

# 重力

王兆國 William Wang

WilliamWang941225@gmail.com

April 28, 2024

---

## 目錄

1 定律描述	1
2 角動量	2
3 重力位能	2
4 球殼定理	4
4.1 幾何法 . . . . .	4
4.2 暴力計算法 . . . . .	5
4.2.1 質點在球體外 . . . . .	6
4.2.2 質點在球體內 . . . . .	7
5 在重力作用下的軌跡	7
6 比奈方程式	10
7 圓錐曲線	11
7.1 橢圓 . . . . .	11
7.2 抛物線 . . . . .	12
7.3 雙曲線 . . . . .	13
8 重力助推	14
9 後續	16
9.1 廣義相對論 . . . . .	16

9.1.1	光波在太陽附近的偏折	16
9.1.2	水星軌道近日點的進動	17
9.2	歲差	18
9.3	四極矩效應	18
9.4	拉格朗日點	20
10	解答	21

## 1 定律描述

重力為任意兩個質點由通過連心線方向上的力相互吸引。該吸引力的大小與它們的質量乘積成正比，與它們距離的平方成反比。

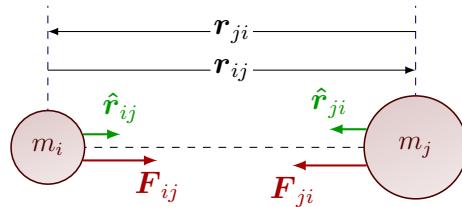
**Definition 1.1.** 考慮全空間中僅有兩個質點  $i, j$ ，質量為  $m_i, m_j$ ，位置向量為  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ 。 $i$  物體所受到來自  $j$  物體的重力  $\mathbf{F}_{ij}$  為

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij} = -\frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

則  $j$  物體所受到來自  $i$  物體的重力  $\mathbf{F}_{ji}$  為

$$\mathbf{F}_{ji} = -\frac{Gm_j m_i}{r_{ji}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ji} = -\frac{Gm_j m_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$$

注意到  $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0$ ，因此在僅有重力作用的系統中，系統會動量守恆。

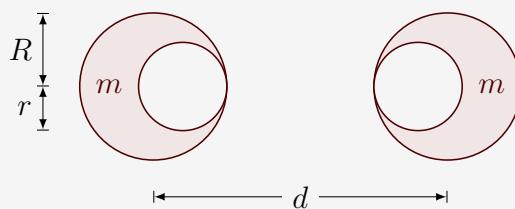


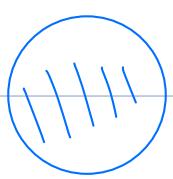
有時候為了簡化，我們會假設其中一個質點  $i$  不會移動，令  $m_i = M, m_j = m$  可得

$$\mathbf{F}_{mM} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

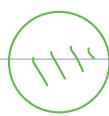
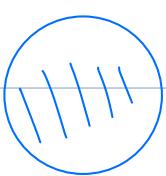
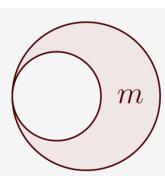
其中  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$ 。在  $\mathbf{r}_M$  為定值的情況下，我們就可以把原本的二體問題化簡成一體問題。以下在未提及為二體問題時，一概都是以以上代號表示。

**Problem 1.1.** 如下圖，有一個物體的構造為半徑為  $R$  的大球體內挖空出一個半徑為  $r$  的小球體。已知物體的總質量為  $m$ ，現在將兩相同物體的大球心擺放至距離為  $d$ ，且小球心也在此線段上，試問兩物體間的吸引力量值  $F$ 。

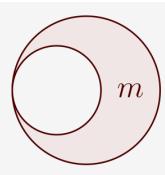




$$\frac{R^3}{R^3 - r^3} m$$



$$\frac{r^3}{R^3 - r^3} m$$



$$\begin{aligned} & G \frac{R^3}{R^3 - r^3} m \left[ \frac{R^3}{R^3 - r^3} m \frac{1}{d^2} - \frac{r^3}{R^3 - r^3} m \frac{1}{(d-R+r)^2} \right] - G \frac{r^3}{R^3 - r^3} m \left[ \frac{R^3}{R^3 - r^3} m \frac{1}{(d-R+r)^2} - \frac{r^3}{R^3 - r^3} m \frac{1}{(d-2R+2r)^2} \right] \\ & = \frac{Gm^2}{(R^3 - r^3)^2} \left[ \frac{R^6}{d^2} - \frac{2R^3r^3}{(d-R+r)^2} + \frac{r^6}{(d-2R+2r)^2} \right] \end{aligned}$$

## 2 角動量

由牛頓第二定律

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

兩邊同時與  $r$  外積

$$mr \times \frac{dv}{dt} = r \times F$$

注意到

$$\frac{d}{dt}(r \times v) = v \times v + r \times \frac{dv}{dt} = r \times \frac{dv}{dt}$$

所以有

$$\frac{d}{dt}(mr \times v) = r \times F$$

定義以原點為觀察點的角動量  $L$  為

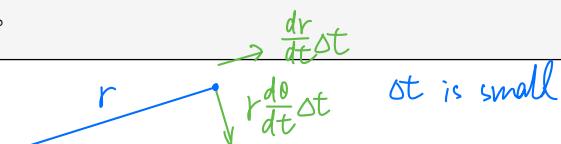
$$L = mr \times v$$

而角動量的時變率為

$$\frac{dL}{dt} = r \times F$$

**Theorem 2.1.** 若受力為  $F(r) = F(r)\hat{r}$ ,  $r \times F = 0$ , 所以角動量  $L$  為常數向量。

**Problem 2.1.** 證明單位時間內兩物體連線所掃過的面積  $\dot{A}$  為定值，並將其以質量  $m$  與角動量量值  $L$  表示。



$$L = mr^2\dot{\theta}$$

## 3 重力位能

$$\Delta A = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \Delta t \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}$$

由牛頓第二定律

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

兩邊同乘  $dr$  並積分，注意到  $v = \frac{dr}{dt}$

$$\begin{aligned} \int_{v_i}^{v_f} m v \cdot dv &= \int_{r_i}^{r_f} F(r) \cdot dr \\ \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) - \int_{r_i}^{r_f} F(r) \cdot dr &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} (d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v})$$

$$= \frac{1}{2} d(v^2)$$

可定義

$$\frac{1}{2}mv^2 - \int_{r_0}^r \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \equiv E = \text{const.}$$

定義重力位能

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{r_0}^r \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

所以可得

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = E = \text{const.}$$

在保守力的情況下， $U$  僅與初狀態  $S_i$  與末狀態  $S_f$  有關。因此在此情況我們會定義位能方便求解，但本質上只不過是牛頓第二定律而已。

現在考慮重力的位能

$$U(\mathbf{r}) = \int_{r_0}^r \frac{GMm}{r'^2} \hat{\mathbf{r}}' \cdot dr' = GMm \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

取零位面參考點  $r_0 \rightarrow \infty$ ，則有

**Formula 3.1.** 以無限遠處為零位面的重力位能為

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r}$$

**Problem 3.1. (2016 初選十三)** 在外太空有兩艘太空船，已知子太空船的質量為  $m$ 、母太空船的質量為  $M$ 。現在子母太空船的距離為  $d$ ，現在子太空船欲以速度  $v_0$  相對於母太空船離開，並可航行至無限遠處。試求  $v_0$  的最小值。

**Problem 3.2. (2021 初選十三)** 一太空船原先沿著一橢圓軌道繞著一行星運轉，太空船與行星的最近距離為  $R$ ，最遠距離為  $2R$ 。已知太空船在距行星距離為最遠時，其運動速率為  $v_0$ 。若此時太空船啟動推進器，並進入一半徑為  $2R$  的圓形軌道，則該太空船在圓形軌道的速率  $v$  為何？

