粒子加速器—聚頻磁鐵與自由電子雷射

501班 王兆國

3/11/2023

在進入正題之前，你必須先知道...

狹義相對論

1. 基本假設

物理定律的形式在任何參考系皆相同

2. 基本公式

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

$$E = \gamma m c^2$$

其中m為固有質量、$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$。

電磁輻射

點電荷的輻射(古典)

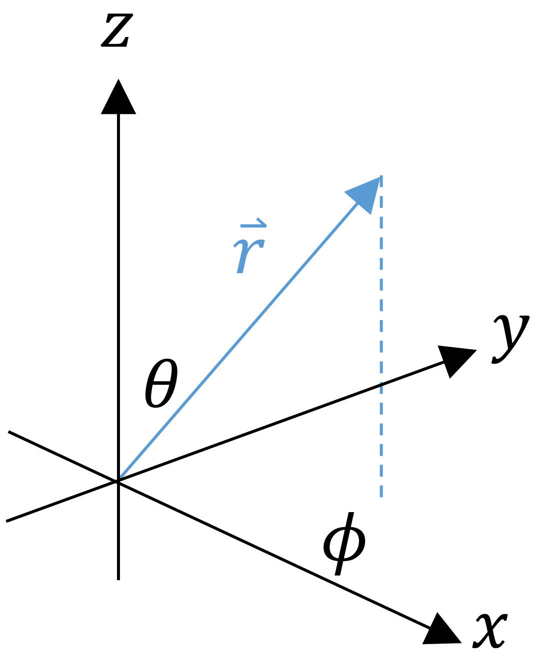
在非相對論情況($\beta \ll 1$)，輻射功率近似為Larmor Formula

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

輻射功率角分布為

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta$$

其中$\vec{a} = a\hat{\mathbf{z}}$。



點電荷的輻射(相對論)

輻射功率角分布(單位立體角的輻射功率)

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\frac{|\hat{\boldsymbol{r}}\times(\vec{u}\times\vec{a})|^2}{(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{u})^5}$$

其中$\vec{u}=c\hat{\boldsymbol{r}}-\vec{v}$。計算後可得輻射總功率為

$$\boxed{P=\frac{\mu_0 q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(a^2-\left|\frac{\vec{v}\times\vec{a}}{c}\right|^2\right)}$$

自然地給出相對論的量!

上式稱為Liénard's Generalization。

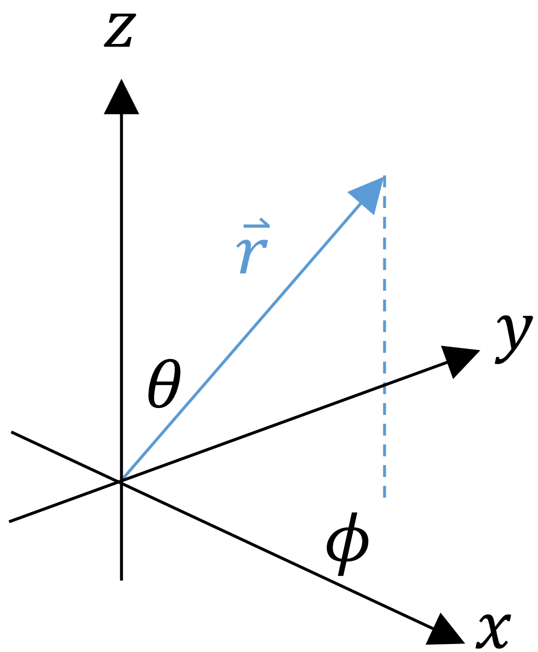
點電荷的輻射角分布(相對論)

假設$\vec{v} = v\hat{\boldsymbol{x}}$, $\vec{a} = a\hat{\mathbf{z}}$所得到的輻射角分布為

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{(1-\beta\cos\theta)^2 - (1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\phi}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

