

自主學習

# 電磁輻射與相對論

彰化縣私立精誠中學

501 班 03 號 王兆國

# 目錄

自主學習成果報告表 .....	1
動機與發想 .....	3
心得與反思 .....	4
壹、 非真空介質的電磁學 .....	5
貳、 延遲勢 Retarded Potential.....	8
一、 Liénard-Wiechert Potential .....	8
二、 線電荷位能問題.....	9
(一) 高斯定律 .....	9
(二) 位能 .....	9
參、 點電荷的輻射 Point Charge Radiation .....	11
一、 重點整理.....	11
二、 證明 Liénard's Generalization.....	12
(一) 速度與加速度垂直的輻射功率 .....	12
(二) 廣義情況的輻射總功率 .....	16
(三) 輻射功率是羅倫茲不變量 .....	18
三、 電子墜落至原子核的時間估算.....	20
肆、 相對論性電磁學 Relativistic Electrodynamics .....	22
一、 受力問題.....	22
二、 電與磁的相對論變換.....	23
(一) 電流密度四向量 Current density 4-vector .....	23
(二) 電磁場張量 .....	23
(三) 四向量勢 4-vector potential.....	25
伍、 自由電子雷射 .....	26
一、 自由電子的運動模式.....	26
二、 海爾貝克陣列(Halbach Array) .....	29
(一) 直角坐標 .....	29
(二) 技巧地利用三角函數.....	31
(三) 附錄一積分公式 .....	34
三、 總結.....	37

陸、	水的磁導率測定 .....	39
一、	理論預測 .....	39
二、	實驗設備與架構 .....	39
三、	實驗數據 .....	40
(一)	實驗一—水面離磁鐵 1mm .....	40
(二)	實驗二—水面離磁鐵 2mm .....	41

# 自主學習成果報告表

## 彰化縣私立精誠高級中學學生自主學習成果報告

2023/01/27 20:32

申請人	王兆國	班級/座號	5 年 01 班 03 號
執行學年度	111-1	申請時數	36
計畫主題	電磁輻射、相對論電磁場變換		
學習性質	加深加廣		
學習領域	自然科學	科目	物理
領域	自然		
設備需求	電腦一台、電磁學課本 Griffith 一本		
指導教師需求	楊一郎		
自主學習內容概述	研讀電磁學課本 Griffith 中的電磁輻射、相對論力學、相對論電磁場變換。之中會藉由課本習題與物理奧林匹亞試題來矯正觀念。最後再研究同步輻射的原理及在生活中造成的現象。		
動機目的	自己對於電磁學有濃厚的興趣，在競賽、學習理解上也相較其他單元清晰。將來有打算做相關的研究。希望可以藉此先學習大二電磁學內容以打好理論基礎。		
協助專家			
共學同學			
預期成果說明	1.清楚了解電(磁)偶極輻射的原理及其造成的現象。 2.理解相對論的基本假設以及計算。 3.了解相對論效應如何改變電磁場、改變電磁輻射。 4.研究同步輻射的原理及在生活中造成的現象。 5.藉由題目練習，可以增加自己對於數學式與物理觀念之間的連結。		
自主學習成果展	靜態：公開展示書面報告/作品		

週次	星期	節次	自學內容
1	四	3	Scalar and Vector Potential
1	四	4	Gauge Transformation
2	四	3	Coulomb Gauge and Lorentz Gauge
2	四	4	Lorentz Force in Potential Form
3	四	3	Retarded Potentials
3	四	4	Jefimenko's Equations
4	四	3	Lienard-Wiechert Potentials
4	四	4	The Fields of a Moving Point Charge
5	四	3	What is a Radiation
5	四	4	Electric Dipole Radiation

6	四	3	Magnetic Dipole Radiation
6	四	4	Radiation from an Arbitrary Source
7	四	3	Power Radiated by a Point Charge
7	四	4	Radiation Reaction
8	四	3	The Mechanism Responsible for the Radiation Reaction
8	四	4	題目練習【APhO2018—Optical Trap of Neutral Atoms Part.1~6】
9	四	3	Einstein's Postulates The Geometry of Relativity
9	四	4	The Lorentz Transformations The Structure of Spacetime
10	四	3	題目練習【APhO2013—Relativistic Correction on GPS Satellite】
10	四	4	題目練習【APhO2013—Relativistic Correction on GPS Satellite】
11	四	3	Proper Time and Proper Velocity
11	四	4	Relativistic Energy and Momentum
12	四	3	Relativistic Kinematics
12	四	4	Relativistic Dynamics (1)
13	四	3	Relativistic Dynamics (2)
13	四	4	Relativistic Electrodynamics
14	四	3	Magnetism as a Relativistic Phenomenon
14	四	4	How the Fields Transform (1)
15	四	3	How the Fields Transform (2)
15	四	4	The Field Tensor
16	四	3	Electrodynamics in Tensor Notation
16	四	4	Relativistic Potentials
17	四	3	題目練習【APhO2019—X-ray Jets from Active Galactic Nuclei】
17	四	4	題目練習【APhO2019—X-ray Jets from Active Galactic Nuclei】
18	四	3	研究同步輻射(Synchrotron radiation)的原理
18	四	4	推導同步輻射的公式，並解釋其現象

中 華 民 國 112 年 1 月 27 日

# 動機與發想

## 動機

看到 2013 諾貝爾物理獎－希格斯粒子的發現，對其產生的儀器 LHC(大型強子對撞機)感到好奇。

## 查詢文獻

上網查詢文獻，發現台灣也有類似相同原理的同步加速器光源。

國家同步輻射研究中心：<https://www.nslrc.org.tw/chinese/index.aspx>

## 原理研讀

研讀電磁學課本 Griffith 並記錄各章重點以分析同步加速器的物理原理。

## 建模與分析

建構模型探討電子的運動模式和強磁場的產生。

# 心得與反思

## 一、 挫折

### 理論過於複雜

在我學習的這三個章節中，課本的講解總是充滿很多數學處理，導致我沒辦法很直覺地理解物理公式的背後涵意。

多寫課後習題，利用題目矯正觀念。

### 研究過於繁瑣

在海爾貝克陣列(Halbach Array)章節中，運用的積分公式非常多，甚至還需龐大的計算量才能得到答案。自己嘗試利用第二個方法時也是想了很久才挑出錯誤。

仔細檢查不放棄

### 3D 立體繪圖

找不到能夠完整客製的 3D 繪圖軟體。

利用 LaTeX 的 pgfplots 與 ColorBrewer 插件得以繪出精美的 3D 函數圖。

Pgfplots：<https://pgfplots.sourceforge.net/gallery.html>

ColorBrewer：<http://www.traag.net/2014/06/05/281/>

## 二、 心得與反思

本來因為時間緊湊，不打算讀這部分，但是利用自主學習的時間學習完這三個章節，我總算能夠填滿我對電磁學與相對論的好奇。藉由這次機會，我不僅學習到了如何分析相對論體系下的電磁學，也同時學習該如何找查文獻並獲得正確答案。特別的是，我獲得了繪製 3D 立體圖的技巧，使我能夠更不受到軟體的限制而無法達到預期成效。總的來說，雖然過程中遇到重重困難並艱難地克服，但回頭看到成果使我更對這項領域感到更興趣、更有意願持續地研究下去。

## 三、 改進

### 切忍可夫輻射

在探討自由電子雷射的時候，我思考電子會不會發生切忍可夫輻射(Cherenkov radiation)，查閱文獻後發現其物理部分雖然可以處理，但是需要了解貝索函數(Bessel function)才能得到理論結果。

### 廣義相對論與電磁學

我探討的部分僅限於狹義相對論，希望往後能往廣義相對論的方向邁進，進而得以處理天文物理上的問題。

# 壹、非真空介質的電磁學

考慮能量的時間變化率

$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{J}_f \cdot \vec{E} d\tau \quad (1)$$

注意到

$$\vec{J}_f \cdot \vec{E} = \left( \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{E}$$

由向量三重積公式  $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$ ，上式化簡為

$$-\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

注意到  $B_i = \mu_{ij} H_j$ ，因此

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \delta_{ki} \mu_{ij} H_k \frac{\partial H_j}{\partial t} = \mu_{ij} H_i \frac{\partial H_j}{\partial t}$$

考慮  $i, j$  互換，且由對稱性可得  $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ ，可得

$$\mu_{ij} H_j \frac{\partial H_i}{\partial t} = \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

因此

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \right)$$

同理可得

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right)$$

代回(1)式

$$\frac{dW}{dt} = \int \left[ -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right) \right] d\tau$$

化簡可得

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \left( \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \right) d\tau - \oint (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{a}$$

定義電場能量密度  $u_E$ 、磁場能量密度  $u_B$  分別為

$$u_E = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}, \quad u_B = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad (2)$$

注意到波印廷向量(Poynting vector)為

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

考慮電磁場給物體的力

$$\vec{F} = \int \rho_f (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) d\tau$$

注意到  $\rho_f \vec{v} = \vec{J}_f$ ，代入馬克士威方程式可得到



$$\vec{F} = \int (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} + \left( \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \times \vec{B} d\tau \quad (3)$$

不難發現

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}) - \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}) + \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E})$$

代回(3)式

$$\vec{F} = \int \left[ (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{D} + (\nabla \times \vec{H}) \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}) \right] d\tau \quad (4)$$

為使其有對稱性，加上 $(\nabla \cdot \vec{B}) \vec{H}$ ，定義中間項 $\vec{f}$ 為

$$\vec{f} = (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{D} + (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{H} + (\nabla \times \vec{H}) \times \vec{B}$$

牛頓第二定律告訴我們力為動量的時間變化率，因此可寫下

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \int \left[ \vec{f} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}) \right] d\tau$$

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{p} + \int \vec{D} \times \vec{B} d\tau \right) = \int \vec{f} d\tau$$

類比定義電磁場造成的動量密度 $\vec{g}$

$$\boxed{\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B}}$$

在經由上述處理後， $\vec{f}$ 即為廣義動量密度的變化量。

現在由上述討論退化至真空介質的情況。

考慮能量的時間變化率，你很容易得到電場能量密度 $u_E$ 、磁場能量密度 $u_B$ 分別為

$$\boxed{u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \quad u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}} \quad (5)$$

注意到波印廷向量(Poynting vector)為

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})}$$

考慮電磁場給物體的力，(4)式變為

$$\vec{F} = \int \left[ \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \epsilon_0 (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \right] d\tau \quad (6)$$

同樣如上定義 $\vec{f}$ ，化簡後可得<sup>1</sup>

$$\vec{f} = \epsilon_0 [(\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}] - \frac{1}{2} \nabla \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \quad (7)$$

電磁場造成的動量密度 $\vec{g}$ 為

$$\boxed{\vec{g} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \vec{S}}$$

<sup>1</sup> 向量三重積公式

$$\frac{1}{2} \nabla (E^2) = \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E}$$

事實上 $\vec{f}$ 如此繁雜的項可以被化簡。定義馬克士威壓力張量(Maxwell's Stress Tensor) $\vec{T}$ 為

$$\vec{T} = \epsilon_0 \left( E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right)$$

你會發現對其取散度<sup>2</sup>可得到

$$(\nabla \cdot \vec{T})_j = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}$$

