

,

Vectores en  $\mathbb{R}^n$ **Definición 1** (Vector de  $\mathbb{R}^n$ ). .Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,

- a) Llamamos **vector de  $\mathbb{R}^n$**  a toda  $n$ -úpla ordenada de números reales.
- b) El **conjunto de vectores** de  $n$  componentes,  $\mathbb{R}$ , es entonces

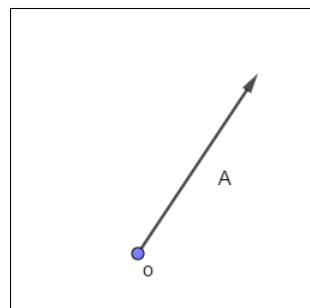
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / \forall i = 1, \dots, n; \quad x_i \in \mathbb{R}\}$$

Observaciones:

- Denotamos los vectores con letras mayúsculas, por ejemplo  $A$ , en el caso que se preste a confusión colocamos el símbolo  $\rightarrow$  sobre el nombre del vector y escribimos  $\vec{A}$ .  
Por ejemplo,  $A \in \mathbb{R}^n$ , quiere decir que  $A$  es un vector de  $\mathbb{R}^n$ .
- Las componentes del vector se denotan con letras minúsculas, por ejemplo:  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , como el vector pertenece a  $\mathbb{R}^n$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ .
- **Analíticamente** el vector  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  se identifica con el punto  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  por lo que no haremos distinción a menos que sea necesario.

**Representación gráfica**

Para representar graficamente un vector utilizamos una flecha (segmento dirigido) con origen en el origen del sistema de referencia y extremo en el punto cuyas coordenadas coinciden con las componentes del vector.



**Ejemplo. .**

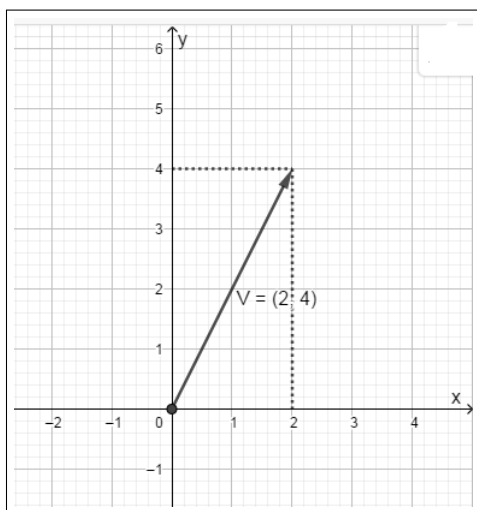
$V = (2, 4)$ , es un vector de dos componentes reales entonces,  $V \in \mathbb{R}^2$

$A = (3, 4, 5)$  es un vector de tres componentes reales entonces,  $A \in \mathbb{R}^3$

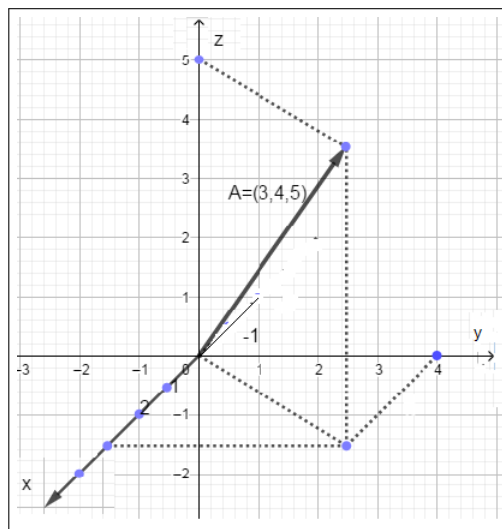
$C = (1, -1, 5, 2, -1)$  es un vector de cinco componentes reales entonces,  $C \in \mathbb{R}^5$

graficamente:

en  $\mathbb{R}^2$



en  $\mathbb{R}^3$

**Definición 2** (Igualdad de vectores) . .

Sean  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$

$$A = B \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n; \quad a_i = b_i$$



Es importante que recuerdes que para comparar dos vectores deben tener el mismo número de componentes.

**Ejercicio. .**

Dados los vectores  $U = (2, x^2, -4)$  y  $V = (2, 16, x)$ , determine  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $U = V$ .

*Resolución.*

Debemos determinar  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $U = V$ , es decir,

$$(2, x^2, -4) = (2, 16, x)$$

por la definición de igualdad de vectores, cada componente del vector  $U$  es igual a la correspondiente del vector  $V$

$$\begin{cases} 2 = 2 \\ x^2 = 16 \\ -4 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2 \\ x = 4 \quad \text{ó} \quad x = -4 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \end{cases}$$

*Respuesta:*

$$U = V \quad \text{si} \quad x = -4$$

**Definición 3** (Suma de vectores). .

Dados  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , la suma de  $A$  y  $B$  es el vector

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$$

.

**Ejemplo.** .

Dados los vectores  $A = (2, 2, -4, 0)$  y  $B = (2, 16, -1, 1)$ ,

$$A + B = (2 + 2, 2 + 16, (-4) + (-1), 0 + 1)$$

$$A + B = (4, 18, -5, 1)$$



Es importante que recuerdes que para sumar vectores, deben tener el mismo número de componentes.

**Propiedades** (de la suma). .

1. La suma de vectores es conmutativa.

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^n, A + B = B + A$$

2. La suma de vectores es asociativa

$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^n, (A + B) + C = A + (B + C)$$

3. Existe elemento neutro para la operación suma de vectores.

$$\exists \theta = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n: \forall A \in \mathbb{R}^n, \theta + A = A + \theta = A$$

4. Cada vector tiene su opuesto respecto de la operación suma.

$$\forall A \in \mathbb{R}^n, \exists A' \in \mathbb{R}^n: A + A' = A' + A = \theta$$

*Demostración.* .

