斯方程式 (Young-Laplace equation)。

注意這邊積分路徑 (或者是 A_i) 的選取極為重要。見氣體壓力的受力分析，我們說明了當取微小質元作受力分析時，側邊壓力必須計算。此處亦相同，若只有考慮徑向方向的壓力所給質元之合力，則使介質 1 向介質 2 位移 $\delta\xi$ 所需的作功 δE_n 為

$$\delta E_n = -\int P_1\,\mathrm{d}A\,\delta\xi + \int P_2\,(\mathrm{d}A + \delta A)\,\delta\xi \tag{2}$$

(2)式為含有雙變數的變分，這不是我們樂見的，因此我們可以藉由尋找特殊的路徑使其變為單變數。

令側邊壓力的作功為 δE_t。命題改為我們能否找到一種路徑，稱為 C，消去(2)式中的 δA 項，也就是將 δE 寫做

$$\delta E = \delta E_n + \delta E_t = \oint_C f(P_1, P_2)\,\mathrm{d}A\,\delta\xi$$

請回顧(1)式，事實上，路徑 C 就是**繞著以切點的曲率半徑作為柱座標截面半徑的質元之周長**，見**圖 2** 紅色線，也就是將(1)式的 r 改為曲率半徑。但是注意到過切點且平行於法向量的平面有無限個，而我們需要選取其中兩個正交平面使得曲線在此兩平面上的曲率半徑分別達到最大值和最小值 R_1 和 R_2(若曲率中心在介質 1 則為正，反之則為負)，我們稱此兩曲率半徑為**主要曲率半徑**。

基於上述，在路徑 C 上的 $\delta\xi$ 恰好就是 $\mathrm{d}A$ 的半徑變化量 δr，所以

$$\delta A = \left(1 + \frac{\delta\xi}{R_1}\right)\left(1 + \frac{\delta\xi}{R_2}\right)\mathrm{d}A - \mathrm{d}A = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\delta\xi\,\mathrm{d}A$$

總作功為

$$\delta E = -\oint \left[P_1 - P_2 - \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\mathrm{d}A\,\delta\xi = 0$$

因此必須有

Formula 2.1 楊—拉普拉斯方程式

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tag{3}$$

用於連接具有表面張力係數 σ 的兩個介質之間的邊界條件。

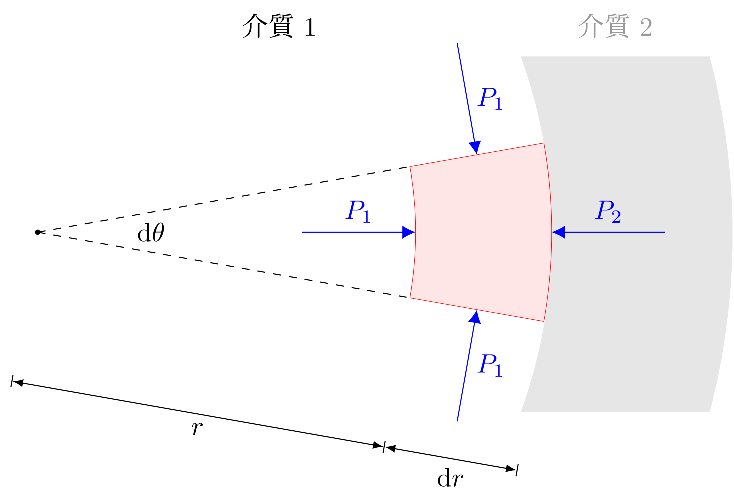


圖 2. 淺紅色線為積分路徑，深紅色線為交界面

2.2 參數式的曲率半徑

位置向量 $\boldsymbol{r}$ 可以僅由一個參數 t 來表示，即 $\boldsymbol{r}$ 可寫為 $\boldsymbol{r}(t)$。則曲率半徑的理論式[1]為

$$R = \frac{|\boldsymbol{r}'|^3}{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{r}' = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$, $\boldsymbol{r}'' = \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$ 。以下將驗證(4)式的正確性。

Example 2.1 圓的曲率半徑

由圓的參數式可令 $\boldsymbol{r} = r_0 (\cos t\, \hat{\boldsymbol{x}} + \sin t\, \hat{\boldsymbol{y}})$，可知

$$\dot{\boldsymbol{r}} = r_0 (-\sin t\, \hat{\boldsymbol{x}} + \cos t\, \hat{\boldsymbol{y}}), \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = -r_0 (\cos t\, \hat{\boldsymbol{x}} + \sin t\, \hat{\boldsymbol{y}})$$

[1]可能需要一點微分幾何的知識 (?

代入可得到 $R = r_0$。

Example 2.2 參數的放大與縮小

令 $t' = at$，其中 a 為常數且 $a \neq 0$。易得參數的放大與縮小並不會影響計算的結果。

以下討論一些基本且常用的例子。

Example 2.3 圓球

兩個曲率半徑為 $R_1 = R_2 = R$，因此表面張力壓力為

$$P = \frac{2\sigma}{R}$$

Example 2.4 圓形肥皂膜

兩個曲率半徑為 $R_1 = R_2 = R$。但因其為液膜與空氣的交界面有兩面，因此表面張力壓力為

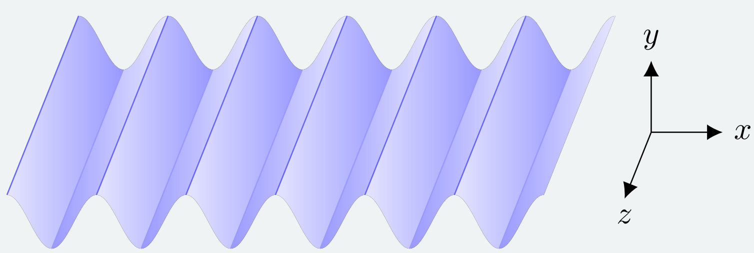
$$P = \frac{4\sigma}{R}$$

Example 2.5 一維水波

如圖，xy 平面上的曲率半徑為 ∞，因此表面張力壓力為

$$P = \frac{\sigma}{R}$$

其中 R 為 xy 平面上的曲率半徑，可以由(4)式求得。



2.3 直角坐標

假設平面方程式為 $z = h(x, y)$。則表面積微元 $\mathrm{d}A$ 為

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = (1, 0, h_x) \times (0, 1, h_y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

$$A=\iint\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

對表面積 A 作變分

$$\begin{aligned}\delta A&=\iint\frac{h_x\delta h_x+h_y\delta h_y}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint\frac{\left(1+h_y^2\right)h_{xx}+\left(1+h_x^2\right)h_{yy}-2h_xh_yh_{xy}}{\left(1+h_x^2+h_y^2\right)^{3/2}}\delta h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

因此可得

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{\left(1+h_y^2\right)h_{xx}+\left(1+h_x^2\right)h_{yy}-2h_xh_yh_{xy}}{\left(1+h_x^2+h_y^2\right)^{3/2}}$$

