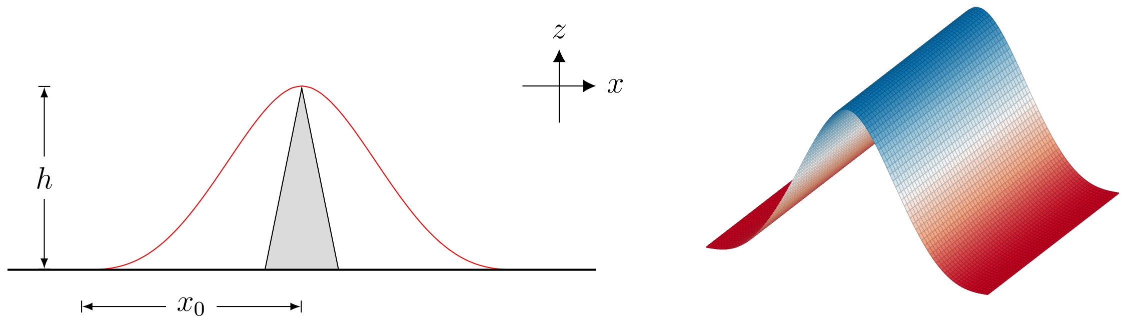
紙張的彎曲

已知彈性體的楊氏模量 (Young's modulus) 為 E、厚度為 d、質量體密度為 ρ。特別地，假設帕松比 (Poisson's ratio) 有 $\sigma = 0$。

本題考慮紙張在重力作用下的彎曲現象。已知環境的重力加速度為 $\boldsymbol{g} = -g\hat{\boldsymbol{z}}$。假設紙張在伸縮後**厚度與表面積不變**，且斜率絕對值 $|\partial z/\partial x| \ll 1$。

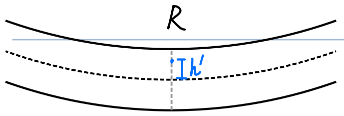


(a) 剖面圖　　**(b)** 俯視圖

圖 1. 紙張的彎曲

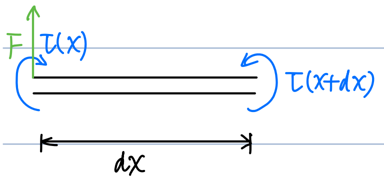
如上圖所示，將紙張平鋪在一個沿 y 方向延伸，高度為 h $(h \gg d)$ 的突起物，定其頂點的座標為 $(x, z) = (0, h)$。已知紙張足夠大，紙張的左右側皆著地。計算中你可以將突起物的尖端與紙張視為點接觸。

A.1	試求出紙張與地面接觸點的 x 座標 $\pm x_0$ $(x_0 > 0)$。	1.2 pt
A.2	承 **A.1**，試求在 $x > 0$ 的區域，紙張高度與座標 x 的函數關係 $z(x)$。答案以 h, x_0 表示。	2.0 pt



$$\Delta L = -\frac{h}{R}L \qquad P = E\frac{\Delta L}{L} = -\frac{E}{R}h$$

$$\frac{d\tau}{dA} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} P h\, dh = \frac{Ed^3}{12R} \approx \frac{1}{12}Ed^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$



$$\tau(x+dx) - \tau(x) - F\,dx = 0 \qquad F = \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{12}Ed^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

$$F(x) - F(x+dx) - \rho g d \cdot dx = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = -\rho g d \Rightarrow \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = -\frac{12\rho g}{Ed^2}$$ —— 要有推導過程(1.8)

直接用euler-bernoulli 只有(0.4)

$$z = -\frac{\rho g}{2Ed^2}(x^4 + Ax^3 + Bx^2 + C)$$ —— (0.1)

$x = x_0$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $z = 0$ —— (0.1)

from torque $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ —— (0.8)

$$\begin{cases} 4x_0^3 + 3Ax_0^2 + 2Bx_0 = 0 \\ 12x_0^2 + 6Ax_0 + 2B = 0 \\ x_0^4 + Ax_0^3 + Bx_0^2 + C = 0 \end{cases}$$

