不同坐標系中的應力張量
與納維爾－斯托克斯方程式

王兆國 William Wang
WilliamWang941225@gmail.com

March 12, 2024

目錄

1 應力張量 **1**
- 1.1 一般形式 1
- 1.2 梯度與尺度因子 2
- 1.3 直角座標 3
- 1.4 柱座標 3
- 1.5 球座標 4
- 1.6 廣義座標 5

2 納維爾－斯托克斯方程式 **6**
- 2.1 一般形式 6
- 2.2 不同座標系中的形式 7
- 2.3 直角座標 7
- 2.4 柱座標 8
- 2.5 球座標 10

3 習題 **14**

1 應力張量

1.1 一般形式

顯然地，在不同座標系計算相同分量的應力，在經由變換後，應當給出相同的結果。所以應力不依賴於參考系的選擇，也就是在任何參考系的形式皆相同。具有此種美好轉換性質的量即稱為張量 (tensor)，因此應力也可稱為應力張量 (stress tensor)。
在流體中顯然有壓力 p 的作用，且壓力可寫成張量形式 $-p\mathbf{I}$，$\mathbf{I}$ 為單位張量，也就是對角項皆為 1、其餘項皆為 0 的張量。在流體力學中，應力張量扣除掉壓力張量剩餘的張量即稱為黏滯力張量，令其為 $\boldsymbol{\tau}$。因此應力張量 $\boldsymbol{\sigma}$ 可寫為

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

或者是使用指標的方式表達

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

在往後的章節中考慮流體皆為牛頓流體，而牛頓流體的定義為

黏滯力張量 $\boldsymbol{\tau}$ 只為 $\nabla \boldsymbol{v}$ 的線性函數，也就是 $\boldsymbol{\tau}(\nabla \boldsymbol{v})$

這不僅是實驗得到的近似，其中線性函數的假設也是因為非線性項是我們不想處理的。易知旋轉不變性符合張量「不依賴於參考系的選擇」的性質。而我們可以從旋轉不變性得知，此張量必須是跟 $\nabla \boldsymbol{v}$ 中的對稱矩陣有關。將 $\nabla \boldsymbol{v}$ 寫為一個對稱矩陣與非對稱矩陣，即

$$\nabla \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\left[\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T\right] + \frac{1}{2}\left[\nabla \boldsymbol{v} - (\nabla \boldsymbol{v})^T\right] \equiv \mathbf{E} + \mathbf{D}$$

其中 $\mathbf{E}$ 為對稱矩陣、$\mathbf{D}$ 為反對稱矩陣。其中各項元素為

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

而因為 $\boldsymbol{\tau}$ 只與 $\mathbf{E}$ 有關的特性，因此 $\mathbf{E}$ 又稱為應變時變率張量 (strain-rate tensor)。
$\boldsymbol{\tau}$ 最簡單的形式為

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{E}) = 2\mu\mathbf{E} + \lambda \mathrm{Tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} = \mu\left[\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T\right] + \lambda(\nabla \cdot \boldsymbol{v})\mathbf{I} \tag{1}$$

其中常數 μ 與 λ 稱為拉梅係數 (Lamé parameters)。若在流體力學中，μ 稱為動黏滯係數 (dynamic viscosity) 或絕對黏滯係數 (absolute viscosity)、λ 稱為第二黏滯係數 (second viscosity)，因此牛頓流體的黏滯力可以以兩個常數係數表達。至此我們得到了黏滯力張量的形式，而其分量 τ_{ij} 即代表在**法向量為 j 方向的單位面積所受到往 i 方向的力**。利用

Kronecker delta 符號 δ_{ij} 簡化可得

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij}\sum_k e_{kk} \tag{2}$$

我們易知每單位體積在 i 方向上所受到的黏滯力為

$$f_i = \sum_j \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}$$

或者是利用張量的內積來表示

$$\boldsymbol{f} = \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} = \sum_j \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}\hat{\mathbf{e}}_i$$

其中 i 方向的分量為

$$\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)$$

化簡得

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{\tau} = \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \left(\mu+\lambda\right)\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)} \tag{3}$$

事實上，這邊的推導過程與彈性力學中的應變張量是一模一樣的，因為應變張量同樣要符合旋轉不變性與各項同性。只是在彈性力學中，應力張量為位移 $\boldsymbol{u}$ 的函數 $\boldsymbol{\tau}\left(\nabla\boldsymbol{u}\right)$，因此將 $\boldsymbol{u}$ 改成 $\boldsymbol{v}$，且 μ 與 λ 同樣亦稱為拉梅係數，只是在彈性力學此兩者經常被其他的彈性模量代替，例如楊氏模量 (Young's modulus) E 與泊松比 (Poisson's ratio) σ。

1.2 梯度與尺度因子

首先，必須瞭解向量的梯度要如何運算。根據梯度的定義，對於向量 $\boldsymbol{v}$ 在 i 方向上的梯度為

$$\left(\nabla\boldsymbol{v}\right)_i = \lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{r}+\Delta x_i\hat{\mathbf{e}}_i\left(\boldsymbol{r}\right)\right) - \boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{r}\right)}{\Delta x_i} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_i}$$

你會發現他是二階張量。我們把沿著 i 方向的梯度之 j 方向的分量為 $\left(\nabla\boldsymbol{v}\right)_{ij}$。所以有

$$\left(\nabla\boldsymbol{v}\right)_{ij} = \sum_k \frac{1}{h_i}\frac{\partial\left(v_k\hat{\mathbf{e}}_k\right)}{\partial x_i}\cdot\hat{\mathbf{e}}_j \tag{4}$$