若將 R_1 與 R_2 分別看成函數 $h(x,y)$ 在 xz 平面與在 yz 平面的曲率半徑，則

$$R_1=\frac{\left(1+h_x^2+h_y^2\right)^{3/2}}{\left(1+h_y^2\right)h_{xx}-h_xh_yh_{xy}},\quad R_2=\frac{\left(1+h_x^2+h_y^2\right)^{3/2}}{\left(1+h_x^2\right)h_{yy}-h_xh_yh_{xy}}$$

若只考慮 $h=h(x)$，則上式可以化簡為

Formula 2.2 直角座標中二維的曲率半徑

$$R_1=\frac{(1+h_x^2)^{3/2}}{h_{xx}}$$

事實上有純幾何的推導方式。注意不少題目並不會跟你說 $h_x\ll 1$，而直接使用 $R=1/h_{xx}$，請自行判斷。

2.3.1 幾何

由幾何關係易得

$$\mathrm{d}l=R\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{1+h_x^2}\,\mathrm{d}x$$

其中 θ 為直線 $h(x)$ 相對於某一個固定軸的夾角。定此軸為 x 軸，則 $h_x=\tan\theta$。由此可推得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\sec^2\theta}{h_{xx}}=\frac{1+h_x^2}{h_{xx}}$$

代回可得 R 為

$$R=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\sqrt{1+h_x^2}=\frac{(1+h_x^2)^{3/2}}{h_{xx}}$$

2.4 柱座標

以下討論在柱座標系中的曲率半徑。$\boldsymbol{r}$ 方向代表以 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 為法向量的面積計算曲率半徑。

2.4.1 $\boldsymbol{r}$ 方向

$$A = \iint \sqrt{r^2 + r_\theta^2 + r^2 r_z^2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

對其變分

$$\delta A = \iint \frac{r\delta r + r_\theta \delta r_\theta + r r_z^2 \delta r + r^2 r_z \delta r_z}{\sqrt{r^2 + r_\theta^2 + r^2 r_z^2}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

利用分部積分法可得

$$\delta A = \iint \left[\frac{r\left(1 + r_z^2\right)}{\sqrt{r^2 + r_\theta^2 + r^2 r_z^2}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{r_\theta}{\sqrt{r^2 + r_\theta^2 + r^2 r_z^2}}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{r^2 r_z}{\sqrt{r^2 + r_\theta^2 + r^2 r_z^2}}\right)\right]\delta r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

微分得

$$\begin{aligned}\delta A = \iint \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_\theta^2 + r^2 r_z^2}} \Bigg[& r\left(1 + r_z^2\right) - r_{\theta\theta} - 2 r r_z^2 - r^2 r_{zz} + r_\theta \frac{r r_\theta \left(1 + r_z^2\right) + r_\theta r_{\theta\theta} + r^2 r_z r_{\theta z}}{r^2 + r_\theta^2 + r^2 r_z^2} \\ & + r^2 r_z \frac{r r_z \left(1 + r_z^2\right) + r_\theta r_{\theta z} + r^2 r_z r_{zz}}{r^2 + r_\theta^2 + r^2 r_z^2}\Bigg]\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

化簡可得曲率為

$$\frac{1}{R} = \frac{r^2 + 2r_\theta^2 + r^2 r_z^2 - \left(1 + r_z^2\right) r r_{\theta\theta} - \left(r^2 + r_\theta^2\right) r r_{zz} + 2 r r_\theta r_z r_{\theta z}}{\left(r^2 + r_\theta^2 + r^2 r_z^2\right)^{3/2}}$$

當 $r = r\left(\theta\right)$ 時，曲率為

$$\frac{1}{R} = \frac{r^2 + 2r_\theta^2 - r r_{\theta\theta}}{\left(r^2 + r_\theta^2\right)^{3/2}}$$

2.4.2 $\boldsymbol{z}$ 方向

$$A = \iint \sqrt{r^2 + r^2 h_r^2 + h_\theta^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

對其變分

$$\delta A = \iint \frac{r^2 h_r \delta h_r + h_\theta \delta h_\theta}{\sqrt{r^2 + r^2 h_r^2 + h_\theta^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

利用分部積分法可得

$$\delta A = -\iint \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{r^2 h_r}{\sqrt{r^2 + r^2 h_r^2 + h_\theta^2}} \right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\frac{h_\theta}{\sqrt{r^2 + r^2 h_r^2 + h_\theta^2}} \right) \right] \delta h \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$$

化簡可得曲率為

$$\frac{1}{R} = \frac{h_r \left(r^2 + r^2 h_r^2 + 2h_\theta^2 - 2r h_\theta h_{r\theta}\right) + r h_{rr} \left(r^2 + h_\theta^2\right) + r h_{\theta\theta} \left(1 + h_r^2\right)}{\left(r^2 + r^2 h_r^2 + h_\theta^2\right)^{3/2}}$$

當 $h = h(r)$ 時，曲率為

Formula 2.3 柱座標中二維的曲率半徑

$$\frac{1}{R} = \frac{h_{rr}}{\left(1 + h_r^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{r} \frac{h_r}{\sqrt{1 + h_r^2}}$$

3 應力張量

3.1 一般形式

顯然地，在不同座標系計算相同分量的應力，在經由變換後，應當給出相同的結果。所以應力不依賴於參考系的選擇，也就是在任何參考系的形式皆相同。具有此種美好轉換性質的量即稱為張量 (tensor)，因此應力也可稱為應力張量 (stress tensor)。
在流體中顯然有壓力 p 的作用，且壓力可寫成張量形式 $-p\mathbf{I}$，$\mathbf{I}$ 為單位張量，也就是對角項皆為 1、其餘項皆為 0 的張量。在流體力學中，應力張量扣除掉壓力張量剩餘的張量即稱為黏滯力張量，令其為 $\boldsymbol{\tau}$。因此應力張量 $\boldsymbol{\sigma}$ 可寫為

Formula 3.1 應力張量

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

或者是使用指標的方式表達

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

在往後的章節中考慮流體皆為牛頓流體，而牛頓流體的定義為

Definition 3.1 牛頓流體

黏滯力張量 $\boldsymbol{\tau}$ 只為 $\boldsymbol{\nabla v}$ 的線性函數，也就是 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\nabla v})$。

這不僅是實驗得到的近似，其中線性函數的假設也是因為非線性項是我們不想處理的。易

知旋轉不變性符合張量**不依賴於參考系的選擇**的性質。而我們可以從旋轉不變性得知，此張量必須是跟 $\boldsymbol{\nabla v}$ 中的對稱矩陣有關。將 $\boldsymbol{\nabla v}$ 寫為一個對稱矩陣與非對稱矩陣，即

$$\boldsymbol{\nabla v} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla v} + (\boldsymbol{\nabla v})^T\right] + \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla v} - (\boldsymbol{\nabla v})^T\right] \equiv \mathbf{E} + \mathbf{D}$$

