不同坐標系中的應力張量
與納維爾－斯托克斯方程式

王兆國 William Wang
WilliamWang941225@gmail.com

June 19, 2024

目錄

1 壓力與浮力

1.1 壓力

在密度為 ρ 的液體內，若加速度場為 $\boldsymbol{g} = g\hat{\boldsymbol{z}}$，則由靜力平衡可知穩定態時的壓力差為

$$\Delta P = \rho g \Delta z$$

Δz 為選定兩點的 z 座標差。因此易知

$$\boldsymbol{\nabla} P = \rho \boldsymbol{g}$$

1.2 浮力

數學公式

(1) 積分

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} T \,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \oint_S T \,\mathrm{d}\boldsymbol{a} \qquad \int_V (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = -\oint_S \boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

其中 T 為純量、$\boldsymbol{v}$ 為向量，積分範圍 S 為包圍 V 的面。注意以上定理只有在函數在積分範圍內無奇點才成立。

(2) 旋度

$$\boldsymbol{\nabla} \times (a\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} a \times \boldsymbol{r}$$

以下將利用上述公式重新證明浮力相關的定理。

1.2.1 浮力公式

物體沉於液面下的體積為 V，則受到的浮力 $\boldsymbol{F}$ 為

$$\boldsymbol{F} = \oint P\,(-\,\mathrm{d}\boldsymbol{a}) = -\int \boldsymbol{\nabla} P \,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = -\int \rho \boldsymbol{g} \,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = -\rho V \boldsymbol{g}$$

1.2.2 浮心

Theorem 1.1 浮體的浮心為沉於液面下體積的幾何中心。

計算浮力造成的力矩 $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = \oint \boldsymbol{r} \times (-P \,\mathrm{d}\boldsymbol{a}) = \oint \mathrm{d}\boldsymbol{a} \times (P\boldsymbol{r})$$

利用公式可得

$$\oint \mathrm{d}\boldsymbol{a} \times (P\boldsymbol{r}) = \int \boldsymbol{\nabla} \times (P\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \int \boldsymbol{\nabla} P \times \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

代回得

$$\boldsymbol{\tau} = -\int \boldsymbol{r} \times \rho\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{R}_B \times \boldsymbol{F}$$

$\boldsymbol{R}_B$ 即為浮心的位置向量。比對可得

$$\boldsymbol{R}_B = \frac{\int \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}$$

1.3 壓力的受力分析

1.3.1 圓柱容器

考慮一塊 $\mathrm{d}r \times r\,\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$ 的空間，且壓力分佈 $P(\boldsymbol{r}) = P(r)$，定徑向向外為正。可能會很直覺的寫出徑向合力 $\mathrm{d}F$ 為

$$\mathrm{d}F = -\frac{\partial}{\partial r}\left[P(r)\,r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}r = -\frac{\partial}{\partial r}\left[P(r)\,r\right]\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

但這是錯的。

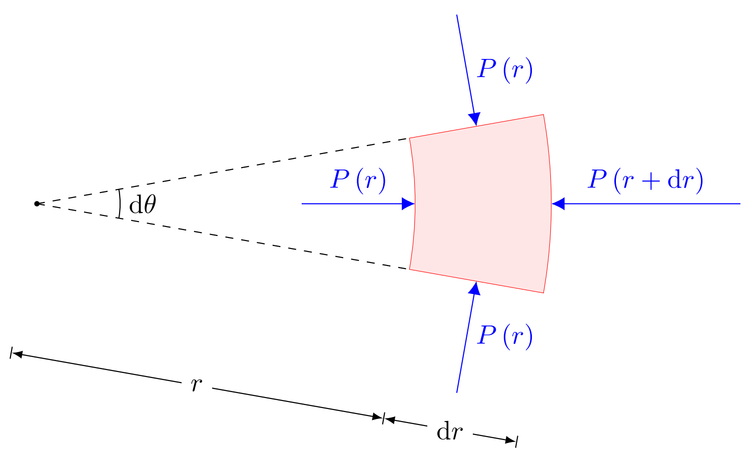


圖 1. 微小質元受力圖

> **Note 1.1** 側邊的壓力也必須計算。

可知徑向合力為

$$\mathrm{d}F = 2P(r)\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\right) - P(r+\mathrm{d}r)\left[(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\right] + P(r)\,(r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z)$$

$$\mathrm{d}F = P(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z - \frac{\partial}{\partial r}\left[rP(r)\right]\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}F = -\frac{\partial P(r)}{\partial r} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

而結果的確也符合納維爾－斯托克斯方程式，即單位體積所受的力 $\boldsymbol{f}$ 為

$$\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{\nabla} P(r) = -\frac{\partial P(r)}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}}$$

1.3.2 圓球容器

考慮一塊 $\mathrm{d}r \times r\,\mathrm{d}\theta \times r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$ 的空間，且壓力分佈 $P(\boldsymbol{r}) = P(r)$，定徑向向外為正。可得徑向合力 $\mathrm{d}F$ 為

$$\mathrm{d}F = -\frac{\partial}{\partial r}\left[P(r)\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\right]\mathrm{d}r + \left[P(r)\,r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}\phi + \left[P(r)\,r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\right]\mathrm{d}\theta$$

利用鏈鎖律，易得

$$\mathrm{d}F = -\frac{\partial P(r)}{\partial r} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

結果同樣也符合納維爾－斯托克斯方程式。

1.3.3 與波茲曼分布的關聯

我們可以證明此結果也會符合波茲曼分布。假設圓柱容器繞其中心軸以角速率 ω 轉動，且各處溫度相同為 T，每一氣體分子的質量為 m，則可列得達到平衡態時符合的方程式為

$$-r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\frac{\partial P(r)}{\partial r} = \left(\rho r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\right) r\omega^2$$

$$\frac{\partial P(r)}{\partial r} = -\rho r\omega^2$$

代入 $P(r) = \rho(r)\,k_B T/m$，積分可得

$$\rho(r) = \rho_0 \exp\left(-\frac{m\omega^2 r^2}{2k_B T}\right)$$

波茲曼分布表明 $\rho \propto \exp\left(-E/k_B T\right)$，又 $E = m\omega^2 r^2/2$，故結果相同。

2 表面張力

2.1 表面張力係數

表面張力係數定義為單位面積的表面能

$$\sigma \equiv \frac{\mathrm{d}E_S}{\mathrm{d}A}$$

其中 E_S 為表面能。取切向方向的微小長度，易得**單位接觸長度**的表面張力 f 為

$$f = \sigma$$

由於表面張力為表面能的作用，因此在計算平衡態的物理量時可以利用**虛功原理**。

Theorem 2.1 虛功原理 (達朗貝爾原理 D'Alembert's principle)

系統達到熱平衡時，給予介面微小位移後能量變化的一階項為零。

由能量的觀點來看，表面張力改變介質接觸面積使得總能量最小化。

Example 2.1 圓管的液面上升高度

有一半徑為 r 的圓管，將其內裝入質量密度為 ρ、表面張力係數為 σ 的液體。已知液體與管壁的接觸角為 θ，且圓管垂直放置於地表，所以其軸的方向與重力加速度 g 平行。試求液體上升的高度 h。

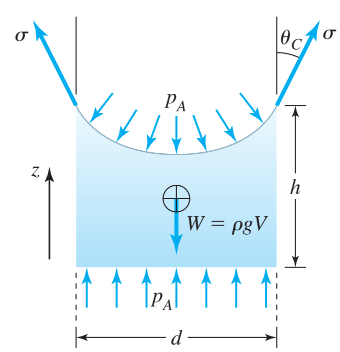


圖 2. 表面張力在兩垂直板之間的作用力圖。[1]

易知平衡時，由虛功原理得

$$2\pi r\sigma\cos\theta\,\mathrm{d}h - \left(\pi\rho r^2\,\mathrm{d}h\right)gh = 0$$

[1]Edward J. Shaughnessy, Jr.,Ira M. Katz and James P. Schaffer.Introduction to Fluid Mechanics.91.