**Problem 3.3.** 請計算一個質量為  $M$ 、半徑為  $R$  的均勻球體的重力位能  $U$ 。

**Problem 3.4.** 一個質量均勻分布的球體以角速度  $\omega$  繞通過球心的軸旋轉。若要使得球體不會因離心效應被瓦解，球體的最小質量密度  $\rho_c$  為何？假設被壓縮後依然保持質量均勻分布。

Problem 3.3. 請計算一個質量為  $M$ 、半徑為  $R$  的均勻球體的重力位能  $U$ 。

$$U = \int_0^R \frac{G(4\pi r^2 p dr)(\frac{4}{3}\pi pr^3)}{r} = -\frac{16}{3}\pi^2 G p^2 \int_0^R r^4 dr = -\frac{16}{15}\pi^2 G \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)^2 R^5 = -\frac{3GM^2}{5R}$$

Problem 3.4. 一個質量均勻分布的球體以角速度  $\omega$  繞通過球心的軸旋轉。若要使得球體不會因離心效應被瓦解，球體的最小質量密度  $\rho_c$  為何？假設被壓縮後依然保持質量均勻分布。

$$U = \int \rho_E(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad \rho_E(\vec{r}) = -\frac{1}{2} \rho \omega^2 r_\perp^2 - \frac{G(\frac{4}{3}\pi pr^3)P}{r} = -\frac{1}{2} \rho \omega^2 r_\perp^2 - \frac{4}{3}\pi G p^2 r^2$$

$$\int_{|\vec{r}| < R} \left( -\frac{1}{2} \rho \omega^2 r_\perp^2 - \frac{4}{3}\pi G p^2 r^2 \right) d^3\vec{r}$$



$$\frac{4}{3}\pi R^3 P = M \quad PR^2 = \frac{3M}{4\pi}$$

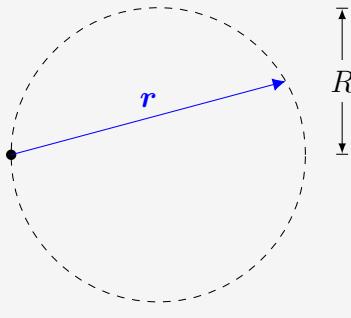
$$\int_{|\vec{r}| < R} r_\perp^2 d^3\vec{r} = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \theta (r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi) = \frac{2\pi}{5} R^5 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{8}{15} \pi R^5$$

$$U = -\frac{1}{2} \rho \omega^2 \frac{8}{15} \pi R^5 - \frac{16}{15} \pi G p^2 R^5 = -\frac{4}{15} \pi \frac{3M}{4\pi R^3} R^5 \left( \omega^2 + 4\pi G \frac{3M}{4\pi R^3} \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial R} > 0 \quad \Rightarrow \quad 2\omega^2 R - \frac{3GM}{R^2} < 0 \quad M > \frac{2R^3 \omega^2}{3G} \quad P > \frac{\omega^2}{2\pi G}$$

**Problem\* 3.5.** 在有心力場中，物體的受力作用線恆通過一固定點。在本題中此固定點為原點，且力的量值只與徑向距離  $r$  有關，所以力可寫為  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\hat{\mathbf{r}}$ 。令以下題目中粒子的質量皆為  $m$ 、角動量量值為  $L$ 。已知粒子運動軌跡僅在二維平面上。以下我們將給出特定有心力場造成的軌跡，並請你反推其對應的力函數  $F(r)$ 。

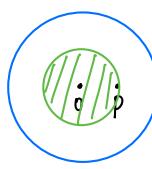
- (a) 見下圖，軌跡方程式為半徑為  $R$  的圓周，且力源位於圓周上。試求力函數  $F(r)$ 。
- (b) 軌跡方程式為笛卡爾心形線  $r = a(1 + \cos\theta)$ ，其中  $a$  為常數。力源位於原點。試求力函數  $F(r)$ 。



## 4 球殼定理

**Theorem 4.1.** 球殼定理：在對稱球體內部的物體不受其外部球殼的重力影響

以下介紹兩種證明方法。



### 4.1 幾何法

**Lemma 4.1.** 一個質量面密度為  $\sigma$  的均勻球殼在其內部一點  $P$  產生的引力場為零。

如圖，令球心為  $O$ ，並過  $\overline{OP}$  作一個軸，這樣球面上任意一點都對應一個張角  $\theta$ 。根據不同的  $\theta$  可將球殼劃分為許多對細圓環，每個圓環對應一個  $\Delta\theta$ 。

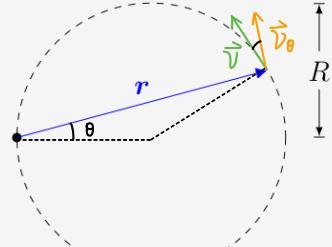
當  $\Delta\theta \rightarrow 0$  時，如果能證明任意一對細圓環在  $P$  點產生的引力場都能互相抵消，那麼球殼對  $P$  點的總引力場就為零。

我們先要求出兩個圓環的面積，以圖 1a 中左邊的圓環為例，圓環的周長為  $2\pi r_1 \sin\theta$ ，當  $\Delta\theta \rightarrow 0$  時，圓環的寬度為  $\frac{r_1 \Delta\theta}{\cos\alpha}$  ( $\alpha$  的定義見圖 1b)，所以圓環的面積等於周長乘以寬度，

**Problem\* 3.5.** 在有心力場中，物體的受力作用線恆通過一固定點。在本題中此固定點為原點，且力的量值只與徑向距離  $r$  有關，所以力可寫為  $\mathbf{F}(r) = F(r)\hat{r}$ 。令以下題目中粒子的質量皆為  $m$ 、角動量量值為  $L$ 。已知粒子運動軌跡僅在二維平面上。以下我們將給出特定有心力場造成的軌跡，並請你反推其對應的力函数  $F(r)$ 。

(a) 見下圖，軌跡方程式為半徑為  $R$  的圓周，且力源位於圓周上。試求力函数  $F(r)$ 。

(b) 軌跡方程式為笛卡爾心形線  $r = a(1 + \cos\theta)$ ，其中  $a$  為常數。力源位於原點。試求力函数  $F(r)$ 。



$$(a) \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad r = 2R\cos\theta \quad L = mr\nu_\theta$$

$$v = \frac{\nu_\theta}{\cos\theta} = \frac{L}{2mr\cos^2\theta} = \frac{2RL}{mr^2}$$

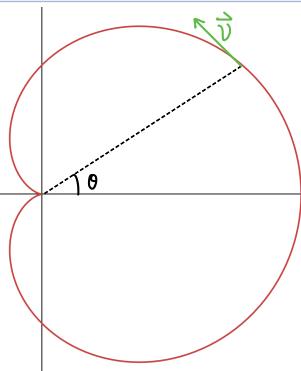
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U \quad U = -\frac{2R^2L^2}{mr^4} \quad \vec{F} = -\nabla U = -\frac{8R^2L^2}{mr^5}\hat{r}$$

$$(b) \quad L = mr\nu_\theta \quad \nu_\theta = \frac{L}{mr} \quad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\dot{r} = -a\dot{\theta}\sin\theta = -a\frac{L}{mr^2}\sin\theta$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{a^2L^2}{2mr^4} [(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta] = \frac{a^2L^2}{mr^4} (1+\cos\theta) = \frac{aL^2}{mr^3}$$

$$U = -\frac{aL^2}{mr^3} \quad \vec{F} = -\nabla U = -\frac{3aL^2}{mr^4}\hat{r}$$