1. Sean  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
 A + B &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \\
 &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n), && \text{por definición de suma de vectores} \\
 &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \dots, b_n + a_n), && \text{aplico en c/componente conmutatividad de la suma en } \mathbb{R} \\
 &= (b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n), && \text{por definición de suma de vectores} \\
 &= B + A
 \end{aligned}$$

Probamos que:

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^n, \quad A + B = B + A$$

2. Queda para los alumnos

3. Sean  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), \theta = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
 A + \theta &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (0, 0, \dots, 0) \\
 &= (a_1 + 0, a_2 + 0, \dots, a_n + 0) && \text{por definición de suma de vectores} \\
 &= (a_1, a_2, \dots, a_n) && 0 \text{ es neutro para la suma en } \mathbb{R} \\
 &= A
 \end{aligned}$$

probamos que ,  $A + \theta = A$

Como la suma de vectores es conmutativa,  $\theta + A = A + \theta = A$

Por lo tanto queda probado que:

$$\exists \theta \in \mathbb{R}^n : \forall A \in \mathbb{R}^n, \quad A + \theta = \theta + A = A$$

4. Sea  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Queremos determinar la existencia de  $A' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $A + A' = \theta = A' + A$ .

$$\begin{aligned}
 A + A' &= \theta \\
 (a_1, a_2, \dots, a_n) + (a'_1, a'_2, \dots, a'_n) &= (0, 0, \dots, 0) && (1) \\
 (a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \dots, a_n + a'_n) &= (0, 0, \dots, 0) && \text{por definición de suma de vectores.}
 \end{aligned}$$

Por definición de igualdad de vectores

$$\forall i = 1, 2, \dots, n; \quad a_i + a'_i = 0$$

por existencia de opuesto de un número real

$$\forall i = 1, 2, \dots, n; \quad a'_i = -a_i$$

hemos obtenido las componentes del vector  $A'$ , por lo tanto:

$A' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n) = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n) \in \mathbb{R}^n$  y cumple que,  $A + A' = \theta$  y como la suma de vectores es conmutativa  $A' + A = A + A' = \theta$

$A'$ , como se puede probar que es el único vector con esta propiedad, se lo denomina opuesto de  $A \in \mathbb{R}^n$  y se denota  $-A$ , ( $A' = -A$ ).

Queda probado que:

$$\forall A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \exists -A = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n) \in \mathbb{R}^n : (-A) + A = A + (-A) = \theta$$

□

### Interpretación geométrica de la suma.

Para vectores de  $\mathbb{R}^2$

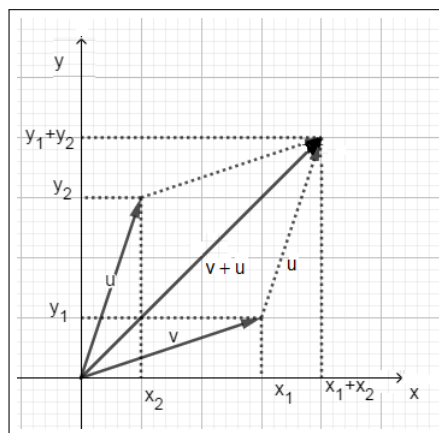
Sean  $V = (x_1, y_1)$  y  $U = (x_2, y_2)$

el vector suma

$$V + U = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Gráficamente se cumple la

**Regla del paralelogramo**



Podemos generalizar para vectores de  $\mathbb{R}^n$  y concluir, gráficamente, que la suma de los vectores  $V$  y  $U$ , pertenecientes a  $\mathbb{R}^n$ , es el vector diagonal del paralelogramo de lados  $V$  y  $U$ , con origen en el origen del sistema de coordenadas y extremo en el punto  $V + U$ .

**La existencia y unicidad del vector opuesto para cada vector de  $\mathbb{R}^n$  nos permite definir la diferencia entre dos vectores**

**Definición 4** (Diferencia de vectores). .

$$\text{Sean } A, B \in \mathbb{R}^n, \quad A - B = A + (-B)$$

**Ejemplo. .**

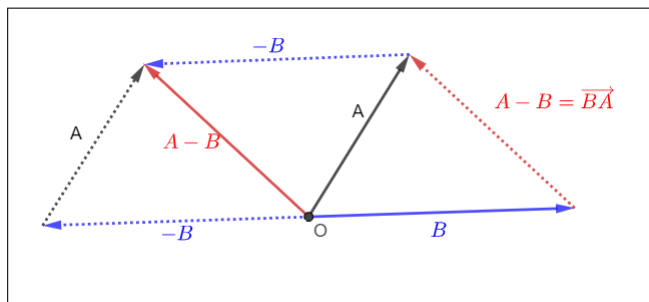
Dados los vectores  $A = (2, 2, -4, 0)$  y  $B = (2, 16, -1, 1)$ ,

$$A - B = (2 - 2, 2 - 16, (-4) - (-1), 0 - 1)$$

$$A - B = (0, -14, -3, -1)$$

**Interpretación geométrica de la resta**

Como  $A - B = A + (-B)$ , por la interpretación geométrica de la suma de vectores  $A - B$  es la diagonal del el paralelogramos de lados  $A$  y  $-B$ , que



por igualdad de vectores es el vector diagonal del paralelogramo de lados  $A$  y  $B$  con origen en  $B$  y extremo en  $A$ .

Llamamos al vector  $\overrightarrow{BA}$ , **Vector Localizado**

$$\overrightarrow{BA} = A - B,$$

Si el origen del vector es el punto  $A$  y el extremo es el punto  $B$  el vector es,

$$\overrightarrow{AB} = B - A,$$

que es opuesto del vector  $\overrightarrow{BA}$

**Ejemplo. .**

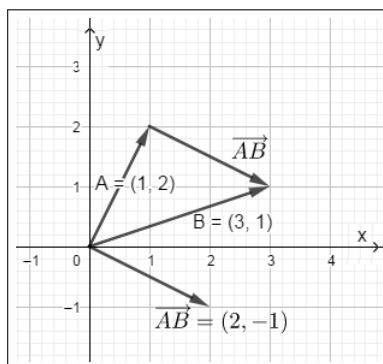
Dados  $A = (1, 2)$  y  $B = (3, 1)$ . Determinemos los vectores,  $\overrightarrow{BA}$  y  $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (1, 2) - (3, 1) = (-2, 1).$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

$$= (3, 1) - (1, 2)$$

$$= (2, -1)$$



**Definición 5** (Producto de un escalar por un vector). .

Sean  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , el producto del escalar  $\lambda$  por el vector  $A$  es el vector

$$\lambda A = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \in \mathbb{R}^n$$

**Ejemplo.** .

Sean  $\lambda = -2$  y  $A = (1, -2, 3) \in \mathbb{R}^3$

$$\lambda A = (-2)(1, -2, 3) = ((-2) \cdot 1, (-2) \cdot (-2), (-2) \cdot 3) = (-2, 4, -6)$$

**Propiedades** (del producto por escalar). .

$$1. \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^n, \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\mu\lambda)A$$

$$2. \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^n, (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$3. \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{R}^n, \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

*Demostración.* Quedan para el alumno. □

**Observaciones.**

$$1. \forall A \in \mathbb{R}^n, 1A = A$$

$$2. \forall A \in \mathbb{R}^n, (-1)A = -A$$

$$3. \text{ Dados } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } A \in \mathbb{R}^n, \lambda A = \theta \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ o } A = \theta$$

*Demostración.* .