其中前項化簡為

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) = \frac{\partial E_i}{\partial x_i} E_j + E_i \frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial (E^2)}{\partial x_i} = (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} - \frac{1}{2} \nabla (E^2)$$

後項同理，所以 $(\nabla \cdot \vec{T})_j$ 為

$$(\nabla \cdot \vec{T})_j = \epsilon_0 [(\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}] - \frac{1}{2} \nabla \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \quad (8)$$

你會發現(7)(8)式一模一樣。所以

$$\vec{f} = \nabla \cdot \vec{T}$$

又根據高斯定理<sup>3</sup>，化簡(6)式

$$\vec{F} = \oint \vec{T} \cdot d\vec{a} - \frac{d}{dt} \int \vec{g} d\tau$$

不難發現，達到穩定態時，物體表面所受到的單位面積的力為 $\vec{T} \cdot \hat{a}$ 。

<sup>2</sup> 二階張量取散度會是一階張量，也就是向量。

<sup>3</sup> 數學上的高斯定理

$$\int (\nabla \cdot \vec{v}) d\tau = \oint \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

## 貳、延遲勢 Retarded Potential

### 一、 Liénard-Wiechert Potential

考慮時間傳遞所造成的效應，此時觀察者所接收到的距離為 $\vec{r}'$ 、事件發生的時間為 $t'$ ，則電位可寫為

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{r'} d\tau'$$

考慮點電荷，有 $\rho(\vec{r}', t') = q\delta^3(\vec{r})$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\delta^3(\vec{r})}{r'} d\tau'$$

$$d\tau' = r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi'$$

類似都卜勒效應，觀測到的徑向長度為

$$dr' = \frac{dr}{1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{v}/c} \quad (9)$$

因此體積質元變成

$$d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = (1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{v}/c) d\tau'$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{v}/c} \int \delta^3(\vec{r}) d\tau$$

易得

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{c}{rc - \vec{r} \cdot \vec{v}} \quad (10)$$

同理可列出

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \iiint \frac{\vec{v} \delta^3(\vec{r})}{r'} d\tau'$$

得到

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{c\vec{v}}{rc - \vec{r} \cdot \vec{v}} = \frac{\vec{v}}{c^2} V \quad (11)$$

利用 $\vec{E} = -\nabla V - \partial\vec{A}/\partial t$ 和 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 可得

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r'}{(\vec{r}' \cdot \vec{u})^3} [(c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{a})]$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{E}$$

其中 $\vec{u} = c\hat{\mathbf{r}} - \vec{v}$ 。

## 二、線電荷位能問題

我在 2022 物奧複選考試當下，偶然發現了這個問題。

考慮線電荷密度為 $\lambda$ 的無限長電線，試求出距離為 $r$ 處的電場與電位。

以下來解釋我所遇到的困難。

### (一)高斯定律

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

可以由對稱性易得

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (12)$$

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + V_0 \quad (13)$$

為正確解。

### (二)位能

若是計算總位能，再對其取梯度，應該也要得到相同的結果。如下，位能為

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

但結果為無窮大。考試當下完全忘記高斯定律的我寫到這步驟時，也不知如何下手與解釋。不過如果以 retarded potential 去看，則位能應寫為

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + r^2}} \quad (14)$$

其中 $x_0 = \sqrt{(ct)^2 - r^2}$ 。計算後者的積分

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} dx$$

令 $x = r \sinh u$ ， $dx = r \cosh u du$ ，代入則有

$$\int du = u + C = \sinh^{-1} \left( \frac{x}{r} \right) + C$$

代回(14)式

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \sinh^{-1} \left( \frac{x}{r} \right) \Big|_0^{x_0}$$

注意到 $\sinh^{-1} 0 = 0$ 、且當 $x \gg 1$ 時， $\sinh^{-1} x = \ln 2x$ ，代回(14)式

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{2x_0}{r} \right) = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r - \ln 2x_0) \quad (15)$$

---

<sup>4</sup> 令 $x = \sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ ，再令 $u = e^y$ ，可得 $u^2 - 2xu - 1 = 0$ ，則 $u = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ，所以 $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 。

取梯度可得

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (16)$$

且注意到(13)(15)式事實上是完全相同的，只是差在位能零點的取法而已。到頭來總位能的求法其實沒錯，只是需要考慮訊息傳遞所需的時間。

## 參、點電荷的輻射 Point Charge Radiation

### 一、重點整理

電偶極的輻射公式

$$P = \frac{\mu_0 |\ddot{\vec{p}}|^2}{6\pi c}$$

磁偶極的輻射公式

$$P = \frac{\mu_0 |\ddot{\vec{m}}|^2}{6\pi c^3}$$

以下僅考慮點電荷。點電荷帶電量為 $q$ 、在觀察者坐標系中的速度為 $\vec{v}$ 、加速度為 $\vec{a}$ 、速度方向與觀察方向的夾角為 $\theta$ 。在非相對論情況( $\beta \ll 1$ )，輻射功率角分布為

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta \quad (17)$$

積分可得輻射總功率為

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

上式即為為拉莫爾公式 Larmor Formula。

在相對論情況，輻射功率角分布為

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{|\hat{\mathbf{r}} \times (\vec{u} \times \vec{a})|^2}{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{u})^5} \quad (18)$$

其中 $\vec{u} = c\hat{\mathbf{r}} - \vec{v}$ 。計算後可得輻射總功率為

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left( a^2 - \left| \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{c} \right|^2 \right) \quad (19)$$

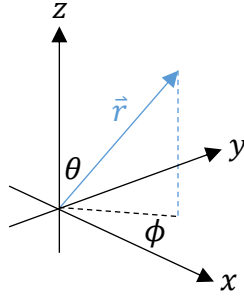
上式即為為 Liénard's Generalization。以下就來驗證其正確性。

## 二、 證明 Liénard's Generalization

### (一)速度與加速度垂直的輻射功率

#### 1. 輻射功率角分布

假設粒子的速度為  $\vec{v} = v\hat{z}$ 、加速度為  $\vec{a} = a\hat{x}$ 。方向向量  $\vec{r}$  與  $z$  軸的夾角為  $\theta$ 、其在  $xy$  平面上的投影與  $x$  軸的夾角為  $\phi$ ，如下圖。



(圖 1)位置向量示意圖。

定義  $\beta = v/c$ ，則

$$\vec{u} = c\hat{r} - v\hat{z} = c(\hat{r} - \beta\hat{z})$$

接著計算  $\hat{r} \times (\vec{u} \times \vec{a})$

$$\hat{r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) = (\hat{r} \cdot \vec{a})\vec{u} - (\hat{r} \cdot \vec{u})\vec{a} = ca[(\hat{r} \cdot \hat{x})(\hat{r} - \beta\hat{z}) - (1 - \beta\hat{r} \cdot \hat{z})\hat{x}]$$

因  $\vec{r} = r(\sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z})$ 、 $\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$ ，所以  $\hat{r} \cdot \hat{x} = \sin\theta \cos\phi$ 、 $\hat{r} \cdot \hat{z} = \cos\theta$ ，代入得

$$\hat{r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) = ca[\sin\theta \cos\phi (\sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + (\cos\theta - \beta)\hat{z}) - (1 - \beta \cos\theta)\hat{x}]$$

分別對三個分量平方

$$|\hat{r} \times (\vec{u} \times \vec{a})|^2 = c^2 a^2 \{ \sin^2 \theta \cos^2 \phi [(\sin\theta \sin\phi)^2 + (\cos\theta - \beta)^2] + (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1 + \beta \cos\theta)^2 \}$$

展開

$$(1 - \beta \cos\theta)^2 - 2(1 - \beta \cos\theta) \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi - 2\beta \sin^2 \theta \cos\theta \cos^2 \phi + \beta^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi$$

整理可得

$$|\hat{r} \times (\vec{u} \times \vec{a})|^2 = (1 - \beta \cos\theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi \quad (20)$$

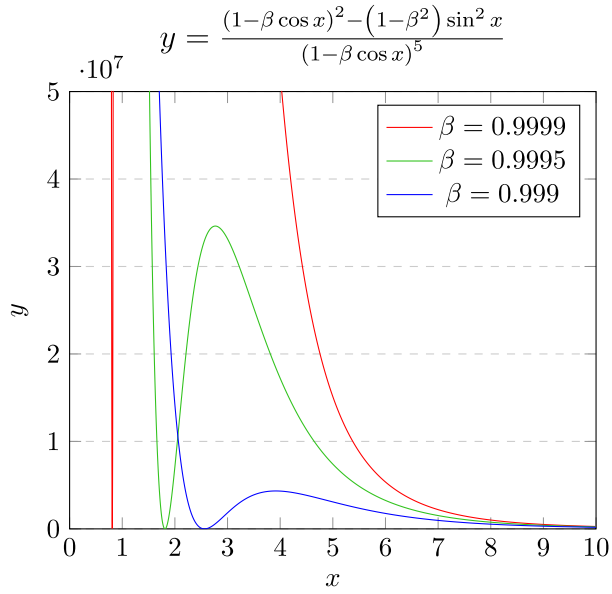
易知

$$\hat{r} \cdot \vec{u} = c(1 - \beta \cos\theta) \quad (21)$$

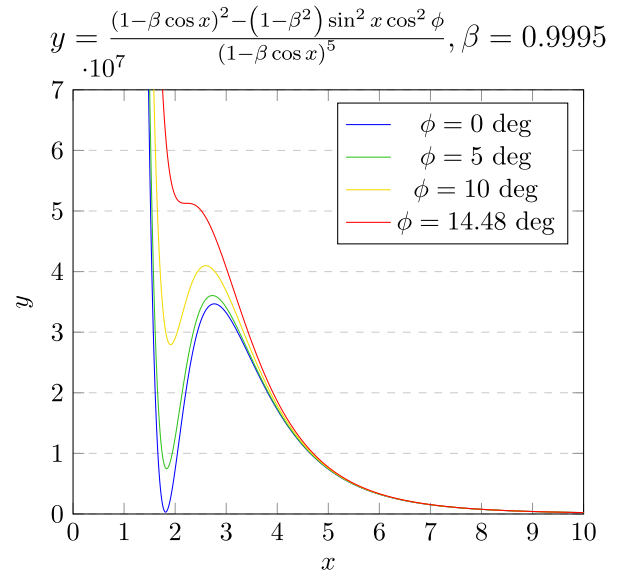
將(20)(21)式代入(18)式可得到輻射功率角分布為

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{(1 - \beta \cos\theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(1 - \beta \cos\theta)^5} \quad (22)$$

繪圖如下



(圖 2)輻射功率角分布與速度的關係圖。



(圖 3)輻射功率角分布與方向角的關係圖。

## 2. 輻射功率角分布的極值

$$f(\theta) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$

$$f(\theta) = -\frac{3\beta \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^4} - (1 - \beta^2) \cos^2 \phi \left[ \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} - \frac{5\beta \sin^3 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6} \right]$$