其中 $\mathbf{E}$ 為對稱矩陣、$\mathbf{D}$ 為反對稱矩陣。其中各項元素為

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

而因為 $\boldsymbol{\tau}$ 只與 $\mathbf{E}$ 有關的特性，因此 $\mathbf{E}$ 又稱為應變時變率張量 (strain-rate tensor)。
$\boldsymbol{\tau}$ 最簡單的形式為

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{E}) = 2\mu\mathbf{E} + \lambda \mathrm{Tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} = \mu\left[\boldsymbol{\nabla v} + (\boldsymbol{\nabla v})^T\right] + \lambda(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\mathbf{I} \tag{5}$$

其中常數 μ 與 λ 稱為拉梅係數 (Lamé parameters)。若在流體力學中，μ 稱為動黏滯係數 (dynamic viscosity) 或絕對黏滯係數 (absolute viscosity)、λ 稱為第二黏滯係數 (second viscosity)，因此牛頓流體的黏滯力可以以兩個常數係數表達。
至此我們得到了黏滯力張量的形式：

Formula 3.2 黏滯力張量

τ_{ij} 代表在**法向量為 j 方向的單位面積所受到往 i 方向的力**。利用 Kronecker delta 符號 δ_{ij} 簡化可得

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij}\sum_k e_{kk} \tag{6}$$

我們易知每單位體積在 i 方向上所受到的黏滯力為

$$f_i = \sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

或者是利用張量的內積來表示

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau} = \sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\hat{\mathbf{e}}_i$$

其中 i 方向的分量為

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})$$

化簡得

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau}=\mu\nabla^2\boldsymbol{v}+(\mu+\lambda)\,\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right) \tag{7}$$

事實上，這邊的推導過程與彈性力學中的應變張量是一模一樣的，因為應變張量同樣要符合旋轉不變性與各項同性。只是在彈性力學中，應力張量為位移 $\boldsymbol{u}$ 的函數 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\nabla u})$，因此將 $\boldsymbol{u}$ 改成 $\boldsymbol{v}$，且 μ 與 λ 同樣亦稱為拉梅係數，只是在彈性力學此兩者經常被其他的彈性模量代替，例如楊氏模量 (Young's modulus) E 與泊松比 (Poisson's ratio) σ。

3.2 梯度與尺度因子

首先，必須瞭解向量的梯度要如何運算。根據梯度的定義，對於向量 $\boldsymbol{v}$ 在 i 方向上的梯度為

$$(\boldsymbol{\nabla v})_i=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{r}+\Delta x_i\hat{\mathbf{e}}_i\left(\boldsymbol{r}\right)\right)-\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{r}\right)}{\Delta x_i}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_i}$$

你會發現他是二階張量。我們把沿著 i 方向的梯度之 j 方向的分量為 $(\boldsymbol{\nabla v})_{ij}$。所以有

$$(\boldsymbol{\nabla v})_{ij}=\sum_k\frac{1}{h_i}\frac{\partial\left(v_k\hat{\mathbf{e}}_k\right)}{\partial x_i}\cdot\hat{\mathbf{e}}_j \tag{8}$$

在直角座標中是非常簡單的，因為 $\hat{\mathbf{e}}_i\left(\boldsymbol{r}\right)=\hat{\mathbf{e}}_i$，與座標 $\boldsymbol{r}$ 無關。因此必須注意：

> **Note 3.1** 在單位向量會隨位置改變的坐標系中，$(\boldsymbol{\nabla v})_{ij}\neq\partial v_j/\partial x_i$
>
> 在柱座標中的單位向量 $\hat{\mathbf{e}}_i\left(\boldsymbol{r}\right)=\hat{\mathbf{e}}_i\left(\theta\right)$，而球座標中的單位向量 $\hat{\mathbf{e}}_i\left(\boldsymbol{r}\right)=\hat{\mathbf{e}}_i\left(\theta,\phi\right)$。這也是為甚麼不同座標系中張量形式**看起來**不同的原因。

在(8)式中的 h_i 為長度因子，其定義為

$$h_i=\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right| \tag{9}$$

經由一些計算後，可得柱座標的長度因子為

$$h_r=1,\quad h_\theta=r,\quad h_z=1 \tag{10}$$

球座標的長度因子為

$$h_r=1,\quad h_\theta=r,\quad h_\phi=r\sin\theta \tag{11}$$

3.3 直角座標

因為 $\partial\hat{\mathbf{e}}_i/\partial x_j = 0$，所以只需對 v_i 微分即可。顯然有

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

其中 $i = x, y, z$。

3.4 柱座標

首先，單位向量的梯度為

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial z} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_z}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_z}{\partial \theta} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{e}}_r$$

接下來我們計算較複雜的分量 $e_{r\theta}$。先求 $(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{r\theta}$ 與 $(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\theta r}$

$$(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{r\theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_z\hat{\mathbf{e}}_z\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial r}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\theta r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_z\hat{\mathbf{e}}_z\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}$$

因此

$$2e_{r\theta} = 2e_{\theta r} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)$$

注意到除了原本就有的項

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$

你必須還要加上因為 $\hat{\mathbf{e}}_i(\boldsymbol{r})$ 隨位置改變的微分項。而在張量 $e_{r\theta}$ 中你只需注意單位向量對 θ 的梯度所對應的 $\hat{\mathbf{e}}_r$ 分量。重複上述步驟，可得各分量為

Formula 3.3 柱座標中的應變時變率張量

$$e_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}$$

$$e_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$2e_{r\theta} = 2e_{\theta r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) \tag{12}$$
$$2e_{\theta z} = 2e_{z\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}$$
$$2e_{zr} = 2e_{rz} = \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}$$

3.5 球座標

首先，單位向量的梯度為

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial r} = 0$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \phi} = \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\phi$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{e}}_r, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \phi} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\phi$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \phi} = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r - \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

接下來我們計算較複雜的兩個分量 $e_{\phi\phi}$ 與 $e_{\theta\phi}$。計算 $(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\phi\phi}$

$$(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\left(v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta + \frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)$$

$$e_{\phi\phi} = \frac{v_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r}v_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

計算 $(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\theta\phi}$ 與 $(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\phi\theta}$

$$(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\theta\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\phi\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} - v_\phi\cos\theta\right)$$
$$2e_{\theta\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} - v_\phi\cos\theta\right) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)$$

重複上述步驟，可得各分量為

Formula 3.4 球座標中的應變時變率張量

$$e_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}$$

$$e_{\phi\phi} = \frac{v_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r}v_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$2e_{r\theta} = 2e_{\theta r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)$$

$$2e_{\theta\phi} = 2e_{\phi\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)$$

$$2e_{\phi r} = 2e_{r\phi} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}$$