1. y 2. Queda para el alumno.

3. Sean  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda A = \theta \Leftrightarrow \lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) = (0, 0, \dots, 0) \quad \text{por def. de producto de escalar por vector}$$

$$\Leftrightarrow \forall i = 1, 2, \dots, n; \quad \lambda a_i = 0 \quad \text{por def. de igualdad de vectores}$$

$$\Leftrightarrow \forall i = 1, 2, \dots, n; \quad \lambda = 0 \text{ o } a_i = 0 \quad \text{por producto de dos num. reales igual a 0}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0, \text{ o } \forall i = 1, 2, \dots, n; \quad a_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0, \text{ o } A = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ o } A = \theta$$

□

**Definición 6** (Producto escalar o producto interno en  $\mathbb{R}^n$ ). .

Dados  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  el producto escalar de  $A$  y  $B$ , que denotamos  $A \cdot B$ , es el **número real** que se obtiene de la siguiente manera:

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \in \mathbb{R}$$

usando la notación de suma resumida:

$$A \cdot B = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$



Cuando multiplicas escalarmente dos vectores obtienes como resultado un número real. Recuerda que sólo puedes multiplicar vectores con igual número de componentes.

La notación para indicar el producto escalar de vectores es el punto “ $\cdot$ ”

**Ejemplo.** Dados los vectores  $A = (2, 2, -4, 0)$  y  $B = (2, -6, -1, 1)$ ,

$$A \cdot B = 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-6) + (-4) \cdot (-1) + 0 \cdot 1$$

$$A \cdot B = 4 - 12 + 4 + 0$$

$$A \cdot B = -4$$

**Propiedades** (del producto escalar). .

$$1. \forall A, B \in \mathbb{R}^n, \quad A \cdot B = B \cdot A$$

$$2. \forall A, B, C \in \mathbb{R}^n, \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$



$$3. \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{R}^n, \quad (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B) = \lambda (A \cdot B)$$

$$4. \forall A \in \mathbb{R}^n, \quad A \cdot A \geq 0 \quad y \quad (A \cdot A = 0 \Leftrightarrow A = \theta)$$

*Demostración.* .

$$1. \text{ Sean } A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, && \text{por la definición de producto escalar de vectores} \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_n a_n, && \text{el producto de números reales es conmutativo} \\ &= (b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) && \text{por la definición de producto escalar de vectores} \\ &= B \cdot A \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^n, \quad A \cdot B = B \cdot A$$

$$2. \text{ Sean } A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n), C = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot [(b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)] \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots, b_n + c_n) && \text{por la definición de suma de vectores} \\ &= a_1 \cdot (b_1 + c_1) + a_2 \cdot (b_2 + c_2) + \dots + a_n \cdot (b_n + c_n) && \text{por la definición de producto escalar} \\ &= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + \dots + a_n b_n + a_n c_n && \text{prop. distributiva del producto respecto} \\ & && \text{de la suma en } \mathbb{R}, \text{ en cada sumando} \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n) && \text{aplico prop. conmut. y asociat. de + en } \mathbb{R} \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) && \text{por la definición de producto escalar} \\ &= A \cdot B + A \cdot C \end{aligned}$$

Queda probado que:

$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^n, \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

3. la demostración queda como ejercicio.

4. Sea  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$A \cdot A \underset{(*1)}{=} a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_n a_n \underset{(*2)}{=} \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad (*3)$$

(\*1) por definición de producto escalar

(\*2) por definición de potencia en  $\mathbb{R}$

Como:  $\forall i = 1, \dots, n; \quad a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall i = 1, \dots, n; \quad a_i^2 \geq 0$  luego

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0 \underset{(*3)}{\Rightarrow} A \cdot A \geq 0$$

Probaremos ahora que  $A \cdot A = 0 \Leftrightarrow A = \theta$

$$A \cdot A = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i^2 = 0 \quad \text{de } (*3)$$

$$\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n; \quad a_i^2 = 0 \quad \text{por suma de números reales no negativos}$$

$$\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n; \quad a_i = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\Leftrightarrow A = \theta$$

□

**Definición 7** (Norma de un vector). .

Sea  $A \in \mathbb{R}^n$  llamaremos norma de  $A$  al número real

$$\|A\| = \sqrt{A \cdot A}$$

Observación:

- $\|A\|$  está bien definida pues  $A \cdot A \geq 0$  y tiene sentido calcular, en  $\mathbb{R}$ ,  $\sqrt{A \cdot A}$
- $\|A\| = \sqrt{A \cdot A} \iff \|A\|^2 = A \cdot A$
- Si  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $A \cdot A = \sum_{i=1}^n a_i^2$  y por lo tanto  $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$

**Ejemplo.** .

Sea  $A = (2, -1, 5)$ , aplicando la tercera observación

$$\|A\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30}$$

**Interpretación geométrica de la norma de un vector en  $\mathbb{R}^2$** 

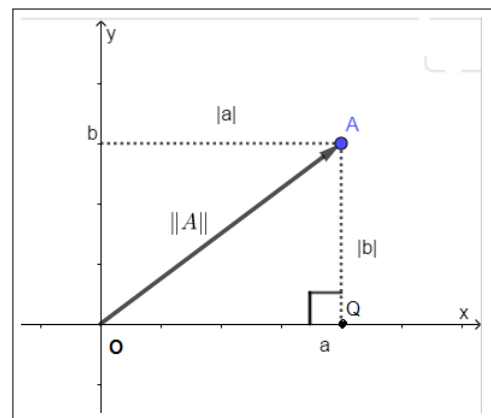
Sea  $A = (a, b)$ ,  $Q = (a, 0)$ ,

Los puntos  $A, Q, O$  determinan un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden  $|a|$  y  $|b|$ , por el teorema de Pitágoras sabemos que la longitud de la hipotenusa es  $\sqrt{|a|^2 + |b|^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Por observación de la definición de norma

$$\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

por lo tanto  $\|A\|$  es la longitud de la hipotenusa es decir, **la longitud del vector  $A$** .