$x = 0$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $z = h$ —— (0.1)

$$C = -\frac{2Ehd^2}{\rho g}$$

$4x_0^2 - 2B = 0 \quad B = 2x_0^2$

$A = -\frac{8}{3}x_0 \quad x_0 = (-3C)^{\frac{1}{4}}$

$$z = -\frac{3h}{x_0^4}\left(x^4 - \frac{8}{3}x_0x^3 + 2x_0^2x^2 - \frac{1}{3}x_0^4\right)$$ —— (0.3)

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -\frac{3h}{x_0^4}(24x - 16x_0)$$

total F: $$-\frac{1}{12}Ed^3 \cdot 2\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)_{x=0,x_0} = \frac{4Ed^3h}{x_0^3}$$

$$\sigma_{ij}=\lambda\sum_k e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij}$$

一塊長方體的表面法向量分別沿 x,y,z 軸，現將沿 x 方向拉伸，使 x 方向截面上單位面積的受力為p，不對 y 或 z 方向施力。x,y,z 方向的原始長度分別為l_x, l_y, l_z，施力後被拉長了$\Delta l_x, \Delta l_y, \Delta l_z$。

定義楊氏模量E與泊松比σ分別滿足以下兩式：$p = E\frac{\Delta l_x}{l_x}$，$\sigma\frac{\Delta l_x}{l_x} = -\frac{\Delta l_y}{l_y} = -\frac{\Delta l_z}{l_z}$。

A.2	試求楊氏模量E，以拉梅係數λ與μ表示。	0.3pt

A.3	試求泊松比σ，以拉梅係數λ與μ表示。	0.3pt

$\sigma_{xx}=p,\ \sigma_{yy}=\sigma_{zz}=0$ $\quad p=[\lambda(1-2\sigma)+2\mu]e_{xx}=[\lambda(1-2\sigma)+2\mu]\frac{p}{E}$ $\quad \lambda(1-2\sigma)+2\mu=E$

$0=[\lambda(1-2\sigma)-2\mu\sigma]e_{xx}$ $\quad \lambda(1-2\sigma)-2\mu\sigma=0$

$\lambda(1-2\sigma)(1+\sigma)=\sigma E \quad \lambda=\frac{\sigma E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)} \quad \mu=\frac{E}{2(1+\sigma)}$

$\sigma_{ij}=\lambda\sum_k e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij}=\frac{E}{1+\sigma}\left(\frac{\sigma}{1-2\sigma}\sum_k e_{kk}\delta_{ij}+e_{ij}\right) \quad e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

自由板：$\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0 \quad \frac{\partial u_x}{\partial z}=-\frac{\partial u_z}{\partial x} \xrightarrow[\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|\ll 1]{} u_x\approx -z\frac{\partial u_z}{\partial x}$

$\frac{\partial u_y}{\partial z}=-\frac{\partial u_z}{\partial y} \quad u_y\approx -z\frac{\partial u_z}{\partial y}$

$\sigma_{zz}=0 \quad -z\frac{\sigma}{1-2\sigma}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)+\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}=0 \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}=\frac{\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)$

$$f=\frac{1}{2}\sum\sigma_{kj}e_{kj}=\frac{1}{2}(\sigma_{xx}e_{xx}+2\sigma_{xy}e_{xy}+\sigma_{yy}e_{yy}+\sigma_{zz}e_{zz})$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\mu(e_{xx}^2+e_{yy}^2+e_{zz}^2)+\lambda(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz})^2+2\mu e_{xy}^2\right]$$

$$=\frac{z^2}{2}E\left\{\frac{1}{1+\sigma}\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2\right]+\frac{\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left(\frac{1-2\sigma}{1-\sigma}\right)^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+\frac{2}{1+\sigma}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}$$

$$\frac{1}{1+\sigma}\left[1+\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)^2-\frac{\sigma(1-2\sigma)}{(1-\sigma)^2}\right]=\frac{1}{(1+\sigma)(1-\sigma)}$$

$$F=\int f d^3\vec{r}=\iiint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f dz\,dx\,dy=\frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\right\}dx\,dy$$