易得平衡高度 h 為

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$$

一般教科書都會使用力學解，在此提供使用虛功原理的解法。

Example 2.2 液面的接觸角 θ 與表面張力的關係

若是只有液體與氣體之間有表面張力，接觸角為 $\theta = 180^\circ$。考慮固體、液體與氣體之間皆有表面張力的情況，記 σ_{SL} 為固體與液體之間的表面張力、σ_{SG} 為固體與氣體之間的表面張力、σ_{LG} 為液體與氣體之間的表面張力。請將接觸角 θ 以 $\sigma_{\mathrm{SL}}, \sigma_{\mathrm{SG}}, \sigma_{\mathrm{LG}}$ 表示。

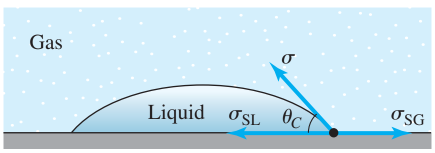


圖 3. 液面示意圖。[2]

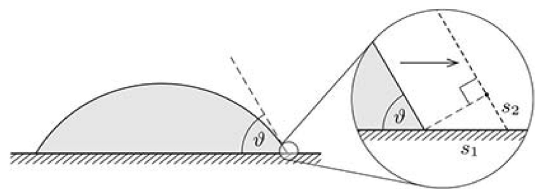


圖 4. 虛功位移示意圖。上圖 θ_c 即為 θ。[3]

由虛功原理得

$$\sigma_{\mathrm{SL}} s_1 + \sigma_{\mathrm{LG}} s_2 - \sigma_{\mathrm{SG}} s_1 = 0$$

由幾何關係得 $s_2 = s_1 \cos\theta$，代回上式

$$\sigma_{\mathrm{SG}} = \sigma_{\mathrm{LG}} \cos\theta + \sigma_{\mathrm{SL}}$$

θ 的範圍與其對應的潤濕情形如下表。

角度範圍	$\theta = 0^\circ$	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	$90^\circ \le \theta < 180^\circ$	$\theta = 180^\circ$
潤濕情形	無潤濕	潤濕	除潤濕	全潤濕

2.2 楊－拉普拉斯方程式

考慮介質交界面上的微擾，對能量 E 做變分

$$\delta E = -\oint P(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}A\,\delta\xi + \sigma \int \delta A \tag{2}$$

[2]Edward J. Shaughnessy, Jr.,Ira M. Katz and James P. Schaffer.Introduction to Fluid Mechanics.90.
[3]Péter Gnädig, Gyula Honyek and Máté Vigh.200 More Puzzling Physics Problems.314.

$\delta\xi$ 為系統向面法向量的微擾長度、δA 為系統微擾所造成的面積變化。
定介質 1 的壓力為 P_1、介質 2 的壓力為 P_2、$\delta\xi$ 的正向為介質 1 指向介質 2。則顯然有

$$\delta E = -\int (P_1 - P_2)\,\mathrm{d}A\,\delta\xi + \sigma \int \delta A \tag{3}$$

此式中只剩下 δA 未知，因此必須了解在有微擾 $\delta\xi$ 時面積會如何變化。
在**氣體壓力的受力分析**中得到一個重要的結論，當考慮一個以**曲率半徑**為柱座標半徑的體積微元時，所得到單位體積的受力可以寫為 $\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{\nabla} P$。以上述積分取法所得到外部對氣體做功 δE_P 為

$$\delta E_P = \int \boldsymbol{f} \cdot \delta\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \int (P_1 - P_2)\,\mathrm{d}A\,\delta\xi$$

而為抵抗外部做功所額外的做功為 $-\delta E_P$，與(3)相符。因此可知在有微擾 $\delta\xi$ 時**面積會沿著曲率半徑放大**，見**圖 6**。
回顧(2)式，由上論述可知環積分的路徑即為**圖 5** 的紅色線，圖中的 r 為曲率半徑。注意到過切點且平行於法向量的平面有無限個，而我們需要選取其中兩個**正交平面**使得曲線在此兩平面上的曲率半徑分別達到最大值和最小值 R_1 和 R_2(若曲率中心在介質 1 則為正，反之則為負)，我們稱此兩曲率半徑為**主要曲率半徑**。
在路徑上的 $\delta\xi$ 恰好就是 $\mathrm{d}A$ 的半徑變化量 δr，所以

$$\delta A = \left(1 + \frac{\delta\xi}{R_1}\right)\left(1 + \frac{\delta\xi}{R_2}\right)\mathrm{d}A - \mathrm{d}A = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\delta\xi\,\mathrm{d}A$$

總能量變化為

$$\delta E = -\oint \left[P_1 - P_2 - \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\mathrm{d}A\,\delta\xi$$

最後利用 $\delta E = 0$ 的關係，即可求得

Formula 2.1 楊—拉普拉斯方程式 (Young-Laplace equation)

$$\Delta P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{4}$$

用於連接具有表面張力係數 σ 的兩個介質之間的邊界條件。

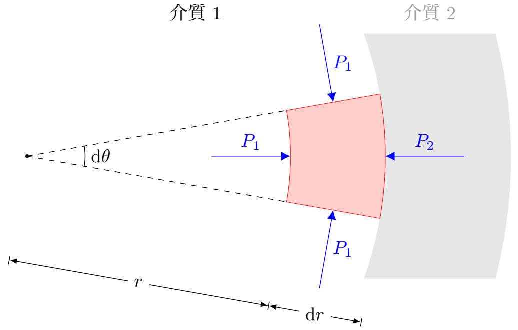


圖 5. 紅色線為環積分路徑。

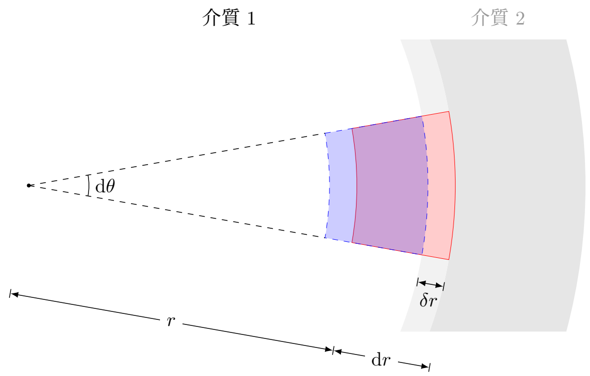


圖 6. 微擾變化示意圖。

2.3 參數式的曲率半徑

位置向量 $\boldsymbol{r}$ 可以僅由一個參數 t 來表示，即 $\boldsymbol{r}$ 可寫為 $\boldsymbol{r}(t)$。則曲率半徑的理論式[4]為

$$R = \frac{|\boldsymbol{r}'|^3}{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{r}' = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$, $\boldsymbol{r}'' = \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$ 。以下將驗證(5)式的正確性。

Example 2.3 圓的曲率半徑

由圓的參數式可令 $\boldsymbol{r} = r_0\left(\cos t\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin t\,\hat{\boldsymbol{y}}\right)$，可知

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = r_0\left(-\sin t\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos t\,\hat{\boldsymbol{y}}\right), \quad \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -r_0\left(\cos t\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin t\,\hat{\boldsymbol{y}}\right)$$

代入可得到 $R = r_0$。

Example 2.4 參數的放大與縮小

令 $t = a\tilde{t}$，其中 a 為常數且 $a \neq 0$。易得參數的放大與縮小並不會影響計算的結果。

以下討論一些基本且常用的例子。

Example 2.5 圓球

兩個曲率半徑為 $R_1 = R_2 = R$，因此表面張力壓力為

$$P = \frac{2\sigma}{R}$$

[4]可能需要一點微分幾何的知識 (?