在直角座標中是非常簡單的，因為 $\hat{\mathbf{e}}_i\left(\boldsymbol{r}\right) = \hat{\mathbf{e}}_i$。但是必須小心，在柱座標中的單位向量 $\hat{\mathbf{e}}_i\left(\boldsymbol{r}\right) = \hat{\mathbf{e}}_i\left(\theta\right)$，而球座標中的單位向量 $\hat{\mathbf{e}}_i\left(\boldsymbol{r}\right) = \hat{\mathbf{e}}_i\left(\theta,\phi\right)$。這也是為甚麼不同座標系中張量

形式「 看起來 」不同的原因。
在(4)式中的 h_i 為長度因子，其定義為

$$h_i = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right| \tag{5}$$

經由一些計算後，可得柱座標的長度因子為

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_z = 1 \tag{6}$$

球座標的長度因子為

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r\sin\theta \tag{7}$$

1.3 直角座標

因為 $\partial \hat{\mathbf{e}}_i / \partial x_j = 0$，所以只需對 v_i 微分即可。顯然有

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

其中 $i = x, y, z$。

1.4 柱座標

首先，單位向量的梯度為

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial z} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_z}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_z}{\partial \theta} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{e}}_r$$

接下來我們計算較複雜的分量 $e_{r\theta}$。先求 $(\nabla \boldsymbol{v})_{r\theta}$ 與 $(\nabla \boldsymbol{v})_{\theta r}$

$$(\nabla \boldsymbol{v})_{r\theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(v_r \hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + v_z \hat{\mathbf{e}}_z\right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial r}$$

$$(\nabla \boldsymbol{v})_{\theta r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(v_r \hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + v_z \hat{\mathbf{e}}_z\right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}$$

因此

$$2e_{r\theta} = 2e_{\theta r} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)$$

注意到除了原本就有的項

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$

你必須還要加上因為 $\hat{\mathbf{e}}_i(\boldsymbol{r})$ 隨位置改變的微分項。而在張量 $e_{r\theta}$ 中你只需注意單位向量對 θ 的梯度所對應的 $\hat{\mathbf{e}}_r$ 分量。重複上述步驟，可得各分量為

$$
\begin{aligned}
e_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \\
e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \\
e_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
2e_{r\theta} = 2e_{\theta r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) \\
2e_{\theta z} = 2e_{z\theta} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\
2e_{zr} = 2e_{rz} &= \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

1.5 球座標

首先，單位向量的梯度為

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial r} = 0 \\
\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \phi} = \sin\theta \hat{\mathbf{e}}_\phi \\
\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{e}}_r, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \phi} = \cos\theta \hat{\mathbf{e}}_\phi \\
\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \phi} = -\sin\theta \hat{\mathbf{e}}_r - \cos\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta
\end{gathered}
$$

接下來我們計算較複雜的兩個分量 $e_{\phi\phi}$ 與 $e_{\theta\phi}$。計算 $(\nabla \boldsymbol{v})_{\phi\phi}$

$$
(\nabla \boldsymbol{v})_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\left(v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta + \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)
$$

$$
e_{\phi\phi} = \frac{v_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r}v_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}
$$

計算 $(\nabla \boldsymbol{v})_{\theta\phi}$ 與 $(\nabla \boldsymbol{v})_{\phi\theta}$

$$
(\nabla \boldsymbol{v})_{\theta\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}
$$

$$(\nabla \boldsymbol{v})_{\phi\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi\right)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} - v_\phi\cos\theta\right)$$

$$2e_{\theta\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} - v_\phi\cos\theta\right) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)$$

重複上述步驟，可得各分量為

$$e_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}$$

$$e_{\phi\phi} = \frac{v_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r}v_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

$$2e_{r\theta} = 2e_{\theta r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)$$

$$2e_{\theta\phi} = 2e_{\phi\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)$$

$$2e_{\phi r} = 2e_{r\phi} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}$$

以上三個座標系可以處理大部分的流體問題。

1.6 廣義座標

以下直接給出廣義座標 q_i 的黏滯力張量公式。

$$e_{ii} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial v_i}{\partial q_i} + \sum_{j\neq i}\frac{v_j}{h_i h_j}\frac{\partial h_i}{\partial q_j}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{h_j}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v_j}{h_j}\right) + \frac{h_i}{h_j}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{v_i}{h_i}\right)\right]$$

你可以驗證以上三個座標系皆會符合。取 $e_{\phi\phi}$ 為例

$$e_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{v_\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(r\sin\theta\right)}{\partial r} = \frac{v_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r}v_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

2 納維爾－斯托克斯方程式

2.1 一般形式

已知流體的質量密度為 ρ，流體所受的壓力為為 P、流體所受到的加速度場為 $\boldsymbol{g}$。考慮流體為牛頓流體，動黏滯係數 (dynamic viscosity) 為 μ、第二黏滯係數 (second viscosity) 為 λ。

首先，根據簡單的力分析與(3)式，易得每單位體積的流體所受到的總力 $\boldsymbol{f}$ 為

$$\boldsymbol{f} = -\nabla P + \rho \boldsymbol{g} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \tag{9}$$

我們將運用(9)式推導出納維爾－斯托克斯方程式，你會發現它就是牛頓第二定律的變形。

取液體的微小質元，其所受的力為[1]

$$d\boldsymbol{F} = (\rho dxdydz) \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left[-\nabla P + \rho \boldsymbol{g} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v})\right] dxdydz$$

化簡可得

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla P + \rho \boldsymbol{g} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \tag{10}$$