	D	I
+	ζ''	$\delta\zeta''$
−	ζ'''	$\delta\zeta'$
+	ζ''''	$\delta\zeta$

$$\delta F=\frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)}\iint\delta\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\right\}dx\,dy$$

$$\iint\delta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dy=2\iint\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial x^2}dx\,dy=2\left[\iint\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}\delta\zeta\,dx\,dy-\int\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}\delta\zeta\,dy+\int\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\delta\zeta' dy\right]$$

$$\delta F-\iint P\delta\zeta\,dx\,dy-\int F\delta\zeta\,dy-\int M\delta\zeta' dy=0$$

$$\delta\zeta'=\delta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\approx\delta\theta$$

$P=\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}$	$F=-\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}$	$M=\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$
force per area	force at boundary	torque at boundary

液滴的形變

本題將探討在不同外加條件下液滴的形變。在 **A 部分**計算出微擾情況下球座標中的曲率半徑，**B 部分**則利用流體的基本定律來求得球形液滴表面波的振盪頻率，**C 部分**則利用基本的電磁學來求得外加電場作用下球形液滴的變形。

液體為不可壓縮且表面張力係數為 σ 的流體。外界大氣壓力為 P_0。真空電容率為 ϵ_0。

各部份題目獨立，不考慮黏滯力與重力場的影響。

預備知識

(1) 時變的白努力方程式

已知在流體為無旋流的假設下，速度場 $\boldsymbol{v}$ 可寫作速度勢 φ 的梯度，也就是 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\nabla}\varphi$，且 φ 會符合

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\boldsymbol{\nabla}\varphi|^2+\frac{P}{\rho}=\text{const.}$$

上式稱為時變的白努力方程式。注意到是整個區域任意處皆為同個常數。

(2) 曲率半徑與拉普拉斯方程式

已知表面張力的拉普拉斯方程式為

$$\Delta P=P_{\mathrm{A}}-P_{\mathrm{B}}=\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

其中表面的主要曲率半徑 R_1、R_2 的正負號取法為曲率中心在介質 A 則為正，反之則為負。而任意表面的曲率半徑倒數和可藉由變分法來求得，你必須把變分參數取為沿面法向向量的位移 δx_n，在此恰好為 δr。則面積的變分 δA 可寫為

$$\delta A=\int g\left(r,\theta,\phi\right)\mathrm{d}A\,\delta r$$

又因主要曲率半徑可表示為

$$\delta A=\int\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\mathrm{d}A\,\delta r$$

則函數 $g\left(r,\theta,\phi\right)=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$。

(3) 球座標中的梯度與拉普拉斯算子 (laplacian)

$$\boldsymbol{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\nabla^2 f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

(4) 伴隨勒讓得多項式 (associated Legendre polynomial)

a. 微分方程式

伴隨勒讓得多項式 $P_l^m(x)$ 會符合以下微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}P_l^m(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m(x)=0$$

因此拉普拉斯方程式 $\nabla^2 V=0$ 在球座標 (r,θ,ϕ) 中的解為

$$V(r,\theta,\phi)=\sum_{l,m\in\mathbb{N}}\left(A_{lm}r^l+\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right)P_l^m(\cos\theta)\ e^{im\phi}$$

其中 A_{lm},B_{lm} 為常數。

b. 函數表達式

其中 $m=0$ 的函數表達式為

$$P_0^0(x)=1,\quad P_1^0(x)=x,\quad P_2^0(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\quad P_3^0(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$$