Example 2.6 圓形肥皂膜

兩個曲率半徑為 $R_1 = R_2 = R$。但因其為液膜與空氣的交界面有兩面，因此表面張力壓力為

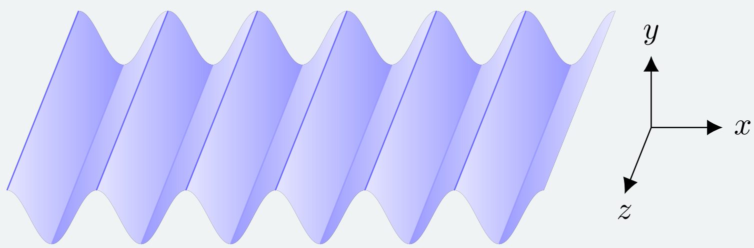
$$P = \frac{4\sigma}{R}$$

Example 2.7 一維水波

如圖，xy 平面上的曲率半徑為 ∞，因此表面張力壓力為

$$P = \frac{\sigma}{R}$$

其中 R 為 xy 平面上的曲率半徑，可以由(5)式求得。



2.4 直角坐標

假設平面方程式為 $z = h(x, y)$。則表面積微元 $\mathrm{d}A$ 為

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = (1, 0, h_x) \times (0, 1, h_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$A = \iint \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

對表面積 A 作變分

$$\begin{aligned}\delta A &= \iint \frac{h_x \delta h_x + h_y \delta h_y}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint \frac{\left(1 + h_y^2\right) h_{xx} + \left(1 + h_x^2\right) h_{yy} - 2h_x h_y h_{xy}}{\left(1 + h_x^2 + h_y^2\right)^{3/2}} \delta h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

因此可得

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\left(1 + h_y^2\right) h_{xx} + \left(1 + h_x^2\right) h_{yy} - 2h_x h_y h_{xy}}{\left(1 + h_x^2 + h_y^2\right)^{3/2}}$$

若將 R_1 與 R_2 分別看成函數 $h(x,y)$ 在 xz 平面與在 yz 平面的曲率半徑，則

$$R_1 = \frac{\left(1+h_x^2+h_y^2\right)^{3/2}}{\left(1+h_y^2\right)h_{xx} - h_x h_y h_{xy}}, \quad R_2 = \frac{\left(1+h_x^2+h_y^2\right)^{3/2}}{\left(1+h_x^2\right)h_{yy} - h_x h_y h_{xy}}$$

若只考慮 $h = h(x)$，則上式可以化簡為

Formula 2.2 直角座標中二維的曲率半徑

$$R_1 = \frac{(1+h_x^2)^{3/2}}{h_{xx}}$$

事實上有純幾何的推導方式。注意不少題目並不會跟你說 $h_x \ll 1$，而直接使用 $R = 1/h_{xx}$，請自行判斷。

2.4.1 幾何

由幾何關係易得

$$\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{1+h_x^2}\,\mathrm{d}x$$

其中 θ 為直線 $h(x)$ 相對於某一個固定軸的夾角。定此軸為 x 軸，則 $h_x = \tan\theta$。由此可推得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\sec^2\theta}{h_{xx}} = \frac{1+h_x^2}{h_{xx}}$$

代回可得 R 為

$$R = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\sqrt{1+h_x^2} = \frac{(1+h_x^2)^{3/2}}{h_{xx}}$$

2.5 柱座標

以下討論在柱座標系中的曲率半徑。$\boldsymbol{r}$ 方向代表以 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 為法向量的面積計算曲率半徑。

2.5.1 $\boldsymbol{r}$ 方向

$$A = \iint \sqrt{r^2 + r_\theta^2 + r^2 r_z^2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

對其變分

$$\delta A = \iint \frac{r\delta r + r_\theta \delta r_\theta + r r_z^2 \delta r + r^2 r_z \delta r_z}{\sqrt{r^2 + r_\theta^2 + r^2 r_z^2}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

利用分部積分法可得

$$\delta A=\iint\left[\frac{r\left(1+r_z^2\right)}{\sqrt{r^2+r_\theta^2+r^2r_z^2}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{r_\theta}{\sqrt{r^2+r_\theta^2+r^2r_z^2}}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{r^2r_z}{\sqrt{r^2+r_\theta^2+r^2r_z^2}}\right)\right]\delta r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

微分得

$$\begin{aligned}\delta A=\iint\frac{1}{\sqrt{r^2+r_\theta^2+r^2r_z^2}}&\left[r\left(1+r_z^2\right)-r_{\theta\theta}-2rr_z^2-r^2r_{zz}+r_\theta\frac{rr_\theta\left(1+r_z^2\right)+r_\theta r_{\theta\theta}+r^2r_zr_{\theta z}}{r^2+r_\theta^2+r^2r_z^2}\right.\\&\left.+r^2r_z\frac{rr_z\left(1+r_z^2\right)+r_\theta r_{\theta z}+r^2r_zr_{zz}}{r^2+r_\theta^2+r^2r_z^2}\right]\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

化簡可得曲率為

$$\frac{1}{R}=\frac{r^2+2r_\theta^2+r^2r_z^2-\left(1+r_z^2\right)rr_{\theta\theta}-\left(r^2+r_\theta^2\right)rr_{zz}+2rr_\theta r_zr_{\theta z}}{\left(r^2+r_\theta^2+r^2r_z^2\right)^{3/2}}$$

當 $r=r\left(\theta\right)$ 時，曲率為

$$\frac{1}{R}=\frac{r^2+2r_\theta^2-rr_{\theta\theta}}{\left(r^2+r_\theta^2\right)^{3/2}}$$

2.5.2 z 方向

$$A=\iint\sqrt{r^2+r^2h_r^2+h_\theta^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

對其變分

$$\delta A=\iint\frac{r^2h_r\delta h_r+h_\theta\delta h_\theta}{\sqrt{r^2+r^2h_r^2+h_\theta^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

利用分部積分法可得

$$\delta A=-\iint\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2h_r}{\sqrt{r^2+r^2h_r^2+h_\theta^2}}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{h_\theta}{\sqrt{r^2+r^2h_r^2+h_\theta^2}}\right)\right]\delta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

化簡可得曲率為

$$\frac{1}{R}=\frac{h_r\left(r^2+r^2h_r^2+2h_\theta^2-2rh_\theta h_{r\theta}\right)+rh_{rr}\left(r^2+h_\theta^2\right)+rh_{\theta\theta}\left(1+h_r^2\right)}{\left(r^2+r^2h_r^2+h_\theta^2\right)^{3/2}}$$

當 $h=h\left(r\right)$ 時，曲率為

Formula 2.3 柱座標中二維的曲率半徑

$$\frac{1}{R} = \frac{h_{rr}}{(1+h_r^2)^{3/2}} + \frac{1}{r}\frac{h_r}{\sqrt{1+h_r^2}}$$

3 應力張量

3.1 一般形式

顯然地，在不同座標系計算相同分量的應力，在經由變換後，應當給出相同的結果。所以應力不依賴於參考系的選擇，也就是在任何參考系的形式皆相同。具有此種美好轉換性質的量即稱為張量 (tensor)，因此應力也可稱為應力張量 (stress tensor)。

在流體中顯然有壓力 p 的作用，且壓力可寫成張量形式 $-p\mathbf{I}$，$\mathbf{I}$ 為單位張量，也就是對角項皆為 1、其餘項皆為 0 的張量。在流體力學中，應力張量扣除掉壓力張量剩餘的張量即稱為黏滯力張量，令其為 $\boldsymbol{\tau}$。因此應力張量 $\boldsymbol{\sigma}$ 可寫為

Formula 3.1 應力張量

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

或者是使用指標的方式表達[5]

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

在往後的章節中考慮流體皆為牛頓流體，而牛頓流體的定義為

Definition 3.1 牛頓流體

黏滯力張量 $\boldsymbol{\tau}$ 只為 $\boldsymbol{\nabla v}$ 的線性函數，也就是 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\nabla v})$。

這不僅是實驗得到的近似，其中線性函數的假設也是因為非線性項是我們不想處理的。易知旋轉不變性符合張量**不依賴於參考系的選擇**的性質。而可以從旋轉不變性得知，此張量必須是跟 $\boldsymbol{\nabla v}$ 中的對稱矩陣有關。將 $\boldsymbol{\nabla v}$ 寫為一個對稱矩陣與非對稱矩陣，即

$$\boldsymbol{\nabla v} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla v} + (\boldsymbol{\nabla v})^T\right] + \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla v} - (\boldsymbol{\nabla v})^T\right] \equiv \mathbf{E} + \mathbf{D}$$