由全微分可知

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} \tag{11}$$

上式又稱為對流加速度 (convective acceleration)。

將(10)式代回(11)式得納維爾－斯托克斯方程式 (Navier-Stokes equation) 為

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} \right) = -\nabla P + \rho \boldsymbol{g} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \tag{12}$$

在液體不可壓縮的條件下，納維爾－斯托克斯方程式變為

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} \right) = -\nabla P + \rho \boldsymbol{g} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{13}$$

為二階非齊次非線性方程式，也是因為非齊次非線性的緣故，造成此方程式無比難解。至此為止，我們的推論僅止於直角坐標系。雖說(12)是一般形式，但是在其他正交座標中，並不能直接將各速度分量替換成其他正交座標中的速度分量，而認為方程式是正確無誤的。問題出在於：我們推導出的一般形式指的是算符的一般性，也就是在其他正交座標中，你同樣必須使用該算符做計算，但是重點在於**不同正交座標系的算符有不同形式**。還

[1] 因壓力造成的壓力梯度 ∇P 在直角坐標下看似顯然，但如果是柱座標或是球座標呢? 見**壓力與表面張力 Pressure and Surface Tension**。

有**正交座標系的單位向量會隨著位置改變**，而直角坐標系即為特例。
下一部分我們將介紹三個常見座標系中的納維爾－斯托克斯方程式。

2.2 不同座標系中的形式

接下來我們將推導直角座標、柱座標與球座標的納維爾－斯托克斯方程式。在此為了簡化，考慮液體有**不可壓縮性**，因此有 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$。首先我們必須了解廣義座標中不同梯度算符的形式，而以下僅給出需要用到的物理量之算符。
我們計記長度因子為 h_i、長度因子之乘積為 H。

$$H = \prod_i h_i$$

散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ 為

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \sum_i \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{H}{h_i} v_i \right)$$

拉普拉斯算子 $\nabla^2 \boldsymbol{v}$ 為

$$\nabla^2 \boldsymbol{v} = \sum_i \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{H}{h_i^2} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} \right)$$

對流加速度項 $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v}$ 為

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} = \sum_{i,j} \frac{v_i}{h_i} \frac{\partial (v_j \hat{\mathbf{e}}_j)}{\partial x_i}$$

每單位體積在 i 方向上所受到的黏滯力 $\boldsymbol{f}$ 為

$$\boldsymbol{f} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum_{i,j} \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{H}{h_j} \tau_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \right)$$

接下來，我們試著將三種座標系中的方程式盡量以**拉普拉斯算子**的形式呈現。

2.3 直角座標

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \\
\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \\
\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z
\end{aligned}$$

2.4 柱座標

散度與拉普拉斯算子為

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{14}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2}$$

(A) 對流加速度項

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = {} & v_r\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\hat{\boldsymbol{z}}\right) + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_z}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{z}}\right) \\ & + v_z\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right) + \frac{v_r v_\theta}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{v_\theta^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}}\end{aligned}$$

各分量為

$$[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}]_r = v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,v_r - \frac{v_\theta^2}{r} \tag{15}$$

$$[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}]_\theta = v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} \tag{16}$$

$$[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}]_z = v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,v_z \tag{17}$$

(B) 黏滯力 $\boldsymbol{r}$ 分量

$$f_r\left(r,\theta,z\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tau_{rr}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \equiv \mu g_r\left(r,\theta,z\right)$$

$$g_r = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) - \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right)$$

將(14)式做對 r 的偏微分並與上式相減可得

$$g_r = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_r\right)\right]$$

注意到

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_r\right)\right] = \frac{v_r}{r^2}$$

所以可得

$$g_r = \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \tag{18}$$

(C) 黏滯力 θ 分量

$$f_\theta(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{\theta r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} \equiv \mu g_\theta(r,\theta,z)$$

注意到

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{\theta r}) + \frac{\tau_{r\theta}}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{\theta r}\right)$$

$$g_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)$$

將(14)式做對 θ 的偏微分並與上式相減可得

$$g_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}$$

其中

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] = -\frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)$$

所以可得

$$g_\theta = \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \tag{19}$$

(D) 黏滯力 z 分量

$$f_z(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{zr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \equiv \mu g_z(r,\theta,z)$$

$$g_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) + 2\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

將(14)式做對 z 的偏微分並與上式相減可得

$$g_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = \nabla^2 v_z \tag{20}$$

(E) 結論

利用(15)(16)(17)(18)(19)(20)式可得

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v_r - \frac{v_\theta^2}{r}\right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) \tag{21}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu\left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right) \tag{22}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v_z\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\nabla^2 v_z \tag{23}$$

2.5 球座標

散度與拉普拉斯算子為

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}=0 \tag{24}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{v}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial\phi^2}$$

(A) 對流加速度項

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}=&\,v_r\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{\partial v_\phi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)+\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\\&+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}}+\left(\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}\\&+\left(\frac{v_r v_\phi}{r}+\frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned}$$

各分量為

$$\left[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}\right]_r=v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,v_r-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\left[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}\right]_\theta&=v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\\&=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,v_\theta+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\left[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}\right]_\phi&=v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{v_r v_\phi}{r}+\frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\\&=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,v_\phi+\frac{v_r v_\phi}{r}+\frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\end{aligned} \tag{27}$$

(B) 黏滯力 $\boldsymbol{r}$ 分量

$$f_r=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\tau_{rr}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\tau_{r\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial\phi}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}-\frac{\tau_{\phi\phi}}{r}\equiv\mu g_r\left(r,\theta,\phi\right)$$

$$
\begin{aligned}
g_r = {} & \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]\right\} \\
& + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right] \\
& - \frac{2}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r}v_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)
\end{aligned}
$$

