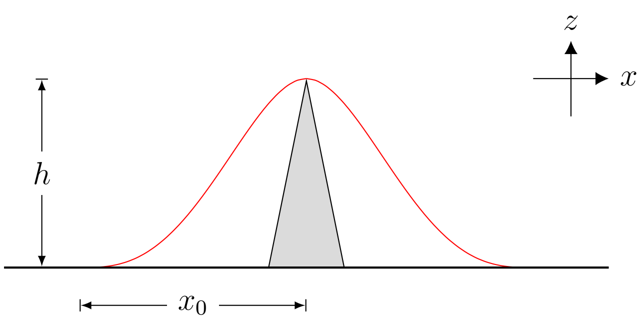
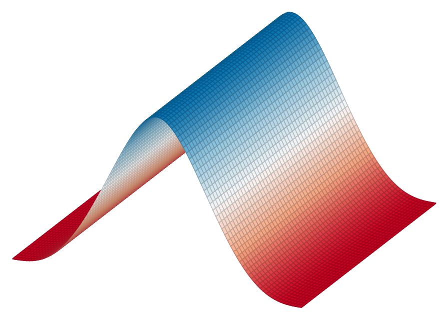
紙張的彎曲

已知彈性體的楊氏模量 (Young's modulus) 為 E、厚度為 d、質量體密度為 ρ。特別地，假設帕松比 (Poisson's ratio) 有 $\sigma = 0$。

本題考慮紙張在重力作用下的彎曲現象。已知環境的重力加速度為 $\boldsymbol{g} = -g\hat{\boldsymbol{z}}$。假設紙張在伸縮後**厚度與表面積不變**，且斜率絕對值 $|\partial z/\partial x| \ll 1$。



(a) 剖面圖



(b) 俯視圖

圖 1. 紙張的彎曲

如上圖所示，將紙張平鋪在一個沿 y 方向延伸，高度為 h $(h \gg d)$ 的突起物，定其頂點的座標為 $(x, z) = (0, h)$。已知紙張足夠大，紙張的左右側皆著地。計算中你可以將突起物的尖端與紙張視為點接觸。

A.1	試求出紙張與地面接觸點的 x 座標 $\pm x_0$ $(x_0 > 0)$。	1.2 pt

A.2	承 **A.1**，試求在 $x > 0$ 的區域，紙張高度與座標 x 的函數關係 $z(x)$。答案以 h, x_0 表示。	2.0 pt

液滴的形變

本題將探討在不同外加條件下液滴的形變。在 **A 部分**計算出微擾情況下球座標中的曲率半徑，**B 部分**則利用流體的基本定律來求得球形液滴表面波的振盪頻率，**C 部分**則利用基本的電磁學來求得外加電場作用下球形液滴的變形。

液體為不可壓縮且表面張力係數為 σ 的流體。外界大氣壓力為 P_0。真空電容率為 ϵ_0。

各部份題目獨立，不考慮黏滯力與重力場的影響。

預備知識

(1) 時變的白努力方程式

已知在流體為無旋流的假設下，速度場 $\boldsymbol{v}$ 可寫作速度勢 φ 的梯度，也就是 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\varphi$，且 φ 會符合

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\nabla}\varphi|^2 + \frac{P}{\rho} = \text{const.}$$

上式稱為時變的白努力方程式。注意到是整個區域任意處皆為同個常數。

(2) 曲率半徑與拉普拉斯方程式

已知表面張力的拉普拉斯方程式為

$$\Delta P = P_\text{A} - P_\text{B} = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

其中表面的主要曲率半徑 R_1、R_2 的正負號取法為曲率中心在介質 A 則為正，反之則為負。而任意表面的曲率半徑倒數和可藉由變分法來求得，你必須把變分參數取為沿面法向向量的位移 δx_n，在此恰好為 δr。則面積的變分 δA 可寫為

$$\delta A = \int g\left(r, \theta, \phi\right) \mathrm{d}A \, \delta r$$

又因主要曲率半徑可表示為

$$\delta A = \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \mathrm{d}A \, \delta r$$

則函數 $g\left(r, \theta, \phi\right) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$。

(3) 球座標中的梯度與拉普拉斯算子 (laplacian)

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

(4) 伴隨勒讓得多項式 (associated Legendre polynomial)

a. 微分方程式

伴隨勒讓得多項式 $P_l^m(x)$ 會符合以下微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}P_l^m(x)}{\mathrm{d}x}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m(x) = 0$$

因此拉普拉斯方程式 $\nabla^2 V = 0$ 在球座標 (r,θ,ϕ) 中的解為

$$V(r,\theta,\phi) = \sum_{l,m\in\mathbb{N}}\left(A_{lm}r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right)P_l^m(\cos\theta)\ e^{im\phi}$$

其中 A_{lm}, B_{lm} 為常數。

b. 函數表達式

其中 $m=0$ 的函數表達式為

$$P_0^0(x) = 1,\quad P_1^0(x) = x,\quad P_2^0(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\quad P_3^0(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$$

由微分方程式可得遞迴關係為

$$(n+1)\,P_{n+1}^0(x) = (2n+1)\,xP_n^0(x) - nP_{n-1}^0(x)$$

注意到 $P_l^0(x)$ 的最高次項是 x 的 l 次方項。而 $P_l^m(x)$ 與 $P_l^0(x)$ 的關係為

$$P_l^m(x) = (-1)^m\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_l^0(x)}{\mathrm{d}x^m}$$

c. 正交性

伴隨勒讓得多項式在區間 $x\in[-1,1]$ 內具有正交性，即

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)\,P_k^m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{2}{2l+1}\dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}, & l=k \\ 0, & l\neq k \end{cases}$$