其中 $\mathbf{E}$ 為對稱矩陣、$\mathbf{D}$ 為反對稱矩陣。其中各項元素為

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

[5] δ_{ij} 為 Kronecker delta，$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

而因為 $\boldsymbol{\tau}$ 只與 $\mathbf{E}$ 有關的特性，因此 $\mathbf{E}$ 又稱為應變時變率張量 (strain-rate tensor)。
$\boldsymbol{\tau}$ 最簡單的形式為

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{E}) = 2\mu\mathbf{E} + \lambda\mathrm{Tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} = \mu\left[\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})^T\right] + \lambda(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\mathbf{I} \tag{6}$$

其中常數 μ 與 λ 稱為拉梅係數 (Lamé parameters)。若在流體力學中，μ 稱為動黏滯係數 (dynamic viscosity) 或絕對黏滯係數 (absolute viscosity)、λ 稱為第二黏滯係數 (second viscosity)，因此牛頓流體的黏滯力可以以兩個常數係數表達。
至此得到黏滯力張量的形式：

Formula 3.2 黏滯力張量

在**法向量為** j **方向的單位面積**所受到往 i **方向**的黏滯力 τ_{ij} 為

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij}\sum_k e_{kk} \tag{7}$$

易知每單位體積在 i 方向上所受到的黏滯力為

$$f_i = \sum_j \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}$$

或者是利用張量的內積來表示

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau} = \sum_j \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}\hat{\mathbf{e}}_i$$

其中 i 方向的分量為

$$\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})$$

化簡得

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau} = \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + (\mu+\lambda)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) \tag{8}$$

事實上，這邊的推導過程與彈性力學中的應變張量是一模一樣的，因為應變張量同樣要符合旋轉不變性與各項同性。只是在彈性力學中，應力張量為位移 $\boldsymbol{u}$ 的函數 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u})$，因此將 $\boldsymbol{u}$ 改成 $\boldsymbol{v}$，且 μ 與 λ 同樣亦稱為拉梅係數，只是在彈性力學此兩者經常被其他的彈性模量代替，例如楊氏模量 (Young's modulus) E 與泊松比 (Poisson's ratio) σ。

3.2 梯度與尺度因子

首先，必須瞭解向量的梯度要如何運算。根據梯度的定義，對於向量 $\boldsymbol{v}$ 在 i 方向上的梯度為

$$(\boldsymbol{\nabla v})_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{r} + \Delta x_i \hat{\mathbf{e}}_i\left(\boldsymbol{r}\right)\right) - \boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{r}\right)}{\Delta x_i} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i}$$

會發現他是二階張量。我們把沿著 i 方向的梯度之 j 方向的分量為 $(\boldsymbol{\nabla v})_{ij}$。所以有

$$(\boldsymbol{\nabla v})_{ij} = \sum_k \frac{1}{h_i} \frac{\partial\left(v_k \hat{\mathbf{e}}_k\right)}{\partial x_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \tag{9}$$

在直角座標中是非常簡單的，因為 $\hat{\mathbf{e}}_i\left(\boldsymbol{r}\right) = \hat{\mathbf{e}}_i$，與座標 $\boldsymbol{r}$ 無關。因此必須注意：

> **Note 3.1 在單位向量會隨位置改變的坐標系中，$(\boldsymbol{\nabla v})_{ij} \neq \partial v_j / \partial x_i$**
>
> 在柱座標中的單位向量 $\hat{\mathbf{e}}_i\left(\boldsymbol{r}\right) = \hat{\mathbf{e}}_i\left(\theta\right)$，而球座標中的單位向量 $\hat{\mathbf{e}}_i\left(\boldsymbol{r}\right) = \hat{\mathbf{e}}_i\left(\theta, \phi\right)$。這也是為甚麼不同座標系中張量形式**看起來**不同的原因。

在(9)式中的 h_i 為長度因子，其定義為

$$h_i = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right| \tag{10}$$

經由一些計算後，可得柱座標的長度因子為

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_z = 1 \tag{11}$$

球座標的長度因子為

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin\theta \tag{12}$$

3.3 直角座標

因為 $\partial \hat{\mathbf{e}}_i / \partial x_j = 0$，所以只需對 v_i 微分即可。顯然有

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

其中 $i = x, y, z$。

3.4 柱座標

首先，單位向量的梯度為

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial z} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_z}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_z}{\partial \theta} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{e}}_r$$

接下來計算較複雜的分量 $e_{r\theta}$。先求 $(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{r\theta}$ 與 $(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\theta r}$

$$(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{r\theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_z\hat{\mathbf{e}}_z\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial r}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\theta r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_z\hat{\mathbf{e}}_z\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}$$

因此

$$2e_{r\theta} = 2e_{\theta r} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)$$

注意到除了原本就有的項

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$

你必須還要加上因為 $\hat{\mathbf{e}}_i(\boldsymbol{r})$ 隨位置改變的微分項。而在張量 $e_{r\theta}$ 中你只需注意單位向量對 θ 的梯度所對應的 $\hat{\mathbf{e}}_r$ 分量。重複上述步驟，可得各分量為

Formula 3.3 柱座標中的應變時變率張量

$$\begin{aligned}
e_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \\
e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \\
e_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
2e_{r\theta} = 2e_{\theta r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) \\
2e_{\theta z} = 2e_{z\theta} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\
2e_{zr} = 2e_{rz} &= \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}
\end{aligned} \tag{13}$$

3.5 球座標

首先，單位向量的梯度為

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \phi} = \sin\theta\, \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{e}}_r, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \phi} = \cos\theta\, \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \phi} = -\sin\theta\, \hat{\mathbf{e}}_r - \cos\theta\, \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

接下來計算較複雜的兩個分量 $e_{\phi\phi}$ 與 $e_{\theta\phi}$。計算 $(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\phi\phi}$

$$(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\left(v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta + \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)$$

$$e_{\phi\phi} = \frac{v_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r}v_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

計算 $(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\theta\phi}$ 與 $(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\phi\theta}$

$$(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\theta\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})_{\phi\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi\cos\theta\right)$$

$$2e_{\theta\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi\cos\theta\right) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)$$

重複上述步驟，可得各分量為

Formula 3.4 球座標中的應變時變率張量

$$e_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}$$

$$e_{\phi\phi} = \frac{v_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r}v_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$2e_{r\theta} = 2e_{\theta r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)$$

$$2e_{\theta\phi} = 2e_{\phi\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)$$
$$2e_{\phi r} = 2e_{r\phi} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}$$

以上三個座標系可以處理大部分的流體問題。

3.6 廣義座標

以下直接給出廣義座標 q_i 的黏滯力張量公式。

$$e_{ii} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial v_i}{\partial q_i} + \sum_{j\neq i}\frac{v_j}{h_i h_j}\frac{\partial h_i}{\partial q_j}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{h_j}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v_j}{h_j}\right) + \frac{h_i}{h_j}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{v_i}{h_i}\right)\right]$$

你可以驗證以上三個座標系皆會符合。取 $e_{\phi\phi}$ 為例

$$e_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{v_\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} = \frac{v_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r}v_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

4 納維爾—斯托克斯方程式

4.1 一般形式

已知流體的質量密度為 ρ，所受的壓力為 P、所受到的加速度場為 $\boldsymbol{g}$。考慮流體為牛頓流體，動黏滯係數 (dynamic viscosity) 為 μ、第二黏滯係數 (second viscosity) 為 λ。
首先，根據簡單的力分析與(8)式，易得每單位體積的流體所受到的總力 $\boldsymbol{f}$ 為

$$\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{\nabla} P + \rho\boldsymbol{g} + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + (\mu+\lambda)\,\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right) \tag{14}$$

我們將運用(14)式推導出納維爾—斯托克斯方程式，你會發現它就是牛頓第二定律的變形。
取液體的微小質元，其所受的力為

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = (\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \left[-\boldsymbol{\nabla} P + \rho\boldsymbol{g} + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + (\mu+\lambda)\,\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

化簡可得

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\nabla} P + \rho\boldsymbol{g} + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + (\mu+\lambda)\,\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right) \tag{15}$$