其中

$$
v_\theta\cot\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} \tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
g_r = {} & \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \left(\nabla^2 v_r\right)_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right) \\
& + \left(\nabla^2 v_r\right)_\phi - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{4v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}
\end{aligned}
$$

將(24)式做對 r 的偏微分並與上式相減可得

$$
\begin{aligned}
g_r = {} & \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \left(\nabla^2 v_r\right)_\theta - \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right)\right] + \left(\nabla^2 v_r\right)_\phi - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} \\
& - \frac{4v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}
\end{aligned}
$$

其中

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{2v_r}{r^2} = \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)
$$

整理可得

$$
g_r = \nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} \tag{29}
$$

(C) 黏滯力 $\boldsymbol{\theta}$ 分量

$$
f_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\tau_{\theta r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\tau_{\theta\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\theta\phi}}{\partial\phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot\theta}{r}\tau_{\phi\phi} \equiv \mu g_\theta\left(r,\theta,\phi\right)
$$

注意到

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\tau_{\theta r}\right)}{\partial r} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\tau_{r\theta}\right) \tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
g_\theta = {} & \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + r^4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + v_r\right)\sin\theta\right] \\
& + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right] - \frac{2\cot\theta}{r^2}\left(v_r + v_\theta\cot\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)
\end{aligned}
$$

將(24)式做對 θ 的偏微分再乘 $1/r$ 並與上式相減，並注意到

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}\right]=\left(\nabla^2 v_\theta\right)_\theta-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}$$

可得

$$\begin{aligned}g_\theta=&\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2v_r\right)\right]+\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\right)\sin\theta\right]+\left(\nabla^2 v_\theta\right)_\phi\\&-\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2v_r\right)\right]-\left(\nabla^2 v_\theta\right)_\theta+\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cot\theta}{r^2}\left(v_r+v_\theta\cot\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]=\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{2v_\theta}{r^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)-\frac{2v_\theta}{r^2}=\left(\nabla^2 v_\theta\right)_r-\frac{2v_\theta}{r^2}\qquad(31)$$

並將(24)式代入可得

$$\begin{aligned}g_\theta=&\left(\nabla^2 v_\theta\right)_r-\frac{2v_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\left(v_r\cot\theta+\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)+\left(\nabla^2 v_\theta\right)_\phi+\left(\nabla^2 v_\theta\right)_\theta+\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\\&-\frac{2\cot\theta}{r^2}\left(v_r+v_\theta\cot\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

化簡可得

$$g_\theta=\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\qquad(32)$$

(D) 黏滯力 ϕ 分量

$$f_\phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\tau_{\phi r}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\tau_{\phi\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\phi\phi}}{\partial\phi}+\frac{\tau_{r\phi}}{r}+\frac{\cot\theta}{r}\tau_{\theta\phi}\equiv\mu g_\phi\left(r,\theta,\phi\right)$$

利用(30)式與下式

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\tau_{\phi\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{\cot\theta}{r}\tau_{\theta\phi}=\frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial\left(\tau_{\phi\theta}\sin^2\theta\right)}{\partial\theta}$$

化簡得

$$\begin{aligned}g_\phi=&\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)+\frac{r^2}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}+\sin^3\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right]\\&+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(v_r+v_\theta\cot\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

將(24)式做對 ϕ 的偏微分再乘 $1/r\sin\theta$ 與上式相減，和用(31)式代換可得

$$\begin{aligned}
g_\phi = \ & \left(\nabla^2 v_\phi\right)_r - \frac{2v_\phi}{r^2} + \frac{1}{r^3\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} + \sin^3\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right] \\
& + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(v_r + v_\theta\cot\theta\right) + \left(\nabla^2 v_\phi\right)_\phi \\
& - \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right)\right]
\end{aligned}$$

與以下的等式

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin^3\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right] - 2v_\phi &= \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-v_\phi\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\right] - 2v_\phi \\
&= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(-v_\phi + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\theta^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\right) - \frac{v_\phi}{\sin^2\theta} \\
&= \left(\nabla^2 v_\phi\right)_\theta - \frac{v_\phi}{\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

帶入化簡可得

$$g_\phi = \nabla^2 v_\phi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} - \frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta} \tag{33}$$

(E) 結論

利用(25)(26)(27)(29)(32)(33)式可得

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}\right) = -\frac{\partial P}{\partial r} & \\
+ \mu\left(\nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(v_\theta\sin\theta\right) - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right) + \rho g_r & \qquad (34)
\end{aligned}$$

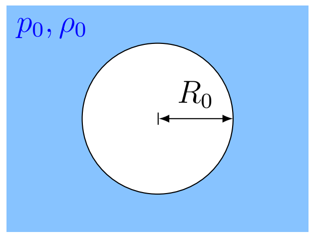
$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta} & \\
+ \mu\left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right) + \rho g_\theta & \qquad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v_\phi + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\phi} & \\
+ \mu\left(\nabla^2 v_\phi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} - \frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta}\right) + \rho g_\phi & \qquad (36)
\end{aligned}$$

3 習題

Problem 1 消失的泡泡

一個半徑為 R_0 的球型空腔放置於無限大的容器中，容器中充滿密度為 ρ_0 的不可壓縮液體。在距離空腔無限遠處的壓力為 p_0，空腔內視為真空。



本題不考慮重力與黏滯力。在某一瞬間空腔壁突然消失，試求出液體充滿空腔所需的時間 τ。你可以使用定積分 $I\left(a\right)$ 表示。

$$I\left(a\right)=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^{-a}-1}}dx$$