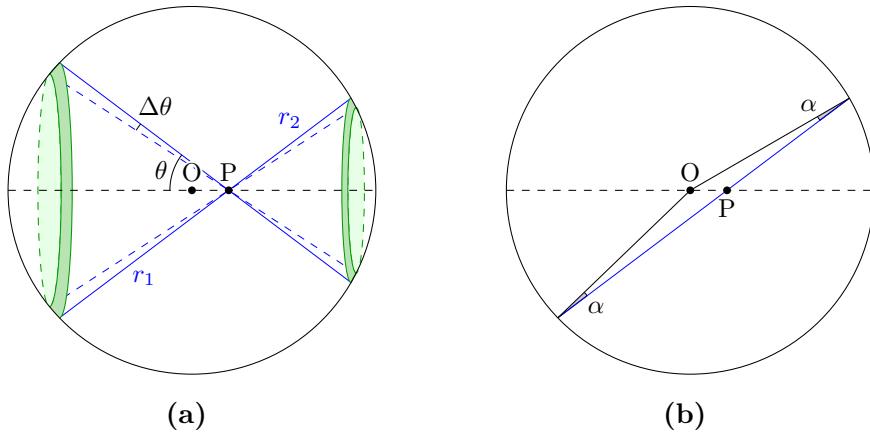


圖 1

再乘以面密度  $\sigma$  得到左圓環的質量  $\Delta m_1$  為

$$\Delta m_1 = \frac{2\pi r_1^2 \sigma \sin \theta}{\cos \alpha}$$

同理，右圓環的質量  $\Delta m_2$  為

$$\Delta m_2 = \frac{2\pi r_2^2 \sigma \sin \theta}{\cos \alpha}$$

所以可得左右圓環在 P 點上產生的引力場為

$$\mathbf{F} = \frac{G\Delta m_1}{r_1^2} \hat{\mathbf{x}} - \frac{G\Delta m_2}{r_2^2} \hat{\mathbf{x}} = 0$$

因此均勻面質量密度的球殼對於內部一點 P 造成的重力場為零，引理成立。

把球體視為許多球殼的疊加，由上可知在球殼外的質量並不會影響球體內部的重力場。

## 4.2 暴力計算法

圓球球心與質點的距離為  $r$ 、球心半徑為  $R$ 。質量質元的位置向量為  $\mathbf{r}' = (r', \theta', \phi')$ ，其與質點的距離為  $r''$ 。

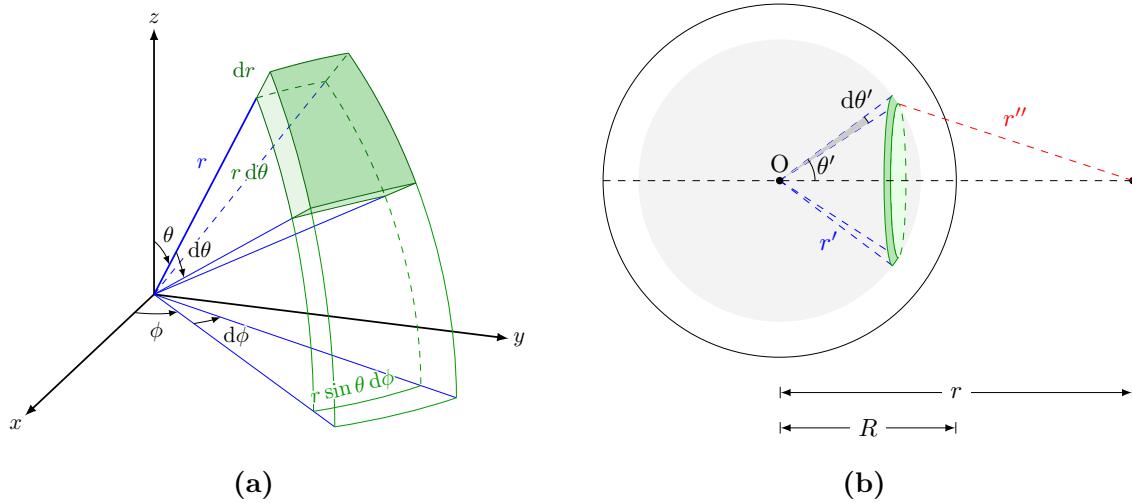
$$dU = -\frac{Gm(\rho d^3r')}{r''}$$

由座標轉換因子計算可得  $d^3r' = r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi'$

$$U = Gm\rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi'}{r''}$$

利用餘弦定律可得

$$r''^2 = r'^2 + r^2 - 2rr' \cos \theta'$$



發現三重積分中的參數  $\phi'$  為獨立的，可先積分，得

$$U = -2\pi Gm\rho \int_0^R r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta'}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos \theta'}} \quad (1)$$

後式的積分結果為

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta'}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos \theta'}} = \frac{1}{rr'} \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos \theta'} \Big|_0^\pi = \begin{cases} \frac{2}{r'}, & r' > r \\ \frac{2}{r}, & r' < r \end{cases} \quad (2)$$

#### 4.2.1 質點在球體外

可知  $r'$  在積分範圍內都小於  $r$ ，將(2)代入(1)得

$$U(r) = -\frac{4\pi Gm\rho}{r} \int_0^R r'^2 dr' = -\frac{Gm}{r} \left( \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \right) = -\frac{GMm}{r}$$

可得重力為

$$\mathbf{F}(r) = -\nabla U = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

符合牛頓重力形式。

### 4.2.2 質點在球體內

須將積分範圍分為兩部分， $r' < r$  與  $r' \leq r$ 。

$r' < r$  的區域就如上討論，其造成的位能為

$$U_{\text{in}}(r) = -\frac{Gm}{r} \left( \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \right) = -\frac{4}{3}\pi Gm\rho r^2$$

現在計算  $r' \leq r$  的情況，將(2)代入(1)得

$$U_{\text{out}}(r) = -2\pi Gm\rho \int_r^R r'^2 \frac{2}{r'} dr' = -2\pi Gm\rho (R^2 - r^2)$$

總位能為

$$\begin{aligned} U(r) &= U_{\text{in}}(r) + U_{\text{out}}(r) = -\frac{4}{3}\pi Gm\rho r^2 - 2\pi Gm\rho (R^2 - r^2) \\ U(r) &= \frac{2}{3}\pi Gm\rho (r^2 - 3R^2) \end{aligned}$$

可得重力為

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(r) &= -\nabla U(r) = -\frac{4}{3}\pi Gm\rho r \hat{\mathbf{r}} = -\frac{Gm \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{F}(r) &= -\frac{GM_{\text{in}} m}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

$M_{\text{in}}$  為  $r' < R$  區域內的質量。符合球殼定理所述。

## 5 在重力作用下的軌跡

給定質點初始位置  $\mathbf{r}_0$  與初始速度  $\mathbf{v}_0$ ，我們必定可找到一個平面使得物體僅在此平面上運動。因此我們可以僅考慮物體做二維運動，以下的極座標即定義在此平面上。

由牛頓第二定律

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

注意到

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{L}{mr^2} \hat{\mathbf{r}}$$

代入後可得

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{GMm}{L} \frac{d\hat{\theta}}{dt} \hat{\mathbf{r}} = 0$$

積分可得

$$\mathbf{v} - \frac{GMm}{L} \hat{\theta} = \mathbf{c} = \text{const.}$$

兩邊平方可得

$$v^2 = \left( \mathbf{c} + \frac{GMm}{L} \hat{\theta} \right)^2 = c^2 + \left( \frac{GMm}{L} \right)^2 + \frac{2GMm}{L} \mathbf{c} \cdot \hat{\theta}$$

由能量守恆

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = E$$

並令  $\mathbf{c} \cdot \hat{\theta} = c \cos(\theta + \phi)$  可得

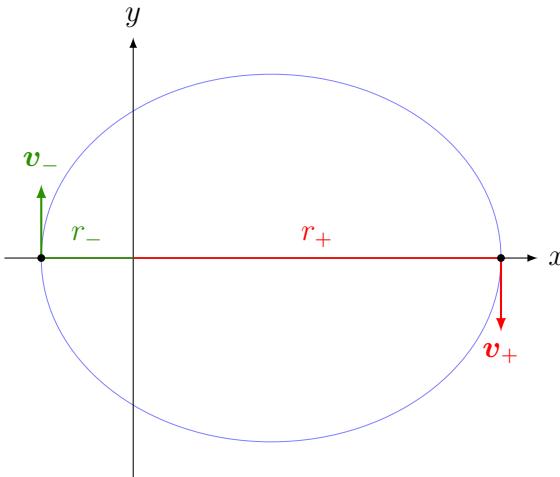
$$r = \frac{2GM}{c^2 + \left( \frac{GMm}{L} \right)^2 - \frac{2E}{m} + \frac{2GMm}{L} c \cos(\theta + \phi)} \equiv \frac{l}{1 + e \cos(\theta + \phi)}$$