**Podemos generalizar este resultado para  $\mathbb{R}^n$  y concluir que  $\|A\|$  es la longitud del vector  $A$ , o lo que es lo mismo, la distancia del punto  $A$  al origen del sistema de referencia.**

**Propiedades. .**

$$1. \forall A \in \mathbb{R}^n, \quad \|A\| \geq 0 \quad y \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \theta$$

$$2. \forall A \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$$

**3. Desigualdad Triangular**

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^n, \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

**Demostración. .**

1. La demostración queda para los alumnos. Se sugiere utilizar las propiedades del producto escalar.

2. sean  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|\lambda A\| &= \sqrt{(\lambda A) \cdot (\lambda A)} && \text{por definición de norma de un vector} \\ &= \sqrt{(\lambda \lambda)(A \cdot A)} && \text{por propiedades del producto escalar} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \|A\|^2} && \text{por definición de norma de un vector} \\ &= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\|A\|^2} && \text{propiedad de la raíz cuadrada para números reales no negativos} \\ &= |\lambda| \|A\| && \text{propiedad de valor absoluto} \\ &= |\lambda| \|A\| && \text{por ser } \|A\| \geq 0, \quad \|\lambda A\| = \|A\| \end{aligned}$$

3. Aceptamos sin demostración para Ingenierías, PU. , Lic. en Informática y Lic. en Física

□

**Un vector se dice unitario si su norma es 1**

**Definición 8** (Distancia en  $\mathbb{R}^n$ ). .

Dados  $A$  y  $B \in \mathbb{R}^n$ , la distancia entre  $A$  y  $B$  es el número real no negativo

$$\text{dist}(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

**Propiedades.** .

Las propiedades son consecuencia de la definición de norma, por lo tanto las aceptamos sin demostración. ( Los alumnos de Lic. y Prof. en Matemática deben hacer las demostraciones)

$$1. \forall A, B \in \mathbb{R}^n, \quad \text{dist}(A, B) \geq 0 \quad \wedge \quad \text{dist}(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

$$2. \forall A, B \in \mathbb{R}^n, \quad \text{dist}(A, B) = \text{dist}(B, A).$$

$$3. \forall A, B, C \in \mathbb{R}^n, \quad \text{dist}(A, B) \leq \text{dist}(A, C) + \text{dist}(C, B).$$

**Definición 9** (Vectores paralelos). .

Dados  $A, B \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \parallel B \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} / A = \lambda B$



Dados  $A = \theta \in \mathbb{R}^n$  y  $B \in \mathbb{R}^n$ , si  $\theta \parallel B$ , por la definición de vectores paralelos

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} / \theta = \lambda B$$

como  $\lambda \neq 0$  podemos asegurar que  $B = \theta$ .

Concluimos que: **el vector nulo es paralelo sólo a sí mismo** .

**Ejemplos.** .

Dados los vectores  $A = (2, 4, -1)$ ,  $B = (1, 8, -2)$  y  $C = (1, 2, -\frac{1}{2})$

- ¿ El vector  $A$  es paralelo al vector  $B$ ? Para responder esta pregunta vamos a utilizar la definición de vectores paralelos,  $A \parallel B \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} / A = \lambda B$ .

Vamos a averiguar si existe un escalar  $\lambda$  diferente de 0 que haga que se verifique la igualdad  $A = \lambda B$

$$(2, 4, -1) = \lambda(1, 8, -2)$$

por la definición de producto de escalar por vector

$$(2, 4, -1) = (\lambda, 8\lambda, -2\lambda)$$

por definición de igualdad de vectores

$$\begin{cases} 2 = \lambda \\ 4 = 8\lambda \\ -1 = -2\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = \frac{4}{8} \\ \lambda = \frac{-1}{-2} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \text{no existe } \lambda \end{cases}$$

Respuesta:

No existe  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$  :  $A = \lambda B$ , por lo tanto  $A$  no es paralelo a  $B$

- ¿El vector  $A$  es paralelo al vector  $C$ ?

$$A = (2, 4, -1) = 2(1, 2, -\frac{1}{2}) = 2C$$

por lo tanto ;  $\exists \lambda = 2 \in \mathbb{R} - \{0\}$  /  $A = \lambda C$

Respuesta:

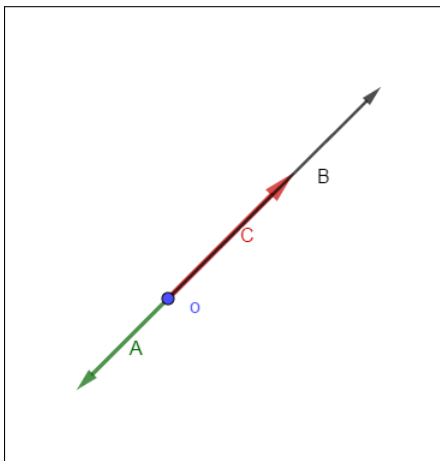
$$A \parallel C$$

### Importante

Geoméricamente dos vectores, no nulos, son paralelos si tienen la misma dirección.

Decimos que dos vectores paralelos, no nulos, tienen el mismo sentido si el escalar que los relaciona es mayor que 0 y tienen sentido contrario si el escalar es menor que 0.

En el gráfico:  $A \parallel B \parallel C$



$A$  y  $B$  tienen la misma dirección y sentido contrario,

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} / A = \lambda B, \text{ con } \lambda < 0$$

$C$  y  $B$  tienen la misma dirección y el mismo sentido ,

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} - \{0\} / C = \gamma B, \text{ con } \gamma > 0$$

La relación de paralelismo cumple las siguientes propiedades que aceptaremos sin demostración (para ingenierías, PU, Lic. en Informática y Lic. en Física)

**Propiedades.** .

1. *Propiedad reflexiva*

$$\forall A \in \mathbb{R}^n, \quad A \parallel A$$

2. *Propiedad simétrica*

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^n : \quad A \parallel B \Rightarrow B \parallel A$$

3. *Propiedad transitiva*

$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^n : \quad (A \parallel B \wedge B \parallel C \Rightarrow A \parallel C)$$

**Enunciaremos un teorema que aceptaremos sin demostración**

**Teorema 1** (Desigualdad de Cauchy Schwarz). .

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^n, \quad |A \cdot B| \leq \|A\| \|B\| \quad \wedge \quad |A \cdot B| = \|A\| \|B\| \iff A \parallel B \text{ ó } A = \theta \text{ ó } B = \theta.$$

**Definición 10** (Vector unitario en una dirección dada o Versor en una dirección dada). .

Dado un vector  $A \in \mathbb{R}^n - \{\theta\}$ , llamamos vector unitario o versor, en la dirección de  $A$  al vector  $E \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$E \parallel A \quad \text{y} \quad \|E\| = 1$$



Es importante que recuerdes que el vector  $A$  debe ser **diferente del vector nulo**,  $\theta$ , de no ser así no tienes dirección para determinar el versor.