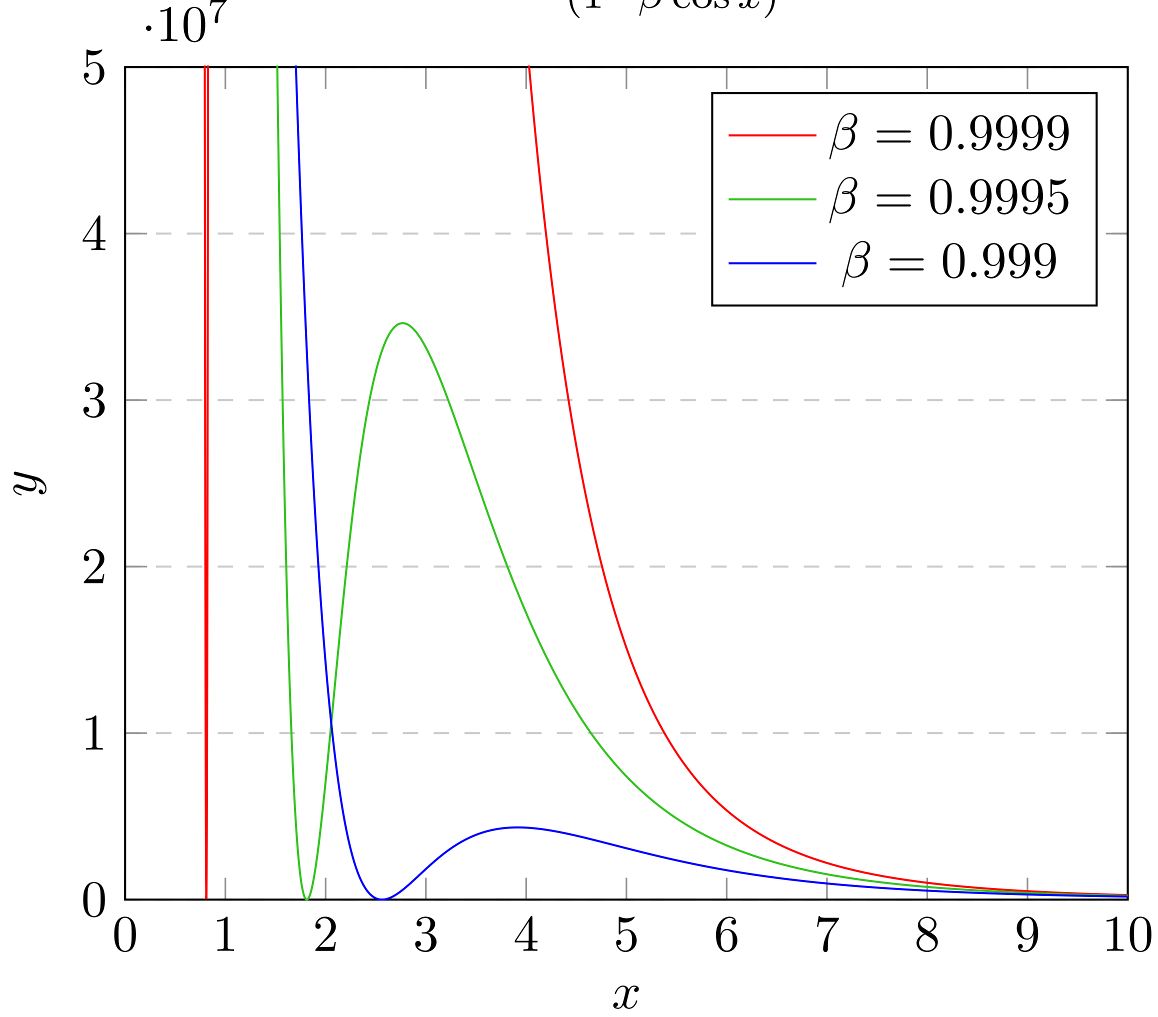
積分得到總輻射功率為

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^4}{6\pi c} a^2$$

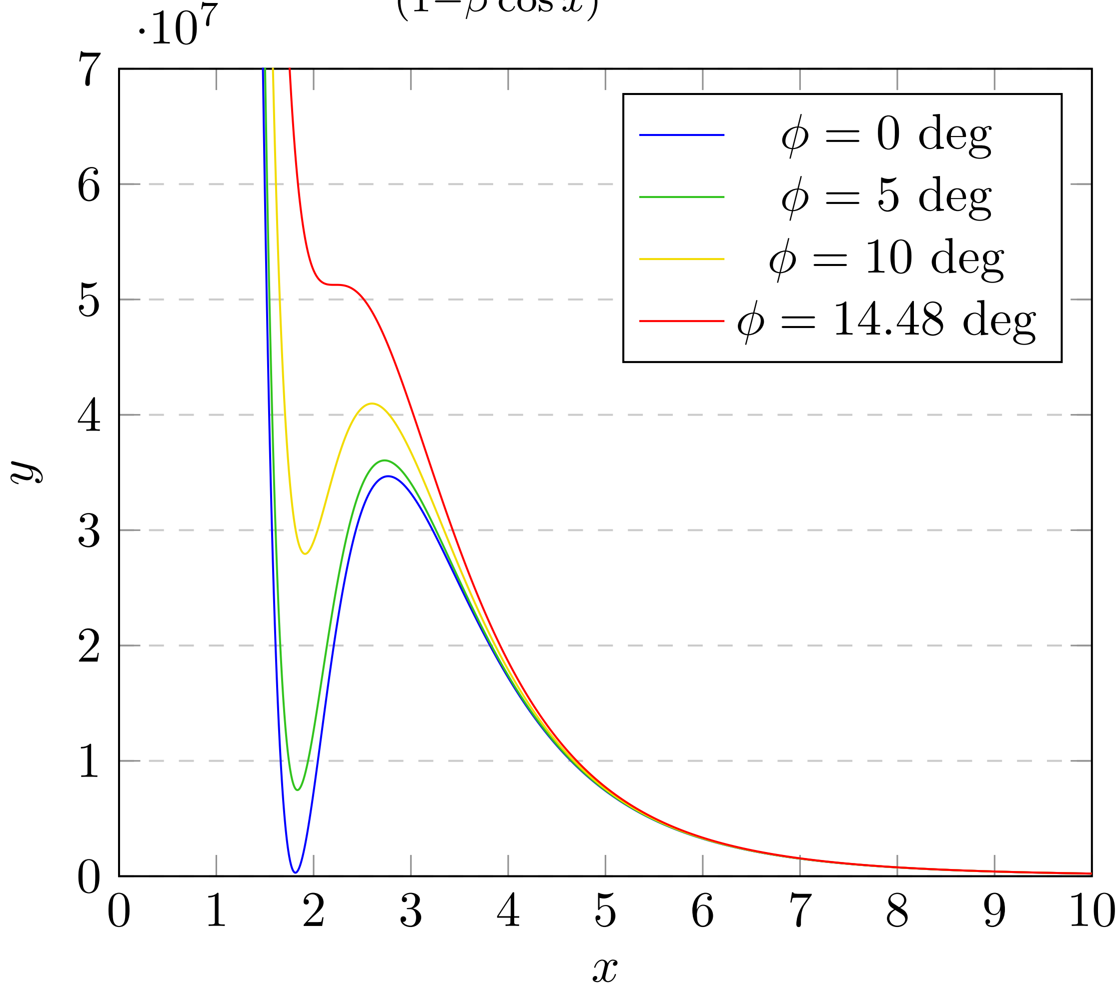


符合Liénard's Generalization。

$$y = \frac{(1-\beta\cos x)^2 - \left(1-\beta^2\right)\sin^2 x}{(1-\beta\cos x)^5}$$



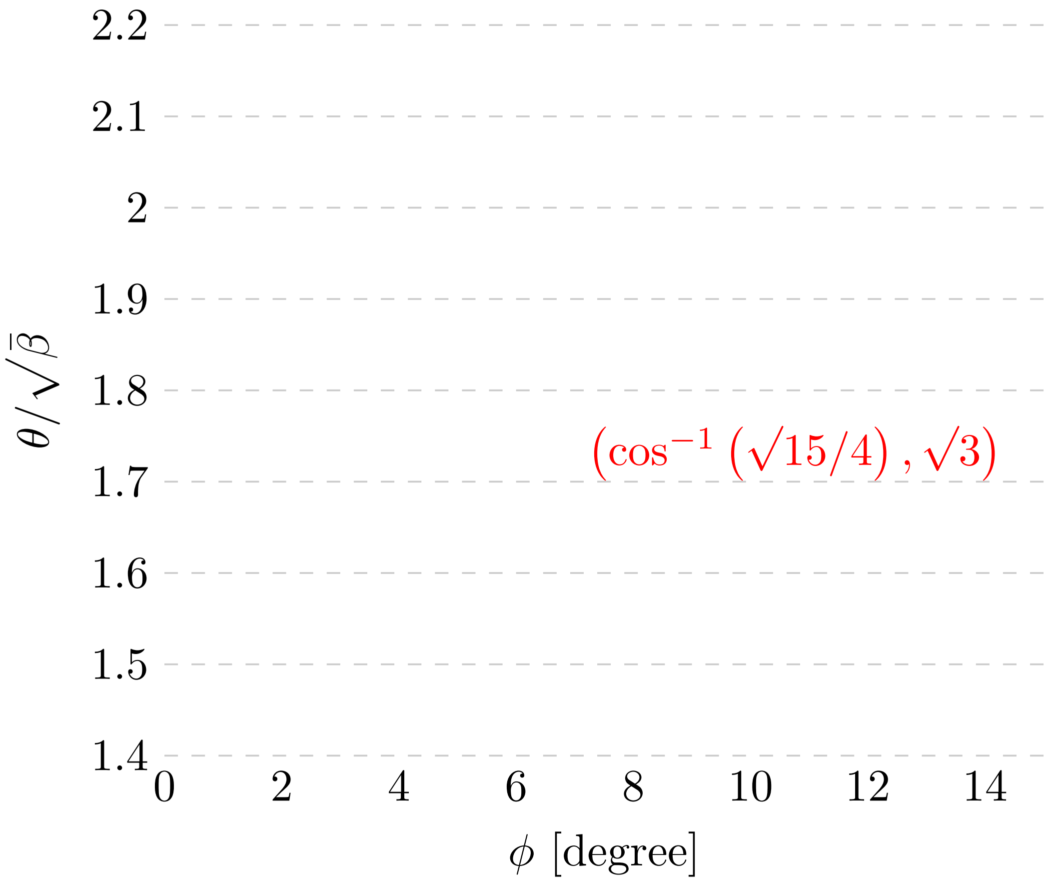
$$y = \frac{(1-\beta\cos x)^2 - \left(1-\beta^2\right)\sin^2 x\cos^2\phi}{(1-\beta\cos x)^5}, \beta = 0.9995$$