軌跡為圓錐曲線 (conic section)。其中  $l$  為半焦弦、 $e$  為離心率。

**Formula 5.1.** 若定義  $\theta = 0$  時，質點處於遠日點，則  $\phi = \pi$ 。軌跡方程式為

$$r = \frac{l}{1 - e \cos \theta}$$

圖形見圖 3a。至此我們已經推導出軌跡方程式的輪廓了，但尚未將其中的係數  $l, e$  求出。



注意到可利用近日點 ( $\theta = \pi$ ) 與遠日點 ( $\theta = 0$ ) 來求得  $\mathbf{c}$ 。而在近日點、遠日點的距離  $r_-, r_+$  為

$$r_- = \frac{l}{1 + e}, \quad r_+ = \frac{l}{1 - e}$$

注意到在此兩點  $v$  與  $\hat{\theta}$  為同向，並定義  $\mathbf{c}$  與近日點的速度  $v_-$  同向，所以可得

$$v_- - \frac{GMm}{L} = -v_+ + \frac{GMm}{L} = c$$

因此有

$$v_- = \frac{GMm}{L} + c, \quad v_+ = \frac{GMm}{L} - c$$

再由角動量的定義可得

$$r_- v_- = r_+ v_+ = \frac{L}{m}$$

可得

$$c = \frac{GMme}{L}, \quad L = m\sqrt{GML}$$

代回計算可得總能量  $E$  為

$$E = -\frac{GMm}{2l} (1 - e^2) \quad (3)$$

**Formula 5.2.** 半焦弦  $l$  與離心率  $e$  可表達為

$$l = \frac{L^2}{GMm^2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$$

**Problem 5.1.** 計算物體運動的週期  $T$ 。以半焦弦  $l$ 、離心率  $e$  表示答案。

積分公式：

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

**Problem 5.2.** 假設直角坐標使得物體在近日點的速度朝  $+y$  方向。試求物體運動的速端曲線 (hodogram)，也就是以  $\mathbf{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}$ ，其中  $v_x$  與  $v_y$  所符合的關係式。試以角動量量值  $L$  與離心率  $e$  表示答案。此速端曲線是甚麼圖形？

**Problem 5.3.** 拉普拉斯-龍格-冷次向量 (Laplace-Runge-Lenz vector, 簡寫 LRL 向量) 為一個當物體間的連心力遵守平方反比於距離的運動常數。因重力遵守平方反比律，所以也有其 LRL 向量，寫作

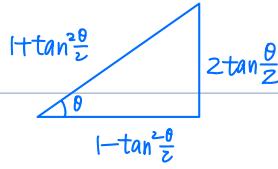
$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - GMm^2 \hat{\mathbf{r}}$$

請證明上式為守恆量。

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+e \cos \theta)^2} = \frac{2\pi}{(1-e^2)^{3/2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+e \cos \theta}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b \cos \theta}$$



$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b \frac{1-\tan^2 \theta / 2}{1+\tan^2 \theta / 2}} \quad \tan \theta / 2 = x \quad \frac{1}{2} \sec^2 \theta / 2 d\theta = dx$$

$$\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2} \quad u = \tan \theta / 2 \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$2 \int_0^\infty \frac{z dx}{a+b+(a-b)x^2} = \frac{4}{a+b} \int_0^\infty \frac{\sqrt{ab} du}{1+u^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b \cos \theta} = - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b \cos \theta)^2} = - \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+e \cos \theta)^2} \quad z = e^{i\theta} \quad I = \frac{1}{i} \oint \frac{dz}{z \left[ 1 + \frac{e}{2} (z + \frac{1}{z}) \right]^2} = \frac{1}{i} \left( \frac{2}{e} \right) \oint \frac{z}{\left( z + \frac{2}{e} z + 1 \right)^2} dz$$

$$1 + \frac{e}{2} (z + \frac{1}{z}) = 0 \quad z + \frac{2}{e} z + 1 = 0 \quad z = -\frac{1}{e} \pm \sqrt{\frac{1-e^2}{e^2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-e^2}}{e}$$

$$\oint \frac{z}{\left( z + \frac{2}{e} z + 1 \right)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}, z \right) \quad 0 < e < 1$$

$$\operatorname{Res} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}, z \right) = \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{\left( z + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \right)^2} \right]_{z=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}} = - \frac{z - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}}{\left( z + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \right)^3} = \frac{\frac{2}{e}}{\left( \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \right)^3} = \frac{e^2}{4(1-e^2)^{3/2}}$$

**Problem\* 5.4. 導彈 (Physics Cup 2012 Problem 1)**

一枚導彈從北極發射，目標位於緯度  $\phi$ (對於北半球  $\phi > 0$ ，對於南半球  $\phi < 0$ )。請忽略空氣阻力。假設地球為質量均勻分布的球體。

- 請問相對北極的水平面以什麼角度  $\alpha$  發射火箭，所需的初始速率  $v$  最小？
- 已知重力常數為  $G$ 、地球的質量為  $M$ 、地球半徑為  $R$ 。試求此最小的初始速率  $v$ 。答案以(a)所求得的  $\alpha$  表達。

## 6 比奈方程式

比奈方程式 (Binet equation) 為受力恰為連心力時軌跡會符合的方程式。

由牛頓第二定律

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = F(r) \hat{\mathbf{r}}$$

在極座標  $(r, \theta)$  中

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

比對可得

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{F}{m} \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0$$

可得到角動量守恆

$$r^2\dot{\theta} = \text{const.} = \frac{L}{m}$$

代回(4)可得

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3} = \frac{F}{m}$$

令  $u = 1/r$  可得

$$\ddot{r} = \frac{Lu^2}{m} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{Lu^2}{m} \frac{dr}{d\theta} \right) = -\frac{L^2u^2}{m^2} \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

代回整理可得

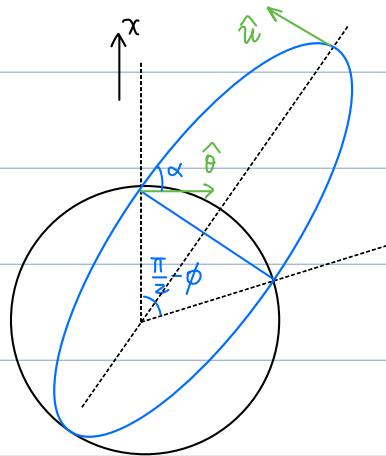
### Problem\* 5.4. 導彈 (Physics Cup 2012 Problem 1)