以上三個座標系可以處理大部分的流體問題。

3.6 廣義座標

以下直接給出廣義座標 q_i 的黏滯力張量公式。

$$e_{ii} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial v_i}{\partial q_i} + \sum_{j\neq i}\frac{v_j}{h_i h_j}\frac{\partial h_i}{\partial q_j}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{h_j}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v_j}{h_j}\right) + \frac{h_i}{h_j}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{v_i}{h_i}\right)\right]$$

你可以驗證以上三個座標系皆會符合。取 $e_{\phi\phi}$ 為例

$$e_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \frac{v_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r}v_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

4 納維爾—斯托克斯方程式

4.1 一般形式

已知流體的質量密度為 ρ，所受的壓力為 P、所受到的加速度場為 $\boldsymbol{g}$。考慮流體為牛頓流體，動黏滯係數 (dynamic viscosity) 為 μ、第二黏滯係數 (second viscosity) 為 λ。
首先，根據簡單的力分析與(7)式，易得每單位體積的流體所受到的總力 $\boldsymbol{f}$ 為

$$\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{\nabla} P + \rho \boldsymbol{g} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + (\mu + \lambda) \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) \tag{13}$$

我們將運用(13)式推導出納維爾—斯托克斯方程式，你會發現它就是牛頓第二定律的變形。
取液體的微小質元，其所受的力為

$$d\boldsymbol{F} = (\rho \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \left[-\boldsymbol{\nabla} P + \rho \boldsymbol{g} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + (\mu + \lambda) \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v})\right] \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$

化簡可得

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\nabla} P + \rho \boldsymbol{g} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + (\mu + \lambda) \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) \tag{14}$$

由全微分可知加速度 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ 為

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{v} \tag{15}$$

上式中的 $\partial \boldsymbol{v}/\partial t$ 稱為局部加速度 (local acceleration)，$(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{v}$ 稱為對流加速度 (convective acceleration)。
將(14)式代回(15)式得納維爾—斯托克斯方程式 (Navier-Stokes equation) 為

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{v}\right) = -\boldsymbol{\nabla} P + \rho \boldsymbol{g} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + (\mu + \lambda) \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) \tag{16}$$

在液體不可壓縮的條件下，納維爾—斯托克斯方程式變為

Formula 4.1 納維爾—斯托克斯方程式

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{v}\right) = -\boldsymbol{\nabla} P + \rho \boldsymbol{g} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{17}$$

為二階非齊次非線性方程式，也是因為非齊次非線性的緣故，造成此方程式無比難解。至此為止，我們的推論僅止於直角坐標系。雖說(16)是一般形式，但是在其他正交座標中，並不能直接將各速度分量替換成其他正交座標中的速度分量，而認為方程式是正確的。問

題出在於：

> **Note 4.1 方程式在不同座標系的形式**
>
> 以上推導出的一般形式指的是算符的一般性，也就是在其他正交座標中，你同樣必須使用該算符做計算。但是**不同正交座標系的算符有不同形式**，且你必須考慮**正交座標系的單位向量可能會隨著位置改變**。而直角坐標系即為單位向量不隨著位置改變的一個特例。

下一部分我們將介紹三個常見座標系中的納維爾－斯托克斯方程式。

4.2 不同座標系中的形式

接下來我們將推導直角座標、柱座標與球座標的納維爾－斯托克斯方程式。在此為了簡化，考慮液體有**不可壓縮性**，因此有 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0$。首先我們必須了解廣義座標中不同梯度算符的形式，而以下僅給出需要用到的物理量之算符。
我們記長度因子為 h_i、長度因子之乘積為 $H=\prod_i h_i$。

(A) 散度 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=\sum_i\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{H}{h_i}v_i\right)$$

(B) 拉普拉斯算子 $\nabla^2\boldsymbol{v}$

$$\nabla^2\boldsymbol{v}=\sum_i\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{H}{h_i^2}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_i}\right)=\sum_{i,j}\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{H}{h_i^2}\frac{\partial\left(v_j\hat{\mathbf{e}}_j\right)}{\partial x_i}\right)$$

(C) 對流加速度項 $\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{v}$

$$\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{v}=\sum_i\frac{v_i}{h_i}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_i}=\sum_{i,j}\frac{v_i}{h_i}\frac{\partial\left(v_j\hat{\mathbf{e}}_j\right)}{\partial x_i}$$

所以每單位體積在 i 方向上所受到的黏滯力 $\boldsymbol{f}$ 為

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau}=\sum_{i,j}\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{H}{h_j}\tau_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i\right)$$

接下來，我們試著將三種座標系中的方程式盡量以**拉普拉斯算子**的形式呈現。

4.3 直角座標

Formula 4.2 直角座標中的納維爾－斯托克斯方程式

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$
$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$$
$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)+\rho g_z$$

4.4 柱座標

散度與拉普拉斯算子為

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{18}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{v}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial z^2}$$

(A) 對流加速度項

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}=v_r\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\hat{\boldsymbol{z}}\right)+\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{z}}\right)\\+v_z\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right)+\frac{v_rv_\theta}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}-\frac{v_\theta^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}}\end{aligned}$$

各分量為

$$[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}]_r=v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_r-\frac{v_\theta^2}{r} \tag{19}$$
$$[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}]_\theta=v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_rv_\theta}{r}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_\theta+\frac{v_rv_\theta}{r} \tag{20}$$
$$[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}]_z=v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_z \tag{21}$$

(B) 黏滯力 $\boldsymbol{r}$ 分量

$$f_r(r,\theta,z)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr})+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}\equiv\mu g_r(r,\theta,z)$$

$$g_r = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) - \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right)$$

將(18)式做對 r 的偏微分並與上式相減可得

$$g_r = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right]$$

注意到

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right] = \frac{v_r}{r^2}$$

所以可得

$$g_r = \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \tag{22}$$

(C) 黏滯力 $\boldsymbol{\theta}$ 分量

$$f_\theta(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{\theta r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} \equiv \mu g_\theta(r,\theta,z)$$

注意到

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{\theta r}) + \frac{\tau_{r\theta}}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{\theta r}\right)$$

$$g_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)$$

將(18)式做對 θ 的偏微分並與上式相減可得

$$g_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}$$

其中

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] = -\frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)$$

所以可得

$$g_\theta = \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \tag{23}$$

(D) 黏滯力 $\boldsymbol{z}$ 分量

$$f_z(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{zr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \equiv \mu g_z(r,\theta,z)$$

$$g_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) + 2\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

將(18)式做對 z 的偏微分並與上式相減可得

$$g_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = \nabla^2 v_z \tag{24}$$

(E) 結論

利用(19)(20)(21)(22)(23)(24)式可得

Formula 4.3 柱座標中的納維爾—斯托克斯方程式

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\, v_r - \frac{v_\theta^2}{r}\right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$
$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\, v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu\left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)$$
$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\, v_z\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\nabla^2 v_z$$