當  $f(\theta) = 0$  時發生最大值

$$-3\beta(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \cos^2 \phi [2 \cos \theta (1 - \beta \cos \theta) - 5\beta \sin^2 \theta] = 0$$

$$1 - \beta \cos \theta = 0$$

易知下式根本不可能滿足。令  $t = \cos \theta$ 、 $u = \cos^2 \phi$ ，則上式經化簡後可得到  $t$  必須滿足

$$At^2 + Bt + C = 0$$

係數分別為

$$A = 3\beta[\beta^2(1 - u) + u]$$

$$B = 2[u - \beta^2(3 + u)]$$

$$C = \beta[(3 - 5u) + 5\beta^2 u]$$

在趨近於光速的情況下，令速度  $\beta = 1 - \bar{\beta}$  ( $\bar{\beta} \ll 1$ )，則以上三個量變為

$$A = 3(1 - \bar{\beta})[1 - 2(1 - u)\bar{\beta} + (1 - u)\bar{\beta}^2] = 3[1 - (3 - 2u)\bar{\beta} + 3(1 - u)\bar{\beta}^2]$$

$$B = -6 \left[ 1 - \frac{2}{3}(3 + u)\bar{\beta} + \frac{1}{3}(3 + u)\bar{\beta}^2 \right]$$

$$C = (1 - \bar{\beta})(3 - 10u\bar{\beta} + 5u\bar{\beta}^2) = 3 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{10}{3}u \right) \bar{\beta} + 5u\bar{\beta}^2 \right]$$

由一元二次方程式根公式

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$



先計算  $B^2 - 4AC$

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= 36 \left[ 1 - \frac{2}{3}(3+u)\bar{\beta} + \frac{1}{3}(3+u)\bar{\beta}^2 \right]^2 \\ &\quad - 36 \left[ 1 - (3-2u)\bar{\beta} + 3(1-u)\bar{\beta}^2 \right] \left[ 1 - \left( 1 + \frac{10}{3}u \right) \bar{\beta} + 5u\bar{\beta}^2 \right] \\ &= 16u(16u+15)\bar{\beta}^2 + \mathcal{O}(\bar{\beta}^3) \end{aligned}$$

帶回根公式可得

$$t = \frac{1 - \left( 2 + \frac{2}{3}u \pm \frac{2}{3}\sqrt{u(16u-15)} \right) \bar{\beta}}{1 - (3-2u)\bar{\beta}} = 1 - \left( -1 + \frac{8}{3}u \pm \frac{2}{3}\sqrt{u(16u-15)} \right) \bar{\beta}$$

由  $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ ，並將  $u$  代入可得

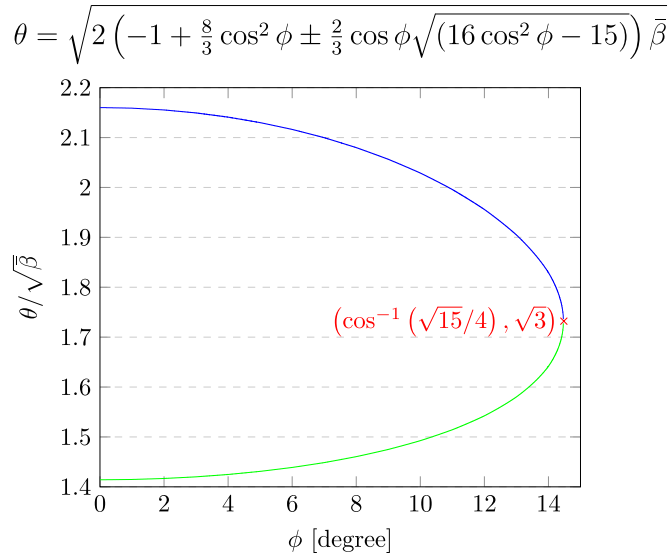
$$\theta = \sqrt{2 \left( -1 + \frac{8}{3}\cos^2 \phi \pm \frac{2}{3}\cos \phi \sqrt{16\cos^2 \phi - 15} \right) \bar{\beta}} \quad (23)$$

若有極大值必須符合以下兩個條件

$$-1 + \frac{8}{3}\cos^2 \phi \pm \frac{2}{3}\cos \phi \sqrt{16\cos^2 \phi - 15} > 0$$

$$16\cos^2 \phi - 15 > 0$$

由上式可知  $\phi \leq \cos^{-1}(\sqrt{15}/4) \approx 14.48^\circ$  處皆會發生極值，也就是在速度方向上能夠偵測到最大的光強度。



(圖 4)輻射功率極值的角度  $\theta$  與  $\phi$  的關係圖。藍線為取正號、綠線為取負號。

特別地，在  $\phi = 0$  處的兩個極值角度分別為

$$\theta = \sqrt{2\bar{\beta}}, \sqrt{\frac{14}{3}\bar{\beta}}$$

注意到 $\sqrt{1-\beta^2} = 1/\gamma \approx \sqrt{2(1-\beta)} = \sqrt{2\bar{\beta}}$ ，因此上式改寫為

$$\theta = \frac{1}{\gamma}, \frac{\sqrt{7/3}}{\gamma} \quad (24)$$

注意到在 $\phi = 0$ 處有個角度 $\theta$ 的方向上不會有輻射功率。易知此時 $\theta$ 符合的方程式為

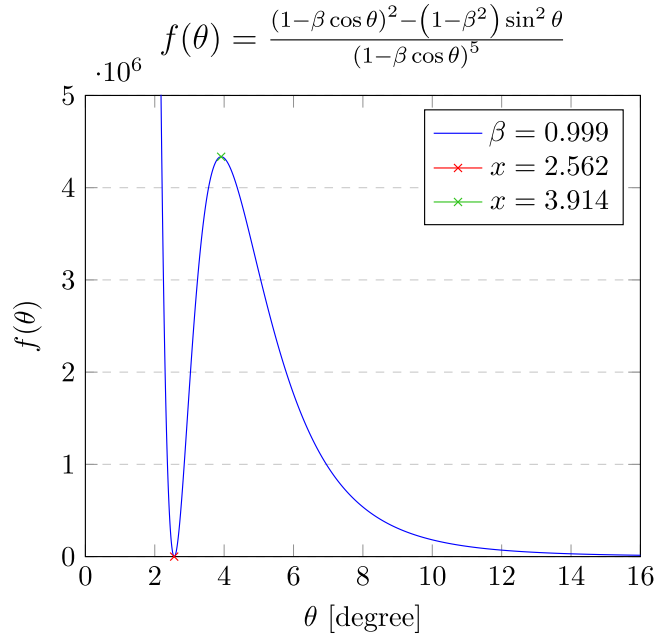
$$(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta = 0$$

$$\cos \theta = \beta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$

得到 $\theta \approx \sqrt{2(1-\beta)} = \sqrt{2\bar{\beta}}$ 。所以此點不只是極值還是零。事實上除了 $\phi = 0$ 時的一個極值會為零，其餘角度 $\phi$ 的極值皆不會為零。利用作圖來驗證上述內容，假設 $\beta = 0.999$ 且 $\phi = 0$ ，則兩個極值角度分別為

$$\sqrt{2\bar{\beta}} = 0.04472(\text{rad}) = 2.562^\circ, \quad \sqrt{\frac{14}{3}\bar{\beta}} = 0.06831(\text{rad}) = 3.914^\circ$$

繪圖如下



(圖 5)輻射功率角分布。

### 3. 輻射總功率

立體角 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ 代入

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{\sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^3} - (1 - \beta^2) \frac{\sin^3 \theta \cos^2 \phi}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \right] d\theta d\phi$$

兩個積分分別為

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^3} d\theta = -\frac{1}{2\beta} (1 - \beta \cos \theta)^{-2} \Big|_0^\pi = \frac{2}{(1 - \beta^2)^2}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} d\theta = \int_{-1}^1 \frac{1 - u^2}{(1 - \beta u)^5} du = \frac{u}{6\beta^2(1 - \beta u)^3} - \frac{1}{12\beta^2(1 - \beta u)^2} \Big|_0^\pi = \frac{4}{3(1 - \beta^2)^3}$$

代入可得

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi c} \left[ \frac{4}{(1 - \beta^2)^2} - \frac{4}{3(1 - \beta^2)^2} \right]$$

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^4}{6\pi c} a^2$$

注意到  $|\vec{v} \times \vec{a}| = va$ ，由(19)式

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left( a^2 - \left| \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{c} \right|^2 \right) = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) a^2 = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^4}{6\pi c} a^2$$

的確符合 Liénard's Generalization。但是我們需要更廣義的證明。

## (二)廣義情況的輻射總功率

(18)式的另一種形式為

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\left| \hat{\mathbf{r}} \times [(\hat{\mathbf{r}} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \right|^2}{(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta})^5} \quad (25)$$

首先化簡上部

$$\left| \hat{\mathbf{r}} \times [(\hat{\mathbf{r}} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \right|^2 = \left| \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\beta}}) - \hat{\mathbf{r}} \times (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}) \right|^2$$

由向量三重積  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ ，上式變為

$$\left| (\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \hat{\mathbf{r}} - \dot{\vec{\beta}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta}) \dot{\vec{\beta}} + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta}) \dot{\vec{\beta}} \right|^2$$

$$\left| (\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\beta}}) (\hat{\mathbf{r}} - \vec{\beta}) - (1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta}) \dot{\vec{\beta}} \right|^2$$

直接爆開計算

$$(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 (1 - 2\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta} + \beta^2) + (1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta})^2 \dot{\beta}^2 - 2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\beta}})(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta})(\hat{\mathbf{r}} - \vec{\beta}) \cdot \dot{\vec{\beta}} \quad (26)$$

注意到最左邊那項可化簡為

$$-2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 (1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta}) + 2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\beta}})(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta})(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})$$

因此(26)式可以化簡為

$$-(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 (1 - \beta^2) + (1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta})^2 \dot{\beta}^2 + 2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\beta}})(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta})(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})$$

代回(42)並對立體角積分

$$P = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \int \left[ -\frac{1}{\gamma^2} \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2}{(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta})^5} + \frac{\dot{\beta}^2}{(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta})^3} + \frac{2(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta})^4} \right] d\Omega \quad (27)$$

不難發現，我們只需要求出以下三個積分，分別令其為 $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$

$$I_1 = \int \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2}{(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta})^5} d\Omega \quad (28)$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta})^3} d\Omega \quad (29)$$

$$I_3 = \int \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\beta}}}{(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta})^4} d\Omega \quad (30)$$

事實上 $I_1$ 和 $I_3$ 要直接求出非常難，我們可以先處理 $I_2$ 。

取一平面使得 $\hat{\mathbf{r}}$ 與 $\vec{\beta}$ 共平面，且在此平面上兩者夾 $\theta$ 角，而立體角 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ ，代入(29)式

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{(1 - \beta \cos\theta)^3} d\theta d\phi$$

你會發現這其實是非常簡單的積分，結果為

$$I_2 = 4\pi\gamma^4 \quad (31)$$

接著我們將利用 $I_2$ 的結果來求得 $I_3$ ，此方法稱為費曼積分法。費曼積分法為對積分內的參數做微分，使一個乘積形式的被積函數化為一個已知的被積函數。對 $I_2$ 作對時間的微分可得

$$\frac{dI_2}{dt} = 3 \int \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\beta}}}{(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta})^4} d\Omega = 3I_3$$

又右半部可以求得為<sup>5</sup>

$$\frac{dI_2}{dt} = 4\pi \frac{d(\gamma^4)}{dt} = 16\pi\gamma^6 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})$$

所以 $I_3$ 為

$$I_3 = \frac{16}{3} \pi \gamma^6 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \quad (32)$$