$\boxed{\textbf{提示}}$ 微分方程式

$$x+ay\frac{dx}{dy}=b$$

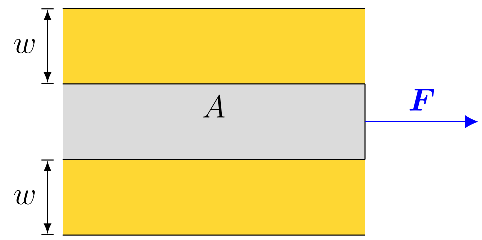
其解為 $x=b+Cy^{-1/a}$，C 為待定常數。

解答〈第七屆天物盃決賽秒題大賽〉

$$\boxed{\tau=R_0\sqrt{\frac{3\rho_0}{2p_0}}I\left(3\right)\approx 0.915R_0\sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}}}$$

Problem 2 維尼的蜂蜜吐司

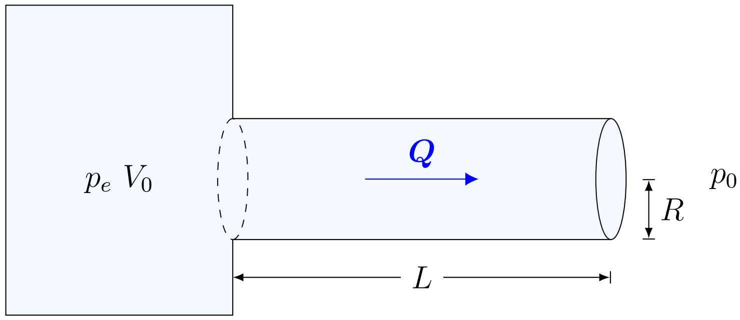
某天下午小熊維尼肚子餓，看到旁邊的蜂蜜罐，於是突然興起想要吃蜂蜜土司的念頭，不過此時維尼手邊並沒有蜂蜜棒，飢餓難耐的他只好將吐司直接插入蜂蜜罐中，當吐司碰到底部時才驚覺吐司此時已經很難拿出，於是使出全力 F(顯然為定值) 向外拉吐司。假設蜂蜜的流動為層流、蜂蜜為牛頓流體且黏滯係數為 η，蜂蜜的體質量密度 $\rho_h \ll \sigma/w$。假設維尼把土司烤到全焦，所以是剛體 (?)。將蜂蜜罐與土司視為長方體。已知吐司面質量密度為 $\sigma = m/A$、截面積為 A，且位於蜂蜜中間處。本題中不考慮液體的邊界效應。令吐司從靜止突然受到外力 F 時的時間為零，請幫維尼算看看吐司的拉出速度 $v\left(t\right)$。



解答 ⟨第七屆天物盃初賽 Problem 23⟩

$$v = \frac{Fw}{2\eta A}\left(1 - e^{-\frac{2\eta t}{\sigma w}}\right)$$

Problem 3 氣體黏滯係數的測定



(a) 試求出在壓力梯度 $\partial p/\partial x$ 為常數的環境之下，半徑為 R 的水平細圓管 (x 方向為水平方向) 的流量 Q(單位時間內流經的流體體積)。

(b) 把待測氣體充入容積為 V_0 的容器中，使其壓力 p_b 大於外界大氣壓力 p_0，其溫度則與外界溫度 T_0 一致。燒瓶口外連接長為 L、半徑為 $R(R \ll L)$ 的水平細圓管與大氣相通，如上圖所示。細管與燒瓶連接處有閥門，先關閉。打開閥門後瓶內氣體經細管向外流出，經過 Δt 時間後再將閥門關閉，測出瓶內氣體壓力為 p_e，由此便可確定該氣體的黏滯係數 η。設整個過程中，燒瓶、細管、外界處處溫度相同且保持不變，且氣體質量密度 $\rho \ll \eta\Delta t/L^2, (p_e - p_0)/L^2$，試導出 η 的計算公式。

積分公式

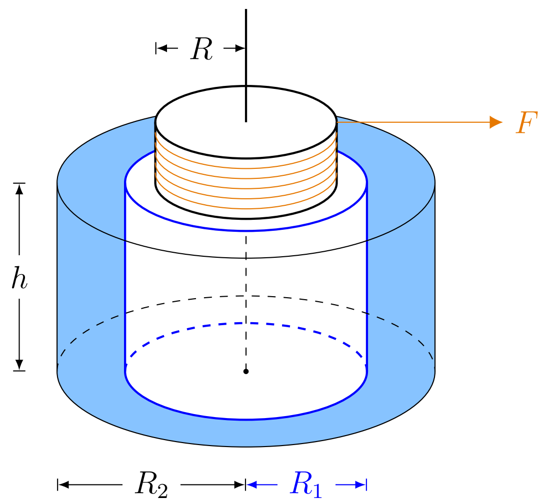
$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

解答 ⟨難題集粹第 450 頁⟩

(a)	$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\partial p}{\partial x}$$
(b)	$$\eta = \frac{\pi R^4 p_0 \Delta t}{8LV_0 \ln \frac{(p_e+p_0)(p_b-p_0)}{(p_e-p_0)(p_b+p_0)}}$$