**Obtención de la fórmula para determinar versor en una dirección dada**

Sea  $A \in \mathbb{R}^n - \{\theta\}$ , por la definición de versor,  $E \in \mathbb{R}^n$ ,  $E \parallel A$  y  $\|E\| = 1$ .

Por definición de vectores paralelos,

$$E \parallel A \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} / E = \lambda A$$

Para determinar el vector  $E$  debemos obtener el valor del escalar  $\lambda$ ,

como  $E = \lambda A$

$$\|E\| = \|\lambda A\|$$

por hipótesis  $\|E\| = 1$  por lo tanto

$$1 = \|\lambda A\|$$

por propiedad de norma

$$1 = |\lambda| \|A\|$$

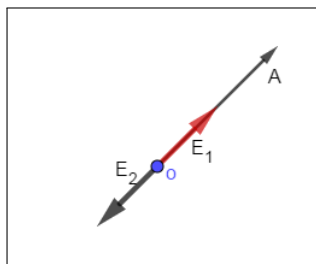
La  $\|A\| \neq 0$  porque  $A \neq \theta$ , podemos dividir ambos miembros por el número  $\|A\|$ , resultando

$$|\lambda| = \frac{1}{\|A\|} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\|A\|}$$

determinado dos valores para el escalar  $\lambda$ , obtenemos dos versores en la dirección del vector  $A$

$E_1 = \frac{1}{\|A\|} A$  por ser el escalar positivo,  $E_1$  tiene la dirección y el sentido de  $A$

$E_2 = \frac{-1}{\|A\|} A$  por ser el escalar negativo,  $E_2$  tiene la dirección y sentido contrario de  $A$



### Ejemplo. .

Dado el vector  $A = (6, -8)$ ,

la norma de  $A$  es,  $\|A\| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$

los versores en la dirección de  $A$  son:

$$E_1 = \frac{1}{\|A\|} A = \frac{1}{10} (6, -8) = \left( \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right)$$

$$E_2 = \frac{-1}{\|A\|} A = \frac{-1}{10} (6, -8) = \left( -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

### Versores fundamentales

- En  $\mathbb{R}^2$ , hay dos versores fundamentales (también se los llama vectores canónicos),

$e_1 = (1, 0)$  (también se designa  $\vec{i}$ ), es el versor fundamental en la dirección del *eje*

$e_2 = (0, 1)$  (también se designa  $\vec{j}$ ), es el versor fundamental en la dirección del *eje*

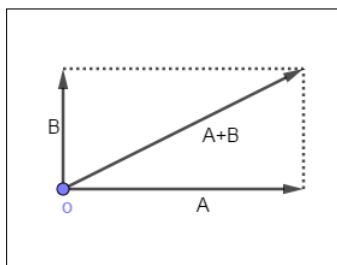
- En  $\mathbb{R}^3$ , hay tres versores fundamentales (también se los llama vectores canónicos),  
 $e_1 = (1, 0, 0)$  (también se designa  $\vec{i}$ ), es el versor fundamental en la dirección del *eje*  
 $e_2 = (0, 1, 0)$  (también se designa  $\vec{j}$ ), es el versor fundamental en la dirección del *eje*  
 $e_3 = (0, 0, 1)$  (también se designa  $\vec{k}$ ), es el versor fundamental en la dirección del *eje*

**Definición 11** (Vectores perpendiculares). .

$$\text{Dados } A, B \in \mathbb{R}^n, \quad A \perp B \Leftrightarrow A \cdot B = 0$$

**Teorema 2** (Teorema de Pitágoras en  $\mathbb{R}^n$ ). .

$$\text{Dados } A, B \in \mathbb{R}^n, \quad A \perp B \Leftrightarrow \|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$$



*Demostración.* Sean  $A, B \in \mathbb{R}^n$

Determinemos primero la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \|A + B\|^2 &= (A + B) \cdot (A + B) && \text{por def. de norma} \\ &= A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B && \text{por prop. distribut. del producto escalar respecto de la suma de vectores} \\ &= \|A\|^2 + A \cdot B + A \cdot B + \|B\|^2 && \text{por def. de norma y prop. conmutativa del prod. escalar} \\ &= \|A\|^2 + 2A \cdot B + \|B\|^2 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + 2A \cdot B + \|B\|^2 \quad (**)$$

Para demostrar el teorema debemos probar la condición necesaria y la suficiente

$$1) (\Rightarrow) \text{ Hipótesis: } A \perp B \quad \text{Tesis: } \|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$$

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + 2A \cdot B + \|B\|^2 \quad \text{por } (**)$$

por hipótesis  $A \perp B$  y por definición de vectores perpendiculares  $A \cdot B = 0$ , reemplazando

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + 2 \cdot 0 + \|B\|^2$$

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + 0 + \|B\|^2$$

Por lo tanto:



$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$$

II) ( $\Leftarrow$ ) Hipótesis:  $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$       Tesis:  $A \perp B$

por hipótesis

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$$

Reemplazando  $\|A + B\|^2$  por (\*\*)

$$\|A\|^2 + 2A \cdot B + \|B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$$

por existencia de elemento neutro para la suma de números reales  $2A \cdot B = 0 \Rightarrow A \cdot B = 0$

por la definición de vectores perpendiculares

$$A \cdot B = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A \perp B}$$

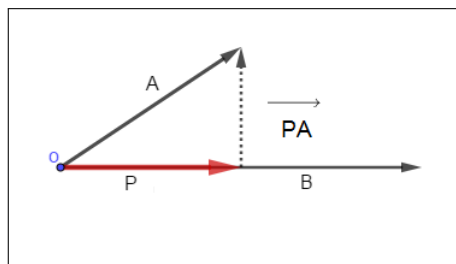
De I) y II), queda demostrado el teorema. □

**Definición 12** (Proyección vectorial ortogonal de un vector sobre otro). .

Dados  $A, B \in \mathbb{R}^n$ , con  $B \neq \theta$ . La proyección vectorial ortogonal de  $A$  sobre  $B$  es el vector  $P \in \mathbb{R}^n$ :

■  $P = \lambda B$ ,      con  $\lambda \in \mathbb{R}$

■  $\overrightarrow{PA} \perp B$



Es importante que recuerdes que el vector  $B$  debe ser **diferente del vector nulo**  $\theta$ , de no ser así no tienes dirección donde proyectar el vector  $A$ .