由全微分可知加速度 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ 為

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} \tag{16}$$

上式中的 $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ 稱為局部加速度 (local acceleration)，$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}$ 稱為對流加速度 (convective acceleration)。
將(15)式代回(16)式得納維爾—斯托克斯方程式 (Navier-Stokes equation) 為

$$\rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}\right) = -\boldsymbol{\nabla} P + \rho\boldsymbol{g} + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + (\mu+\lambda)\,\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right) \tag{17}$$

在液體不可壓縮的條件下，納維爾—斯托克斯方程式變為

Formula 4.1 納維爾—斯托克斯方程式

$$\rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}\right) = -\boldsymbol{\nabla} P + \rho\boldsymbol{g} + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} \tag{18}$$

為二階非齊次非線性方程式，也是因為非齊次非線性的緣故，造成此方程式無比難解。至此為止，以上的推論僅止於直角坐標系。雖說(17)是一般形式，但是在其他正交座標中，並不能直接將各速度分量替換成其他正交座標中的速度分量，而認為方程式是正確的。問

題出在於：

Note 4.1 方程式在不同座標系的形式

以上推導出的一般形式指的是算符的一般性，也就是在其他正交座標中，你同樣必須使用該算符做計算。但是**不同正交座標系的算符有不同形式**，且你必須考慮**正交座標系的單位向量可能會隨著位置改變**。而直角坐標系即為單位向量不隨著位置改變的一個特例。

下一部分將介紹三個常見座標系中的納維爾－斯托克斯方程式。

4.2 不同座標系中的形式

接下來將推導直角座標、柱座標與球座標的納維爾－斯托克斯方程式。在此為了簡化，考慮液體有**不可壓縮性**，因此有 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0$。首先我們必須了解廣義座標中不同梯度算符的形式，而以下僅給出需要用到的物理量之算符。
記長度因子為 h_i、長度因子之乘積為 $H=\prod\limits_i h_i$。

(A) 散度 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=\sum_i\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{H}{h_i}v_i\right)$$

(B) 拉普拉斯算子 $\nabla^2\boldsymbol{v}$

$$\nabla^2\boldsymbol{v}=\sum_i\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{H}{h_i^2}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_i}\right)=\sum_{i,j}\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{H}{h_i^2}\frac{\partial\left(v_j\hat{\mathbf{e}}_j\right)}{\partial x_i}\right)$$

(C) 對流加速度項 $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}$

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}=\sum_i\frac{v_i}{h_i}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_i}=\sum_{i,j}\frac{v_i}{h_i}\frac{\partial\left(v_j\hat{\mathbf{e}}_j\right)}{\partial x_i}$$

所以每單位體積在 i 方向上所受到的黏滯力 $\boldsymbol{f}$ 為

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau}=\sum_{i,j}\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{H}{h_j}\tau_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i\right)$$

接下來，我們試著將三種座標系中的方程式盡量以**拉普拉斯算子**的形式呈現。

4.3 直角座標

Formula 4.2 直角座標中的納維爾－斯托克斯方程式

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$
$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$$
$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)+\rho g_z$$

4.4 柱座標

散度與拉普拉斯算子為

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{19}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{v}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial z^2}$$

(A) 對流加速度項

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}=v_r\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\hat{\boldsymbol{z}}\right)+\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{z}}\right)$$
$$+v_z\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right)+\frac{v_r v_\theta}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}-\frac{v_\theta^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}}$$

各分量為

$$[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}]_r=v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_r-\frac{v_\theta^2}{r} \tag{20}$$
$$[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}]_\theta=v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r v_\theta}{r}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_\theta+\frac{v_r v_\theta}{r} \tag{21}$$
$$[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}]_z=v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_z \tag{22}$$

(B) 黏滯力 $\boldsymbol{r}$ 分量

$$f_r(r,\theta,z)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr})+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}\equiv\mu g_r(r,\theta,z)$$

$$g_r = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) - \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right)$$

將(19)式做對 r 的偏微分並與上式相減可得

$$g_r = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right]$$

注意到

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right] = \frac{v_r}{r^2}$$

所以可得

$$g_r = \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \tag{23}$$

(C) 黏滯力 θ 分量

$$f_\theta(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{\theta r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} \equiv \mu g_\theta(r,\theta,z)$$

注意到

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{\theta r}) + \frac{\tau_{r\theta}}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{\theta r}\right)$$

$$g_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)$$

將(19)式做對 θ 的偏微分並與上式相減可得

$$g_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}$$

其中

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] = -\frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)$$

所以可得

$$g_\theta = \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \tag{24}$$

(D) 黏滯力 z 分量

$$f_z(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{zr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \equiv \mu g_z(r,\theta,z)$$

$$g_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) + 2\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

將(19)式做對 z 的偏微分並與上式相減可得

$$g_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = \nabla^2 v_z \tag{25}$$

(E) 結論

利用(20)(21)(22)(23)(24)(25)式可得

Formula 4.3 柱座標中的納維爾—斯托克斯方程式

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\, v_r - \frac{v_\theta^2}{r}\right) &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)\\
\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\, v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r}\right) &= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu\left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)\\
\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\, v_z\right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\nabla^2 v_z
\end{aligned}$$

4.5 球座標

散度與拉普拉斯算子為

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} = 0 \tag{26}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial\phi^2}$$

(A) 對流加速度項

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} = v_r&\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\\
&+ \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}\\
&+ \left(\frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}
\end{aligned}$$

各分量為

$$[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}]_r = v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_r-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}]_\theta &= v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\\ &=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_\theta+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}]_\phi &= v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{v_r v_\phi}{r}+\frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\\ &=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_\phi+\frac{v_r v_\phi}{r}+\frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\end{aligned} \tag{29}$$

(B) 黏滯力 r 分量

$$f_r=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\tau_{rr}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\tau_{r\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial\phi}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}-\frac{\tau_{\phi\phi}}{r}\equiv\mu g_r\left(r,\theta,\phi\right)$$

$$\begin{aligned}g_r=&\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]\right\}\\ &+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right]\\ &-\frac{2}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{2v_r}{r}+\frac{\cot\theta}{r}v_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

其中

$$v_\theta\cot\theta+\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}g_r=&\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\left(\nabla^2 v_r\right)_\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\\ &+\left(\nabla^2 v_r\right)_\phi-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}-\frac{4v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\end{aligned}$$

將(26)式做對 r 的偏微分並與上式相減可得

$$\begin{aligned}g_r=&\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\left(\nabla^2 v_r\right)_\theta-\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right)\right]+\left(\nabla^2 v_r\right)_\phi-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}\\ &-\frac{4v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right)+\frac{2v_r}{r^2}=\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)$$

整理可得

$$g_r=\nabla^2 v_r-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} \tag{31}$$

(C) 黏滯力 θ 分量

$$f_\theta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\tau_{\theta r}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\tau_{\theta\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\theta\phi}}{\partial\phi}+\frac{\tau_{r\theta}}{r}-\frac{\cot\theta}{r}\tau_{\phi\phi}\equiv\mu g_\theta\left(r,\theta,\phi\right)$$

注意到

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\tau_{\theta r}\right)}{\partial r}+\frac{\tau_{r\theta}}{r}=\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\tau_{r\theta}\right) \tag{32}$$

$$\begin{aligned}g_\theta=&\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+r^4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\right)\sin\theta\right]\\&+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right]-\frac{2\cot\theta}{r^2}\left(v_r+v_\theta\cot\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

將(26)式做對 θ 的偏微分再乘 $1/r$ 並與上式相減，並注意到

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}\right]=\left(\nabla^2 v_\theta\right)_\theta-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}$$

可得

$$\begin{aligned}g_\theta=&\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right)\right]+\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\right)\sin\theta\right]+\left(\nabla^2 v_\theta\right)_\phi\\&-\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right)\right]-\left(\nabla^2 v_\theta\right)_\theta+\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cot\theta}{r^2}\left(v_r+v_\theta\cot\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]=\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{2v_\theta}{r^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)-\frac{2v_\theta}{r^2}=\left(\nabla^2 v_\theta\right)_r-\frac{2v_\theta}{r^2} \tag{33}$$