再對 $I_3$ 微分可得

$$\frac{dI_3}{dt} = \int 4 \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2}{(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta})^5} d\Omega + \int \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\vec{\beta}}}{(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\beta})^4} d\Omega$$

又右半部可以求得為

$$\frac{dI_3}{dt} = \frac{16}{3} \pi \frac{d}{dt} [\gamma^6 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})] = \frac{16}{3} \pi \left[ 6\gamma^8 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 + \gamma^6 (\dot{\beta}^2 + \vec{\beta} \cdot \ddot{\vec{\beta}}) \right]$$

<sup>5</sup>  $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\beta})^{-1/2} = \gamma^3 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})$

左半部的積分根本就跟 $I_3$ 一模一樣，只需將 $\dot{\vec{\beta}}$ 換為 $\ddot{\vec{\beta}}$ 即可，經過計算可得

$$I_1 = \frac{4}{3}\pi\gamma^6 \left[ \dot{\beta}^2 + 6\gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \right] \quad (33)$$

將 $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 的結果代入(27)式可得

$$P = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \left\{ -\frac{4}{3}\pi\gamma^4 \left[ \dot{\beta}^2 + 6\gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \right] + 4\pi\gamma^4 \dot{\beta}^2 + \frac{32}{3}\pi\gamma^6 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \right\} \quad (34)$$

$$P = \frac{q^2\gamma^6}{6\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{1}{\gamma^2} \dot{\beta}^2 + (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \right] \quad (35)$$

注意到

$$(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 = \beta^2 \dot{\beta}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2$$

因此

$$P = \frac{q^2\gamma^6}{6\pi\epsilon_0 c} \left[ \dot{\beta}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2 \right]$$

將 $\vec{\beta}$ 換回 $\vec{v}$ 可得

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left( a^2 - \left| \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{c} \right|^2 \right) \quad (36)$$

### (三)輻射功率是羅倫茲不變量

事實上輻射功率 $P$ 是羅倫茲不變量，其形式<sup>6</sup>為

$$P = \frac{q^2}{6\pi m^2 \epsilon_0 c^3} \frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (37)$$

其中 $p^\mu$ 為動量四向量。 $p^\mu = (-E/c, \vec{p})$ ，可得 $p_\mu p^\mu = -E^2/c^2 + p^2$ ，其中 $E$ 為電荷運動的能量。

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} = -\left( \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= mc^2 \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{d\tau} = mc^2 \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \\ \frac{d\vec{p}}{d\tau} &= mc \frac{d(\gamma \vec{\beta})}{dt} \frac{dt}{d\tau} = mc \gamma^4 \left[ (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{\beta} + \frac{1}{\gamma^2} \dot{\vec{\beta}} \right] \end{aligned}$$

代入可得

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} = m^2 c^2 \gamma^8 \left[ -(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 + (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \beta^2 + \frac{2}{\gamma^2} (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 + \frac{1}{\gamma^4} \dot{\beta}^2 \right]$$

<sup>6</sup> J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, 3d ed, Sect. 14.2, P.660

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} = m^2 c^2 \gamma^6 \left[ \left( \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \dot{\beta}^2 \right]$$

輻射功率為

$$P = \frac{q^2 \gamma^6}{6\pi \epsilon_0 c} \left[ \left( \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \dot{\beta}^2 \right]$$

與(35)式相同。

### 三、 電子墜落至原子核的時間估算

假設電子繞原子核可以用波耳模型做近似，波耳模型的兩條假設如下

$$\begin{aligned} n\hbar &= mrv \\ \frac{mv^2}{r} &= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

將 $v = n\hbar/mr$ 代入得到

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{me^2 Z} = 5.292 \times 10^{-11} \frac{n^2}{Z} \text{ m} \quad (38)$$

$$v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n} Z = 2.188 \times 10^6 \frac{Z}{n} \text{ ms}^{-1} \quad (39)$$

僅考慮處於氫原子基態的電子，則 $n = 1$ 、 $Z = 1$ ，由(39)式可以知道 $\beta \ll 1$ 。因此過程可視為古典情況，使用拉莫爾公式即可。初始軌道半徑為

$$r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \quad (40)$$

假設運動過程中任何時刻皆可以近似為圓周運動，則加速度可以由牛頓第二定律求得

$$a = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mr^2}$$

因此可得

$$P = \frac{\mu_0 e^2 a^2}{6\pi c} = \frac{1}{96} \left(\frac{Z}{m}\right)^2 \left(\frac{e^2}{\pi c \epsilon_0}\right)^3 \frac{1}{r^4}$$

能量為

$$E = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

由 $dE/dt = -P$ 可得

$$\begin{aligned} -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{1}{96} \left(\frac{Z}{m}\right)^2 \left(\frac{e^2}{\pi c \epsilon_0}\right)^3 \frac{1}{r^4} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{Z}{12c^3} \left(\frac{e^2}{\pi m \epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4} \end{aligned}$$

兩邊積分得到電子墜落至原子核的時間 $\Delta t$ 為

$$\Delta t = \frac{4c^3}{Z} \left(\frac{\pi m \epsilon_0}{e^2}\right)^2 r_0^3$$

代入(40)式可得

$$\Delta t = 4c^3 \left(\frac{\pi m \epsilon_0}{e^2}\right)^2 \left(\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}\right)^3 \approx 1.556 \times 10^{-11} \text{ s}$$

現在回頭驗證「任何時刻皆可以近似為圓周運動」這個假設。估算電子繞核的平均徑向速率 $\bar{v}_r$ 為

$$\bar{v}_r = \frac{r_0}{\Delta t} = 3.401 \text{ ms}^{-1}$$

會發現其遠小於 $v$ ，所以假設合理。



# 肆、相對論性電磁學 Relativistic Electrodynamics

## 一、受力問題

在 S 系中，有一沿  $x$  軸方向延伸之線密度為  $\lambda$  的線電荷以速度  $\vec{v} = v\hat{x}$  前進，此時與其距離  $s$  處有另一帶電量為  $q$  的點電荷以速度  $\vec{u} = u\hat{x}$  前進。現在來探討兩者的受力關係。

定義 S' 系中觀察到的物理量下標帶有  $\pm$  號。定義 S' 系以點電荷為原點，與其速度相同。則根據相對論速度合成公式，可得到 S' 系中線電荷的移動速率為

$$v_{\pm} = \frac{v \mp u}{1 \mp uv/c^2}$$
$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\pm}^2/c^2}}$$

現在要求出  $\lambda_{\pm}$  與  $\lambda$  的關係。先假設此線電荷在靜止時的線密度為  $\lambda_0$ 。又因電荷為不變量(即使是相對論亦同)，可列出

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta x} = \frac{\Delta Q_0}{\Delta x} = \frac{\Delta x_0}{\Delta x} \lambda_0$$

則根據勞倫茲轉換可得到  $\Delta x = \Delta x_0/\gamma$ ，則

$$\lambda = \gamma \lambda_0 \quad (41)$$

同理可知

$$\lambda_{\pm} = \gamma_{\pm} \lambda_0 \quad (42)$$

由上式易知，在 S' 系中，總線電荷並不為零，而是

$$\lambda' = \lambda_+ - \lambda_- = \lambda_0(\gamma_+ - \gamma_-)$$

處理代數運算，可得結果為

$$\lambda' = - \left( \frac{2uv}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) \lambda_0 = - \left( \frac{2uv}{c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) \lambda \quad (43)$$

因此在 S' 系中，電場與磁場的分布為

$$\begin{cases} \vec{E}' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{r}' = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 s} \frac{uv}{c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}} \hat{r}' = -\frac{\mu_0 \lambda}{\pi s} \frac{uv}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \hat{r}' \\ \vec{B}' = 0 \end{cases} \quad (44)$$

點電荷受力為

$$\vec{F}' = q\vec{E}' = -\frac{\mu_0 q \lambda}{\pi s} \frac{uv}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \hat{r}' \quad (45)$$

回到 S 系中，電場與磁場的分布為

$$\begin{cases} \vec{E} = 0 \\ \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 \lambda v}{\pi s} \hat{\phi} \end{cases} \quad (46)$$

點電荷受力為

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = -\frac{\mu_0 q \lambda uv}{\pi s} \hat{r} \quad (47)$$

因垂直運動方向上的座標轉換不變，所以  $\hat{r} = \hat{r}'$ ，可得到

$$\vec{F} = \vec{F}'$$

可得知電與磁事實上是相同的。

## 二、電與磁的相對論變換

### (一) 電流密度四向量 Current density 4-vector

電流密度四向量  $J^\mu$  (Current density 4-vector) 為

$$J^\mu = \rho_0 \eta^\mu = (\rho c, \vec{J})$$

電荷守恆定律

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

以四向量表示的電荷守恆定律

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

### (二) 電磁場張量

在真空介質的情況下，定義兩個電磁場張量分別為 Field Tensor  $F^{\mu\nu}$  與 Dual Tensor  $G^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & E_z/c \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

張量形式的 Maxwell equation 為

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\mu$$

$$\frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

注意到兩者的之間的不變量

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2/c^2)$$

$$F^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = -\frac{4}{c} \vec{E} \cdot \vec{B}$$

在有介質的情況下，定義兩個電磁場張量分別為 Field Tensor  $D^{\mu\nu}$  與 Dual Tensor  $H^{\mu\nu}$

$$D^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cD_x & cD_y & cD_z \\ -cD_x & 0 & H_z & -H_y \\ -cD_y & -H_z & 0 & H_x \\ -cD_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & -cD_z & cD_y \\ -H_y & cD_z & 0 & -cD_x \\ -H_z & -cD_y & cD_x & 0 \end{pmatrix}$$

張量形式的 Maxwell equation 為

$$\frac{\partial D^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = J_f^\mu$$

$$\frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

四者之間的關係為

$$D^{\mu\nu}\eta_\nu = c^2\epsilon F^{\mu\nu}\eta_\nu \quad (48)$$

$$H^{\mu\nu}\eta_\nu = \frac{1}{\mu} G^{\mu\nu}\eta_\nu \quad (49)$$

上式稱為 relativistic constitutive relations。其中  $\eta_\nu = (-\gamma c, \gamma \vec{u})$ 。以下來計算相對論情況下的電位移  $\vec{D}$  與磁場強度  $\vec{H}$ ，若此時物體以速度  $\vec{u}$  移動。定義  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 、 $\beta_0 = v/c$ 、 $\gamma_0 =$

$$1/\sqrt{1-v^2/c^2}、\beta = u/c、\gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}。$$

先處理(48)式，分別對不同的  $\mu$  值去做討論

$$D^{0\nu}\eta_\nu = \gamma c(u_x D_x + u_y D_y + u_z D_z) = \gamma c(\vec{u} \cdot \vec{D})$$

$$D^{1\nu}\eta_\nu = \gamma(c^2 D_x + u_y H_z - u_z H_y) = \gamma(c^2 \vec{D} + \vec{u} \times \vec{H})_x$$

$$F^{0\nu}\eta_\nu = \frac{\gamma}{c}(u_x E_x + u_y E_y + u_z E_z) = \frac{\gamma}{c}(\vec{u} \cdot \vec{E})$$

$$F^{1\nu}\eta_\nu = \gamma(E_x + u_y B_z - u_z B_y) = \gamma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})_x$$