Problem 4 Thomas-Stormer 黏度計

Thomas-Stormer 黏度計的裝置如下圖所示。配件含有一個半徑為 R_1、高度為 h ($h \gg R_1, R_2$) 的實心圓柱、一個半徑為 R_2、高度亦為 h、厚度可以忽略的空心圓柱、以及半徑為 R，用於纏繞繩子的線圈。將空心圓柱固定於地面，使其不可轉動，再將實心圓柱的中心軸插入旋轉軸 (亦為空心圓柱的中心)，使其可以繞旋轉軸旋轉。已知線圈與實心圓柱為緊密連接，且繩子不滑動。現在將兩圓柱間的空間填滿黏滯係數為 η 且不可壓縮的液體，使繩張力為定值 F。而因為黏滯力的摩擦損耗，液體速度會逐漸趨向於定值。假設液體雷諾數很小為層流。易知在達到穩態時，液體速度只有角向分量，沒有徑向分量，也就是 $\boldsymbol{v} = v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = r\omega \hat{\boldsymbol{\theta}}$。



(a) 試證明在半徑為 r 處的液體角速度量值 $\omega(r)$ 為

$$\omega = A + \frac{B}{r^2}$$

其中 A 和 B 均為常數。並將 B 以 A 和已知參數表達。

(b) 已知實驗測得的繩子的終端速率為 v_0，試以已知參數表達黏滯係數 η。

(c) 利用壓力計測得在 $r = R_2$ 處的計示壓力為 P_2，試求出 $r = R_1$ 處的計示壓力 P_1。答案以 v_0 與已知參數表達。

(d) 顯然因為壓力的作用，內部的實心圓柱會發生變形。已知彈性力學中的拉梅係數為 μ 與 λ，其定義同(2)式，但注意要將速度 $\boldsymbol{v}$ 改成位移 $\boldsymbol{u}$。如果你去計算圓柱的徑向收縮長度，你會發現其值為無限大。這是因為在 r 不接近零處，應力很小，$\boldsymbol{\tau}(\nabla \boldsymbol{u})$ 為 $\nabla \boldsymbol{u}$ 的線性函數可做為很好的近似，但是在 r 接近零處，應力已經大到不可以線性近似。為了解決這個問題，我們假設圓柱由兩部分構成，$r \in [0, R_0]$ 處為非彈性體 (拉梅係數極大)、$r \in [R_0, R_1]$ 處為一般的彈性體。試求出實心圓柱半徑 R_1 的收縮長度 Δr_1。答案可以以(c)小題中的 P_1 表達。

解答

(a)	$$B = -AR_2^2$$
(b)	$$\eta = \frac{FR^2}{4\pi h v_0}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right)$$
(c)	$$P_1 = P_2 - \frac{\rho v_0^2}{2R^2}\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{4R_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\ln\frac{R_2}{R_1}\right)$$
(d)	$$\Delta r_1 = \frac{P_1R_1\left(R_1^2 - R_0^2\right)}{2\left[\left(\lambda + \mu\right)R_1^2 + \mu R_0^2\right]}$$

Problem 5 斯托克斯定律

已知流體為不可壓縮且質量密度為 ρ、流體的黏滯係數為 η、流體所受的壓力為 P、流體的流場為 $\boldsymbol{v}$。假設在本題的所有情況中，雷諾數 $\mathrm{Re} = \rho|\boldsymbol{v}|d/\eta \ll 1$($d$ 為系統的特徵長度)，因此可以忽略慣性。

預備知識

(1) 納維爾－斯托克斯方程式 (Navier-Stokes equation)

假設有不可壓縮性的流體所受到的加速度場為 $\boldsymbol{g}$，則納維爾－斯托克斯方程式的一般形式為

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}\right) = -\nabla P + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{g}$$

忽略慣性則有

$$-\nabla P + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{g} = 0$$

又稱為斯托克斯方程式 (Stokes' equation)。方程式所得的解稱為斯托克斯流 (Stokes flow)，又稱為蠕動流 (creeping flow)。

(2) 球座標中的散度與旋度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{U} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2U_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(U_\theta\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{U} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & r\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ U_r & rU_\theta & r\sin\theta U_\phi \end{vmatrix}$$

(3) 向量三重積：$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{U}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{U}) - \nabla^2\boldsymbol{U}$

(4) 向量恆等式：若 A 為純量且沒有奇點，則 $\nabla\times(\nabla A) = \boldsymbol{0}$

(5) 伴隨勒讓得多項式

伴隨勒讓得多項式 $P_l^m(x)$ 會符合以下微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP_l^m(x)}{dx}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m(x) = 0$$

其中 $m=0$ 的函數值為

$$P_0^0(x) = 1,\quad P_1^0(x) = x,\quad P_2^0(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\quad P_3^0(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$$

注意到 $P_l^0(x)$ 的最高次項會是 x 的 l 次項。而 $P_l^m(x)$ 與 $P_l^0(x)$ 的關係為

$$P_l^m(x) = (-1)^m \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l^0(x)$$

A 部分　球體移動的阻力

假設原本流體的流場為 $\boldsymbol{v} = U\hat{\boldsymbol{z}}$。現在放置一個半徑為 R 的球體於內，使得流場在接近球體處發生改變。易知此流場具有繞 z 軸的對稱性，可得 $\boldsymbol{v} = v_r(r,\theta)\,\hat{\boldsymbol{r}} + v_\theta(r,\theta)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$，且對 ϕ 的微分項皆為 0。實際模擬的流場如下圖。整個題目就是在以上給定的邊界條件下，得出近似後的納維爾－斯托克斯的解並計算壓力分布。