由微分方程式可得遞迴關係為

$$(n+1)P_{n+1}^0(x)=(2n+1)xP_n^0(x)-nP_{n-1}^0(x)$$

注意到 $P_l^0(x)$ 的最高次項是 x 的 l 次方項。而 $P_l^m(x)$ 與 $P_l^0(x)$ 的關係為

$$P_l^m(x)=(-1)^m\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_l^0(x)}{\mathrm{d}x^m}$$

c. 正交性

伴隨勒讓得多項式在區間 $x\in[-1,1]$ 內具有正交性，即

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{2}{2l+1}\dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}, & l=k\\[2mm] 0, & l\neq k\end{cases}$$

A 部分　球座標中的曲率半徑 (1.0 pt)

A.1　請證明在球座標 (r,θ,ϕ) 下，表面積 A 的表達式為　0.4 pt

$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial r}{\partial\phi}\right)^2}\,r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

球形液滴的半徑為 $R(\theta,\phi)=R_0+\tilde{R}(\theta,\phi)$，其中 $\tilde{R}\ll R_0$。接下來我們只要求計算至微小振盪項的最低次項。則表面積的變分 δA 可寫為

$$\delta A=\iint_{\mathrm{C}} f\left(\tilde{R},\theta,\phi\right)\mathrm{d}A\,\delta\tilde{R}$$

A.2　試求出函數 $f\left(\tilde{R},\theta,\phi\right)$。　0.6 pt

B 部分　液滴的表面波 (3.0 pt)

球形液滴達到穩定態時的半徑為 R_0。假設流體為**無旋流**，即 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}=0$。

B.1　試求出球形液滴達到穩定態時內部的壓力 P。　0.2 pt

現在給予液面一個微小擾動，其尺度遠小於液滴半徑，則液滴會產生類似於下圖的表面波。以下將計算各模態的振盪方式。

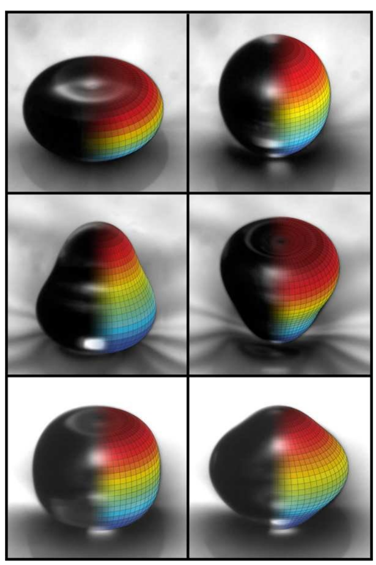
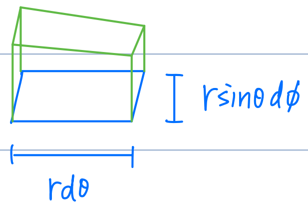


圖 2. 液滴的表面波[1]



$$d\vec{A} = \left[r\,d\theta\,\hat{\theta} + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)d\theta\,\hat{r}\right] \times \left[r\sin\theta\, d\phi\,\hat{\phi} + \left(\frac{\partial r}{\partial \phi}\right)d\phi\,\hat{r}\right] \quad \text{——} \ (0.3)$$

$$= r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\,\hat{r} - \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right) r\sin\theta\, d\theta\, d\phi\,\hat{\theta} - \left(\frac{\partial r}{\partial \phi}\right) r\, d\theta\, d\phi\,\hat{\phi}$$

$$dA = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \sqrt{1+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial r}{\partial \phi}\right)^2} \quad \text{——} \ (0.1)$$

$r = R_0 + \tilde{R}$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{R_0^2 + 2R_0\tilde{R} + \left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \phi}\right)^2}\ (R_0+\tilde{R})\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left\{R_0 + \frac{1}{2R_0}\left[2R_0\tilde{R} + \left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \phi}\right)^2\right]\right\}(R_0+\tilde{R})\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\delta A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left\{2\delta\tilde{R} + \frac{2\tilde{R}}{R_0}\delta\tilde{R} + \frac{1}{2R_0}\delta\left[\left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \phi}\right)^2\right]\right\} R_0\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\delta\left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial (\tilde{R}+\delta\tilde{R})}{\partial \theta}\right)^2 - \left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \theta}\right)^2 = 2\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \theta}\frac{\partial \delta\tilde{R}}{\partial \theta} \quad \text{——} \ (0.2)$$