4.5 球座標

散度與拉普拉斯算子為

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} = 0 \tag{25}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial\phi^2}$$

(A) 對流加速度項

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} = {} & v_r\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \\ & + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \left(\frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned}$$

各分量為

$$[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}]_r = v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r} = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_r-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}]_\theta &= v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\\ &= (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_\theta+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}]_\phi &= v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\phi}{r}+\frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\\ &= (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_\phi+\frac{v_r v_\phi}{r}+\frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\end{aligned} \tag{28}$$

(B) 黏滯力 r 分量

$$f_r=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\tau_{rr}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\tau_{r\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial\phi}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}-\frac{\tau_{\phi\phi}}{r}\equiv\mu g_r\left(r,\theta,\phi\right)$$

$$\begin{aligned}g_r=&\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]\right\}\\ &+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right]\\ &-\frac{2}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{2v_r}{r}+\frac{\cot\theta}{r}v_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

其中

$$v_\theta\cot\theta+\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}g_r=&\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\left(\nabla^2 v_r\right)_\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\\ &+\left(\nabla^2 v_r\right)_\phi-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}-\frac{4v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\end{aligned}$$

將(25)式做對 r 的偏微分並與上式相減可得

$$\begin{aligned}g_r=&\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\left(\nabla^2 v_r\right)_\theta-\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right)\right]+\left(\nabla^2 v_r\right)_\phi-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}\\ &-\frac{4v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right)+\frac{2v_r}{r^2}=\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)$$

整理可得

$$g_r=\nabla^2 v_r-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} \tag{30}$$

(C) 黏滯力 θ 分量

$$f_\theta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\tau_{\theta r}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\tau_{\theta\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\theta\phi}}{\partial\phi}+\frac{\tau_{r\theta}}{r}-\frac{\cot\theta}{r}\tau_{\phi\phi}\equiv\mu g_\theta\left(r,\theta,\phi\right)$$

注意到

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\tau_{\theta r}\right)}{\partial r}+\frac{\tau_{r\theta}}{r}=\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\tau_{r\theta}\right) \tag{31}$$

$$\begin{aligned}g_\theta=&\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+r^4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\right)\sin\theta\right]\\&+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right]-\frac{2\cot\theta}{r^2}\left(v_r+v_\theta\cot\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

將(25)式做對 θ 的偏微分再乘 $1/r$ 並與上式相減，並注意到

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}\right]=\left(\nabla^2 v_\theta\right)_\theta-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}$$

可得

$$\begin{aligned}g_\theta=&\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right)\right]+\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\right)\sin\theta\right]+\left(\nabla^2 v_\theta\right)_\phi\\&-\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right)\right]-\left(\nabla^2 v_\theta\right)_\theta+\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cot\theta}{r^2}\left(v_r+v_\theta\cot\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]=\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{2v_\theta}{r^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)-\frac{2v_\theta}{r^2}=\left(\nabla^2 v_\theta\right)_r-\frac{2v_\theta}{r^2} \tag{32}$$

並將(25)式代入可得

$$\begin{aligned}g_\theta=&\left(\nabla^2 v_\theta\right)_r-\frac{2v_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\left(v_r\cot\theta+\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)+\left(\nabla^2 v_\theta\right)_\phi+\left(\nabla^2 v_\theta\right)_\theta+\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\\&-\frac{2\cot\theta}{r^2}\left(v_r+v_\theta\cot\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

化簡可得

$$g_\theta = \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2\theta} - \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \tag{33}$$

(D) 黏滯力 ϕ 分量

$$f_\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\tau_{\phi r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\tau_{\phi\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial\phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{\cot\theta}{r}\tau_{\theta\phi} \equiv \mu g_\phi\left(r,\theta,\phi\right)$$

利用(31)式與下式

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\tau_{\phi\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{\cot\theta}{r}\tau_{\theta\phi} = \frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial\left(\tau_{\phi\theta}\sin^2\theta\right)}{\partial\theta}$$

化簡得

$$\begin{aligned} g_\phi = &\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right) + \frac{r^2}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} + \sin^3\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right] \\ &+ \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(v_r + v_\theta\cot\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right) \end{aligned}$$

將(25)式做對 ϕ 的偏微分再乘 $1/r\sin\theta$ 與上式相減，和用(32)式代換可得

$$\begin{aligned} g_\phi = &\left(\nabla^2 v_\phi\right)_r - \frac{2v_\phi}{r^2} + \frac{1}{r^3\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} + \sin^3\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right] \\ &+ \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(v_r + v_\theta\cot\theta\right) + \left(\nabla^2 v_\phi\right)_\phi \\ &- \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right)\right] \end{aligned}$$

與以下的等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin^3\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right] - 2v_\phi &= \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-v_\phi\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\right] - 2v_\phi \\ &= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(-v_\phi + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\theta^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\right) - \frac{v_\phi}{\sin^2\theta} \\ &= \left(\nabla^2 v_\phi\right)_\theta - \frac{v_\phi}{\sin^2\theta} \end{aligned}$$

帶入化簡可得

$$g_\phi = \nabla^2 v_\phi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} - \frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta} \tag{34}$$

(E) 結論

利用(26)(27)(28)(30)(33)(34)式可得

Formula 4.4 球座標中的納維爾—斯托克斯方程式

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_r-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}\right)&=-\frac{\partial P}{\partial r}\\
&+\mu\left(\nabla^2 v_r-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(v_\theta\sin\theta\right)-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)+\rho g_r\\
\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_\theta+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\right)&=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}\\
&+\mu\left(\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)+\rho g_\theta\\
\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_\phi+\frac{v_r v_\phi}{r}+\frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\right)&=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\phi}\\
&+\mu\left(\nabla^2 v_\phi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+\frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}-\frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta}\right)+\rho g_\phi
\end{aligned}$$

5 白努力定律

在此引入渦漩度 $\boldsymbol{\Omega}$ 與速度勢 φ。

Definition 5.1 渦漩度

渦漩度 $\boldsymbol{\Omega}$ 定義為

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}$$

無旋流即為渦漩度 $\boldsymbol{\Omega}=0$。

Definition 5.2 速度勢

速度勢 φ 定義為

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi=\boldsymbol{v}$$

也可以反過來寫為

$$\varphi=\int\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

就如同勢能的定義。也因為是對速度積分，所以得名速度勢。

利用向量恆等式

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(v^2\right)+(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}$$

則(17)可改寫為

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(v^2\right) = -\frac{\boldsymbol{\nabla} P}{\rho} - \boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \boldsymbol{v}$$

在忽略黏滯力的情況下

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(v^2\right) = -\frac{\boldsymbol{\nabla} P}{\rho} - \boldsymbol{\nabla}\phi \tag{35}$$