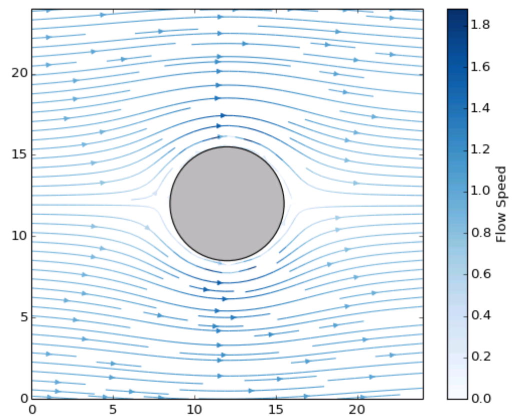


圖 1. 球體所造成的流場[2]

(a) 利用流量守恆，證明 $v_r(r,\theta)$ 與 $v_\theta(r,\theta)$ 的關係式為

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(v_\theta \sin\theta\right) = 0$$

可知可以令一個函數 V 符合

$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial r}$$

(b) 證明 $\boldsymbol{v}$ 可寫成

$$\boldsymbol{v} = \nabla\times\left(\frac{V\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\sin\theta}\right)$$

且符合

$$\nabla\times\left[\nabla\times\left(\nabla\times\boldsymbol{v}\right)\right] = 0$$

[2] https://advancedplotting.github.io/docs/ref/Streamline.html

(c) 證明

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=-\frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\right]$$

注意到可以把旋度的作用視為一個作用在 V 的算符，即

$$\nabla\times\left[\nabla\times\left(\frac{V\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\sin\theta}\right)\right]\to-\frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]V$$

再證明

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2V=0$$

(d) 由繞 z 軸的對稱性與上式，可知 V 的解為 $V\left(r,\theta,\phi\right)=f\left(r\right)\sin^2\theta$，證明

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{2}{r^2}\right)^2f\left(r\right)=0$$

又易知 $f\left(r\right)$ 可寫為

$$f\left(r\right)=\frac{A}{r}+Br+Cr^2+Dr^4$$

試利用邊界條件求出係數 A,B,C,D。並證明速度場 $\boldsymbol{v}\left(r,\theta\right)$ 為

$$\boldsymbol{v}\left(r,\theta\right)=U\left(1-\frac{3R}{2r}+\frac{R^3}{2r^3}\right)\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}}-U\left(1-\frac{3R}{4r}-\frac{R^3}{4r^3}\right)\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

(e) 試求出壓力 $P\left(r,\theta\right)$。已知無限遠處的壓力為 $P\left(\infty,\theta\right)=P_0$。

(f) 請計算應力張量 σ_{ij}。指標 i,j 可以為 r,θ,ϕ 其中一者。

(g) 試證明流體作用在圓球上的總力 $\boldsymbol{F}$ 為

$$\boldsymbol{F}=-6\pi\eta R\boldsymbol{U}$$

此結果即為斯托克斯定律 (Stokes law)。

(h) 密立坎油滴實驗：油滴噴灑器放出帶電量為 q、質量為 m 的油滴，無外加電場的情況下，與重力場 $\boldsymbol{g}=-g\hat{\boldsymbol{z}}$ 平衡達到終端速率 $\boldsymbol{v}_1=-v_1\hat{\boldsymbol{z}}$，啟動外加電場 $\boldsymbol{E}=-E\hat{\boldsymbol{z}}$ 後，達到終端速率 $\boldsymbol{v}_2=-v_2\hat{\boldsymbol{z}}$。試求荷質比 q/m。已知空氣密度遠小於油滴密度。

(i) 呈(h)，假設此油滴的體積遠大於氣體分子的體積，則黏滯係數 η 可以視為定值，試求油滴在兩種情況下的運動速度 $\boldsymbol{v}_1\left(t\right),\boldsymbol{v}_2\left(t\right)$。可以使用油滴半徑 R 表達。

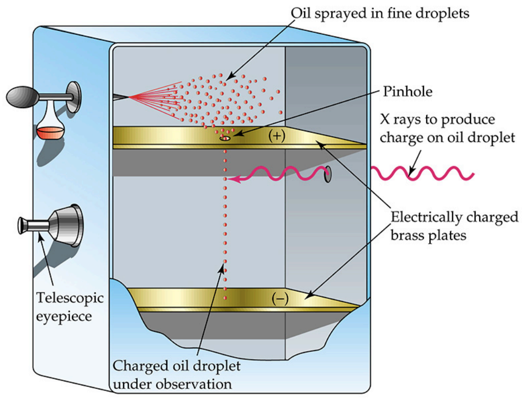
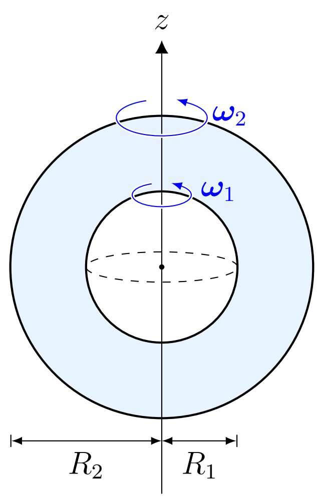


圖 2. 密立坎油滴實驗示意圖[3]

B 部分 球體旋轉的阻力矩

有兩個半徑分別為 R_1 與 R_2 的球殼，以 $\boldsymbol{\omega}_1 = \Omega_1\hat{\boldsymbol{z}}$ 與 $\boldsymbol{\omega}_2 = \Omega_2\hat{\boldsymbol{z}}$ 的固定角速度繞 z 軸旋轉。擺放兩球殼使其原點重合，並將球殼間充滿黏滯係數為 η 的液體。以下僅考慮流場已達穩定。