極值對應的θ為

$$\theta = \sqrt{2\left(-1+\frac{8}{3}\cos^2\phi \pm \frac{2}{3}\cos\phi\sqrt{16\cos^2\phi - 15}\right)\bar{\beta}}$$

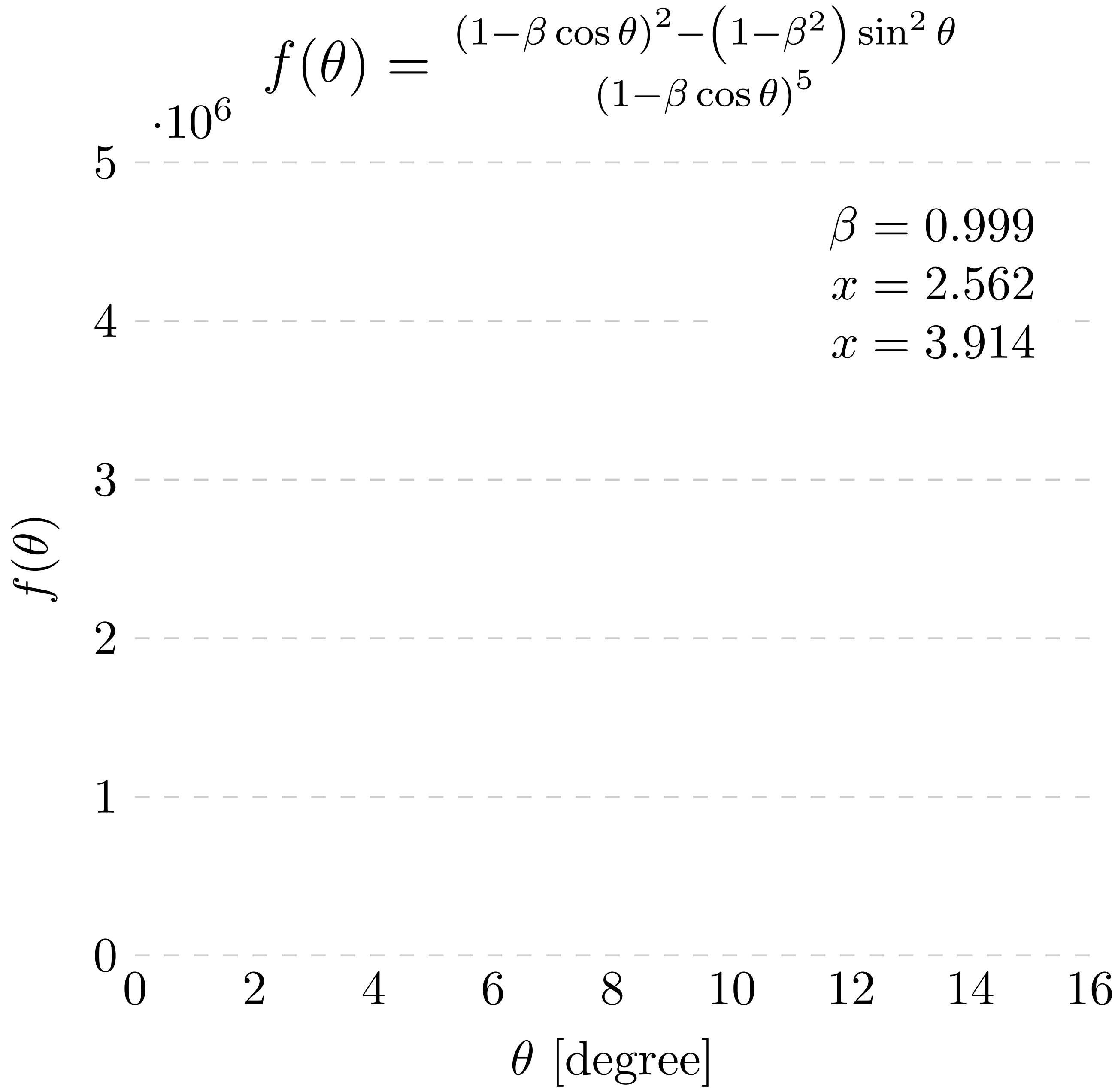
由上式可知$\phi \leq \cos^{-1}\left(\sqrt{15}/4\right) \approx 14.48^\circ$處皆會發生極值



假設$\beta = 0.999$且$\phi = 0$

兩個極值角度分別為

$$\theta = \frac{1}{\gamma}, \frac{\sqrt{7/3}}{\gamma} = 2.562^\circ, 3.914^\circ$$



電子墜落至原子核的時間估算

假設電子繞原子核可以用波耳模型做近似，波耳模型的兩條假設如下

$$n\hbar = mrv$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

將$v = n\hbar/mr$代入得到

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}\frac{n^2}{Z} = 5.292 \times 10^{-11}\frac{n^2}{Z}\ \mathrm{m}$$

$$v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\frac{Z}{n} = 2.188 \times 10^{6}\frac{Z}{n}\ \mathrm{ms^{-1}}$$

僅考慮處於氫原子基態的電子，則$n = 1$、$Z = 1$，由前面可知道$v \ll c$。因此過程可視為古典情況，使用拉莫爾公式。初始軌道半徑為

$$r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

假設過程中皆可以近似為圓周運動，則加速度可以由牛頓第二定律求得

$$a = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mr^2}$$

因此可得

$$P = \frac{\mu_0 e^2 a^2}{6\pi c} = \frac{1}{96}\left(\frac{Z}{m}\right)^2\left(\frac{e^2}{\pi c\epsilon_0}\right)^3\frac{1}{r^4}$$