一枚彈道導彈從北極發射，目標位於緯度  $\phi$  (對於北半球  $\phi > 0$ ，對於南半球  $\phi < 0$ )。

請忽略空氣阻力。假設地球為質量均勻分布的球體。

(a) 請問相對北極的水平面以什麼角度  $\alpha$  發射火箭，所需的初始速率  $v$  最小？

(b) 已知重力常數為  $G$ 、地球的質量為  $M$ 、地球半徑為  $R$ 。試求此最小的初始速率  $v$ 。答案以(a)所求得的  $\alpha$  表達。



$$E_{\text{minimum}} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{GMm^3}} \quad L?$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{2a}$$

$$R = \frac{L}{1-e\cos\Delta\phi} = \text{const.} \quad a = \frac{L}{1-e^2}$$

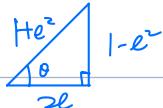
$$v^2 = \frac{2GM}{R} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{1-e^2}{1-e\cos\Delta\phi} \right)$$

$$f(e) = \frac{1-e^2}{1-e\cos\Delta\phi}$$

$$\frac{df}{de} = \frac{-2e}{1-e\cos\Delta\phi} - \frac{1-e^2}{(1-e\cos\Delta\phi)^2} (-\cos\Delta\phi) = 0$$

$$2e(1-e\cos\Delta\phi) = (1-e^2)\cos\Delta\phi$$

$$\cos \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \phi) = \frac{2e}{1+e^2} \quad \sin \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \phi) = \frac{1-e^2}{1+e^2}$$



$$e = \tan \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \phi) \right] = \tan \left( \frac{\pi}{8} + \frac{\phi}{4} \right)$$

$$\vec{v} - \frac{GMm}{L} \hat{\theta} = \frac{GMme}{L} \hat{u}$$

$$\vec{v} \cdot \hat{x} = \frac{GMm}{L} e \sin \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \phi), \quad \vec{v} \cdot \hat{y} = \frac{GMm}{L} \left[ 1 - e \cos \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \phi) \right]$$

$$\tan \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \hat{x}}{\vec{v} \cdot \hat{y}} = e = \tan \left( \frac{\pi}{8} + \frac{\phi}{4} \right) \quad \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\phi}{4}$$

$$v^2 = \frac{2GM}{R} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{1-e^2}{1-e\cos\Delta\phi} \right) \quad \tan \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \phi) = e$$

$$\frac{1+e^2 - 2e\cos\Delta\phi}{2(1-e\cos\Delta\phi)} = \frac{(1-e\cos\Delta\phi)^2 + (e\sin\Delta\phi)^2}{2(1-e\cos\Delta\phi)} = \frac{1}{2}(1-e\cos\Delta\phi)(1+e^2)$$

**Formula 6.1.** 比奈方程式 (Binet equation)

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mF}{L^2u^2}$$

考慮重力的情況，可得方程式為

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}$$

$u$  的通解為

$$u = \frac{GMm^2}{L^2} + C \cos(\theta + \phi)$$

其中  $C, \phi$  為待定常數。因此  $r$  為

$$r = \frac{L^2}{GMm^2} \frac{1}{1 + C' \cos(\theta + \phi)}$$

其中  $C'$  為待定常數。

## 7 圓錐曲線

圓錐曲線 (Conic Section) 的通式為

$$r = \frac{l}{1 - e \cos \theta}$$

其中  $l$  為半焦弦、 $e$  為離心率， $a$  為半長軸。由上式，我們定義原點為焦點。  
離心率  $e$  在不同範圍時，會對應到不同圖形。

1.  $0 < e < 1$ ，橢圓 (ellipse)。
2.  $e = 1$ ，拋物線 (parabola)。
3.  $e > 1$ ，雙曲線 (hyperbola)。

以下將對這些圖形做簡述。

### 7.1 橢圓

在  $0 < e < 1$  的條件下，整理可得

$$\left( \frac{x - \frac{el}{1-e^2}}{\frac{l}{1-e^2}} \right)^2 + \left( \frac{y}{\frac{l}{\sqrt{1-e^2}}} \right)^2 = 1$$

顯然地，橢圓為對稱圖形，因此可定義另一個焦點，即沿對稱軸對稱過去即可。

定義橢圓長軸長度的一半為半長軸  $a$ 、橢圓短軸長度的一半為半短軸  $b$ ，由方程式可得

$$a = \frac{l}{1 - e^2}, \quad b = \frac{l}{\sqrt{1 - e^2}}$$

比對(3)，能量可寫為

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

如此一來，要計算物體運動的能量，我們只需知道半長軸即可。

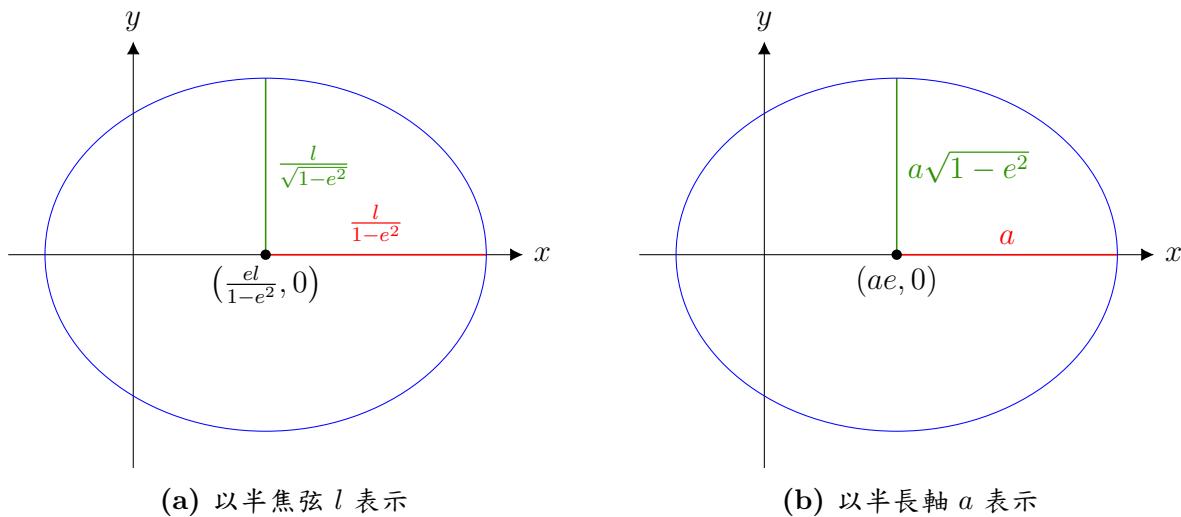


圖 3. 橢圓的圖形

### Problem 7.1. 橢圓的性質

- (a) 證明橢圓上的一點到兩焦點的距離和為定值。
- (b) 假設有一面橢圓形的牆，牆上鋪滿了鏡子。證明由焦點發出的光經由牆上的鏡子反射後會達到另一個焦點。
- (c) 已知一橢圓的半長軸為  $a$ 、半短軸為  $b$ ，則證明橢圓的面積為  $\pi ab$ 。結合你在 Problem 2.1 得到的結果再次證明 Problem 5.1。

## 7.2 抛物線

在  $e = 1$  的條件下，整理可得

$$y^2 = 2l \left( x + \frac{l}{2} \right)$$

**Problem 7.2. 抛物線的性質**

- (a) 有一面由拋物面構成的鏡子，其軌跡方程式如上，證明由  $-x$  方向射入的光經由反射過後會通過原點。
- (b) 令拋物線的焦點為 F，證明拋物線上一點 P 與直線  $y = -l$  的距離與  $\overline{PF}$  相等。

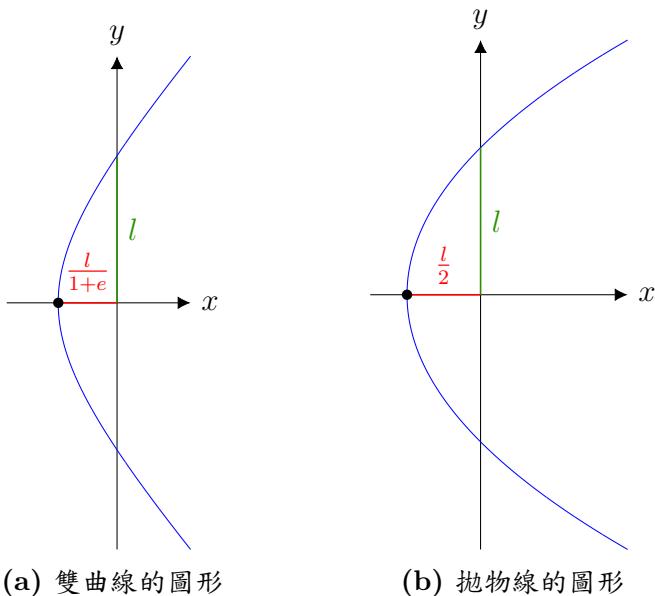
**7.3 雙曲線**

圖 4

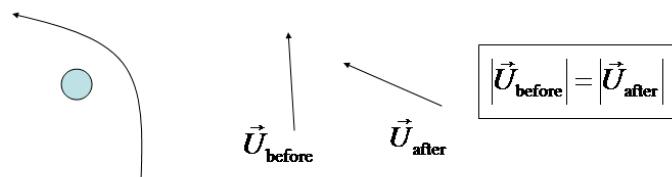
在  $e > 1$  的條件下，整理可得

$$\left( \frac{x + \frac{el}{e^2-1}}{\frac{l}{e^2-1}} \right)^2 - \left( \frac{y}{\frac{l}{\sqrt{e^2-1}}} \right)^2 = 1$$