**Obtención del vector  $P$ , proyección vectorial ortogonal de  $A$  sobre  $B$**

Sea  $A, B \in \mathbb{R}^n$  con  $B \neq \theta$ , el vector  $P$  cumple

(1)  $P = \lambda B$ ,      con  $\lambda \in \mathbb{R}$     y

(2)  $\overrightarrow{PA} \perp B$

De (2), por definición de vectores perpendiculares

$$\overrightarrow{PA} \cdot B = 0$$

por vector localizado

$$(A - P) \cdot B = 0$$

por la propiedad distributiva del producto escalar respecto de la suma de vectores

$$A \cdot B - P \cdot B = 0$$

por (1)  $P = \lambda B$ , reemplazando

$$A \cdot B - \lambda B \cdot B = 0$$

por propiedades del producto escalar y definición de norma

$$A \cdot B - \lambda \|B\|^2 = 0$$

por hipótesis  $B \neq \theta$  y por lo tanto  $\|B\|^2 \neq 0$ , luego, de la ecuación anterior

$$\lambda = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2}$$

Determinado el valor del escalar, queda determinado el vector  $P = \lambda B$

$$P = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} B$$



Notación:

Para indicar proyección del vector  $A$  sobre  $B \neq \theta$  escribimos:

$$P_{A,B} = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} B$$

Si la proyección es del vector  $B$  sobre el vector  $A \neq \theta$ , escribimos:

$$P_{B,A} = \frac{A \cdot B}{\|A\|^2} A$$

**Ejemplo.** .

Dados  $A = (1, -1)$  y  $B = (3, 4)$ , el vector proyección vectorial ortogonal de  $A$  sobre  $B$  es el vector

$$P_{A,B} = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} B = \frac{(1, -1) \cdot (3, 4)}{\|(3, 4)\|^2} (3, 4) = \frac{-1}{25} (3, 4) = \left( \frac{-3}{25}, \frac{-4}{25} \right)$$

**Definición 13** (Proyección escalar de un vector sobre otro). .

Dados  $A, B \in \mathbb{R}^n$ , con  $B \neq \theta$ . Proyección escalar de  $A$  sobre  $B$  es la norma del vector proyección vectorial ortogonal de  $A$  sobre  $B$ .

### Obtención de la proyección escalar de $A$ sobre $B$

Sean  $A, B \in \mathbb{R}^n$  con  $B \neq \theta$ , por proyección vectorial ortogonal de  $A$  sobre  $B$

$$P = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} B$$

aplicando norma al vector se tiene:

$$\|P\| = \left\| \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} B \right\| \stackrel{(1)}{=} \left| \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} \right| \|B\| \stackrel{(2)}{=} \frac{|A \cdot B|}{\|B\|^2} \|B\| = \frac{|A \cdot B|}{\|B\|}$$

- (1) por propiedad de norma,  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ , pues  $\frac{A \cdot B}{\|B\|^2}$  es un número real  
 (2) por propiedad de valor absoluto y  $\|B\| > 0$

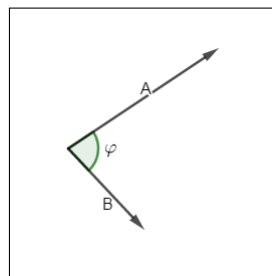
Por lo tanto:

$$\|P\| = \frac{|A \cdot B|}{\|B\|} \text{ es la proyección escalar del vector } A \text{ sobre } B$$

**Definición 14** (Ángulo determinado por dos vectores). .

Dados  $A$  y  $B \in \mathbb{R}^n - \{\theta\}$ . El ángulo  $\varphi$  que determinan los vectores  $A$  y  $B$  es el que cumple las siguientes condiciones:

- $0 \leq \varphi \leq \pi$
- $\cos \varphi = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|}$



Es importante que recuerdes que los vectores  $A$  y  $B$  deben ser **diferentes del vector nulo**.  
 Cuando hablamos del ángulo entre  $A$  y  $B$  denotamos,  $\angle(A, B)$ .

**Ejemplo.** .

Sean  $A = (1, -2, 1)$  y  $B = (1, 1, 2)$ , determinar  $\varphi = \angle(A, B)$ .

$$\cos \varphi = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|} = \frac{(1, -2, 1) \cdot (1, 1, 2)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6} \sqrt{6}} = \frac{1}{6}$$

Por la definición de ángulo entre vectores:

$$\varphi = \arccos \frac{1}{6} \quad \text{con } 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Podemos mostrar que el ángulo entre vectores paralelos y perpendiculares esta en concordancia con la definición de paralelismo y perpendicularidad de vectores.

**Proposiciones.**

### 1. Equivalencia de la definición de vectores paralelos

**Dados**  $A, B \in \mathbb{R}^n - \{\theta\}$

$$\sphericalangle(A, B) = 0 \quad \text{ó} \quad \sphericalangle(A, B) = \pi \quad \Leftrightarrow \quad A \parallel B$$

**Demostración**

**Sea**  $\varphi = \sphericalangle(A, B)$ ,

$$\begin{aligned} \varphi = 0 \quad \text{ó} \quad \varphi = \pi &\stackrel{(*)1}{\Leftrightarrow} \cos \varphi = \pm 1 \stackrel{(*)2}{\Leftrightarrow} \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|} = \pm 1 \stackrel{(*)3}{\Leftrightarrow} \frac{|A \cdot B|}{\|A\| \|B\|} = 1 \\ &\Leftrightarrow |A \cdot B| = \|A\| \|B\| \stackrel{(*)4}{\Leftrightarrow} A \parallel B \end{aligned}$$

(\*1) ( $\Leftarrow$ ) por  $0 \leq \varphi \leq \pi$

( $\Rightarrow$ ) pues  $\cos 0 = 1$  y  $\cos \pi = -1$

(\*2) por definición de ángulo en  $\mathbb{R}^n$

(\*3) aplicando valor absoluto en ambos miembros.