由$dE/dt=-P$可得

$$-\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{96}\left(\frac{Z}{m}\right)^2\left(\frac{e^2}{\pi c\epsilon_0}\right)^3\frac{1}{r^4}$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}=-\frac{Z}{12c^3}\left(\frac{e^2}{\pi m\epsilon_0}\right)^2\frac{1}{r^4}$$

兩邊積分得到電子墜落至原子核的時間Δt為

$$\Delta t=\frac{4c^3}{Z}\left(\frac{\pi m\epsilon_0}{e^2}\right)^2 r_0^3$$

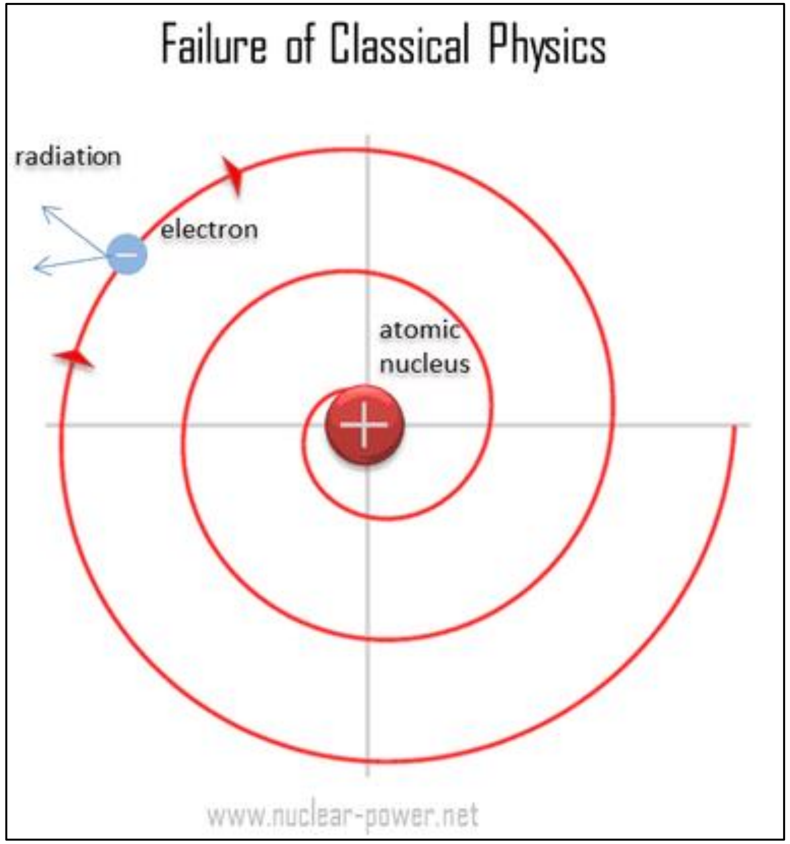
代入$n=1$、$Z=1$ 、r_0得

$$\boxed{\Delta t=4c^3\left(\frac{\pi m\epsilon_0}{e^2}\right)^2\left(\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}\right)^3\approx \mathbf{1.556\times 10^{-11}\ s}}$$

電子的平均徑向速率$\bar{v}_r$為

$$\bar{v}_r = \frac{r_0}{\Delta t} = 3.401\ \mathrm{ms}^{-1}$$

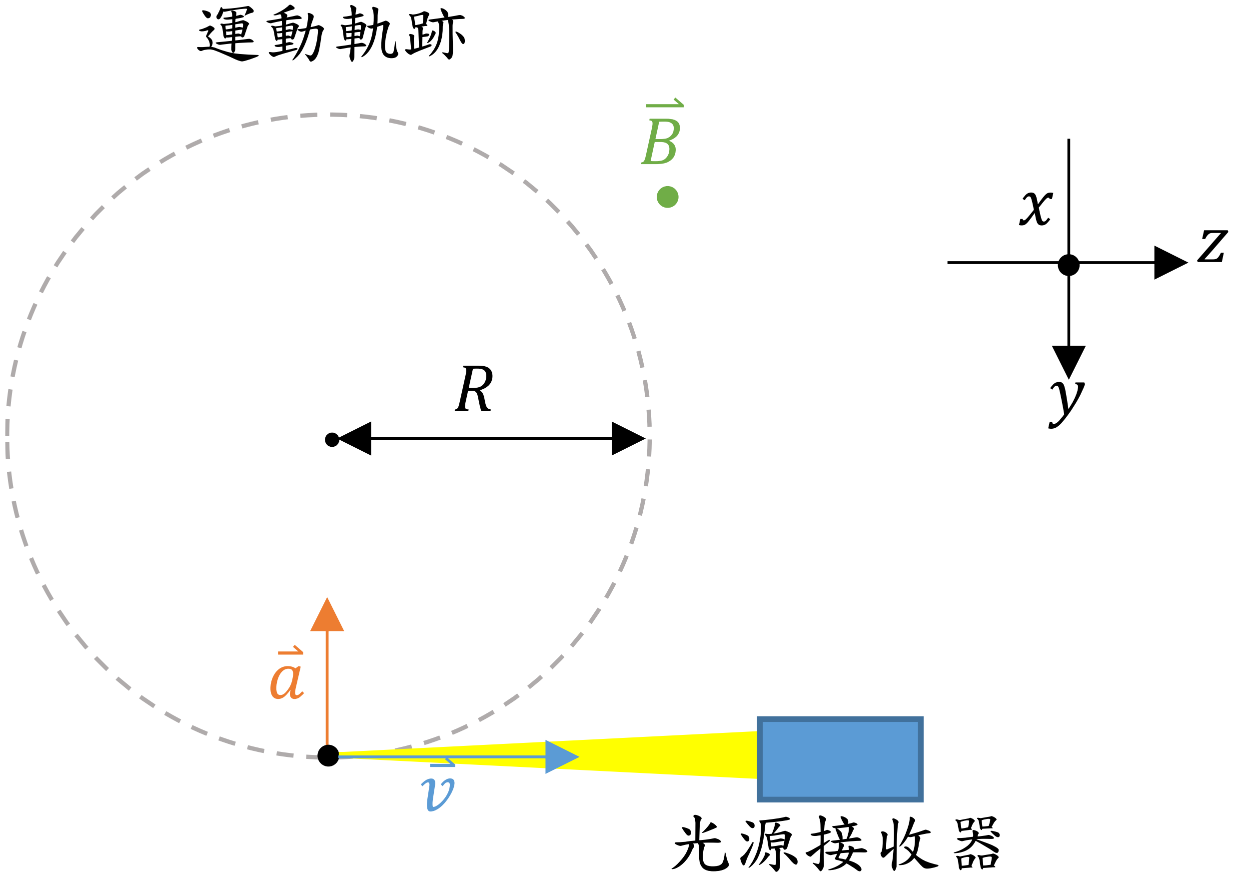
遠小於v，所以「**任何時刻皆可以近似為圓周運動**」的假設合理。



環形加速器

環形加速器

1. 到達光源接收器
2. 聚頻磁鐵
3. 發出雷射光



聚頻磁鐵

海爾貝克陣列(Halbach Array)