$\tilde{R}+\delta\tilde{R}$

$$\delta A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left\{2\delta\tilde{R} + \frac{2\tilde{R}}{R_0}\delta\tilde{R} + \frac{1}{R_0}\left[\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \theta}\frac{\partial \delta\tilde{R}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \phi}\frac{\partial \delta\tilde{R}}{\partial \phi}\right]\right\} R_0\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

I.B.P

$$\delta A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left\{2\delta\tilde{R} + \frac{2\tilde{R}}{R_0}\delta\tilde{R} - \frac{1}{R_0}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial \phi^2}\right]\right\} R_0\sin\theta\, d\theta\, d\phi\,\delta\tilde{R} \quad \text{——} \ (0.3)$$

$$dA \approx R_0(R_0+2\tilde{R})\sin\theta\, d\theta\, d\phi \quad \text{——} \ (0.1)$$

$$f(\tilde{R},\theta,\phi) = \frac{2}{R_0} - \frac{2\tilde{R}}{R_0^2} - \frac{1}{R_0^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial \phi^2}\right]$$

$$P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} = P$$

B.2	試求出速度勢 $\varphi(r,\theta,\phi,t)$ 符合的兩個微分方程式。	0.8 pt

B.3 證明速度勢 $\varphi(r,\theta,\phi,t)$ 的解為 — 0.8 pt

$$\varphi(r,\theta,\phi,t)=\sum_{l,m\in\mathbb{N}} A_{lm} r^l P_l^m(\cos\theta)\; e^{i(m\phi\pm\omega_l t)}$$

其中 A_{lm} 為模態 (l,m) 的常數。試求出此模態的振盪角頻率 ω_l $(\omega_l>0)$。

(a) (b)

圖 3

B.4	已知在 $t=0$ 時，液滴內部靜止且表面形狀為 $r(\theta)=R_0+a\cos 2\theta$ $(a\ll R_0)$，如上圖 (a)。試求往後液滴的表面形狀 $r(\theta,t)$。	0.6 pt

B.5	已知在 $t=0$ 時，液滴內部靜止且表面形狀為 $r(\theta)=R_0+a\cos 3\theta$ $(a\ll R_0)$，如上圖 (b)。試求往後液滴的表面形狀 $r(\theta,t)$。	0.6 pt

[1] https://www.researchgate.net/figure/Various-deformation-modes-of-a-bouncing-droplet-n-15-cSt-R-0765-mm-observed-with_fig3_1739386

B.2 試求出速度勢 $\varphi(r,\theta,\phi,t)$ 符合的兩個微分方程式。 0.8 pt

$\nabla\times\boldsymbol{v}=0$

已知在流體為無旋流的假設下，速度場 $\boldsymbol{v}$ 可寫作速度勢 φ 的梯度，也就是 $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$

incompressible $\Rightarrow$ $\nabla\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \nabla^2\phi=0 \Rightarrow \varphi=\sum_{l,m}\left(A_{lm}r^l+\cancel{\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}}^{\,0}\right)P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$ —— (0.2)

$$\Delta P=P_A-P_B=\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

$$P-P_0=\sigma\left\{\frac{2}{R_0}-\frac{2\tilde{R}}{R_0^2}-\frac{1}{R_0^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\tilde{R}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\tilde{R}}{\partial\phi^2}\right]\right\}$$

$$\Delta P=\sigma\left\{-\frac{2\tilde{R}}{R_0^2}-\frac{1}{R_0^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\tilde{R}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\tilde{R}}{\partial\phi^2}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2+\frac{P}{\rho}=\text{const.}$$

$r=R_0$, $\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sigma\left\{-\frac{2\tilde{R}}{R_0^2}-\frac{1}{R_0^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\tilde{R}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\tilde{R}}{\partial\phi^2}\right]\right\}=\text{const.}$ —— (0.4) 沒寫 $r=R_0$ 全扣