A 部分　球座標中的曲率半徑 (1.0 pt)

A.1　請證明在球座標 (r,θ,ϕ) 下，表面積 A 的表達式為　0.4 pt

$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial r}{\partial\phi}\right)^2}\,r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

球形液滴的半徑為 $R(r,\theta,\phi)=R_0+\tilde{R}(r,\theta,\phi)$，其中 $\tilde{R}\ll R_0$。接下來我們只要求計算至微小振盪項的最低次項。則表面積的變分 δA 可寫為

$$\delta A=\iint_{\mathrm{C}} f\left(\tilde{R},\theta,\phi\right)\mathrm{d}A\,\delta\tilde{R}$$

A.2　試求出函數 $f\left(\tilde{R},\theta,\phi\right)$。　0.6 pt

B 部分　液滴的表面波 (3.0 pt)

球形液滴達到穩定態時的半徑為 R_0。假設流體為**無旋流**，即 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}=0$。

B.1　試求出球形液滴達到穩定態時內部的壓力 P。　0.2 pt

現在給予液面一個微小擾動，其尺度遠小於液滴半徑，則液滴會產生類似於下圖的表面波。以下將計算各模態的振盪方式。

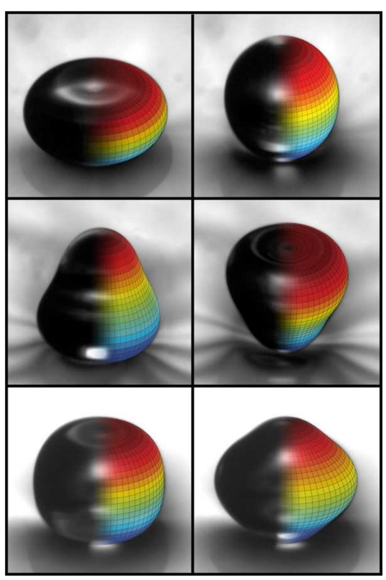


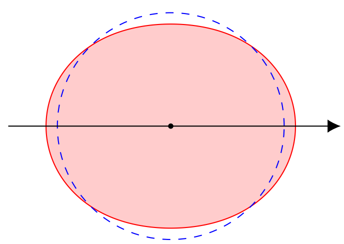
圖 2. 液滴的表面波[1]

B.2 試求出速度勢 $\varphi(r, \theta, \phi, t)$ 符合的兩個微分方程式。 0.8 pt

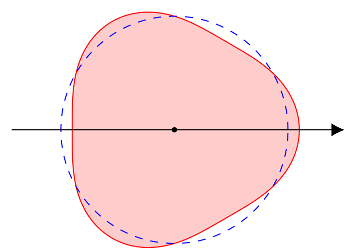
B.3 證明速度勢 $\varphi(r, \theta, \phi, t)$ 的解為 0.8 pt

$$\varphi(r, \theta, \phi, t) = \sum_{l, m \in \mathbb{N}} A_{lm} r^l P_l^m(\cos\theta)\ e^{i(m\phi \pm \omega_l t)}$$

其中 A_{lm} 為模態 (l, m) 的常數。試求出此模態的振盪角頻率 ω_l $(\omega_l > 0)$。



(a)



(b)

圖 3

B.4 已知在 $t = 0$ 時，液滴內部靜止且表面形狀為 $r(\theta) = R_0 + a\cos 2\theta$ $(a \ll R_0)$，如上圖 (a)。試求往後液滴的表面形狀 $r(\theta, t)$。 0.6 pt

B.5 已知在 $t = 0$ 時，液滴內部靜止且表面形狀為 $r(\theta) = R_0 + a\cos 3\theta$ $(a \ll R_0)$，如上圖 (b)。試求往後液滴的表面形狀 $r(\theta, t)$。 0.6 pt

[1] https://www.researchgate.net/figure/Various-deformation-modes-of-a-bouncing-droplet-n-15-cSt-R-0765-mm-observed-with_fig3_1739386

C 部分　電場作用下的拉伸 (2.8 pt)

有個由金屬汞組成的液滴，在沒有電場作用下球形液滴達到穩定態時的半徑為 R_0。在電場 $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{z}}$ 作用下，球形液滴到穩定態時的半徑變為 $R(r,\theta,\phi) = R_0 + \tilde{R}(r,\theta,\phi)$，其中 $\tilde{R}(r,\theta,\phi) \ll R_0$。其中 θ 為徑向向量 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 與 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 的夾角。已知 $E^2 \ll \sigma/R\epsilon_0$，且計算僅要求微小量至最低階項。

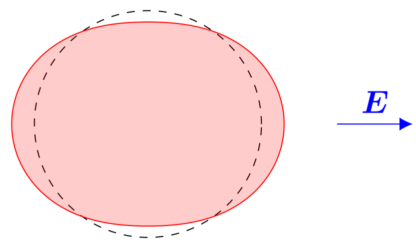


圖 4. 液滴的變形

C.1　證明 $\tilde{R}(r,\theta,\phi)$ 的解為　2.0 pt

$$\tilde{R} = \tilde{R}_0 + \tilde{R}_1\cos\theta + \tilde{R}_2\cos^2\theta$$

並求出常數 $\tilde{R}_0$ 與 $\tilde{R}_2$。考慮對稱的拉伸，則 $\tilde{R}_1 = 0$。

C.2　求出此時水滴內部壓力的變化 ΔP。　0.8 pt