並將(26)式代入可得

$$\begin{aligned}g_\theta=&\left(\nabla^2 v_\theta\right)_r-\frac{2v_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\left(v_r\cot\theta+\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)+\left(\nabla^2 v_\theta\right)_\phi+\left(\nabla^2 v_\theta\right)_\theta+\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\\&-\frac{2\cot\theta}{r^2}\left(v_r+v_\theta\cot\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

化簡可得

$$g_\theta = \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2\theta} - \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \tag{34}$$

(D) 黏滯力 ϕ 分量

$$f_\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\tau_{\phi r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\tau_{\phi\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\phi\phi}}{\partial\phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{\cot\theta}{r}\tau_{\theta\phi} \equiv \mu g_\phi\left(r,\theta,\phi\right)$$

利用(32)式與下式

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\tau_{\phi\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{\cot\theta}{r}\tau_{\theta\phi} = \frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial\left(\tau_{\phi\theta}\sin^2\theta\right)}{\partial\theta}$$

化簡得

$$\begin{aligned} g_\phi = {} & \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right) + \frac{r^2}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} + \sin^3\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right] \\ & + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(v_r + v_\theta\cot\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right) \end{aligned}$$

將(26)式做對 ϕ 的偏微分再乘 $1/r\sin\theta$ 與上式相減，和用(33)式代換可得

$$\begin{aligned} g_\phi = {} & \left(\nabla^2 v_\phi\right)_r - \frac{2v_\phi}{r^2} + \frac{1}{r^3\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} + \sin^3\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right] \\ & + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(v_r + v_\theta\cot\theta\right) + \left(\nabla^2 v_\phi\right)_\phi \\ & - \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right)\right] \end{aligned}$$

與以下的等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin^3\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right] - 2v_\phi &= \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-v_\phi\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\right] - 2v_\phi \\ &= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(-v_\phi + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\theta^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\right) - \frac{v_\phi}{\sin^2\theta} \\ &= \left(\nabla^2 v_\phi\right)_\theta - \frac{v_\phi}{\sin^2\theta} \end{aligned}$$

帶入化簡可得

$$g_\phi = \nabla^2 v_\phi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} - \frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta} \tag{35}$$

(E) 結論

利用(27)(28)(29)(31)(34)(35)式可得

Formula 4.4 球座標中的納維爾—斯托克斯方程式

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_r-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}\right)&=-\frac{\partial P}{\partial r}\\
&+\mu\left(\nabla^2 v_r-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(v_\theta\sin\theta\right)-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)+\rho g_r\\
\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_\theta+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\right)&=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}\\
&+\mu\left(\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)+\rho g_\theta\\
\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_\phi+\frac{v_r v_\phi}{r}+\frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\right)&=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\phi}\\
&+\mu\left(\nabla^2 v_\phi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+\frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}-\frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta}\right)+\rho g_\phi
\end{aligned}$$

5 白努力定律

在此引入渦漩度 $\boldsymbol{\Omega}$ 與速度勢 φ。

Definition 5.1 渦漩度

渦漩度 $\boldsymbol{\Omega}$ 定義為

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}$$

無旋流即為渦漩度 $\boldsymbol{\Omega}=0$。

Definition 5.2 速度勢

速度勢 φ 定義為

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi=\boldsymbol{v}$$

也可以反過來寫為

$$\varphi=\int\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

就如同勢能的定義。也因為是對速度積分，所以得名速度勢。

利用向量恆等式

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(v^2\right)+(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}$$

則(18)可改寫為

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(v^2\right)=-\frac{\boldsymbol{\nabla}P}{\rho}-\boldsymbol{\nabla}\phi+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\boldsymbol{v}$$

在忽略黏滯力的情況下

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(v^2\right)=-\frac{\boldsymbol{\nabla}P}{\rho}-\boldsymbol{\nabla}\phi \tag{36}$$

對上式兩側對 $\boldsymbol{v}$ 內積，得到

$$\boldsymbol{v}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\nabla}\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(v^2\right)+\frac{\boldsymbol{\nabla}P}{\rho}+\boldsymbol{\nabla}\phi\right)=0$$

因此易知

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(v^2\right)+\frac{\boldsymbol{\nabla}P}{\rho}+\boldsymbol{\nabla}\phi=0\ (\textbf{流線上})$$

對兩側同時積分，可得：

Formula 5.1 白努力方程式

時變的白努力方程式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^2+\frac{P}{\rho}+\phi=\text{const.}\ (\textbf{流線上})$$

若流場已達到穩定態 (穩流)，則 $\partial\varphi/\partial t=0$，上式可寫為

$$\frac{1}{2}v^2+\frac{P}{\rho}+\phi=\text{const.}\ (\textbf{流線上})$$

正是熟知的白努力方程式。

在**無旋流**及**穩流**的情況下，(36)變為

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^2+\frac{P}{\rho}+\phi\right)=0$$

因此易知

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^2+\frac{P}{\rho}+\phi=\text{const.}\ (\textbf{各處})$$

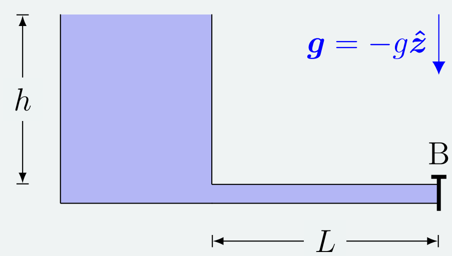
請注意在**有旋流**的假設下，該等式只對**同一流線上的點**成立；在**無旋流**的假設下，該等式對**整個區域任意處**都成立。

Example 5.1 出口流速的變化 ⟨第七屆天物盃決賽 思考賽 Problem 3⟩

考慮深度為 h、截面積為 A 的容器，下方接著一條長度為 L、截面積為 a $(a \ll A)$ 的水管，如下圖所示。在 $t = 0$ 時，將閥門 B 打開。試求當時間為 t 時，水管開口處的流速 $v(t)$。已知重力加速度為 g，且在本題所考慮的時間尺度遠小於液面下降的時間尺度，也就是計算時可以忽略液面下降。

積分公式：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}$$



解答：

$$v(t) = \sqrt{2gh}\tanh\left(\sqrt{\frac{gh}{2L^2}}t\right)$$

6 兩大定理的矛盾與收縮係數

白努力方程式 (Bernoulli Equation)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} + \phi = \text{const.}\ \textbf{(流線上)}$$

對(18)積分可得

Theorem 6.1 衝量—動量定理

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} + \oint_S (\rho\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}a = -\oint_S p\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}a + \int_V \rho\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} + \int_V \mu\nabla^2\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

如果算的題目夠多，不難發現兩式在某些情況會發生衝突。
我們必須認知

- **衝量—動量定理必成立**，因為這只是牛頓第二定理的另一種表述。
- 在穩流情況下才能使用白努力定律，非穩流情況的處理方法為**改變參考系使流場為穩流**。而有旋流的白努力方程式必須在**流線上**才會成立，換句話說，不連續變化的

流速或截面都可能會使其失效。

常見的情況有

- 為了達成給定條件，流體可能會有黏滯力作用，產生能量耗損，因此使用衝量－動量定理消去內力的影響。
- 不規則形狀的容器約束往往會造成器壁正向力對流體產生作用，因此利用正向力不作功的性質，使用白努力方程式做計算。

以下舉出兩個常見且易搞混的情況。

6.1 收縮係數

為了方便討論，以下先忽略重力場對流出截面的水造成的影響，但是需要考慮高度差 h 所造成的壓力差 $\Delta P = \rho g h$。直覺地，水流出截面為 A 的孔洞後過一段路程，水的流線會趨近平行，最後形成一個穩定的流動，此時水流會變成像一個圓柱體，其垂直流線的截面積為 A_C。定義收縮係數 (Contraction coefficient)C_C 為

$$C_C = \frac{A_C}{A}$$

若是假設裝置如下圖，並假設外部壓力為 0，開口水深為 h，開口截面 A 符合 $\sqrt{A} \ll h$。

6.1.1 無內壁延伸的開口

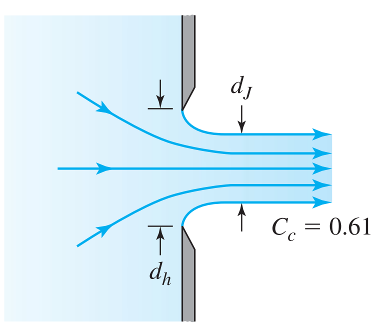


圖 7. 無內壁延伸的開口[6]