$r=R_0$, $\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial}{\partial r}\left\{-\frac{2\varphi}{R_0^2}-\frac{1}{R_0^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}\right]\right\}=0$ —— (0.2)

B.3 證明速度勢 $\varphi(r,\theta,\phi,t)$ 的解為 0.8 pt

$$\varphi(r,\theta,\phi,t)=\sum_{l,m\in\mathbb{N}}A_{lm}r^lP_l^m(\cos\theta)\ e^{i(m\phi\pm\omega_l t)}$$

其中 A_{lm} 為模態 (l,m) 的常數。試求出此模態的振盪角頻率 ω_l $(\omega_l>0)$。

因此拉普拉斯方程式 $\nabla^2V=0$ 在球座標 (r,θ,ϕ) 中的解為

$$V(r,\theta,\phi)=\sum_{l,m\in\mathbb{N}}\left(A_{lm}r^l+\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right)P_l^m(\cos\theta)\ e^{im\phi}$$ —— (0.2)

其中 A_{lm},B_{lm} 為常數。

$$\frac{2\varphi}{R_0^2}+\frac{1}{R_0^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}\right]$$

$$\varphi=\sum_{l,m}A_{lm}r^lP_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}e^{\pm i\omega t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}P_l^m(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m(x)=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d}{d\theta}P_l^m(\cos\theta)\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_l^m(\cos\theta)=0$$

$\frac{2\varphi}{R_0^2}+\frac{1}{R_0^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}\right]=-\sum_{l,m}\left[l(l+1)-2\right]A_{lm}r^lP_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}e^{\pm i\omega t}$ —— (0.2)

$r=R_0$, $-\rho\omega^2\sum_{l,m}A_{lm}r^lP_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}e^{\pm i\omega t}-\frac{l}{R_0^2}\left\{-\sum_{l,m}\left[l(l+1)-2\right]A_{lm}r^lP_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}e^{\pm i\omega t}\right\}=0$ —— (0.2)

$\omega^2=\frac{\sigma}{\rho R_0^3}l\left[l(l+1)-2\right]=\frac{\sigma}{\rho R_0^3}l(l-1)(l+2)$ —— (0.2)

$$\vec{v}=\nabla\phi \qquad v_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}=\sum_{l\in\mathbb{N}} A_{l\omega}\, l r^{l-1} P_l^0(\cos\theta)e^{i\omega t}$$

$$=\sum_{l\in\mathbb{N}}(a_l\sin\omega_l t+b_l\cos\omega_l t)\, l r^{l-1} P_l^0(\cos\theta)$$

$$r=\sum_{\substack{l\in\mathbb{N}\\ l\neq 0,1}}(-a_l\cos\omega_l t+b_l\sin\omega_l t)\frac{lR_0^{l-1}}{\omega_l}P_l^0(\cos\theta)+A+BP_1^0(\cos\theta)t$$

$$\omega_l=\sqrt{\frac{\sigma}{\rho R_0^3}l(l-1)(l+2)}$$

B.4 已知在 $t=0$ 時，液滴內部靜止且表面形狀為 $r(\theta)=R_0+a\cos 2\theta$ $(a\ll R_0)$，如上圖 (a)。試求往後液滴的表面形狀 $r(\theta,t)$。	0.6 pt

$$r(\theta)=a\cos 2\theta$$

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{2}{3}\left[2P_2^0(\cos\theta)+1\right]-1=\frac{4}{3}P_2^0(\cos\theta)-\frac{1}{3} \quad \text{——}(0.2)$$

$$P_2^0(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad x^2=\frac{1}{3}\left(2P_2^0(x)+1\right)$$

$$r(\theta,t)=a\left[-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}P_2^0(\cos\theta)\cos\omega_2 t\right] \qquad \omega_2=\sqrt{\frac{8\sigma}{\rho R_0^3}} \quad \text{——}(0.4)$$