比對可得

$$\vec{u} \cdot \vec{D} = \epsilon(\vec{u} \cdot \vec{E}) \quad (50)$$

$$\vec{D} + \frac{\vec{u}}{c^2} \times \vec{H} = \epsilon(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (51)$$

同理處理(49)式

$$H^{0\nu}\eta_\nu = \gamma(u_x H_x + u_y H_y + u_z H_z) = \gamma(\vec{u} \cdot \vec{H})$$

$$H^{1\nu}\eta_\nu = \gamma(c H_x - c u_y D_z + c u_z D_y) = \gamma(\vec{H} - \vec{u} \times \vec{D})_x$$

$$G^{0\nu}\eta_\nu = \gamma(u_x B_x + u_y B_y + u_z B_z) = \gamma(\vec{u} \cdot \vec{B})$$

$$G^{1\nu}\eta_\nu = \gamma \left( cB_x - \frac{u_y}{c}E_z + \frac{u_z}{c}E_y \right) = \gamma c \left( \vec{B} - \frac{\vec{u}}{c^2} \times \vec{E} \right)_x$$

比對可得

$$\vec{u} \cdot \vec{H} = \frac{1}{\mu} (\vec{u} \cdot \vec{B}) \quad (52)$$

$$\vec{H} - \vec{u} \times \vec{D} = \frac{1}{\mu} \left( \vec{B} - \frac{\vec{u}}{c^2} \times \vec{E} \right) \quad (53)$$

由(51)(53)式可得

$$\begin{aligned} \vec{D} + \frac{\vec{u}}{c^2} \times \left[ \vec{u} \times \vec{D} + \frac{1}{\mu} \left( \vec{B} - \frac{\vec{u}}{c^2} \times \vec{E} \right) \right] &= \epsilon (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \\ \vec{D} &= \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \left[ \epsilon (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - \frac{\vec{u}}{\mu c^2} \times \left( \vec{B} - \frac{\vec{u}}{c^2} \times \vec{E} \right) - \frac{\vec{u}}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{D}) \right] \end{aligned}$$

代入(50)式，化簡可得

$$\vec{D} = \frac{\epsilon}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \left[ \left( 1 - \frac{u^2 v^2}{c^4} \right) \vec{E} + \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left( \vec{u} \times \vec{B} - \frac{\vec{u}}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{E}) \right) \right]$$

使用代號替換後上式可寫為

$$\vec{D} = \gamma^2 \epsilon \left[ (1 - \beta^2 \beta_0^2) \vec{E} + \frac{1}{\gamma_0^2} \left( \vec{u} \times \vec{B} - \frac{\vec{u}}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{E}) \right) \right] \quad (54)$$

由(51)(53)式可得

$$\vec{H} = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \left[ \epsilon \vec{u} \times (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu} \left( \vec{B} - \frac{\vec{u}}{c^2} \times \vec{E} \right) - \frac{\vec{u}}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{H}) \right]$$

代入(52)式，化簡可得

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \left[ \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) (\vec{u} \times \vec{E} + (\vec{u} \cdot \vec{B}) \vec{u}) + \left( 1 - \frac{u^2}{v^2} \right) \vec{B} \right]$$

使用代號替換後上式可寫為

$$\vec{H} = \frac{\gamma^2}{\mu} \left[ \frac{1}{v^2 \gamma_0^2} (\vec{u} \times \vec{E} + (\vec{u} \cdot \vec{B}) \vec{u}) + \left( 1 - \frac{\beta^2}{\beta_0^2} \right) \vec{B} \right] \quad (55)$$

### (三)四向量勢 4-vector potential

四向量勢(4-vector potential)為

$$A^\mu = (V/c, \vec{A})$$

與 field tensor 的關係為

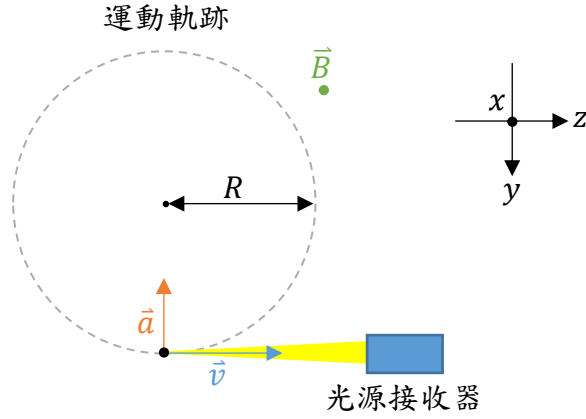
$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}$$

與 retarded potential 的關係為

$$A^\mu = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\eta^\mu}{\eta^\nu r_\nu}$$

## 伍、自由電子雷射

環形粒子加速器利用磁場使粒子偏轉，形成圓周運動。在接近光源接收器時，利用聚頻磁鐵來控制粒子的震盪，使其在發出對應頻率的光源，以探測粒子的性質。



(圖 6)電子運動軌跡示意圖。因輻射發出的光束會集中照射在光源接收器。

以下分為三個部分：第一部分先探討給定磁場情況下的自由電子運動模式。第二部分定量計算海爾貝克陣列的磁場，以擬合第一部分的磁場的條件。第三部分則為總結。

### 一、自由電子的運動模式

由相對論情況下的牛頓第二定律可得

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} = \gamma^3 m \left( \frac{1}{\gamma^2} \vec{a} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} \right)$$

其中  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ 。若此時有電場  $\vec{E}$  與磁場  $\vec{B}$  的作用，則

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

注意到上式的  $\vec{F}$  在任何坐標系都會成立。在此利用一個小技巧，先算  $\vec{F} \cdot \vec{v}$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \gamma^3 m \left( \frac{1}{\gamma^2} \vec{v} \cdot \vec{a} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} v^2 \right) = q \vec{v} \cdot \vec{E}$$

整理可得

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{q}{\gamma^3 m} \vec{v} \cdot \vec{E}$$

代回可求得  $\vec{a}$  為

$$\vec{a} = \frac{q}{\gamma m} \left[ \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - (\vec{v} \cdot \vec{E}) \frac{\vec{v}}{c^2} \right]$$

在電子雷射中，我們通常使用磁場來控制電子的運動，因此

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{\gamma m} \vec{v} \times \vec{B}$$

注意到在旋轉坐標系下有

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v}$$

假設磁場為

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_r(\vec{r}) + \vec{B}_v(\vec{r})$$

$\vec{B}_r(\vec{r})$ 為使粒子繞加速器旋轉的磁場、 $\vec{B}_v(\vec{r})$ 為使粒子振盪的磁場。因此可得

$$\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\frac{e}{\gamma m} \vec{v} \times \vec{B}_r(\vec{r})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{\gamma m} \vec{v} \times \vec{B}_v(\vec{r})$$

為使粒子的旋轉角速度為定值， $\vec{B}_r$ 也應為定值， $\vec{B}_r = B_r \hat{x}$ ，所以有

$$\vec{\Omega} = \frac{eB_r}{\gamma m} \hat{x}$$

若迴旋半徑為 $R$ ，如(圖 6)所示，則粒子的速度為

$$\vec{v} = \frac{eB_r R}{\gamma m} \hat{\theta}$$

考慮最簡單的情況，即振盪磁場隨著 $z$ 座標週期改變

$$\vec{B}_v(\vec{r}) = B_0 \cos kz \hat{x} \quad (56)$$

將 $\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$ 代入，得到兩個方向上的微分方程式

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{eB_0}{\gamma m} v_z \cos kz \quad (57)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{eB_0}{\gamma m} v_y \cos kz \quad (58)$$

注意到 $\gamma$ 也是參數。考慮能量的變化

$$\frac{dE}{dt} = -e(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

又 $E = \gamma mc^2$ ，故 $\gamma$ 為常數，之後令 $\gamma(t) = \gamma$ 。假設電子的初始速度為 $\vec{v}_0 = v_0 \hat{z}$ ，因此可以知道

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_0^2 \quad (59)$$

將(57)式同時乘上 $dt$ 可得

$$dv_y = -\frac{eB_0}{\gamma m} \cos kz dz$$

積分得

$$v_y = -\frac{eB_0}{\gamma m k} \sin kz$$

$$v_z dv_z = -\frac{1}{k} \left( \frac{eB_0}{\gamma m} \right)^2 \sin kz \cos kz dz$$

兩邊同時積分並代入初始條件

$$\frac{1}{2}(v_z^2 - v_0^2) = -\left(\frac{eB_0}{\gamma mk}\right)^2 \frac{1}{4}(1 - \cos 2kz) = -\frac{1}{2}\left(\frac{eB_0}{\gamma mk}\right)^2 \sin^2 kz$$

$$v_z = \sqrt{v_0^2 - \left(\frac{eB_0}{\gamma mk}\right)^2 \sin^2 kz}$$

利用 $\gamma$ 表示

$$v_z = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2} - \left(\frac{eB_0}{\gamma mkc}\right)^2 \sin^2 kz}$$

你可以檢查 $v_x^2 = v_0^2 - v_y^2 - v_z^2 = 0$ 。為了方便計算，定義無因次常數 $G$ 為

$$G = \frac{eB_0}{mkc}$$

因此 $\vec{\beta}$ 可寫為

$$\vec{\beta} = -\frac{G}{\gamma} \sin kz \hat{y} + \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2} (1 + G^2 \sin^2 kz)} \hat{z}$$

在速率 $v_0$ 接近光速的情況下( $\gamma \gg 1$ ，且 $\gamma/G \gg 1$ )對 $\beta_z$ 做泰勒展開

$$\beta_z = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} (1 + G^2 \sin^2 kz)$$

可計算 $\beta_z$ 對時間的平均值 $\bar{\beta}_z$ 為

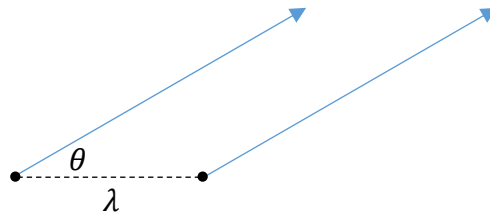
$$\bar{\beta}_z = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{G^2}{4\gamma^2} \quad (60)$$

因為電子會在 $y$ 方向上來回振盪，所以電子發射電磁波的頻率應該會跟振盪頻率有關。利用波長的關係可推得電磁波共振時的條件為

$$cT - \lambda \cos \theta = n\lambda_0$$

$\lambda_0$ 為電磁波波長， $n$ 為正整數。電子振盪週期 $T = \lambda/\bar{\beta}_z c$ 。代入得

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{n} \left( \frac{1}{\bar{\beta}_z} - \cos \theta \right) \quad (61)$$



(圖 7)電磁波共振條件示意圖。

注意在 $\theta = 0$ 時

$$\lambda_0 \approx \frac{\lambda}{2n\gamma^2} \left( 1 + \frac{G^2}{2} \right)$$

此時的共振頻率為最大，能產生能量最強的光。

## 二、海爾貝克陣列(Halbach Array)

為了產生如(56)式以正弦方式震盪的磁場，並且要求磁場夠強，我們可以使用海爾貝克陣列。海爾貝克陣列為一種磁鐵的排放陣列，它能形成所謂的單邊磁場，即一邊磁場變為零，使磁場集中於另一單邊，如下圖。