對上式兩側對 $\boldsymbol{v}$ 內積，得到

$$\boldsymbol{v} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\nabla}\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(v^2\right) + \frac{\boldsymbol{\nabla} P}{\rho} + \boldsymbol{\nabla}\phi\right) = 0$$

因此易知

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(v^2\right) + \frac{\boldsymbol{\nabla} P}{\rho} + \boldsymbol{\nabla}\phi = 0 \textbf{ (流線上)}$$

對兩側同時積分，可得：

Formula 5.1 白努力方程式

時變的白努力方程式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} + \phi = \text{const.} \textbf{ (流線上)}$$

若流場已達到穩定態 (穩流)，則 $\partial\varphi/\partial t = 0$，上式可寫為

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} + \phi = \text{const.} \textbf{ (流線上)}$$

正是我們熟知的白努力方程式。

在**無旋流**及**穩流**的情況下，(35)變為

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} + \phi\right) = 0$$

因此易知

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} + \phi = \text{const.} \textbf{ (各處)}$$

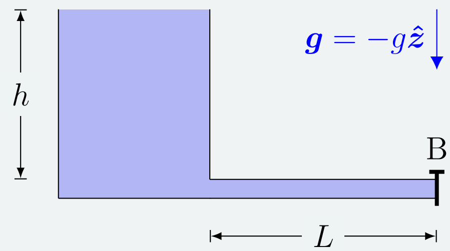
請注意在**有旋流**的假設下，該等式只對**同一流線上的點**成立；在**無旋流**的假設下，該等式對**整個區域任意處**都成立。

Example 5.1 出口流速的變化 ⟨第七屆天物盃決賽 思考賽 Problem 3⟩

考慮深度為 h、截面積為 A 的容器，下方接著一條長度為 L、截面積為 a $(a \ll A)$ 的水管，如下圖所示。在 $t = 0$ 時，將閥門 B 打開。試求當時間為 t 時，水管開口處的流速 $v(t)$。在本題所考慮的時間尺度遠小於液面下降的時間尺度，也就是計算時可以忽略液面下降。

積分公式：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a}$$



解答：

$$v(t) = \sqrt{2gh} \tanh\left(\sqrt{\frac{gh}{2L^2}} t\right)$$

6 兩大定理的矛盾與收縮係數

白努力方程式 (Bernoulli Equation)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} + \phi = \text{const.} \ \textbf{(流線上)}$$

對(17)積分可得

Theorem 6.1 衝量－動量定理

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} + \oint_S (\rho \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) \, \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}a = -\oint_S p \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}a + \int_V \rho \boldsymbol{g} \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} + \int_V \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

如果算的題目夠多，不難發現兩式在某些情況會發生衝突。
我們必須認知

- **衝量－動量定理必成立**，因為這只是牛頓第二定理的另一種表述。
- 在穩流情況下才能使用白努力定律，非穩流情況的處理方法為**改變參考系使流場為穩流**。而有旋流的白努力方程式必須在**流線上**才會成立，換句話說，不連續變化的

流速或截面都可能會使其失效。

常見的情況有

- 為了達成給定條件，流體可能會有黏滯力作用，產生能量耗損，因此使用衝量－動量定理消去內力的影響。
- 不規則形狀的容器約束往往會造成器壁正向力對流體產生作用，因此利用正向力不作功的性質，使用白努力方程式做計算。

以下舉出兩個常見且易搞混的情況。

6.1 收縮係數

為了方便討論，以下先忽略重力場對流出截面的水造成的影響，但是需要考慮高度差 h 所造成的壓力差 $\Delta P = \rho g h$。直覺地，水流出截面為 A 的孔洞後過一段路程，水的流線會趨近平行，最後形成一個穩定的流動，此時水流會變成像一個圓柱體，其垂直流線的截面積為 A_C。定義收縮係數 (Contraction coefficient)C_C 為

$$C_C = \frac{A_C}{A}$$

若是假設裝置如下圖，並假設外部壓力為 0，開口水深為 h，開口截面 A 符合 $\sqrt{A} \ll h$。

6.1.1 無內壁延伸的開口

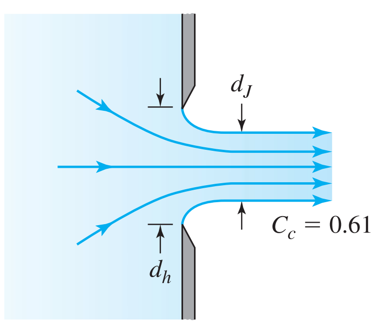


圖 3. 無內壁延伸的開口[2]

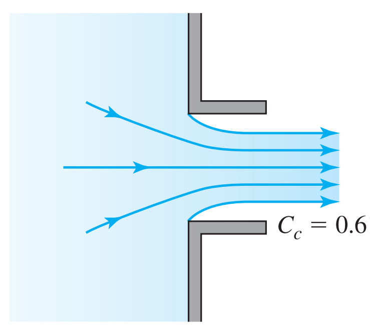


圖 4. 有外壁延伸的開口[2]

由白努力定律、衝量－動量定理和壓力差關係可得

$$v_O = \sqrt{2gh} \tag{36}$$

$$P_1 A = \rho A_C v_O^2 \tag{37}$$

$$P_1 = \rho g h \tag{38}$$

事實上(38)是錯誤的。因為為了使流體從孔洞流出過程中，必定會有些許流體是先沿內壁流出孔洞，進而導致流速在內壁處會有劇烈變化，所以 P_1 應該會是個隨座標變化的變動壓力，不會是單純只與水深 h 一次項有關的函數。
經過計算，無內壁延伸的開口之收縮係數 $C_C \approx 0.61$。且易知有外壁延伸的開口與此情況相同。

6.1.2 有內壁延伸的開口

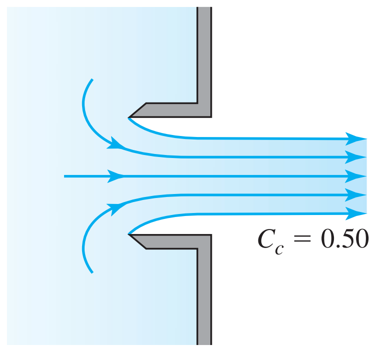


圖 5. 有內壁延伸的開口[2]