可形成所謂的單邊磁場，即一邊磁場變為零，使磁場集中於另一單邊。

<u>將同極集中，使磁場集中</u>

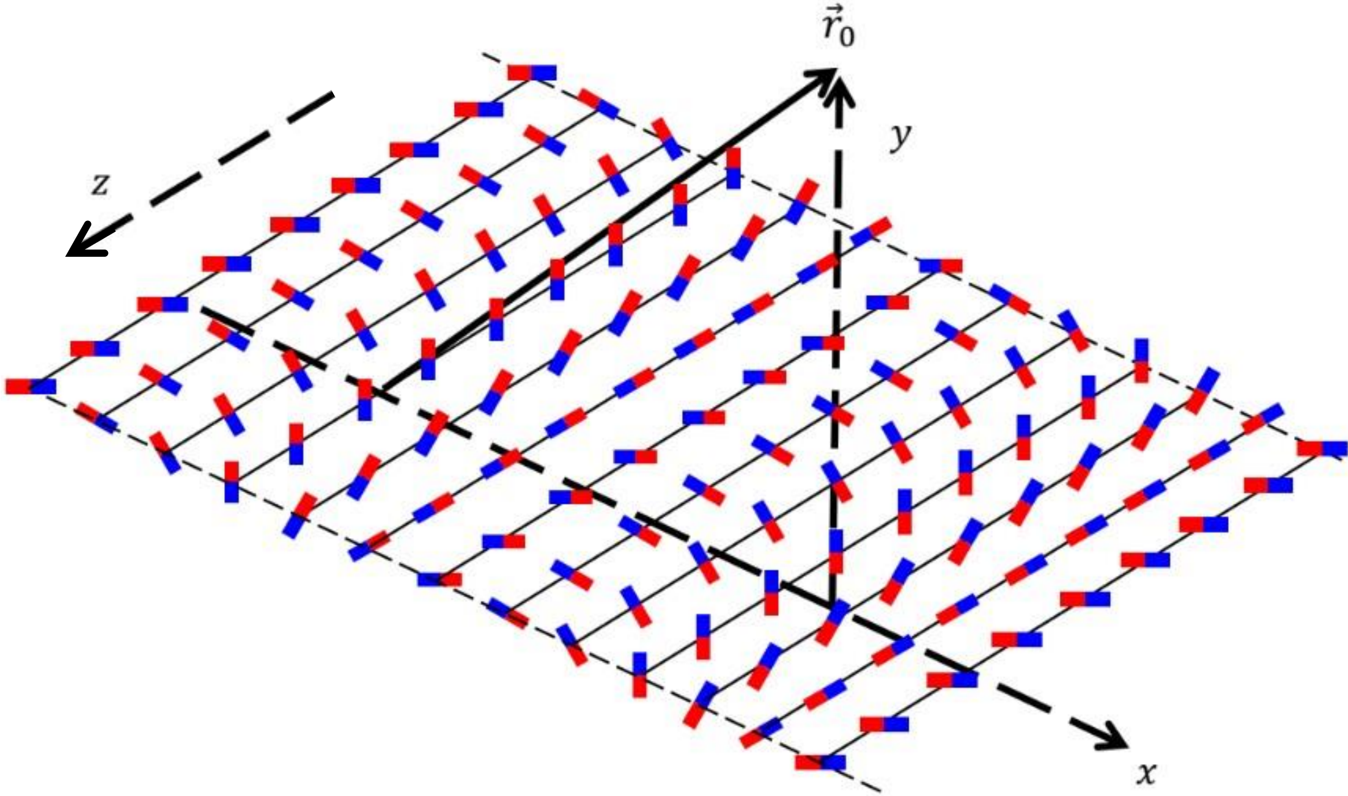
假設

考慮磁鐵連續的角度變化

磁鐵的磁矩方向向量：$\sin\beta\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\beta\,\hat{\boldsymbol{y}}$

旋轉角度：$\beta(x) = kx$，$k > 0$

磁矩面密度量值：σ



海爾貝克陣列的定量分析

磁偶極的磁場

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\vec{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \vec{m}]$$

定義位置向量$\vec{r}$為

$$\vec{r} = (x - x', y, z - z') = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

其中(x, y, z)為觀測者的位置，(x', y', z')為磁偶極的位置

$$d\vec{m} = \sigma dx' dz' (\sin kx' \,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos kx' \,\hat{\boldsymbol{y}})$$

把下代上，你會得到

$$\frac{\mu_0 \sigma}{4\pi r^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[3\frac{\bar{x}\sin kx' + \bar{y}\cos kx'}{r^2}(\bar{x}\hat{\boldsymbol{x}} + \bar{y}\hat{\boldsymbol{y}} + \bar{z}\hat{\boldsymbol{z}}) - (\sin kx' \,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos kx' \,\hat{\boldsymbol{y}})\right] dx' \, dz'$$

再經過~~一些化簡與爆肝積分~~後，你會得到……

首先先去除對z的奇函數，積分變為

$$\frac{\mu_0\sigma}{4\pi r^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[3\frac{\bar{x}\sin kx'+\bar{y}\cos kx'}{r^2}(\bar{x}\hat{\boldsymbol{x}}+\bar{y}\hat{\boldsymbol{y}})-(\sin kx'\,\hat{\boldsymbol{x}}+\cos kx'\,\hat{\boldsymbol{y}})\right]dx'\,dz'$$

利用積分公式(見**積分公式 1**)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}}dz=\frac{2}{a^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a^2+z^2)^{5/2}}dz=\frac{4}{3a^4}$$

可將上式化簡為

$$\frac{\mu_0\sigma}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[2\frac{\bar{x}\sin kx'+\bar{y}\cos kx'}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^2}(\bar{x}\hat{\boldsymbol{x}}+\bar{y}\hat{\boldsymbol{y}})-\frac{\sin kx'\,\hat{\boldsymbol{x}}+\cos kx'\,\hat{\boldsymbol{y}}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2}\right]dx'$$

將$x'=x-\bar{x}$代入再去除對$\bar{x}$的奇函數可得前項及後項變為

$$\frac{\bar{x}^2\sin kx\cos k\bar{x}\,\hat{\boldsymbol{x}}-\bar{x}\bar{y}\cos kx\sin k\bar{x}\,\hat{\boldsymbol{y}}+\bar{y}^2\cos kx\cos k\bar{x}\,\hat{\boldsymbol{y}}+\bar{x}\bar{y}\sin kx\sin k\bar{x}\,\hat{\boldsymbol{x}}}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^2}$$

$$\frac{\sin kx\cos k\bar{x}\,\hat{\boldsymbol{x}}+\cos kx\cos k\bar{x}\,\hat{\boldsymbol{y}}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2}$$