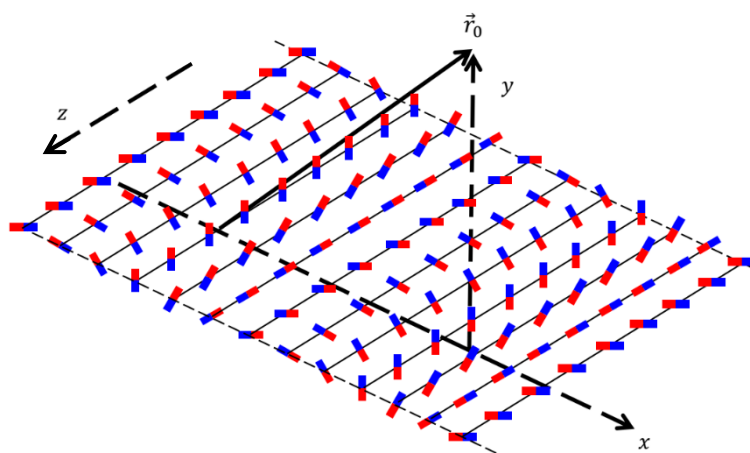


(圖 8)無限大海爾貝克陣列示意圖<sup>7</sup>。

可發現海爾貝克陣列運用的是將同極集中，來達到磁場集中的效果。以下為了定量分析，我們考慮磁鐵連續的角度變化，亦能得到單邊磁場的結果。

本題目參考自 <https://pho.rs/p/19>

考慮下圖的無限大平面磁陣列，磁鐵陣列位於xz平面上。磁鐵的磁矩方向向量為 $\sin \beta \hat{x} + \cos \beta \hat{y}$ ，旋轉角度可寫為 $\beta(x) = kx$ ，且 $k > 0$ 。注意下圖僅為示意圖，磁鐵應為連續分布。磁鐵的體積可忽略，且各處的磁矩面密度量值皆為 $\sigma$ 。試求空間中的磁場分布 $\vec{B}(x, y, z)$ 。



(圖 9)無限大海爾貝克陣列示意圖。

### (一)直角坐標

磁矩為 $\vec{m}$ 的磁偶極於位置 $\vec{r}$ 形成的磁場 $\vec{B}(\vec{r})$ 為

<sup>7</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Halbach\\_array](https://en.wikipedia.org/wiki/Halbach_array)



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}]$$

定義位置向量 $\vec{r}$ 為

$$\vec{r} = (x - x', y, z - z') = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

其中 $(x, y, z)$ 為觀測者的位置， $(x', y', z')$ 為磁偶極的位置。根據上述磁偶極的方向，可寫下

$$\vec{m} = m(\sin kx' \hat{x} + \cos kx' \hat{y})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r^3} [3(d\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - d\vec{m}]$$

代入 $d\vec{m} = \sigma dx' dz' (\sin kx' \hat{x} + \cos kx' \hat{y})$ 得

$$\frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^3} \left[ 3 \frac{\bar{x} \sin kx' + \bar{y} \cos kx'}{r^2} (\bar{x}\hat{x} + \bar{y}\hat{y} + \bar{z}\hat{z}) - (\sin kx' \hat{x} + \cos kx' \hat{y}) \right] dx' dz'$$

首先先去除對 $z$ 的奇函數，積分變為

$$\frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^3} \left[ 3 \frac{\bar{x} \sin kx' + \bar{y} \cos kx'}{r^2} (\bar{x}\hat{x} + \bar{y}\hat{y}) - (\sin kx' \hat{x} + \cos kx' \hat{y}) \right] dx' dz'$$

利用積分公式(見積分公式 1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{2}{a^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{5/2}} dz = \frac{4}{3a^4}$$

可將上式化簡為

$$\frac{\mu_0 \sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 2 \frac{\bar{x} \sin kx' + \bar{y} \cos kx'}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} (\bar{x}\hat{x} + \bar{y}\hat{y}) - \frac{\sin kx' \hat{x} + \cos kx' \hat{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \right] dx' \quad (62)$$

將 $x' = x - \bar{x}$ 代入再去除對 $\bar{x}$ 的奇函數可得前項及後項變為

$$\frac{\bar{x}^2 \sin kx \cos k\bar{x} \hat{x} - \bar{x}\bar{y} \cos kx \sin k\bar{x} \hat{y} + \bar{y}^2 \cos kx \cos k\bar{x} \hat{y} + \bar{x}\bar{y} \sin kx \sin k\bar{x} \hat{x}}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} \quad (63)$$

$$\frac{\sin kx \cos k\bar{x} \hat{x} + \cos kx \cos k\bar{x} \hat{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \quad (64)$$

現在我們剩下四個積分要處理，其值分別為(見積分公式 2)

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos kx}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{\pi}{2|y|} e^{-k|y|} (1 - k|y|)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin kx}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{\pi}{2|y|} k e^{-k|y|}$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{\pi}{2|y|^3} e^{-k|y|} (1 + k|y|)$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2 + y^2} dx = \frac{\pi}{|y|} e^{-k|y|}$$

以 $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$ 化簡(62)式

$$\frac{\mu_0 \sigma}{2\pi} \{ 2[I_1 \sin kx \hat{x} - I_2 \bar{y} \cos kx \hat{y} + I_3 \bar{y}^2 \cos kx \hat{y} + I_2 \bar{y} \sin kx \hat{x}] - I_4 (\sin kx \hat{x} + \cos kx \hat{y}) \}$$

因為我們定磁鐵陣列位於xz平面，所以 $y' = 0$ ， $y = \bar{y}$ ，以下皆以 $y$ 表示

$$B_x = \frac{\mu_0 \sigma}{2\pi} [2(I_1 + I_2 y) - I_4] \sin kx = \begin{cases} 0, & y > 0 \\ -\mu_0 \sigma k e^{ky} \sin kx, & y < 0 \end{cases}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 \sigma}{2\pi} [2(-I_2 y + I_3 y^2) - I_4] \cos kx = \begin{cases} 0, & y > 0 \\ \mu_0 \sigma k e^{ky} \cos kx, & y < 0 \end{cases}$$

將磁場分量合起來寫為

$$\vec{B}(x, y, z) = \begin{cases} 0, & y > 0 \\ \mu_0 \sigma k e^{ky} (-\sin kx \hat{x} + \cos kx \hat{y}), & y < 0 \end{cases} \quad (65)$$

得到海爾貝克陣列單邊磁場消失的結果。

## (二)技巧地利用三角函數

定義 $\vec{r}_0 = \bar{x}\hat{x} + \bar{y}\hat{y}$ ， $\hat{r}_0 = \vec{r}_0/r_0$ ，則(62)式變為<sup>8</sup>

$$\frac{\mu_0 \sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(\hat{m} \cdot \hat{r}_0) \hat{r}_0 - \hat{m}}{r_0^2} d\bar{x} \quad (66)$$

接下來試著把 $\vec{r}_0$ 以極座標表示： $\vec{r}_0 = r_0(-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y})$ 。注意到積分是在 $\bar{y}$ 為定值的條件下做計算，所以 $\bar{x}/\bar{y} = -\tan \theta$ 。

$$d\bar{x} = -\bar{y} \sec^2 \theta d\theta = -\frac{r_0^2}{\bar{y}} d\theta$$

如此一來若改以 $\theta$ 為積分參數，積分中的 $1/r_0^2$ 會消失，可以減少繁雜計算。其中 $\hat{m} \cdot \hat{r}_0 = \cos(\beta + \theta)$ 、 $\hat{m} = \sin \beta \hat{x} + \cos \beta \hat{y}$ 。

化簡上式<sup>9</sup>

$$\frac{\mu_0 \sigma}{2\pi |\bar{y}|} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [2 \cos(\beta + \theta) (-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}) - \sin \beta \hat{x} - \cos \beta \hat{y}] d\theta \quad (67)$$

根據三角和差公式

$$2 \cos(\beta + \theta) \sin \theta + \sin \beta = \cos(\beta + \theta) \sin \theta + \sin(\beta + \theta) \cos \theta = \sin(\beta + 2\theta)$$

$$2 \cos(\beta + \theta) \cos \theta - \cos \beta = \cos(\beta + \theta) \cos \theta - \sin(\beta + \theta) \sin \theta = \cos(\beta + 2\theta)$$

代入(67)式

$$\frac{\mu_0 \sigma}{2\pi |\bar{y}|} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [-\sin(\beta + 2\theta) \hat{x} + \cos(\beta + 2\theta) \hat{y}] d\theta \quad (68)$$

注意 $\beta = kx' = k(x - \bar{x}) = kx + k\bar{y} \tan \theta$ ，同上 $y' = 0$ ， $y = \bar{y}$ ，以下皆以 $y$ 表示

$$\frac{\mu_0 \sigma}{2\pi |y|} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [-\sin(kx + ky \tan \theta + 2\theta) \hat{x} + \cos(kx + ky \tan \theta + 2\theta) \hat{y}] d\theta \quad (69)$$

因為 $\sin(ky \tan \theta + 2\theta)$ 為對 $\theta$ 的奇函數，所以在積分時可以忽略，上式化簡為

$$\frac{\mu_0 \sigma}{2\pi |y|} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [-\sin kx \cos(ky \tan \theta + 2\theta) \hat{x} + \cos kx \cos(ky \tan \theta + 2\theta) \hat{y}] d\theta$$

積分結果為(見積分公式 3)

<sup>8</sup> 注意到積分變數 $dx'$ 變為 $d\bar{x}$ ，但又因為上下界會改變的關係，不須加負號。

<sup>9</sup> 因為分母為 $r_0^2$ ，必定為正數，所以(67)式的分母 $\bar{y}$ 須加絕對值。

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(ky \tan \theta + 2\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & y > 0 \\ -2\pi k y e^{ky}, & y < 0 \end{cases}$$

所以海爾貝克陣列產生的磁場為

$$\vec{B}(x, y, z) = \begin{cases} 0, & y > 0 \\ \mu_0 \sigma k e^{ky} (-\sin kx \hat{x} + \cos kx \hat{y}), & y < 0 \end{cases} \quad (70)$$

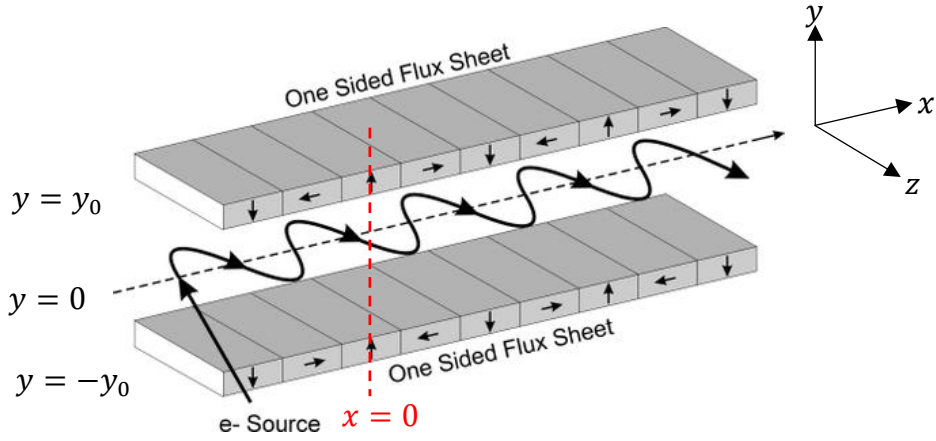
與直角坐標的結果(65)式相同。

注意我們可以使用兩個反向的海爾貝克陣列磁鐵達到單方向的強磁場，如下圖， $\vec{B}_1$ 為方程式  $y = y_0$  位置上的陣列所產生的磁場，反之 $\vec{B}_2$ 對應到  $y = -y_0$ 。其旋轉角可寫為

$$\beta_1(x) = kx, \quad \beta_2(x) = -kx$$

$$\vec{B}_1(x, y, z) = \begin{cases} 0, & y > y_0 \\ \mu_0 \sigma k e^{k(y-y_0)} (-\sin kx \hat{x} + \cos kx \hat{y}), & y < y_0 \end{cases}$$

$$\vec{B}_2(x, y, z) = \begin{cases} \mu_0 \sigma k e^{-k(y+y_0)} (\sin kx \hat{x} + \cos kx \hat{y}), & y > -y_0 \\ 0, & y < -y_0 \end{cases}$$