(\*4) por la hipótesis  $A \neq \theta, B \neq \theta$  entonces, por la desigualdad de C-S  $A \parallel B$

### 2. Equivalencia de la definición de vectores perpendiculares.

**Dados**  $A, B \in \mathbb{R}^n - \{\theta\}$

$$\sphericalangle(A, B) = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A \perp B$$

**Demostración**

**Sea**  $\varphi = \sphericalangle(A, B)$ ,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \stackrel{(**1)}{\Leftrightarrow} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|} \Leftrightarrow 0 = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|} \Leftrightarrow A \cdot B = 0 \stackrel{(**2)}{\Leftrightarrow} A \perp B$$

(\*\*1) por definición de ángulo entre vectores

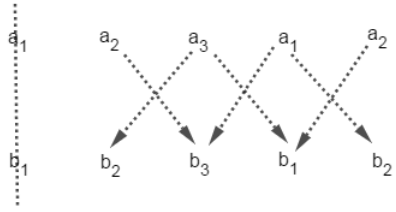
(\*\*2) por definición de vectores perpendiculares

Los productos que definiremos a continuación sólo se pueden aplicar en  $\mathbb{R}^3$

**Definición 15** (Producto Vectorial). .

Dados  $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  y  $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ , el producto vectorial de  $A$  y  $B$  en ese orden, es el vector de  $\mathbb{R}^3$  :

$$A \times B = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

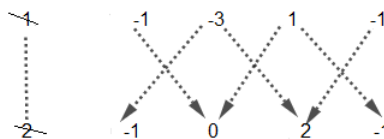


$A \times B = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$

**Regla práctica**

**Ejemplo.**  $A = (1, -1, -3)$  ,  $B = (2, -1, 0)$

*Regla práctica:*



$$A \times B = ((-1) \cdot 0 - (-3) \cdot (-1), (-3) \cdot 2 - 1 \cdot 0, 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2)$$

$$A \times B = (-3, -6, 1)$$

**Ejemplos.** .

Realice los cálculos y compruebe los resultados.

■  $A = (2, 1, -3)$  ,  $B = (3, -1, 2)$

$$A \times B = (-1, -13, -5)$$

■ Para los vectores canónicos de  $\mathbb{R}^3$

$$e_1 = (1, 0, 0) , e_2 = (0, 1, 0) , e_3 = (0, 0, 1)$$

$$e_1 \times e_2 = (0, 0, 1) = e_3$$

$$e_2 \times e_3 = (1, 0, 0) = e_1$$

$$e_3 \times e_1 = (0, 1, 0) = e_2$$

■

$$e_2 \times e_1 = (0, 0, -1) = -e_3$$

$e_1 \times e_2 \neq e_2 \times e_1$  podemos concluir que el producto vectorial no es conmutativo.

■

$$(e_1 \times e_2) \times e_2 = e_3 \times e_2 = -e_1$$

$$e_1 \times (e_2 \times e_2) = e_1 \times \theta = \theta$$

$(e_1 \times e_2) \times e_2 \neq e_1 \times (e_2 \times e_2)$  podemos concluir que el producto vectorial no es asociativo.

**Propiedades** (del producto vectorial). .

1. El producto vectorial es anticonmutativo

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^3, \quad A \times B = -B \times A$$

2. Distributividad del producto respecto de la suma

$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^3, \quad A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

3. Asociatividad mixta.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{R}^3, \quad (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda(A \times B)$$

$$4. \forall A, B \in \mathbb{R}^3, \quad A \times B \perp A \quad y \quad A \times B \perp B$$

$$5. \forall A, B \in \mathbb{R}^3, \quad \|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2$$

$$6. \forall A, B \in \mathbb{R}^3, \quad A \times B = \theta \Leftrightarrow A \parallel B \vee A = \theta \vee B = \theta$$

$$7. \forall A, B \in \mathbb{R}^3 - \{\theta\}, \quad \|A \times B\| = \|A\| \|B\| \sin \varphi \quad \text{con } \varphi = \angle(A, B)$$

8. Sean  $A, B \in \mathbb{R}^3 - \{\theta\}$  lados de un paralelogramo:

$$\text{Área del paralelogramo de lados } A, B = \|A \times B\|$$

*Demostración.* .

**Nota:** Algunas propiedades se aceptan sin demostración para las carreras Ingenierías, PU, Lic. en Informática y Lic. en Física.

1. Sean  $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  y  $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ .

$$A \times B = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$$

por la definición de producto vectorial

$$= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

sacando factor común -1 en cada componente

$$= (-1(-a_2b_3 + a_3b_2), -1(-a_3b_1 + a_1b_3), -1(-a_1b_2 + a_2b_1))$$

por definición de producto de escalar por vector

$$= (-1)(-a_2b_3 + a_3b_2, -a_3b_1 + a_1b_3, -a_1b_2 + a_2b_1)$$

en cada componente conmuta los sumandos

$$= (-1)(a_3b_2 - a_2b_3, a_1b_3 - a_3b_1, a_2b_1 - a_1b_2)$$

en cada componente, conmuta los productos de números reales

$$= (-1)(b_2a_3 - b_3a_2, b_3a_1 - b_1a_3, b_1a_2 - b_2a_1)$$

por definición de producto vectorial

$$= (-1)(b_1, b_2, b_3) \times (a_1, a_2, a_3)$$

$$= (-1)B \times A$$

$$= -B \times A$$

## 2. Aceptamos sin demostración.

La demostración se pueden hacer de manera sencilla resolviendo cada miembro por separado y aplicando transitividad de la igualdad.

## 3. Aceptamos sin demostración.

La demostración se pueden hacer de manera sencilla resolviendo cada miembro por separado y aplicando transitividad de la igualdad.

4. Sean  $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  y  $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned}
 A \times B \cdot A &= (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) \cdot (a_1, a_2, a_3) \\
 &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (a_1, a_2, a_3) && \text{por la definición de producto vectorial} \\
 &= (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 && \text{por la definición de producto escalar} \\
 &= a_2b_3a_1 - a_3b_2a_1 + a_3b_1a_2 - a_1b_3a_2 + a_1b_2a_3 - a_2b_1a_3 && \text{por distrib. del prod. respecto de la + en } \mathbb{R} \\
 &= \underbrace{a_2b_3a_1}_{(1)} - \underbrace{a_3b_2a_1}_{(2)} + \underbrace{a_3b_1a_2}_{(3)} - \underbrace{a_1b_3a_2}_{(1)} + \underbrace{a_1b_2a_3}_{(2)} - \underbrace{a_2b_1a_3}_{(3)} && \text{cancelando términos iguales} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Probamos que  $A \times B \cdot A = 0$  y por la definición de vectores perpendiculares

$$A \times B \perp A$$

Queda para ustedes probar que:  $A \times B \perp B$

#### 5. Aceptamos sin demostración.

La demostración se pueden hacer de manera sencilla resolviendo cada miembro por separado y aplicando transitividad de la igualdad.