B.5 已知在 $t=0$ 時，液滴內部靜止且表面形狀為 $r(\theta)=R_0+a\cos 3\theta$ $(a\ll R_0)$，如上圖 (b)。試求往後液滴的表面形狀 $r(\theta,t)$。	0.6 pt

$$P_3^0(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x) \qquad x^3=\frac{1}{5}\left(2P_3^0(x)+3P_1^0(x)\right)$$

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=\frac{4}{5}\left[2P_3^0(\cos\theta)+3P_1^0(\cos\theta)\right]-3P_1^0(\cos\theta)=\frac{8}{5}P_3^0(\cos\theta)-\frac{3}{5}P_1^0(\cos\theta) \quad \text{——}(0.2)$$

$$r=a\left[-\frac{3}{5}P_1^0(\cos\theta)+\frac{8}{5}P_3^0(\cos\theta)\cos\omega_3 t\right] \qquad \omega_3=\sqrt{\frac{30\sigma}{\rho R_0^3}} \quad \text{——}(0.4)$$

$$V\approx\iiint r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$=\frac{1}{3}\int r^3\sin\theta\, d\theta\, d\phi\approx\frac{1}{3}R_0^3\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{1+\frac{3}{R_0}\left[\sum_{\substack{l\in\mathbb{N}\\ l\neq 0,1}}(-a_l\cos\omega_l t+b_l\sin\omega_l t)\frac{lR_0^{l-1}}{\omega_l}P_l^0(\cos\theta)+A\right]\right\}\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{\substack{l\in\mathbb{N}\\ l\neq 0,1}}(-a_l\cos\omega_l t+b_l\sin\omega_l t)\frac{lR_0^{l-1}}{\omega_l}P_l^0(\cos\theta)+A\right]\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

c. 正交性

伴隨勒讓得多項式在區間 $x\in[-1,1]$ 內具有正交性，即

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)\,P_k^m(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{2}{2l+1}\dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}, & l=k\\ 0, & l\neq k\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}P_l^0(\cos\theta)P_k^0(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta=\frac{2}{2l+1}\delta_{lk} \qquad \Rightarrow \text{ r中不能有常數項!!}$$

C 部分　電場作用下的拉伸 (2.8 pt)

有個由金屬汞組成的液滴，在沒有電場作用下球形液滴達到穩定態時的半徑為 R_0。
在電場 $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{z}}$ 作用下，球形液滴到穩定態時的半徑變為 $R(\theta,\phi) = R_0 + \tilde{R}(\theta,\phi)$，其中 $\tilde{R}(\theta,\phi) \ll R_0$。其中 θ 為徑向向量 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 與 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 的夾角。已知 $E^2 \ll \sigma/R\epsilon_0$，且計算僅要求微小量至最低階項。

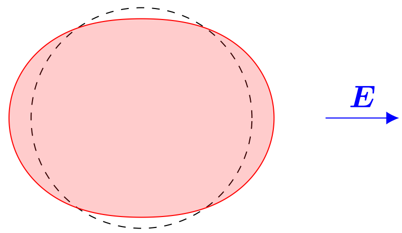


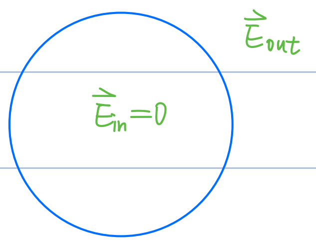
圖 4. 液滴的變形

C.1	證明 $\tilde{R}(\theta,\phi)$ 的解為 $$\tilde{R} = \tilde{R}_0 + \tilde{R}_1\cos\theta + \tilde{R}_2\cos^2\theta$$ 並求出常數 $\tilde{R}_0$ 與 $\tilde{R}_2$。考慮對稱的拉伸，則 $\tilde{R}_1 = 0$。	2.0 pt
C.2	求出此時水滴內部壓力的變化 ΔP。	0.8 pt