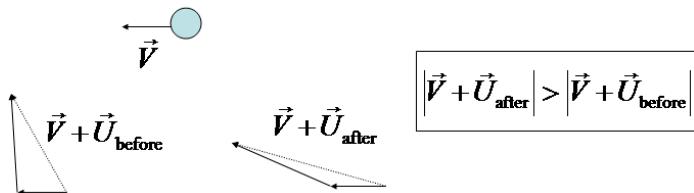
## 8 重力助推

所謂的重力助推（重力彈弓）是利用行星或其他天體的相對運動和重力改變飛行器的軌道和速度，以此來節省燃料、時間和計劃成本。重力助推既可用於加速飛行器，也能用於降低飛行器速度。科學家們稱這種情況為彈性碰撞，不過兩者之間並沒有發生實體接觸而已。如圖所示，假設行星的速度為  $\mathbf{V}$ 。通常行星的質量  $M$  遠大於飛行器的質量  $m$ ，所以雖然飛行器增加的動能等於行星減少的動能，行星的速度也還是幾乎不變，一般情況可假設  $\mathbf{V}$  為定值。飛行器在助推前相對行星的速度為  $\mathbf{U}_{\text{before}}$ ，助推後的相對速度為  $\mathbf{U}_{\text{after}}$ 。而因為遵守能量及動量守恆律， $|\mathbf{U}_{\text{before}}| = |\mathbf{U}_{\text{after}}|$ 。而在靜止參考系中，飛行器在助推前的實際速度為  $\mathbf{V} + \mathbf{U}_{\text{before}}$ ，助推後為  $\mathbf{V} + \mathbf{U}_{\text{after}}$ ，只要控制好方向，可以使  $|\mathbf{V} + \mathbf{U}_{\text{before}}| \neq |\mathbf{V} + \mathbf{U}_{\text{after}}|$ ，因此可用此方式來加速或減速。

Frame of Reference: Moving with Planet



Frame of Reference: Planet Moving Left



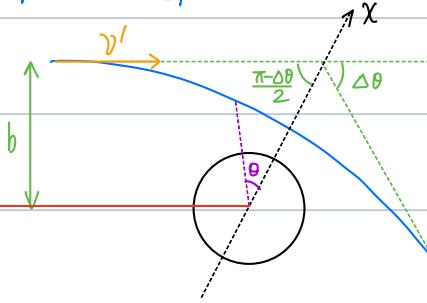
- (a) 先不假設行星的速度為定值，請利用能量及動量守恆，證明  $|\mathbf{U}_{\text{before}}| = |\mathbf{U}_{\text{after}}|$ 。
- (b) 考慮一太空探測器 S 接近木星，我們以木星參考系來看，如右圖所示，軌跡將為一個雙曲線。一開始（與木星相距無窮遠時）太空探測器相對木星的速率為  $v'$ ，木星與速度方向的垂直距離（即撞擊參數）為  $b$ ，重力常數為  $G$ ，木星質量為  $M$ 。請證明探測器在經過木星引力場後的總偏向角（以木星參考系來看）

$$\Delta\theta = 2 \tan^{-1} \left( \frac{GM}{bv'^2} \right)$$

- (c) 現在換回靜止參考系，木星在軌道 O 的運動速率為  $v$ ，方向為  $-x$ 。探測器 S 一開始是以速度  $v_0$  沿  $+y$  方向運動。假設太空探測器從木星的後方飛越而過，亦即當  $y$  座標相同時，探測器的  $x$  座標大於木星的  $x$  座標。請證明，探測器最後的

$$\frac{1}{2}\mu U_{\text{before}}^2 = \frac{1}{2}\mu U_{\text{after}}^2$$

$$E = \frac{1}{2}(M+m)v_c^2 + \frac{1}{2}\mu v_r^2 \quad \mu = \frac{mM}{m+M}$$



$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$\vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad \vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_r \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_r$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

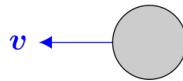
$$m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{GMm}{r^2} \cos\theta$$

$$L = -mr^2\dot{\theta} = mbv'$$

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{m\dot{\theta}}{L}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{GMm}{L} \cos\theta \dot{\theta} \quad v_x = \frac{GMm}{L} \sin\theta + C$$

$$v' \cos \frac{\pi - \Delta\theta}{2} = \frac{GMm}{L} \sin \left( \pi - \frac{\pi - \Delta\theta}{2} \right) \quad \tan \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{GM}{b v'^2} \quad \Delta\theta = 2 \tan^{-1} \frac{GM}{b v'^2}$$



$$\theta + \pi - \Delta\theta = \theta_0$$

$$\vec{v}' = \vec{v}_r' + \vec{v}$$

$$v' = \sqrt{(v_r \cos\theta + v)^2 + (v_r \sin\theta)^2} = \sqrt{v^2 + v_r^2 + 2vv_r \cos\theta} \quad v_r^2 = v_b^2 + v^2$$

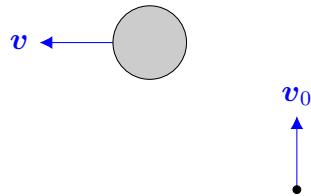
$$v_r \cos\theta = v_r \cos(\pi - \theta_0 - \Delta\theta) = -v_r \cos(\theta_0 + \Delta\theta) = -v \cos\Delta\theta + v_b \sin\Delta\theta_0$$

$$v' = \sqrt{2v^2 + v_b^2 + 2v(-v \cos\Delta\theta + v_b \sin\Delta\theta_0)} = \sqrt{2v^2(1 - \cos\Delta\theta) + v_b(v_b + 2v \sin\Delta\theta)} \quad \Delta\theta = 2 \tan^{-1} \frac{GM}{b(v_b^2 + v^2)}$$

實際速率為

$$v' = \sqrt{v_0(v_0 + 2v \sin \Delta\theta) + 2v^2(1 - \cos \Delta\theta)}$$

其中  $\Delta\theta$  為上題(c)中的偏向角。



## 9 後續

### 9.1 廣義相對論

若物體速率很大 ( $v \ll c$  不成立)，我們必須考慮廣義相對論的修正。已知若物體質量  $M \gg m$  且無自轉或帶電，則物體座標  $x^\mu = (c\tau, r, \theta)$  所滿足的運動方程式為

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2r}} \frac{dr}{d\tau} \right) + \frac{GM}{r^2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \frac{\frac{GM}{c^2r^2}}{\left( 1 - \frac{2GM}{c^2r} \right)^2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left[ \left( 1 - \frac{2GM}{c^2r} \right) \frac{dt}{d\tau} \right] &= 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left( r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) &= 0 \end{aligned}$$

符合的能量守恆式為

$$\frac{1}{2}m \left[ \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \right] - \frac{GMm}{r} - \frac{GML^2}{mc^2r^3} = \frac{E^2}{2mc^2} - \frac{1}{2}mc^2$$

物體的有效重力位能為

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GML^2}{mc^2r^3}$$

所受到的等效重力為

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2} - \frac{3GML^2}{mc^2r^4}$$