現在我們剩下四個積分要處理，其值分別為(見**積分公式 2**)

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos kx}{(x^2+y^2)^2}dx=\frac{\pi}{2|y|}e^{-k|y|}(1-k|y|)$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin kx}{(x^2+y^2)^2}dx=\frac{\pi}{2|y|}ke^{-k|y|}$$

$$I_3=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx}{(x^2+y^2)^2}dx=\frac{\pi}{2|y|^3}e^{-k|y|}(1+k|y|)$$

$$I_4=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx}{x^2+y^2}dx=\frac{\pi}{|y|}e^{-k|y|}$$

以I_1、I_2、I_3、I_4化簡(49)式

$$\frac{\mu_0\sigma}{2\pi}\{2[I_1\sin kx\,\hat{\boldsymbol{x}}-I_2\bar{y}\cos kx\,\hat{\boldsymbol{y}}+I_3\bar{y}^2\cos kx\,\hat{\boldsymbol{y}}+I_2\bar{y}\sin kx\,\hat{\boldsymbol{x}}]-I_4(\sin kx\,\hat{\boldsymbol{x}}+\cos kx\,\hat{\boldsymbol{y}})$$

$$\boxed{\vec{B}(x,y,z)=\begin{cases}0, & y>0\\ \mu_0\sigma k e^{ky}(-\sin kx\,\hat{\boldsymbol{x}}+\cos kx\,\hat{\boldsymbol{y}}), & y<0\end{cases}}$$

只留下**單邊的磁場**!

當然有比較聰明的做法……

但是需要求一個非常不友善的積分

(二)技巧地利用三角函數

定義$\vec{r}_0 = \bar{x}\hat{\boldsymbol{x}} + \bar{y}\hat{\boldsymbol{y}}$，則(49)式變為[5]

$$\frac{\mu_0\sigma}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(\hat{\boldsymbol{m}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_0)\hat{\boldsymbol{r}}_0 - \hat{\boldsymbol{m}}}{r_0^2}d\bar{x} \tag{53}$$

其中$\hat{\boldsymbol{m}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_0 = \cos(\beta+\theta)$、$\hat{\boldsymbol{m}} = \sin\beta\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\beta\,\hat{\boldsymbol{y}}$。由幾何關係易得$\bar{x} = \bar{y}\tan\theta$、$\bar{y} = r_0\cos\theta$代入上式[6]

$$\frac{\mu_0\sigma}{2\pi|\bar{y}|}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[2\cos(\beta+\theta)\,(-\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{y}}) - \sin\beta\,\hat{\boldsymbol{x}} - \cos\beta\,\hat{\boldsymbol{y}}]\,d\theta \tag{54}$$

根據三角和差公式

$$2\cos(\beta+\theta)\sin\theta + \sin\beta = \cos(\beta+\theta)\sin\theta + \sin(\beta+\theta)\cos\theta = \sin(\beta+2\theta)$$

$$2\cos(\beta+\theta)\cos\theta - \cos\beta = \cos(\beta+\theta)\cos\theta - \sin(\beta+\theta)\sin\theta = \cos(\beta+2\theta)$$

代入(54)式

$$\frac{\mu_0\sigma}{2\pi|\bar{y}|}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[-\sin(\beta+2\theta)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos(\beta+2\theta)\,\hat{\boldsymbol{y}}]\,d\theta \tag{55}$$

注意$\beta = kx' = k(x-\bar{x}) = kx + k\bar{y}\tan\theta$，同上$y' = 0$，$y = \bar{y}$，以下皆以$y$表示

$$\frac{\mu_0\sigma}{2\pi|y|}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[-\sin(kx + ky\tan\theta + 2\theta)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos(kx + ky\tan\theta + 2\theta)\,\hat{\boldsymbol{y}}]\,d\theta \tag{56}$$

因為$\sin(ky\tan\theta + 2\theta)$為對$\theta$的奇函數，所以在積分時可以忽略，上式化簡為

$$\frac{\mu_0\sigma}{2\pi|y|}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[-\sin kx\cos(ky\tan\theta + 2\theta)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos kx\cos(ky\tan\theta + 2\theta)\,\hat{\boldsymbol{y}}]\,d\theta$$

積分結果為(見**<u>積分公式 3</u>**)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(ky\tan\theta + 2\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0, & y > 0 \\ -2\pi k y e^{ky}, & y < 0 \end{cases}$$

所以海爾貝克陣列產生的磁場為

$$\boxed{\vec{B}(x,y,z) = \begin{cases} 0, & y > 0 \\ \mu_0\sigma k e^{ky}(-\sin kx\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos kx\,\hat{\boldsymbol{y}}), & y < 0 \end{cases}} \tag{57}$$

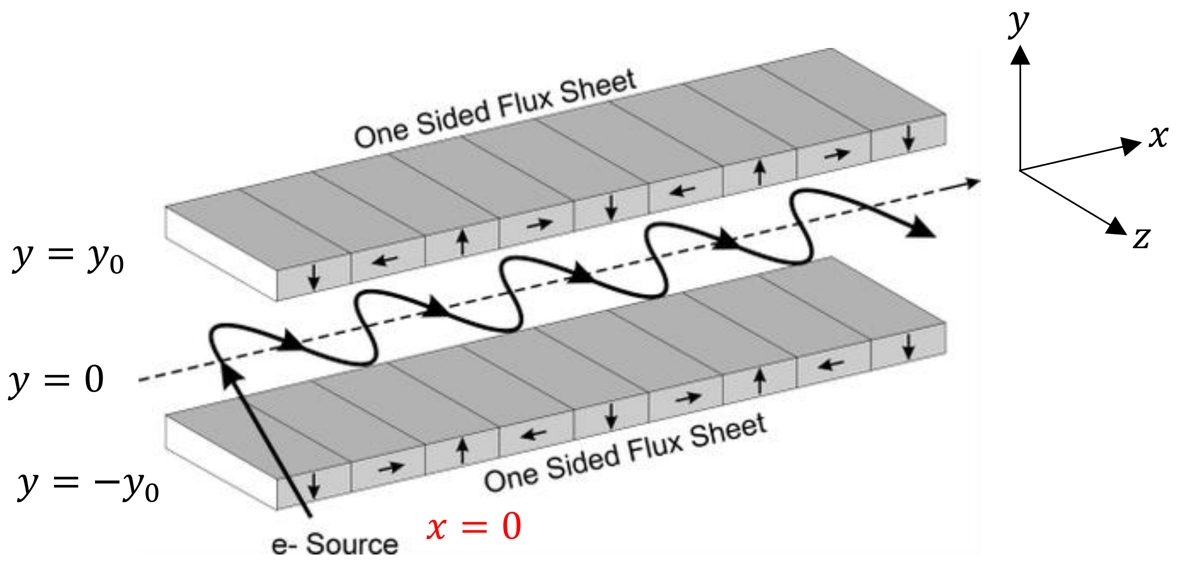
與直角坐標的結果(52)式相同。

可使用兩個反向的陣列達到單方向的強磁場!

