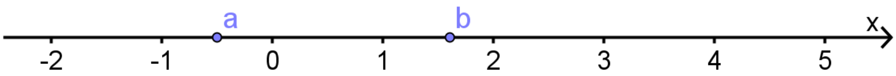
NÚMEROS REALES - ORDEN y DESIGUALDADES

Definición

Si a y b son números reales, **a es menor que b** si y solo si $b - a$ es positivo, lo cual denotaremos $a < b$.

En símbolos: $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

Geométricamente $a < b$ significa que **a** está a la izquierda de **b** en la recta real.



Nota

La expresión $a \leq b$ se lee "**a es menor o igual que b**" y significa que **a** es menor que **b** o que **a** es igual a **b**.

En símbolos: $a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$.

Observación

$a < b$ (**a** menor que **b**) y $b > a$ (b mayor que a) son equivalentes, es decir significan lo mismo.

En símbolos: $a < b \Leftrightarrow b > a$

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Sean a, b , c y d números reales

1.- Transitiva: Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

2.- Aditiva: Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$

3.- Si $a < b$ y k es un número real entonces $a + k < b + k$

4.- Si $a < b$ y k es un número real positivo entonces $a.k < b.k$

5.- Si $a < b$ y k es un número real negativo entonces $a.k > b.k$

Nota:

Estas propiedades son válidas si cambiamos "<" por "≤" y ">" por "≥"

Observación

En una desigualdad al multiplicar por un número real, debemos tener en cuenta su signo.

Ejemplo 1: $2 < 10 \Rightarrow 2 + (-7) < 10 + (-7) \Rightarrow -5 < 3$

Ejemplo 2: $2 < 10 \quad \Rightarrow \quad 2.(5) < 10.(5) \quad \Rightarrow \quad 10 < 50$

Ejemplo 3: $2 < 10 \quad \Rightarrow \quad 2.\left(-{}^{1}/_{7}\right) > 10.\left(-{}^{1}/_{7}\right) \quad \Rightarrow \quad -{}^{2}/_{7} > -{}^{10}/_{7}$

¿Qué propiedad se empleó en cada ejemplo?

Plantee a continuación un ejemplo similar al anterior donde se aplique la propiedad 1 y otro ejemplo donde se aplique la propiedad 2.

Definición

Si $a < b$ y $b < c$ diremos que b está entre a y c, la denotamos $a < b < c$ y la llamamos **doble desigualdad**.

En símbolos: $a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c$

CONJUNTOS

Para denotar subconjuntos de números reales usaremos la notación:

$$\{x \,/\, x \text{ satisface una propiedad }\}$$

Unión

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B y se denota $A \cup B$

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Intersección

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen a A y que pertenecen a B y se denota $A \cap B$

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

Intervalos

El **intervalo abierto** denotado por (a, b) es el conjunto de los números reales mayores que **a** y menores que **b**.

$$(a, b) = \{x \in IR/a < x < b\}$$

El **intervalo cerrado** denotado por $[a, b]$ es el conjunto de los números reales mayores o iguales que **a** y menores o iguales que **b**.

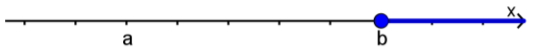
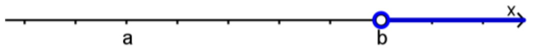
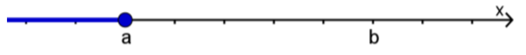
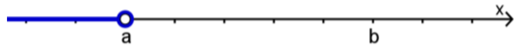
$$[a, b] = \{x \in IR/a \leq x \leq b\}$$

Observación

a y **b** se llaman **puntos terminales** o extremos del intervalo.

Note que **a** y **b** no pertenecen a (a, b) y sí pertenecen a $[a, b]$.

INTERVALOS DE LA RECTA REAL

Nombre	Notación y Conjunto	Representación
Intervalo abierto	$(a, b) = \{x/a < x < b\}$	
Intervalo cerrado	$[a, b] = \{x/a \leq x \leq b\}$	
Intervalos semiabiertos	$[a, b) = \{x/a \leq x < b\}$	
	$(a, b] = \{x/a < x \leq b\}$	
Intervalos Infinitos	$[b, \infty) = \{x/x \geq b\}$	
	$(b, \infty) = \{x/x > b\}$	
	$(-\infty, a] = \{x/x \leq a\}$	
	$(-\infty, a) = \{x/x < a\}$	
	$(-\infty, \infty) = IR$	

Los cuatro primeros intervalos se llaman intervalos acotados.

Los cinco últimos se llaman intervalos no acotados.

bservación

Los **símbolos** $+\infty$ y $-\infty$ no denotan números reales.