愛因斯坦在 1916 年提出了三個檢驗廣義相對論的實驗，後來被稱作古典廣義相對論實驗：

- (1) 光波的重力紅移。
- (2) 光波在太陽附近的偏折。
- (3) 水星軌道近日點的進動。

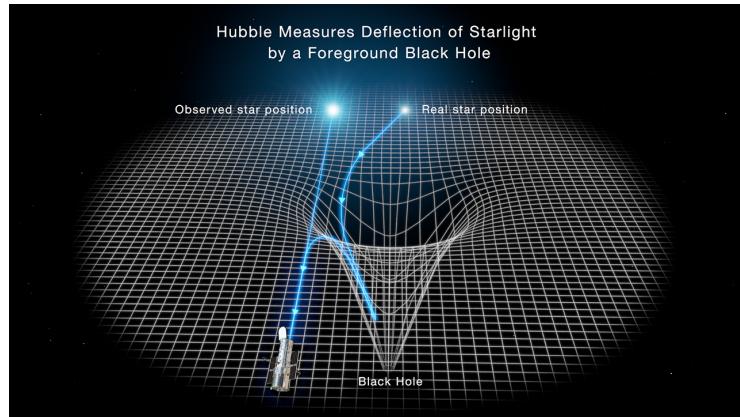
#### 9.1.1 光波在太陽附近的偏折

令  $b$  為光線軌跡與星體的最短距離（又稱撞擊參數）。使用牛頓力學計算掠過太陽表面光線的偏折角  $\Delta\phi_{\text{NG}}$  為

$$\Delta\phi_{\text{NG}} = \frac{2GM}{bc^2}$$

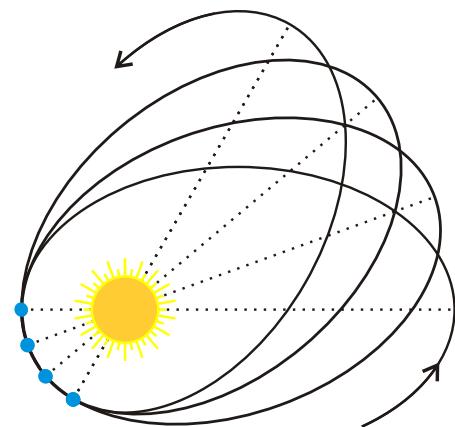
使用廣義相對論計算掠過太陽表面光線的偏折角  $\Delta\phi_{\text{GR}}$  為

$$\Delta\phi_{\text{GR}} = \frac{4GM}{bc^2}$$



### 9.1.2 水星軌道近日點的進動

在牛頓力學中，若只考慮水星與太陽的萬有引力，水星繞太陽的軌道應為封閉的橢圓。不過在實際情況下，水星軌道的近日點卻是逐年改變的（如圖），稱近日點進動（perihelion precession）。1859 年勒為耶（Urbain Le Verrier, 1811-1877）以 1697-1848 年間對水星觀測所測數據計算，發現水星每公轉一百次，近日點會移動 574 角秒（圓周 360 度，1 度 = 60 角分 = 3600 角秒）。他後來以牛頓萬有引力計算，把所有會影響水星繞日的天體引力（其餘行星攝動）都考慮進去，得到 531 角秒。這差值 43 角秒後來被愛因斯坦的場方程式所補足，同時證實廣義相對論的正確性。

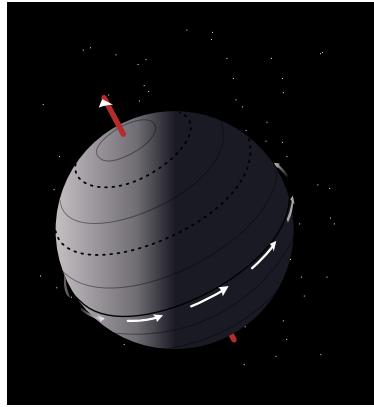


若已知進動的速率很小，且假設水星的軌道離心率很小，則在一個週期內軌道進動的角位移  $\Delta\phi$  為

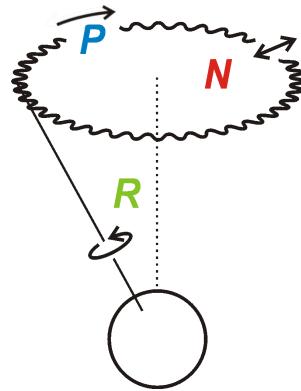
$$\Delta\phi = \frac{6\pi G^2 M^2 m^2}{c^2 L^2}$$

## 9.2 歲差

由於地球本身呈扁球型，受力不均以致於太陽及月球的引力對地球產生一個力矩，對地球本身自轉的角動量造成影響，並使之產生進動。歲差，又稱地軸進動 (axial precession)，一般專指地球自轉軸緩慢且均勻的變化，週期約 25,722 年。其他週期較短或不規律的變化則被稱為章動 (nutation)。



(a) 地球的歲差



(b) 歲差 (P)、章動 (N) 與地球自轉 (R)，圖中黑色實線為地球自轉軸，虛線為黃軸

圖 5

## 9.3 四極矩效應

對於球形物體而言，因為各項同性，所以質量四極矩為零。但是對於不規則形狀的物體，我們可以以質心為原點作多極展開，即可寫為

$$U(r) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \approx -\frac{GM}{r} - \frac{G}{r^3} \sum_i p_i r_i - \frac{G}{2r^5} \sum_{i,j} Q_{i,j} r_i r_j$$

$M$  為總質量

$$M = \int \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

$p_i$  為質量偶極

$$p_i = \int \rho(\mathbf{r}') r_i d^3\mathbf{r}'$$

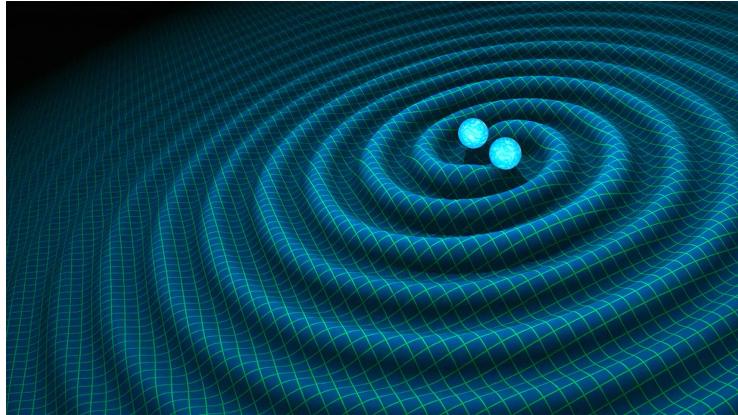
通常我們會選擇物體的質心為原點去做計算，如此一來質量偶極必定為零。

$Q_{ij}$  為質量四極矩

$$Q_{i,j} = \int \rho(\mathbf{r}') (3r'_i r'_j - |\mathbf{r}'| \delta_{i,j}) d^3\mathbf{r}'$$

而多出來的四極矩項則會造成軌道進動的現象。因此可考慮太陽的質量四極矩對地球軌道的修正。另外質量四極矩在廣義相對論中也十分重要。如果它隨時間變化，就能產生重力波。重力波的輻射功率  $P(r, t)$  為

$$P(r, t) = \frac{G}{45c^5} \left( \sum_{i,j} \ddot{Q}_{ij}^2 \right)_{t'=t-r/c}$$



**Problem 9.1.** 2017 年物理諾貝爾獎頒給證實重力波存在的三位物理學家，他們偵測到一個來自雙黑洞系統產生的重力波訊號，雙黑洞系統最主要會經歷旋近、合併、而歸於沉靜的過程，在它們彼此旋近過程所產生的重力波，波的振盪會由緩漸急、由弱漸強；而在快速合併的過程中，產生的重力波之頻率與能量則會漸增，最終合併為一時，重力波將歸於沉寂。<sup>a</sup>

考慮一個雙星系統，其星體質量分別為  $m_1$  與  $m_2$ ，兩者之間的距離為  $r(t)$ ，初始距離為  $r(t=0) = r_0$ 。已知繞行過程中會產生重力波且輻射出能量，導致系統的總能量減少。因此  $r(t)$  隨  $t$  增大而減小，但質量不會以能量的形式輻散到宇宙中。