由白努力定律、衝量－動量定理和壓力差關係可得

$$v_O = \sqrt{2gh}$$
$$P_1 A = \rho A_C v_O^2$$
$$P_1 = \rho g h$$

此處 P_1 並非變動壓力，因為沒有內壁產生流速變化的效應。可解得 $A_C = A/2$。$C_C = 0.5$。

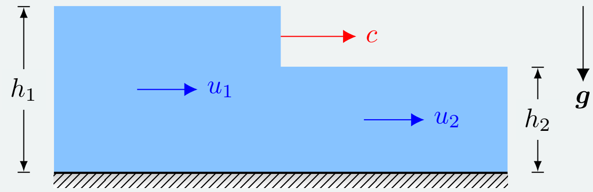
6.2 潮汐波

Example 6.1 潮汐波的波速

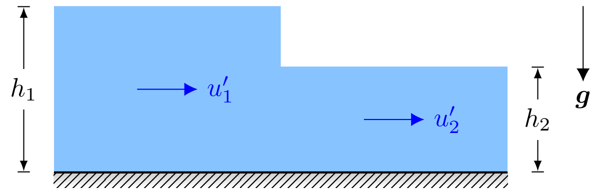
我們知道潮汐現象會引起些許的海平面變化，潮汐波是一種由此種海平面變化所引起的階梯波，有些潮汐波的波高可以達到 3 公尺以上。以下我們用簡單的模型來推導出潮汐波的波速。如下圖，考慮一個潮汐波在水中向右傳播，波前後的波速和水深是不相同的。
已知潮汐波前方的水深為 h_2，水速為 u_2，後方的水深為 h_1，而潮汐波前後方同一截面上水速相同，且水不可壓縮，請求出波速 c。注意你必須考慮重力，重力加速度為

[2]Edward J. Shaughnessy, Jr.,Ira M. Katz and James P. Schaffer.Introduction to Fluid Mechanics.521

g。答案請用 u_2, h_1, h_2, g 表示。



首先注意上述情況不是穩流，因此以波前為觀察者轉換座標。



其中 $u_1' = u_1 - c, u_2' = u_2 - c$。現在已為穩流，因此問題變為流體靜力學。由流量 Q (單位時間所流過的體積) 守恆

$$Q = h_1 u_1' = h_2 u_2'$$

由衝量－動量定理可得

$$\oint_S (\rho \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})\, \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}a = -\oint_S p \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}a + \int_V \rho \boldsymbol{g}\, \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}$$

可得

$$\rho Q \left(u_2' - u_1'\right) = \int_0^{h_1} \rho g z\, \mathrm{d}z - \int_0^{h_2} \rho g z\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \rho g \left(h_1^2 - h_2^2\right)$$

聯立可得

$$c = u_2 + \sqrt{\frac{g h_1 \left(h_1 + h_2\right)}{2 h_2}}$$

7 常見公式

以下是流體力學中常見的公式。相關推導請自行查閱書籍。

7.1 斯托克斯定律 (Stokes law)

在雷諾數 $Re = \rho R v / \eta \ll 1$ 的情況下，可以忽略慣性項的貢獻，方程式改寫為

$$-\boldsymbol{\nabla} P + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} = 0 \tag{39}$$

若將半徑為 R 的實心球體放入黏滯係數為 η 的液體中，則當球體的運動為：

1. 平動
   速度為 $\boldsymbol{v}$ 時，所受到的阻力 $\boldsymbol{F}$ 為

$$\boldsymbol{F} = -6\pi\eta R\boldsymbol{v}$$

2. 轉動
   角速度為 $\boldsymbol{\omega}$ 時，所受到的阻力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 為

$$\boldsymbol{\tau} = -8\pi\eta R^3\boldsymbol{\omega}$$

7.2 圓柱移動的阻力－斯托克斯悖論

已知圓柱的長度為 l、半徑為 R。由因次可得在低雷諾數的阻力應具有以下形式

$$F = C\eta v l^a R^{1-a}$$

C 為常數，a 為我們待決定的因次常數。

考慮 $l \gg R$ 的情況，則易知此時邊界效應可以忽略，則阻力 F 正比於長度 l，$a = 1$。你會發現此時阻力與圓柱半徑無關，直覺上會認為十分詭異。此即為斯托克斯悖論。

事實上，你的直覺沒有錯，斯托克斯方程式在給定無限長圓柱的邊界條件下只有流速 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = 0$ 的解，沒有其餘的穩態解。但這顯然不對，因此斯托克斯近似不能夠在此情況下計算阻力。

在不可壓縮流體中有 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$，故可令函數 ψ 滿足 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} \times \psi$。代入(39)計算可得 ψ 應滿足

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 \psi = 0$$

在無限遠處有 $\psi(\infty) = Ur\sin\theta$，代入試探解 $\psi(\boldsymbol{r}) = f(r)\sin\theta$ 可得

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \left(Ar^3 + Br\ln r + Cr + \frac{D}{r}\right)\sin\theta$$

並考慮在圓柱表面處流速為零，可證得係數無法滿足。

最後給出透過近似求解得到的阻力 F 為

$$F = \frac{8\pi\eta v l}{1 - 2\gamma - 2\ln\frac{Re}{4}}$$

其中雷諾數為 $Re = \rho R v/\eta$、γ 為 Euler–Mascheroni 常數[3]。

[3] $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) \approx 0.57721$

7.3 表面張力－重力波

重力加速度為 g、表面張力為 σ、水的密度為 ρ，在不考慮黏滯力的情況下，水深為 h 的水波振盪角頻率色散關係 $\omega(k)$ 為

$$\omega = \sqrt{\left(gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3\right)\tanh kh}$$

若不考慮表面張力，則

1. 深水波

   深水波 $(kh \ll 1)$ 的相速度 c 為

   $$c = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

2. 淺水波

   淺水波 $(kh \gg 1)$ 的相速度 c 為

   $$c = \sqrt{gh}$$

7.4 不穩定性

1. 瑞利－泰勒不穩定性 (Rayleigh-Taylor instability)

   常見在雲與激波系統中。當密度較高的流體浮在密度較低的流體上，達成平衡時介面是完全平行的，但是若給予介面的輕微擾動，較重的物質因為重力作用而下沉，而輕的物質被替換而上升。

   擾動尺度的增長為 $e^{\gamma t}$，其中 γ 為

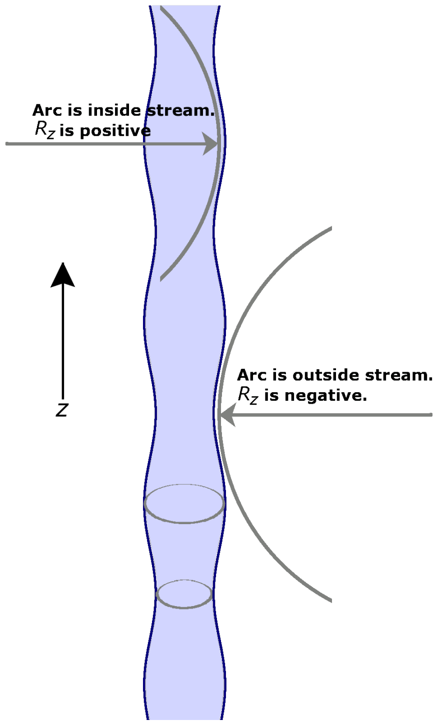
   $$\gamma = \sqrt{gk\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right)}$$

2. 開爾文－亥姆霍茲不穩定性 (Kelvin–Helmholtz instability)[4]