(j) 試求出兩個球殼間的流場分布 $\boldsymbol{v}(r,\theta,\phi)$。

(k) 顯然因為黏滯力的作用，我們必須施加力矩才能使球殼能夠以固定角速度繞軸旋轉。請求出我們分別需要對兩個球殼施加的力矩 $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$。

(l) 請證明若將半徑為 R 球體放置於黏滯係數為 η 的無限大無限深液體中，當其質心速度為 $\mathbf{0}$、角速度為 $\boldsymbol{\omega}$ 時所受到的黏滯力力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 為

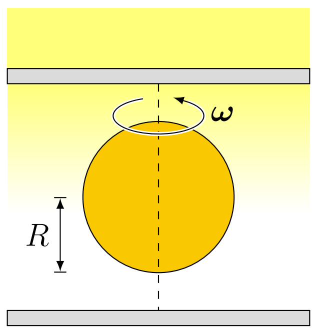
$$\boldsymbol{\tau} = -8\pi\eta R^3\boldsymbol{\omega}$$

[3] https://www.sciencefacts.net/oil-drop-experiment.html

C 部分 奈米粒子的高速轉動

具有一定能量、動量的光子還具有角動量，圓偏振光的光子角動量大小為 $\hbar$。光子被物體吸收後，光子的能量、動量和角動量就全部傳給物體。物體吸收光子獲得的角動量可以使物體轉動。科學家利用這一原理，在連續的圓偏振鐳射照射下，實現了奈米顆粒的高速轉動，獲得了迄今為止液體環境中轉速最高的微尺度轉子。

如下圖所示，一金奈米顆粒放置在兩片水平光滑玻璃平板之間，並整體 (包括玻璃平板) 浸在水中，一束圓偏振鐳射從上往下照射到金奈米顆粒上。已知該束入射鐳射在真空中的頻率為 ν，經顯微鏡聚焦後 (仍假設為平面波，每個光子具有沿傳播方向的角動量 $\hbar$) 的雷射光強為 I(在傳播方向上單位截面積所傳輸的功率)。金奈米球顆粒的半徑為 R，一顆粒子的質量為 m 且均勻分布。忽略光在介質介面上的反射以及玻璃、水對光的吸收等損失，僅從金奈米顆粒吸收光子獲得角動量驅動其轉動的角度分析下列問題。已知光速為 c。



(m) 假設顆粒對光的吸收截面 (顆粒吸收的光功率與入射光強之比) 為 σ_{abs}，求該束鐳射作用在顆粒上沿旋轉對稱軸的力矩的大小 M。

(n) 已知水的黏滯係數為 η。取光開始照到處於靜止狀態的金奈米顆粒的瞬間為計時零點 $t=0$，求當時間為 t 時該顆粒角速度量值的表達式 $\omega(t)$。

(o) 若把入射雷射光束換成方波脈衝光束，脈衝長度為 T_1(此期間內光強為 I)，脈衝之間的間歇時間為 T_2(此期間內光強為零)。取第一個脈衝的光開始照到顆粒的時間為計時零點 $t=0$，求第 n 個完整脈衝週期 $t=n(T_1+T_2)$ 時的顆粒瞬間的角速度量值 ω_n 的表達式，並給出終端角速度量值 ω_∞ 的表達式。

解答 ⟨C 部分取自第 33 屆中國決賽⟩

(d)	$A=\frac{1}{4}UR^3,\quad B=-\frac{3}{4}UR,\quad C=\frac{1}{2}U,\quad D=0$
(e)	$P=P_0-\frac{3\eta UR}{2r^2}\cos\theta$

(f)

只有 $\sigma_{rr}(r,\theta)$ 與 $\sigma_{r\theta}(r,\theta)$ 不為零

$$\sigma_{rr}(R,\theta) = -P_0 + \frac{3\eta U}{2R}\cos\theta$$

$$\sigma_{r\theta}(R,\theta) = -\frac{3\eta U}{2R}\sin\theta$$

(h)

$$\frac{q}{m} = \frac{g}{E}\left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right)$$

(i)

$$\boldsymbol{v}_1(t) = -\frac{mg}{6\pi\eta R}\left(1 - e^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{v}_2(t) = -\frac{mg + qE}{6\pi\eta R}\left(1 - e^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

(j)

$$\boldsymbol{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left[\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)\Omega_1 - \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_1^3}\right)\Omega_2\right] r\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

(k)

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2 = 8\pi\eta\left(\frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\right)(\Omega_1 - \Omega_2)\hat{\boldsymbol{z}}$$

(m)

$$M = \frac{I\sigma_{\text{abs}}}{2\pi\nu}$$

(n)

$$\omega(t) = \frac{I\sigma_{\text{abs}}}{16\pi^2\eta R^3\nu}\left(1 - e^{-\frac{20\pi\eta R}{m}t}\right)$$

(o)

$$\omega_n = \frac{I\sigma_{\text{abs}}}{16\pi^2\eta R^3\nu}\frac{1 - e^{-\frac{20\pi\eta R}{m}T_1}}{e^{\frac{20\pi\eta R}{m}T_2} - e^{-\frac{20\pi\eta R}{m}T_1}}\left(1 - e^{-\frac{20\pi\eta R}{m}n(T_1+T_2)}\right)$$

$$\omega_\infty = \frac{I\sigma_{\text{abs}}}{16\pi^2\eta R^3\nu}\frac{1 - e^{-\frac{20\pi\eta R}{m}T_1}}{e^{\frac{20\pi\eta R}{m}T_2} - e^{-\frac{20\pi\eta R}{m}T_1}}$$