(圖 10)兩個反向的海爾貝克陣列所組成的單方向磁場示意圖<sup>10</sup>。

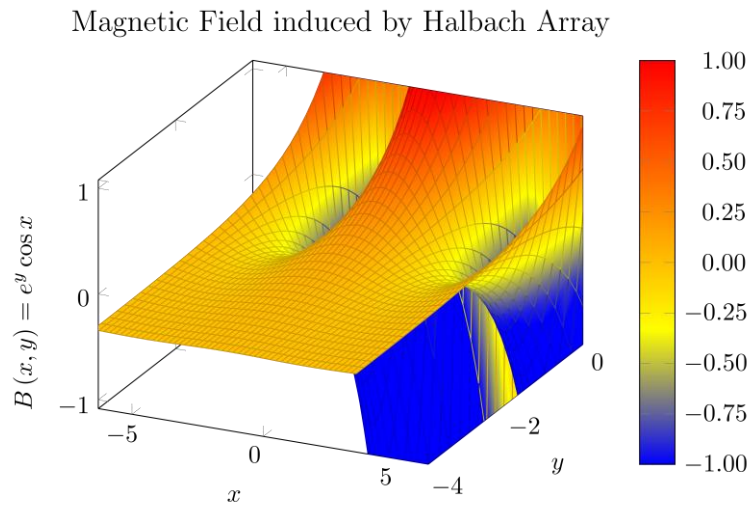
總磁場 $\vec{B}_{\text{tot}}(x, y, z)$ 為

$$\vec{B}_{\text{tot}}(x, y, z) = 2\mu_0 \sigma k e^{-ky_0} (-\sinh ky \sin kx \hat{x} + \cosh ky \cos kx \hat{y})$$

$y = 0$ 處的總磁場 $\vec{B}_{\text{tot}}(x, 0, z)$ 為

$$\vec{B}_{\text{tot}}(x, 0, z) = 2\mu_0 \sigma k e^{-ky_0} \cos kx \hat{y}$$

只要把電子軌跡的 $y$ 座標限制在 $k^{-1}$ 的尺度下，總磁場就可以近似為 $\vec{B}_{\text{tot}} = B_0 \cos kx \hat{y}$ 。此時只要把裝置轉 90 度角就能使磁場變成(56)式的形式。



(圖 11)兩個反向的海爾貝克陣列所組成的磁場分布。注意到係數皆已經單位化。

<sup>10</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Halbach\\_array](https://en.wikipedia.org/wiki/Halbach_array)

### (三)附錄一積分公式

#### 4. 積分公式 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

令  $z = a \tan \theta$ ，則  $dz = a \sec^2 \theta d\theta$

$$\frac{1}{a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{2}{a^2}$$

積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{5/2}} dz$$

同樣地，令  $z = a \tan \theta$ ，則  $dz = a \sec^2 \theta d\theta$

$$\frac{1}{a^4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{4}{3a^4}$$

#### 5. 積分公式 2

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos kx}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin kx}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2 + y^2} dx$$

可以先證明以下的積分公式<sup>11</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{|b|} e^{-k|b|} \quad (71)$$

注意到  $b > 0$  處與  $b < 0$  處積分值會不同，以上四個積分也會因為  $y$  的正負有所不同，但不難發現，只要把積分結果的  $y$  取代成  $|y|$  就會正確，因此我們可以先假設  $y > 0$  去計算。

注意  $I_4$  僅為(71)式的變形

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2 + y^2} dx = \frac{\pi}{|y|} e^{-k|y|}$$

注意  $\partial I_4 / \partial y = -2y I_3$ ，因此微分可得

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{\pi}{2|y|^3} e^{-k|y|} (1 + k|y|)$$

注意  $I_1 = I_4 - y^2 I_3$ ，化簡可得

<sup>11</sup> 可參考 清華大學物理高資班 上課成果總整理與個人延伸 數學篇 P.14

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos kx}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{\pi}{2|y|} e^{-k|y|} (1 - k|y|)$$

注意  $\partial I_2 / \partial k = I_1$ ，積分後利用  $I_2(0) = 0$  的條件求得  $I_2$  為

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin kx}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{\pi}{2|y|} k e^{-k|y|}$$

## 6. 積分公式 3

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(a \tan \theta + 2\theta) d\theta$$

利用三角和差公式

$$\cos(a \tan \theta + 2\theta) = \cos(a \tan \theta) \cos 2\theta - \sin(a \tan \theta) \sin 2\theta$$

因此我們處理右式兩者的積分。積分  $I$  為

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2x \cos(a \tan x) dx$$

令  $u = \tan x$ ，則  $du = \sec^2 x dx = (1 + u^2) dx$ ，且易知

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{2}{1 + u^2} - 1$$

積分變為

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + u^2} \left( \frac{2}{1 + u^2} - 1 \right) \cos au du$$

先假設  $a > 0$ 。你會發現其實上式就是  $2I_3(1) - I_4(1)$ 。

$$I = \pi e^{-a} (1 + a) - \pi e^{-a} = \pi a e^{-a}$$

考慮  $a < 0$ ，因為  $\cos au$  為偶函數，所以其值不變，因此

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2x \cos(a \tan x) dx = \begin{cases} \pi a e^{-a}, & a > 0 \\ -\pi a e^a, & a < 0 \end{cases}$$

積分  $I'$  為

$$I' = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2x \sin(a \tan x) dx$$

同上可得

$$I' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2u}{(1 + u^2)^2} \sin au du$$

先假設  $a > 0$ 。你會發現其實上式就是  $2I_2(1)$ 。

$$I' = \pi a e^{-a}$$

考慮  $a < 0$ ，因為  $\sin au$  為奇函數，所以其值變號，因此

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2x \sin(a \tan x) dx = \begin{cases} \pi a e^{-a}, & a > 0 \\ -\pi a e^a, & a < 0 \end{cases}$$

代入以上兩個結果，得到積分值為

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(a \tan \theta + 2\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & a > 0 \\ -2\pi a e^a, & a < 0 \end{cases}$$



### 三、 總結

由相對論情況下的牛頓第二定律，並只考慮磁場對電子的影響，可得

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{\gamma m} \vec{v} \times \vec{B}$$

注意到在旋轉坐標系下有

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v}$$

若 $\vec{B}_r(\vec{r})$ 為使粒子繞加速器旋轉的磁場、 $\vec{B}_v(\vec{r})$ 為使粒子振盪的磁場，對應可得

$$\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\frac{e}{\gamma m} \vec{v} \times \vec{B}_r(\vec{r})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{\gamma m} \vec{v} \times \vec{B}_v(\vec{r})$$

為使粒子的旋轉角速度為定值， $\vec{B}_r$ 也應為定值， $\vec{B}_r = B_r \hat{x}$ ，所以有

$$\vec{\Omega} = \frac{eB_r}{\gamma m} \hat{x}$$

考慮最簡單的情況，即振盪磁場隨著z座標週期改變

$$\vec{B}_v(\vec{r}) = B_0 \cos kz \hat{x}$$

定義無因次常數G為

$$G = \frac{eB_0}{mkc}$$

則 $\vec{\beta}$ 可寫為

$$\vec{\beta} = -\frac{G}{\gamma} \sin kz \hat{y} + \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2} (1 + G^2 \sin^2 kz)} \hat{z}$$

在速率 $v_0$ 接近光速的情況下( $\gamma \gg 1$ ，且 $\gamma/G \gg 1$ )對 $\beta_z$ 做泰勒展開並對時間取平均可得

$$\bar{\beta}_z = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{G^2}{4\gamma^2}$$

電磁波的共振波長為

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{n} \left( \frac{1}{\bar{\beta}_z} - \cos \theta \right)$$

注意在 $\theta = 0$ 時

$$\lambda_0 \approx \frac{\lambda}{2n\gamma^2} \left( 1 + \frac{G^2}{2} \right)$$

此時的共振頻率為最大，能產生能量最強的光。

為了產生以正弦方式震盪的磁場，並且要求磁場夠強，我們可以使用海爾貝克陣列。其產生的磁場為



$$\vec{B}(x, y, z) = \begin{cases} 0, & y > 0 \\ \mu_0 \sigma k e^{ky} (-\sin kx \hat{x} + \cos kx \hat{y}), & y < 0 \end{cases}$$

在參、二、(一)速度與加速度垂直的輻射功率中已經得出粒子的速度為 $\vec{v} = v\hat{z}$ 、加速度為 $\vec{a} = a\hat{x}$ 的輻射功率角分布。注意到震盪時的加速度近似與速度方向垂直，因此可以類比得到相同的結果。

此情況下的加速度為

$$\vec{a} = -\frac{ecB_0 \cos kz}{\gamma m} \left( -\frac{G}{\gamma} \sin kz \hat{y} + \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2} (1 + G^2 \sin^2 kz)} \hat{z} \right) \times \hat{x}$$

$$\vec{a} \approx -\frac{ecB_0 \cos kz}{\gamma m} \left[ 1 - \frac{1}{2\gamma^2} (1 + G^2 \sin^2 kz) \right] \hat{y}$$

當最大值發生時

$$\vec{a} \approx \frac{ecB_0}{\gamma m} \hat{y}$$

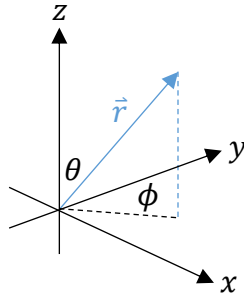
此時的

$$\vec{\beta} = \frac{v_0}{c} \hat{z} = \frac{eB_r R}{\gamma m c} \hat{z}$$

$R$ 即為迴旋半徑。所以輻射功率角分布為

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4 B_0^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c \gamma^2 m^2} \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$

方向向量 $\vec{r}$ 與 $z$ 軸的夾角為 $\theta$ 、其在 $xy$ 平面上的投影與 $y$ 軸的夾角為 $\phi$ ，如下圖。



(圖 12)位置向量示意圖。注意到 $\phi$ 的位置改變了。

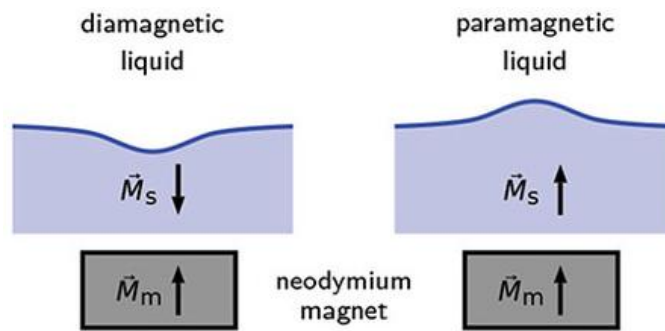
## 陸、水的磁導率測定

日常生活中上，電場所產生的效應幾乎都遠大於磁場。除了強力磁鐵的交互作用外，你很少能看到磁場能給予物體如此巨大的力。甚至此時去除一個強力磁鐵，剩下的單一個強力磁鐵與水的交互作用已到達微米等級，已無法利用肉眼輕易觀察到。