- (a) 請證明當兩星球以角速度  $\omega$  繞行系統的質心時，重力波的輻射功率  $P$  為

$$P = \frac{32G\mu^2r^4\omega^6}{5c^5}$$

並求出  $\mu$  的表達式。

- (b) 假設在繞行過程中，星體的速率恆小於光速，且一個週期內重力波所輻射的能量遠小於總能量。試求在  $r(t)$  遠大於史瓦西半徑的情況下， $r(t)$  的表達式。

<sup>a</sup>節錄自 107 學測自然科。

$$P = \frac{G}{45C^5} \sum_{i,j} \ddot{Q}_{ij}^2 \quad Q_{ij} = \int p(\vec{r}') (3r_i' r_j' - \vec{r}' \delta_{ij}) d^3 \vec{r}'$$

$$Q_{11} = 2 \int p(\vec{r}') x^2 d^3 \vec{r}' = 2 \left[ M_1 \left( \frac{M_2}{M_1+M_2} R \right)^2 + M_2 \left( \frac{M_1}{M_1+M_2} R \right)^2 \right] = \frac{2M_1 M_2}{M_1+M_2} R^2$$

$$\vec{r}_1 = \frac{M_2}{M_1+M_2} R (\cos \omega t \hat{x} + \sin \omega t \hat{y}) \quad \vec{r}_2 = -\frac{M_1}{M_1+M_2} R (\cos \omega t \hat{x} + \sin \omega t \hat{y})$$

$$Q_{11} = \int p(\vec{r}') [3r_1'^2 - (r_1'^2 + r_2'^2)] d^3 \vec{r}' = \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2} R^2 \frac{3(\cos^2 \omega t - 1)}{\frac{3}{2}(1 + \cos 2\omega t)} \quad Q_{22} = \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2} R^2 \frac{3(\sin^2 \omega t - 1)}{\frac{3}{2}(1 - \cos 2\omega t)} \frac{3}{2} \sin \omega t$$

$$Q_{12} = 3 \int p(\vec{r}') r_1' r_2' d^3 \vec{r}' = 3 \left[ M_1 \left( \frac{M_2}{M_1+M_2} R \right)^2 \sin \omega t \cos \omega t + M_2 \left( \frac{M_1}{M_1+M_2} R \right)^2 \sin \omega t \cos \omega t \right] = \frac{3M_1 M_2}{M_1+M_2} R^2 \sin \omega t \cos \omega t$$

$$\sum_{i,j} \ddot{Q}_{ij}^2 = \left( \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2} \right)^2 R^4 \left[ 2 \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot 8 \omega^3 \right)^2 \right] = 9.32 \left( \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2} \right)^2 R^4 \omega^6$$

$$P = \frac{G}{45C^5} 9.32 \left( \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2} \right)^2 R^4 \omega^6 = \frac{32G \mu^2 R^4 \omega^6}{5C^5} \quad \omega = \frac{G(M_1+M_2)}{R^3}$$

$$= \frac{32G^4}{5C^5 R^5} \left( \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2} \right)^2 (M_1+M_2)^3$$

$$E = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 - \frac{GM_1 M_2}{r} = -\frac{GM_1 M_2}{2r}$$

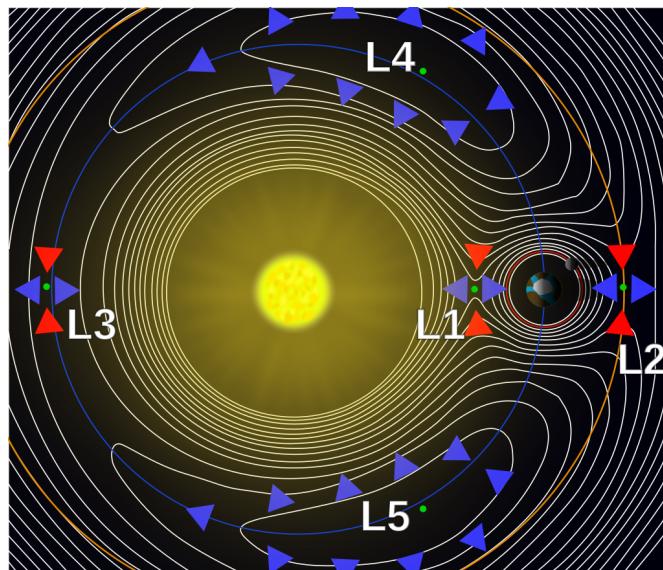
$$\frac{dE}{dt} = \frac{GM_1 M_2}{2r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{32G^4 (M_1 M_2)^2 (M_1+M_2)}{5C^5} \frac{1}{r^5}$$

$$r^3 dr = -\frac{64G^3 M_1 M_2 (M_1+M_2)}{5C^5} dt$$

$$r^4 - r_0^4 = -\frac{256G^3 M_1 M_2 (M_1+M_2)}{5C^5} t$$

## 9.4 拉格朗日點

在兩個天體環繞運行時，空間中有五個位置可以放入第三個物體（質量遠比前兩個天體小），並使其保持在兩個天體的相應位置上。也就是說，我們如果在相對兩個天體為靜止的旋轉座標系來看，第三個物體也為靜止，且所受的合力為零。我們稱此五個特殊解 (particular solution) 所代表的五個點為拉格朗日點 (Lagrangian point)。L1~L5 分別為五個拉格朗日點，下圖則為太陽和地球系統的五個拉格朗日點與在此旋轉坐標系內的等位線分布。在這五個點裡，只有 L4,L5 有精確解。假設太陽的質量為  $M_1$ 、地球的質量為  $M_2$ ，兩者之間的距離為  $R$ 。



在  $\alpha = \frac{M_2}{M_1+M_2} \ll 1$  的情況下，計算可得 L1,L2,L3 的近似解為

$$L1 \left( \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{3} \right)^{1/3} \right] R, 0 \right), \quad L2 \left( \left[ 1 + \left( \frac{\alpha}{3} \right)^{1/3} \right] R, 0 \right), \quad L3 \left( \left( 1 + \frac{5}{12}\alpha \right) R, 0 \right)$$

L1,L2,L3 皆為鞍點 (saddle point)，恆存在不穩定解。

$$L4 \left( \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} R \right), \quad L5 \left( \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \frac{R}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} R \right)$$

注意到  $M_1 M_2 L_4$  與  $M_1 M_2 L_5$  成正三角形。 $L_4, L_5$  在  $\frac{M_1}{M_2} > \frac{\sqrt{27}+\sqrt{23}}{\sqrt{27}-\sqrt{23}} \approx 24.96$  的範圍為穩定平衡點。

## 10 解答

Problem 1.1

$$F = \frac{Gm^2}{(R^3 - r^3)^2} \left[ \frac{R^6}{d^2} - \frac{2R^3r^3}{(d - R + r)^2} + \frac{r^6}{(d - 2R + 2r)^2} \right]$$

Problem 2.1

$$\dot{A} = \frac{L}{2m}$$

Problem 3.1

$$v_0 = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{d}}$$

Problem 3.2

$$v = \sqrt{\frac{3}{2}}v_0$$

Problem 3.3

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

Problem 3.4

$$\rho_c = \frac{9\omega^2}{20\pi G}$$

Problem\* 3.5

$$F(r) = -\frac{8R^2L^2}{m} \frac{1}{r^5}$$

$$F(r) = -\frac{3aL^2}{m} \frac{1}{r^4}$$

Problem 5.1

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l^3}{GM(1-e^2)^3}}$$

Problem 5.2

$$v_x^2 + \left(v_y - \frac{GMme}{L}\right)^2 = \left(\frac{GMm}{L}\right)^2$$

速端曲線是圓形。

Problem\* 5.4

$$\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\phi}{4}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

Problem 9.1

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$r(t) = \left[ r_0^4 - \frac{256G^3m_1m_2(m_1+m_2)}{5c^5}t \right]^{1/4}$$