C.1 證明 $\tilde{R}(r,\theta,\phi)$ 的解為 2.0 pt

$$\tilde{R} = \tilde{R}_0 + \tilde{R}_1\cos\theta + \tilde{R}_2\cos^2\theta$$

並求出常數 $\tilde{R}_0$ 與 $\tilde{R}_2$。考慮對稱的拉伸，則 $\tilde{R}_1 = 0$。



$\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0}$ $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R_0^3\vec{E}_0$ —— (0.4)

$\vec{E}_{out} = \vec{E}_0 + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}) = E_0\left[\left(1+\frac{2R_0^3}{r^3}\right)\cos\theta\,\hat{r} - \left(1-\frac{R_0^3}{r^3}\right)\sin\theta\,\hat{\theta}\right]$ —— (0.2)

$\vec{E}_{out}(r=R_0) = 3E_0\cos\theta\,\hat{r}$ —— (0.1) 用image charge也可

$P_{in} - P_0 = -\frac{1}{2}\epsilon_0 E_{out}^2 + \sigma\left\{\frac{2}{R_0} - \frac{2\tilde{R}}{R_0^2} - \frac{1}{R_0^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\tilde{R}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\tilde{R}}{\partial\phi^2}\right]\right\} = \frac{2\sigma}{R_0} + \Delta P$ —— (0.8)

$\tilde{R} = \sum_\ell \tilde{R}_\ell' P_\ell^0(\cos\theta)$ 代入

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l^m(x)}{dx}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m(x) = 0$$

$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d}{d\theta}P_\ell^m(\cos\theta)\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_\ell^m(\cos\theta) = 0$

$P_{in} - P_0 = -\frac{1}{2}\epsilon_0 E_{out}^2 + \frac{2\sigma}{R_0} + \frac{\sigma}{R_0^2}\sum_\ell[\ell(\ell+1)-2]\tilde{R}_\ell' P_\ell^0(\cos\theta) = \frac{2\sigma}{R_0} + \Delta P$ —— (0.2)

$\frac{9}{2}\epsilon_0 E_0^2\cos^2\theta = \frac{3}{2}\epsilon_0 E_0^2[2P_2^0(\cos\theta)+1]$ —— (0.2)

$3\epsilon_0 E_0^2 = \frac{4\sigma}{R_0^2}\tilde{R}_2'$ $\tilde{R}_2' = \frac{3\epsilon_0 E_0^2 R_0^2}{4\sigma}$ $\Delta P = -\frac{2\sigma}{R_0^2}\tilde{R}_0' - \frac{3}{2}\epsilon_0 E_0^2 = -\frac{3}{4}\epsilon_0 E_0^2$ —— (0.3)

$V \approx \iiint r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \approx \int\frac{1}{3}(R_0 + \tilde{R}_0 + \tilde{R}_1\cos\theta + \tilde{R}_2\cos^2\theta)^3\sin\theta\,d\theta\,d\phi$

$\Delta V \approx 2\pi R_0^2\int_0^\pi(\tilde{R}_0 + \tilde{R}_1\cos\theta + \tilde{R}_2\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta$ $2\tilde{R}_0 + \frac{2}{3}\tilde{R}_2 = 0$ $\tilde{R}_0 = -\frac{1}{3}\tilde{R}_2$

$\tilde{R}_2 = \frac{3}{2}\tilde{R}_2'$ $\tilde{R}_0 = -\frac{1}{2}\tilde{R}_2'$ $\tilde{R}_0 + \tilde{R}_2\cos^2\theta = \tilde{R}_0' + \tilde{R}_2'\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$ $\tilde{R}_0' = \tilde{R}_0 + \frac{1}{2}\tilde{R}_2'$

$= \frac{9}{8}\frac{\epsilon_0 E_0^2 R_0^2}{\sigma}$ $= -\frac{3}{8}\frac{\epsilon_0 E_0^2 R_0^2}{\sigma}$

—— (0.3) —— (0.3)