本實驗即為探討強力磁鐵與水的交互作用，將利用液面的反射來測量水面深度的變化，並繪出水面深度與磁鐵中心距離的關係圖。

### 一、理論預測

我們很容易知道，為了符合非真空介質與真空介質交界面處的邊界條件，垂直界面的磁通量密度 $\vec{B}_\perp$ 會有所改變，而平行界面的磁場強度 $\vec{H}_\parallel$ 為定值。根據(2)式，可知兩介質的能量密度不同，若此時環境有重力場作用，那麼會因為重力位能增加而使液面上升到一個穩定的高度，如下圖所示。



(圖 13)液面因磁場造成的突起及凹陷現象<sup>12</sup>。

為了避免邊界效應的問題，以下僅考慮磁鐵中心的磁場 $\vec{B}$ ，且 $\vec{B} = B\hat{z}$ ， $B$ 近似為定值。由虛功原理(或稱達朗貝爾原理 D'Alembert's principle)，在穩定態時，微小偏移造成的能量變化為零

$$u_B dV + (\rho dV)gh - u'_B dV = 0$$

$u_B = B^2/2\mu_0$ 為真空介質中的磁場能量密度、 $u'_B = B^2/2\mu_0\mu$ 為水中的磁場能量密度。可得

$$\frac{B^2}{2\mu_0} \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right) = \rho gh$$

由於水的磁導率 $\mu \approx 1$ ，所以 $1/\mu - 1 \approx 1 - \mu$

$$\mu \approx 1 - \frac{2\mu_0\rho gh}{B^2}$$

為了測量方便，我選取磁鐵中點處的磁場 $B_0$ 與液面高度變化 $h_0$ 作為數據代入。

### 二、實驗設備與架構

符號定義

<sup>12</sup> <https://aapt.scitation.org/doi/abs/10.1119/1.5051143?journalCode=pte>

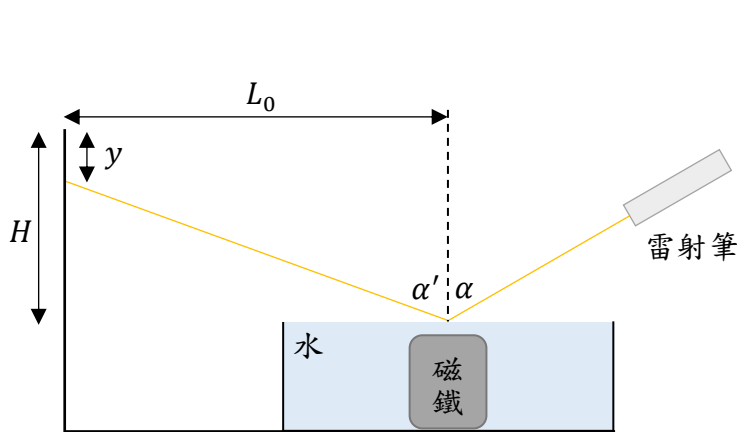
(表 1)符號定義。

$H$	水面到固定板上端的距離
$y$	光束投影到固定板上離上端的距離
$L_0$	磁鐵中心到固定板的距離
$\alpha$	光束入射角
$x$	光束在水面偏離磁鐵中心的距離
$h$	水面凹陷深度

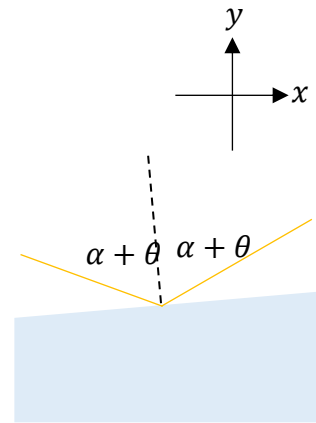
經由測量，可得

$$H = 53.85 \text{ cm}$$

$$L_0 = 50.80 \text{ cm}$$



(圖 14)實驗裝置示意圖。此為對準磁鐵中心的情況。



(圖 15)液面反射示意圖。

利用幾何關係得到

$$\alpha' = \alpha + 2\theta = \tan^{-1} \left( \frac{H - y}{L_0 + x} \right)$$

其中 $\alpha$ 可由 $x = 0$ 處的數據得到。

### 三、 實驗數據

#### (一)實驗一—水面離磁鐵 1mm

利用滴管加水至水面達 $h = 2.50 \text{ cm}$ 。

(表 2)實驗一實驗數據。

$x(\text{mm})$	$H - y(\text{cm})$	$\alpha'(\text{rad})$	$x(\text{mm})$	$H - y(\text{cm})$	$\alpha'(\text{rad})$	$x(\text{mm})$	$H - y(\text{cm})$	$\alpha'(\text{rad})$
16.50	2.12	0.7785	4.50	2.62	0.7852	-7.50	3.84	0.7850
15.50	2.77	0.7731	3.50	2.60	0.7864	-8.50	3.94	0.7850
14.50	3.00	0.7718	2.50	2.60	0.7874	-9.50	3.93	0.7861
13.50	3.44	0.7684	1.50	2.68	0.7876	-10.50	4.08	0.7856

12.50	3.89	0.7649	0.50	2.83	0.7871	-11.50	3.83	0.7891
11.50	4.30	0.7618	-0.50	2.97	0.7867	-12.00	3.50	0.7929
10.50	4.10	0.7647	-1.50	3.08	0.7866	-12.50	2.80	0.8003
9.50	3.52	0.7715	-2.50	3.21	0.7863	-13.50	1.00	0.8186
8.50	2.90	0.7786	-3.50	3.37	0.7857	-14.00	0.70	0.8219
7.50	2.70	0.7815	-4.50	3.48	0.7856	-14.50	0.81	0.8214
6.50	2.54	0.7840	-5.50	3.56	0.7858	-15.50	1.30	0.8178
5.50	2.45	0.7859	-6.50	3.72	0.7852	-16.50	2.06	0.8115

由 $x$ 座標 0.50 與-0.50 處平均可得

$$\alpha \approx 0.7869$$

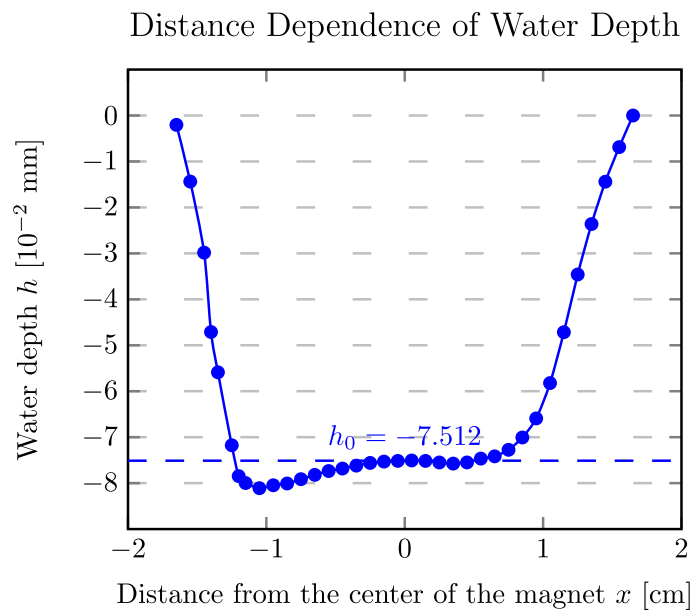
由幾何關係

$$\tan \theta = -\frac{dh}{dx} \approx \theta$$

因此

$$h = -\int_{x_{\min}}^x \theta(x') dx' \approx -\sum_i^n \theta(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

定基準點為(0.165,0)，繪圖如下。



(圖 16)實驗一 $h$ 與 $x$ 的關係圖。

## (二)實驗二—水面離磁鐵 2mm

利用滴管加水至水面達 $h = 2.60$  cm。

(表 3)實驗二實驗數據。

$x(\text{mm})$	$H - y(\text{cm})$	$\alpha'(\text{rad})$	$x(\text{mm})$	$H - y(\text{cm})$	$\alpha'(\text{rad})$	$x(\text{mm})$	$H - y(\text{cm})$	$\alpha'(\text{rad})$
16.50	1.42	0.7852	4.50	2.52	0.7862	-7.50	2.96	0.7937

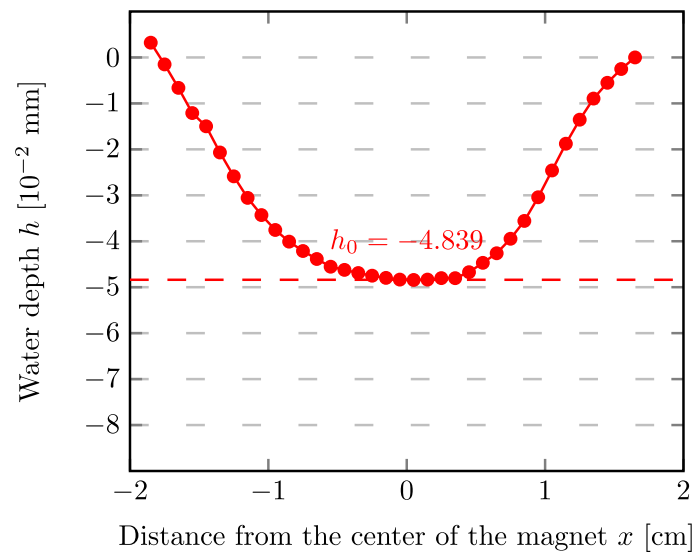
15.50	1.52	0.7852	3.50	2.47	0.7876	-8.50	3	0.7943
14.50	1.72	0.7842	2.50	2.3	0.7903	-9.50	3	0.7953
13.50	1.91	0.7834	1.50	2.47	0.7896	-10.50	2.96	0.7967
12.50	2.25	0.7811	0.50	2.52	0.7901	-11.50	2.96	0.7977
11.50	2.48	0.7798	-0.50	2.59	0.7904	-12.50	2.87	0.7996
10.50	2.7	0.7786	-1.50	2.63	0.7910	-13.50	2.87	0.8006
9.50	2.8	0.7786	-2.50	2.71	0.7912	-14.50	2.87	0.8016
8.50	2.76	0.7799	-3.50	2.79	0.7914	-15.50	2.96	0.8018
7.50	2.6	0.7825	-4.50	2.87	0.7916	-16.50	3.12	0.8012
6.50	2.55	0.7839	-5.50	2.97	0.7916	-17.50	3.3	0.8005
5.50	2.43	0.7861	-6.50	2.87	0.7936	-18.50	3.48	0.7997

由 $x$ 座標 0.50 與-0.50 處平均可得

$$\alpha \approx 0.7903$$

同上，定基準點為(0.142,0)，繪圖如下。

Distance Dependence of Water Depth



(圖 17)實驗二 $h$ 與 $x$ 的關係圖。