$\vec{B}_1$為$y = y_0$上的陣列所產生的磁場，$\vec{B}_2$對應到$y = -y_0$。其旋轉角可寫為$\beta_1(x) = kx$, $\beta_2(x) = -kx$

$$\vec{B}_1(x,y,z) = \begin{cases} 0, & y > y_0 \\ \mu_0 \sigma k e^{k(y-y_0)}(-\sin kx\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos kx\,\hat{\boldsymbol{y}}), & y < y_0 \end{cases}$$

$$\vec{B}_2(x,y,z) = \begin{cases} \mu_0 \sigma k e^{-k(y+y_0)}(\sin kx\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos kx\,\hat{\boldsymbol{y}}), & y > -y_0 \\ 0, & y < -y_0 \end{cases}$$

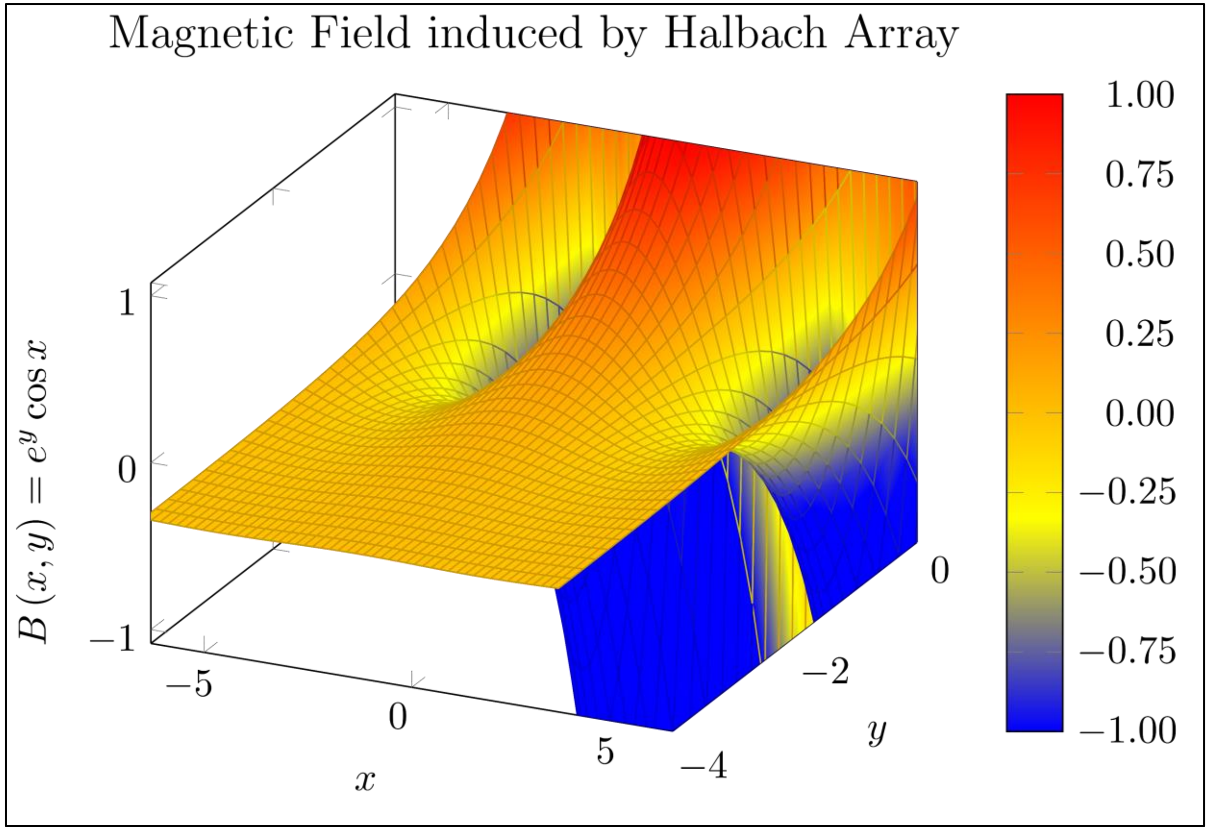


總磁場$\vec{B}_{\text{tot}}(x,y,z)$為

$$\vec{B}_{\text{tot}}(x,y,z) = 2\mu_0\sigma k e^{-ky_0}(-\sinh ky \sin kx\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cosh ky \cos kx\,\hat{\boldsymbol{y}})$$

$y=0$處的總磁場$\vec{B}_{\text{tot}}(x,0,z)$為

$$\vec{B}_{\text{tot}}(x,0,z) = 2\mu_0\sigma k e^{-ky_0}\cos kx\,\hat{\boldsymbol{y}}$$



自由電子雷射

自由電子的運動模式

牛頓第二定律

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=m\frac{d(\gamma\vec{v})}{dt}=\gamma^3 m\left(\frac{1}{\gamma^2}\vec{a}+\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v}\right)$$

有電場$\vec{E}$與磁場$\vec{B}$的作用，則

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

先算$\vec{F}\cdot\vec{v}$

$$\vec{F}\cdot\vec{v}=\gamma^3 m\left(\frac{1}{\gamma^2}\vec{v}\cdot\vec{a}+\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}v^2\right)=q\vec{v}\cdot\vec{E}$$

整理可得

$$\vec{v}\cdot\vec{a}=\frac{q}{\gamma^3 m}\vec{v}\cdot\vec{E}$$

$\vec{a}$為

$$\vec{a} = \frac{q}{\gamma m}\left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - (\vec{v} \cdot \vec{E})\frac{\vec{v}}{c^2}\right]$$

在電子雷射中，我們通常使用磁場來控制電子的運動，因此

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{\gamma m}\vec{v} \times \vec{B}$$

多出$1/\gamma$倍!