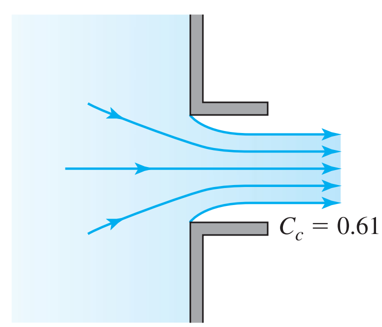


圖 8. 有外壁延伸的開口[6]

由白努力定律、衝量－動量定理和壓力差關係可得

$$v_O = \sqrt{2gh} \tag{37}$$

$$P_1 A = \rho A_C v_O^2 \tag{38}$$

$$P_1 = \rho g h \tag{39}$$

事實上(39)是錯誤的。因為為了使流體從孔洞流出過程中，必定會有些許流體是先沿內壁流出孔洞，進而導致流速在內壁處會有劇烈變化，所以 P_1 應該會是個隨座標變化的變動壓力，不會是單純只與水深 h 一次項有關的函數。
經過計算，無內壁延伸的開口之收縮係數 $C_C \approx 0.61$。且易知有外壁延伸的開口與此情況相同。

6.1.2 有內壁延伸的開口

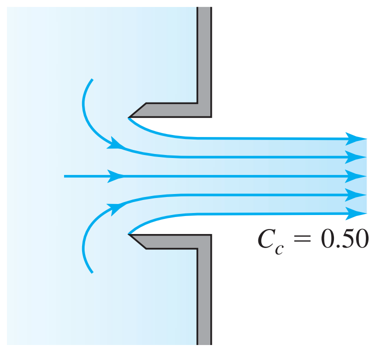


圖 9. 有內壁延伸的開口[6]

由白努力定律、衝量－動量定理和壓力差關係可得

$$
\begin{aligned}
v_O &= \sqrt{2gh} \\
P_1 A &= \rho A_C v_O^2 \\
P_1 &= \rho g h
\end{aligned}
$$

此處 P_1 並非變動壓力，因為沒有內壁產生流速變化的效應。可解得 $A_C = A/2$。$C_C = 0.5$。

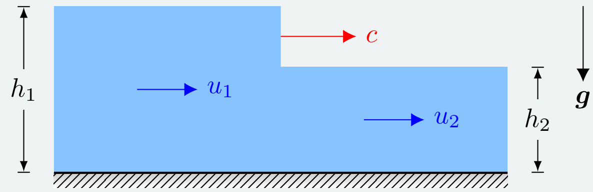
6.2 潮汐波

Example 6.1 潮汐波的波速

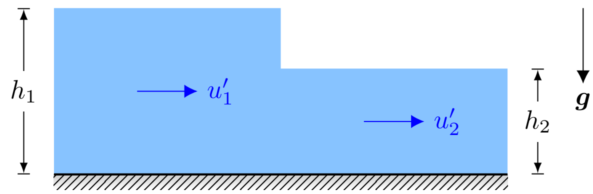
我們知道潮汐現象會引起些許的海平面變化，潮汐波是一種由此種海平面變化所引起的階梯波，有些潮汐波的波高可以達到 3 公尺以上。以下我們用簡單的模型來推導出潮汐波的波速。如下圖，考慮一個潮汐波在水中向右傳播，波前後的波速和水深是不相同的。
已知潮汐波前方的水深為 h_2，水速為 u_2，後方的水深為 h_1，而潮汐波前後方同一截面上水速相同，且水不可壓縮，請求出波速 c。注意你必須考慮重力，重力加速度為

[6] Edward J. Shaughnessy, Jr.,Ira M. Katz and James P. Schaffer.Introduction to Fluid Mechanics.521.

g。答案請用 u_2, h_1, h_2, g 表示。



首先注意上述情況不是穩流，因此以波前為觀察者轉換座標。



其中 $u_1' = u_1 - c, u_2' = u_2 - c$。現在已為穩流，因此問題變為流體靜力學。由流量 Q (單位時間所流過的體積) 守恆

$$Q = h_1 u_1' = h_2 u_2'$$

由衝量－動量定理可得

$$\oint_S (\rho \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) \, \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}a = -\oint_S p \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}a + \int_V \rho \boldsymbol{g} \, \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}$$

可得

$$\rho Q \left(u_2' - u_1'\right) = \int_0^{h_1} \rho g z \, \mathrm{d}z - \int_0^{h_2} \rho g z \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \rho g \left(h_1^2 - h_2^2\right)$$

聯立可得

$$c = u_2 + \sqrt{\frac{g h_1 \left(h_1 + h_2\right)}{2 h_2}}$$

7 常見公式

以下是流體力學中常見的公式。相關推導請自行查閱書籍。

7.1 斯托克斯定律 (Stokes law)

在雷諾數 $Re = \rho R v / \eta \ll 1$ 的情況下，可以忽略慣性項的貢獻，方程式改寫為

$$-\boldsymbol{\nabla} P + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} = 0 \tag{40}$$

若將半徑為 R 的實心球體放入黏滯係數為 η 的液體中，則當球體的運動為：

1. 平動
   速度為 $\boldsymbol{v}$ 時，所受到的阻力 $\boldsymbol{F}$ 為

$$\boldsymbol{F} = -6\pi\eta R\boldsymbol{v}$$

2. 轉動
   角速度為 $\boldsymbol{\omega}$ 時，所受到的阻力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 為

$$\boldsymbol{\tau} = -8\pi\eta R^3\boldsymbol{\omega}$$

7.2 圓柱移動的阻力－斯托克斯悖論

已知圓柱的長度為 l、半徑為 R。由因次可得在低雷諾數的阻力應具有以下形式

$$F = C\eta v l^a R^{1-a}$$

C 為常數，a 為待決定的因次常數。
考慮 $l \gg R$ 的情況，則易知此時邊界效應可以忽略，則阻力 F 正比於長度 l，$a = 1$。你會發現此時阻力與圓柱半徑無關，直覺上會認為十分詭異。此即為斯托克斯悖論。
事實上，你的直覺沒有錯，斯托克斯方程式在給定無限長圓柱的邊界條件下只有流速 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = 0$ 的解，沒有其餘的穩態解。但這顯然不對，因此斯托克斯近似不能夠在此情況下計算阻力。
在不可壓縮流體中有 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0$，故可令函數 ψ 滿足 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\times\psi$。代入(40)計算可得 ψ 應滿足

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^2\psi = 0$$

在無限遠處有 $\psi(\infty) = Ur\sin\theta$，代入試探解 $\psi(\boldsymbol{r}) = f(r)\sin\theta$ 可得

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \left(Ar^3 + Br\ln r + Cr + \frac{D}{r}\right)\sin\theta$$

並考慮在圓柱表面處流速為零，可證得係數無法滿足。
最後給出透過近似求解得到的阻力 F 為

$$F = \frac{8\pi\eta v l}{1 - 2\gamma - 2\ln\frac{Re}{4}}$$

其中雷諾數為 $Re = \rho Rv/\eta$、γ 為 Euler–Mascheroni 常數[7]。

[7] $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) \approx 0.57721$

7.3 表面張力－重力波

重力加速度為 g、表面張力為 σ、水的密度為 ρ，在不考慮黏滯力的情況下，水深為 h 的水波振盪角頻率色散關係 $\omega(k)$ 為

$$\omega = \sqrt{\left(gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3\right)\tanh kh}$$

若不考慮表面張力，則

1. 深水波

   深水波 $(kh \ll 1)$ 的相速度 c 為
   $$c = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

2. 淺水波

   淺水波 $(kh \gg 1)$ 的相速度 c 為
   $$c = \sqrt{gh}$$

7.4 不穩定性

1. 瑞利－泰勒不穩定性 (Rayleigh-Taylor instability)