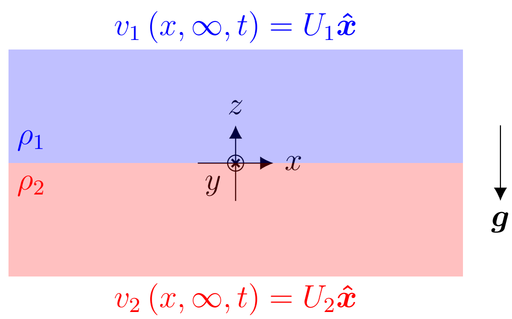
   在有剪力梯度的連續流體內部或有速度差 $u = |U_1 - U_2|$ 的兩個不同流體介面之間發生的不穩定現象。相速度 ω/k 為

   $$\frac{\omega}{k} = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} + \sqrt{-\frac{\rho_1\rho_2 u^2}{(\rho_1+\rho_2)^2} - \frac{g}{k}\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right) + \frac{\sigma k}{\rho_1 + \rho_2}}$$

[4]可參考第七屆天物盃決賽思考賽－流體的不穩定性與波。



(a) 水柱表面的微擾[7]



(b) 開爾文—亥姆霍茲不穩定性的參數

(c) 開爾文—亥姆霍茲雲[8]

圖 6. 不穩定性之示意圖

3. 布魯托—瑞利不穩定性 (Plateau-Rayleigh instability)[5]

   當流體在流動時受到擾動時，水柱半徑產生微擾 $R(z,t)=R_0+\tilde{R}e^{i(kz-\omega t)}$ $(\tilde{R}\ll R_0)$，波谷處的壓力比波峰處的壓力大，則波谷處的液體會相對朝向波峰處流動，而造成粗的地方加粗，細的地方越細，最終水柱斷裂形成水滴。
   截面半徑為 R_0 的水柱發生不穩定性時有

$$kR_0>1$$

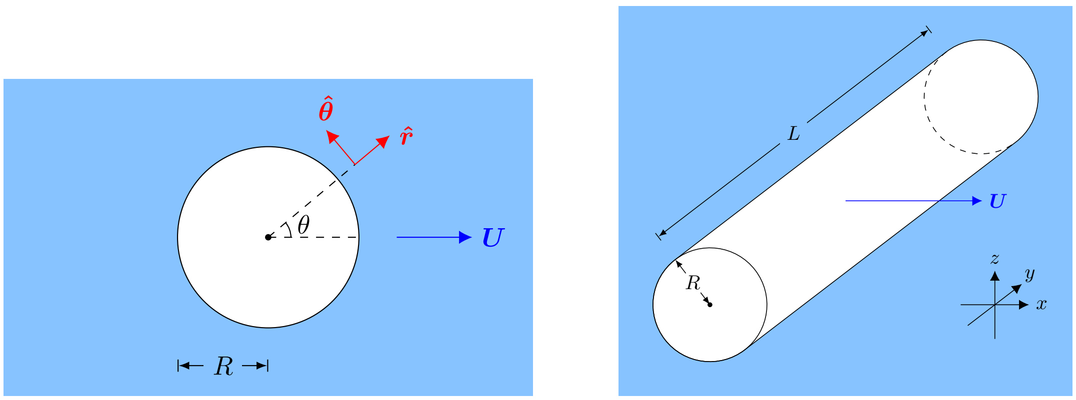
4. 瑞利—貝納德不穩定性 (Rayleigh-Bénard instability)[6]

   密度梯度與溫度梯度是形成瑞利-貝納德對流的主要原因，位於底部的液體因為受熱而密度較低，因此底部的液體會上浮。不過這些液體上升的過程中，因為旁邊液體溫度較低而經由熱傳導損失熱量使溫度逐漸降低，因此會產生液體上升並沉降的循環。

[5]可參考**物奧練習題第二冊 十二、Plateau-Rayleigh 不穩定性**。
[6]可參考**物奧練習題第十冊 十九、瑞利-貝納德對流**。
[7]https://commons.wikimedia.org/wiki/File:SurfTensWavyJet.svg
[8]https://www.reddit.com/r/CLOUDS/comments/16yjw60/what_type_of_cloud_formation_is_this/

7.5 流場與物體移動的等效質量

有個無限大空間充滿無旋度且密度為 ρ 的理想流體。我們將放置不同的物體，並賦予他們恆定的速度 $\boldsymbol{U} = U\hat{\boldsymbol{x}}$，使其能產生穩定的流場。求得流場分布後，即可求出液體流動的等效質量，其定義為液體總動能 E 等於等效質量 m 以物體相同速率 U 移動的動能，即 $E = mU^2/2$。角度 θ 定義為位置向量 $\boldsymbol{r}$ 與 $+x$ 方向的夾角。



(a) 圓球 **(b)** 圓柱

圖 7. 座標示意圖

1. 圓球

   半徑為 R 的圓球所形成的流場 $\boldsymbol{v}(r, \theta, \phi)$ 為

   $$\boldsymbol{v} = U\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - U\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

   液體流動的等效質量 m_{sph} 為

   $$m_{\text{sph}} = \frac{2}{3}\pi\rho R^3$$

2. 圓柱

   半徑為 R、長度為 L $(L \gg R)$ 的圓柱所形成的流場 $\boldsymbol{v}(r, \theta, z)$ 為

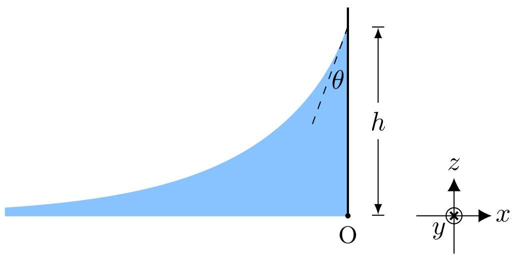
   $$\boldsymbol{v} = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

   液體流動的等效質量 m_{cyl} 為

   $$m_{\text{cyl}} = \pi\rho R^2 L$$

7.6 液面的上升[9]

將一豎直無限大平板部分地浸入與其有潤濕作用的液體中，兩者之間的接觸角為 θ。已知液體的密度為 ρ、表面張力係數為 σ。注意並沒有假設 $|\partial y/\partial x| \ll 1$。定義特徵長度 $L=\sqrt{2\sigma/\rho g}$，此又稱為毛細長度 (capillary length)。



可得液體沿此板上升的高度 h 為

$$h=\sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}\left(1-\sin\theta\right)}$$

定上圖中的 O 為 xy 座標的原點。液面符合的方程式為 $x\left(y\right)$，且其形式可寫為

$$x\left(y\right)=f\left(y\right)-f\left(h\right)$$

則函數 $f\left(y\right)$ 為

$$f\left(y\right)=L\left[\sqrt{2-\frac{y^2}{L^2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}L}{y}\right)\right]$$

[9]可參考第七屆天物盃初賽 Problem 28。