注意到在旋轉坐標系下有

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v}$$

假設磁場為

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_r(\vec{r}) + \vec{B}_v(\vec{r})$$

$\vec{B}_r(\vec{r})$為使粒子繞加速器旋轉的磁場、$\vec{B}_v(\vec{r})$為使粒子振動的磁場。

比對可得

$$\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\frac{e}{\gamma m}\vec{v} \times \vec{B}_r(\vec{r})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{\gamma m}\vec{v} \times \vec{B}_v(\vec{r})$$

為使粒子的旋轉角速度為定值，$\vec{B}_r$也應為定值，$\vec{B}_r = B_r\hat{\boldsymbol{x}}$，所以有

$$\boxed{\vec{\Omega} = \frac{eB_r}{\gamma m}\hat{\boldsymbol{x}}}$$

考慮最簡單的情況，即磁場隨著z座標週期改變

$$\vec{B}(z) = B_0 \cos kz\, \hat{\boldsymbol{x}}$$

將$\vec{v} = v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}$代入，得到微分方程式

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \qquad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{eB_0}{\gamma m}v_z \cos kz\,, \qquad \frac{dv_z}{dt} = \frac{eB_0}{\gamma m}v_y \cos kz$$

因為磁場不做功，故能量E為定值。$E = \gamma mc^2$，故γ為常數，之後令$\gamma(t) = \gamma$。假設電子的初始速度為$\vec{v}_0 = v_0\hat{\boldsymbol{z}}$，因此可以知道

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_0^2$$

定義無因次常數G為

$$G = \frac{eB_0}{mkc}$$

得到微分方程式變為

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{ckG}{\gamma} v_z \cos kz \\ \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{ckG}{\gamma} v_y \cos kz \end{cases}$$

注意到

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{ckG}{\gamma} v_z \cos kz = -\frac{ckG}{\gamma}\frac{dz}{dt}\cos kz$$

$$dv_y = -\frac{ckG}{\gamma}\cos kz\, dz$$

積分得

$$v_y = -\frac{cG}{\gamma}\sin kz$$

上式代回得

$$\frac{dv_z}{dt} = -\left(\frac{cG}{\gamma}\right)^2 k \sin kz \cos kz$$

兩邊同乘dz

$$v_z dv_z = -\left(\frac{cG}{\gamma}\right)^2 k \sin kz \cos kz\, dz$$

積分得

$$v_z = \sqrt{v_0^2 - \left(\frac{cG}{\gamma}\right)^2 \sin^2 kz}$$

$v_0^2 = c^2\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)$。所以

$$\boxed{\vec{\beta} = -\frac{G}{\gamma}\sin kz\,\hat{\boldsymbol{y}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}(1 + G^2 \sin^2 kz)}\,\hat{\boldsymbol{z}}}$$

在v_0接近光速的情況下($\gamma \gg 1$，且$\gamma/G \gg 1$)對β_z做泰勒展開

$$\beta_z = 1 - \frac{1}{2\gamma^2}(1 + G^2 \sin^2 kz)$$

β_z對時間的平均值$\bar{\beta}_z$為

$$\bar{\beta}_z = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{G^2}{4\gamma^2}$$

電子在y方向上來回振盪。利用波長的關係可推得電磁波共振時的條件為

$$cT - \lambda\cos\theta = n\lambda_0$$

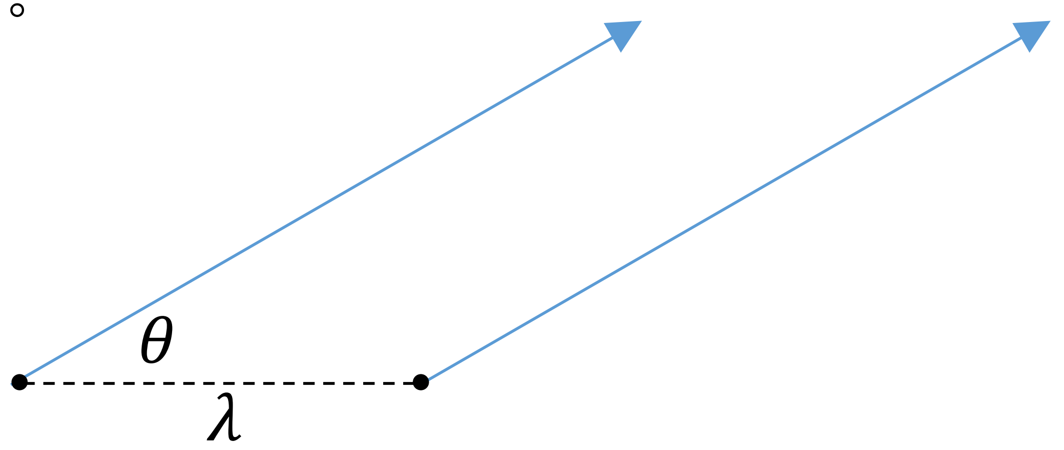
λ_0為電磁波波長，n為正整數。電子振盪週期$T = \lambda/\bar{\beta}_z c$。代入得

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{\lambda}{n}\left(\frac{1}{\bar{\beta}_z} - \cos\theta\right)}$$

注意在$\theta = 0$時

$$\lambda_0 \approx \frac{\lambda}{2n\gamma^2}\left(1 + \frac{G^2}{2}\right)$$

此時的共振頻率為最大，能產生能量最強的光。



震盪過程中的輻射

注意到震盪時的**加速度近似與速度方向垂直**，因此可以類比先前的結果。

此情況下的加速度為

$$\vec{a}=-\frac{ecB_0\cos kz}{\gamma m}\left(-\frac{G}{\gamma}\sin kz\,\hat{\boldsymbol{y}}+\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}\left(1+G^2\sin^2 kz\right)}\hat{\boldsymbol{z}}\right)\times\hat{\boldsymbol{x}}$$

$$\vec{a}\approx-\frac{ecB_0\cos kz}{\gamma m}\left[1-\frac{1}{2\gamma^2}\left(1+G^2\sin^2 kz\right)\right]\hat{\boldsymbol{y}}$$

當最大值發生時

$$\vec{a}\approx\frac{ecB_0}{\gamma m}\hat{\boldsymbol{y}}$$

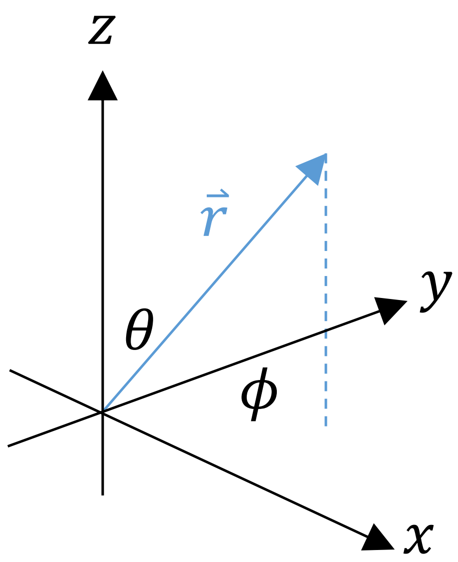
$$\vec{a} \approx \frac{ecB_0}{\gamma m}\hat{\boldsymbol{y}}$$

此時的$\vec{\beta}$為

$$\vec{\beta} = \frac{v_0}{c}\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{eB_rR}{\gamma mc}\hat{\boldsymbol{z}}$$

R即為迴旋半徑。所以輻射功率角分布為

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4B_0^2}{16\pi^2\epsilon_0 c\gamma^2m^2}\frac{(1-\beta\cos\theta)^2-(1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\phi}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$



報告書

感謝大家聆聽