   常見在雲與激波系統中。當密度較高的流體浮在密度較低的流體上，達成平衡時介面是完全平行的，但是若給予介面的輕微擾動，較重的物質因為重力作用而下沉，而輕的物質被替換而上升。
   擾動尺度的增長為 $e^{\gamma t}$，其中 γ 為

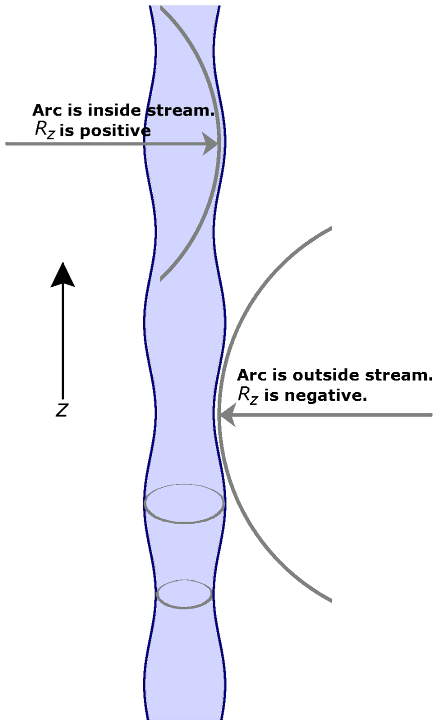
   $$\gamma = \sqrt{gk\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right)}$$

2. 開爾文－亥姆霍茲不穩定性 (Kelvin–Helmholtz instability)[8]

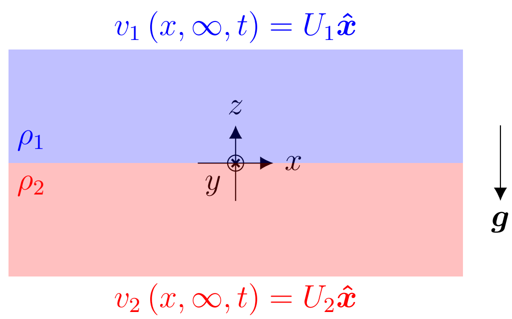
   在有剪力梯度的連續流體內部或有速度差 $u = |U_1 - U_2|$ 的兩個不同流體介面之間發生的不穩定現象。相速度 ω/k 為

   $$\frac{\omega}{k} = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} + \sqrt{-\frac{\rho_1\rho_2 u^2}{(\rho_1+\rho_2)^2} - \frac{g}{k}\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right) + \frac{\sigma k}{\rho_1 + \rho_2}}$$

[8]可參考第七屆天物盃決賽思考賽－流體的不穩定性與波。



(a) 水柱表面的微擾[11]



(b) 開爾文－亥姆霍茲不穩定性的參數

(c) 開爾文－亥姆霍茲雲[12]

圖 10. 不穩定性之示意圖

3. 布魯托－瑞利不穩定性 (Plateau-Rayleigh instability)[9]

   當流體在流動時受到擾動時，水柱半徑產生微擾 $R(z,t) = R_0 + \tilde{R}e^{i(kz-\omega t)}$ $(\tilde{R} \ll R_0)$，波谷處的壓力比波峰處的壓力大，則波谷處的液體會相對朝向波峰處流動，而造成粗的地方加粗，細的地方越細，最終水柱斷裂形成水滴。
   截面半徑為 R_0 的水柱發生不穩定性時有

$$kR_0 > 1$$

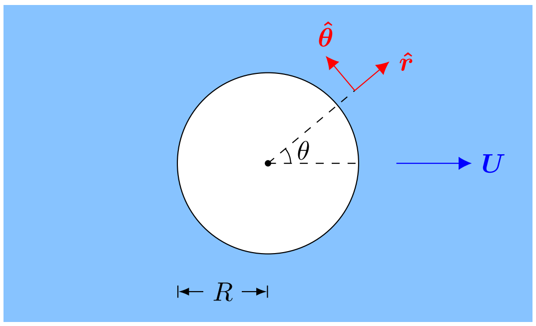
4. 瑞利－貝納德不穩定性 (Rayleigh-Bénard instability)[10]

   密度梯度與溫度梯度是形成瑞利-貝納德對流的主要原因，位於底部的液體因為受熱而密度較低，因此底部的液體會上浮。不過這些液體上升的過程中，因為旁邊液體溫度較低而經由熱傳導損失熱量使溫度逐漸降低，因此會產生液體上升並沉降的循環。

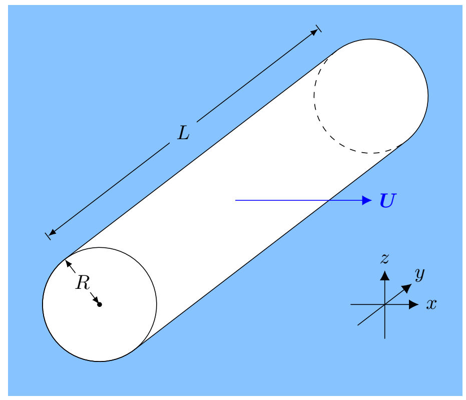
[9]可參考**物奧練習題第二冊 十二、Plateau-Rayleigh 不穩定性**。
[10]可參考**物奧練習題第十冊 十九、瑞利-貝納德對流**。
[11]https://commons.wikimedia.org/wiki/File:SurfTensWavyJet.svg
[12]https://www.reddit.com/r/CLOUDS/comments/16yjw60/what_type_of_cloud_formation_is_this/

7.5 流場與物體移動的等效質量

有個無限大空間充滿無旋度且密度為 ρ 的理想流體。我們將放置不同的物體，並賦予他們恆定的速度 $\boldsymbol{U} = U\hat{\boldsymbol{x}}$，使其能產生穩定的流場。求得流場分布後，即可求出液體流動的等效質量，其定義為液體總動能 E 等於等效質量 m 以物體相同速率 U 移動的動能，即 $E = mU^2/2$。角度 θ 定義為位置向量 $\boldsymbol{r}$ 與 $+x$ 方向的夾角。



(a) 圓球



(b) 圓柱

圖 11. 座標示意圖

1. 圓球

   半徑為 R 的圓球所形成的流場 $\boldsymbol{v}(r,\theta,\phi)$ 為

$$\boldsymbol{v} = U\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - U\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

   液體流動的等效質量 m_{sph} 為

$$m_{\text{sph}} = \frac{2}{3}\pi\rho R^3$$

2. 圓柱

   半徑為 R、長度為 L $(L \gg R)$ 的圓柱所形成的流場 $\boldsymbol{v}(r,\theta,z)$ 為

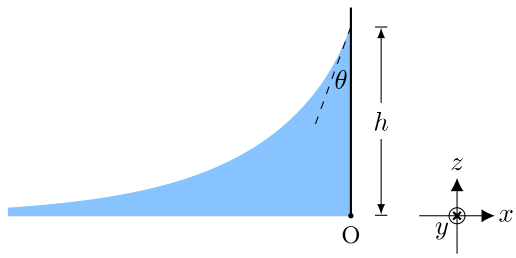
$$\boldsymbol{v} = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

   液體流動的等效質量 m_{cyl} 為

$$m_{\text{cyl}} = \pi\rho R^2 L$$

7.6 液面的上升[13]

將一豎直無限大平板部分地浸入與其有潤濕作用的液體中，兩者之間的接觸角為 θ。已知液體的密度為 ρ、表面張力係數為 σ。注意並沒有假設 $|\partial y/\partial x| \ll 1$。定義特徵長度 $L=\sqrt{2\sigma/\rho g}$，此又稱為毛細長度 (capillary length)。



可得液體沿此板上升的高度 h 為

$$h=\sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}\left(1-\sin\theta\right)}$$

定上圖中的 O 為 xy 座標的原點。液面符合的方程式為 $x\left(y\right)$，且其形式可寫為

$$x\left(y\right)=f\left(y\right)-f\left(h\right)$$

則函數 $f\left(y\right)$ 為

$$f\left(y\right)=L\left[\sqrt{2-\frac{y^2}{L^2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}L}{y}\right)\right]$$

[13]可參考第七屆天物盃初賽 Problem 28。