DESIGUALDADES

Resolver una desigualdad significa determinar los números reales que la verifican, es decir, determinar el siguiente conjunto al que llamaremos conjunto solución.

$$C_S = \{x \in IR / \text{ x satisface la desigualdad } \}$$

Ejemplo 1: Determine y grafique el conjunto solución de: $x - 6 < 3x - 5$

Ejemplo 2: Escriba en notación de intervalo el conjunto $\{x \,/\, x < 4x - 1 \leq 11\}$

Para resolver desigualdades en la que intervienen polinomios de grado mayor que uno, aplicaremos el siguiente principio.

DEFINICION

a es un **cero** del polinomio P(x) si y solo si P(a)=0.

PRINCIPIO

Un **polinomio** cambia de signo sólo en sus ceros.

Lo que afirma el principio es que entre dos ceros consecutivos, el polinomio es o siempre positivo o siempre negativo.

Esto significa que si se ordenan los ceros reales de un polinomio, éstos dividen la recta real en intervalos prueba en los que el polinomio no cambia de signo.

Dado un polinomio de grado n $P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x \;\; + a_0$

Factorear el polinomio y ordenar los ceros reales $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_{k-1} \leq r_k, \quad k \leq n$

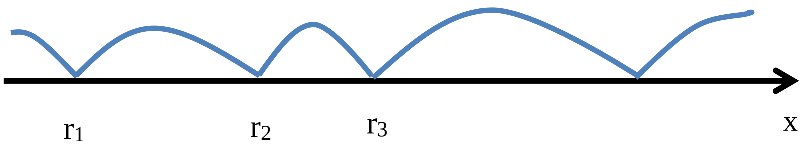
Construir intervalos prueba $(-\infty, r_1); (r_1, r_2); \ldots; (r_{k-1}, r_k); (r_k, \infty)$

Procedimiento

Dada una desigualdad no lineal, primero la trabajaremos para obtener una expresión que sea un polinomio comparado con cero.

- Buscar los ceros del polinomio,
- Ordenar los ceros reales,
- Dividir la recta real en intervalos prueba,
- Analizar el signo del polinomio en cada intervalo,
- Analizar si los puntos terminales de los intervalos prueba son solución,

- Armar el conjunto solución.



Ejemplo 3: Determine y grafique el conjunto solución de: $\{x \,/\, x^2 - x > 12\}$

¿Cómo se trabajaría en el siguiente ejemplo?

Ejemplo 4: Determine y grafique el conjunto solución de: $\left\{y \,/\, \frac{2}{y} \leq -5\right\}$

EJERCITACIÓN PROPUESTA

1- Resuelva las siguientes desigualdades y grafique el conjunto solución en la recta real.

a) $1-3x>2x+6$ **b)** $-9\leq 1-5x<6$ **c)** $2x^2-5x+1>1$

d) $x^2-4x>-x^2-5$ **e)** $\frac{y-6}{y+7}<0$ **f)** $\frac{(x+5)(4x-3)}{x^2+16}<0$

g) $(x+7)(x^2+3x-4)\geq 0$ **h)** $\frac{3}{u}<u$ **i)** $\frac{5}{x-4}+1\geq\frac{1}{2x}$

2- Sean A, B, C y D los siguientes conjuntos:

$A=\left\{x\in\Re : 3x^2-x^3<0\right\}$ $B=\left\{x\in\Re /\ 3x^2-x^3\geq 0\right\}$

$C=\left\{x\in\Re : \frac{-7}{3x^2-x^3}\leq 0\right\}$ $D=\left\{x\in\Re /\ \frac{3x^2-x^3}{(x+3)^6}\geq 0\right\}$

Usando notación de intervalos exprese los siguientes conjuntos:

a) A, B, C y D **b)** $A\cup B$, $A\cap B$ y $A\cap C$ **c)** $D\cap C$ y $D\cup C$

3- Para qué números reales están definidas las siguientes raíces:

a) $\sqrt{-2x^2-x+6}$ **b)** $\sqrt[4]{\frac{(x+6)}{(x^2+25)(3x-2)}}$

4- La relación entre grados Celsius C y grados Fahrenheit F está dada por $C=\frac{5}{9}(F-32)$

a) Determine el intervalo en la escala Fahrenheit que corresponde a $20\leq C\leq 30$.

b) Determine el intervalo en la escala Celsius que corresponde a $50\leq F\leq 95$.

5- Un proyectil es disparado hacia arriba desde el suelo. La posición, en metros, es $s=-16t^2+160t$, donde t se mide en segundos ¿Cuándo excederá los 384 m del suelo?

6- Cuando dos resistencias R_1 y R_2 están conectadas en paralelo, la resistencia total R satisface la ecuación $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. Encuentre R_1 para un circuito en paralelo en el que $R_2=2\text{ohm}$ y R debe ser al menos de 1 ohm.

a) $g: g(x)=-3x^4+5x^2-8$ **b)** $f: f(x)=\sqrt{4-x}$ **c)** $f: f(y)=\frac{y^3-y}{y^2+1}$, $-10\leq y\leq 10$.-