6. Para demostrar esta propiedad utilizaremos 5) y desigualdad de Cauchy Shwarz

$$\begin{aligned}
 A \times B = \theta &\Leftrightarrow \|A \times B\| = 0 && \text{por propiedad de norma de un vector} \\
 &\Leftrightarrow \|A \times B\|^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2 = 0 && \text{por propiedad 5)} \|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2 \\
 &\Leftrightarrow \|A\|^2 \|B\|^2 = (A \cdot B)^2 && \text{ambos miembros son no negativos, puedo aplicar raíz cuadrada} \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(\|A\| \|B\|)^2} = \sqrt{(A \cdot B)^2} \\
 &\Leftrightarrow \|A\| \|B\| = |A \cdot B| && \text{por propiedad de valor absoluto} \\
 &\Leftrightarrow \|A\| \|B\| = |A \cdot B| && \text{el producto de normas es un número real no negativos} \\
 &\Leftrightarrow A \perp B \vee A = \theta \vee B = \theta && \text{por la desigualdad de C-S}
 \end{aligned}$$

7. Sean  $A, B \in \mathbb{R}^3 - \{\theta\}$ , sea  $\varphi = \angle(A, B)$

Por la definición de ángulo entre vectores  $A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos \varphi$



y por la propiedad 5)

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2$$

reemplazando  $A \cdot B$  se tiene:

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (\|A\| \|B\| \cos \varphi)^2$$

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - \|A\|^2 \|B\|^2 \cos^2 \varphi$$

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 (1 - \cos^2 \varphi)$$

por identidad trigonométrica  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  por lo tanto  $1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi$ , reemplazando

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 \sin^2 \varphi$$

aplicando raíz cuadrada en ambos miembros que son números no negativos y por propiedad de valor absoluto

$$\|A \times B\| = \|A\| \|B\| |\sin \varphi|$$

por definición de ángulo entre vectores  $0 \leq \varphi \leq \pi$  y en ese intervalo  $\sin \varphi \geq 0$ , por lo tanto

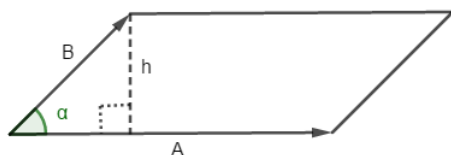
$$|\sin \varphi| = \sin \varphi$$

reemplazando queda probado que:

$$\|A \times B\| = \|A\| \|B\| \sin \varphi$$

8. Dado el paralelogramo de lados  $A$  y  $B$ , el área, que denotamos con  $\text{Área}_{\text{paralelogramo}}(A, B)$ , es igual a la longitud de la base  $b$ , por la longitud de la altura  $h$ .

$$\text{Área}_{\text{paralelogramo}}(A, B) = b \cdot h$$



Si consideramos como base del paralelogramo el lado  $A$  como se indica en el dibujo, la longitud de la base es  $\|A\|$

$$b = \|A\| \quad (*1)$$

Para determinar la altura  $h$ , consideremos lo siguiente:

Si  $\alpha = \angle(A, B)$ , por definición de ángulo entre vectores,  $0 \leq \alpha \leq \pi$  y por lo tanto,  $\sin \alpha \geq 0$ .

Luego:  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{\|B\|} \Rightarrow h = \|B\| \operatorname{sen} \alpha \quad (*2)$

Reemplazando (\*1) y (\*2) en

$$\text{Área}_{\text{paralelogramo}}(A, B) = b \cdot h$$

$$\text{Área}_{\text{paralelogramo}}(A, B) = \|A\| \|B\| \operatorname{sen} \alpha,$$

por propiedad del producto vectorial:  $\|A \times B\| = \|A\| \|B\| \operatorname{sen} \alpha.$

Por lo tanto

$$\boxed{\text{Área}_{\text{paralelogramo}}(A, B) = \|A \times B\|}$$

□

**Definición 16** (Triple producto escalar o doble producto mixto). .

Sean  $A, B$  y  $C \in \mathbb{R}^3$  se define triple producto escalar al número real:

$$(A \ B \ C) = A \times B \cdot C$$

**Propiedades** (triple producto escalar). .

1.  $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^3, \quad (A \ B \ C) = (B \ C \ A) = (C \ A \ B) \quad (\text{propiedad cíclica})$
2.  $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^3, \quad (A \ B \ C) = -(B \ A \ C)$
3. Sean  $A, B, C \in \mathbb{R}^3 - \{\theta\}$  aristas de un paralelepípedo,  $|(A \ B \ C)|$  es el volumen de dicho paralelepípedo.
4. Sean  $A, B, C \in \mathbb{R}^3, (A \ B \ C) = 0$  si y solo si los vectores son coplanares

*(Vectores coplanares son vectores que están en el mismo plano, como vectores libres, si los puntos que los identifican pertenecen al mismo plano que además pasa por el origen)*

*Demostración.*

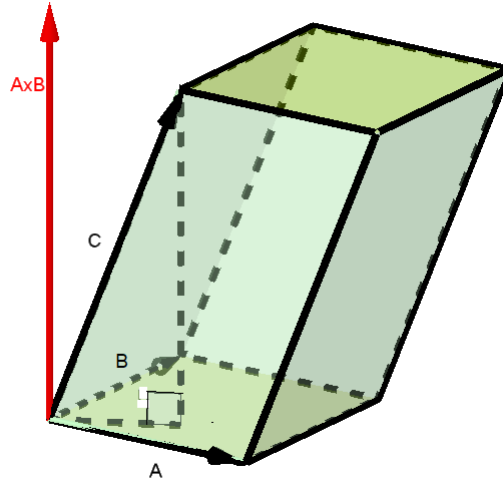
1. Sin demostración.
2. Sean  $A, B, C \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
 (A \ B \ C) &= A \times B \cdot C && (\text{por def. de triple producto escalar}) \\
 &= -(B \times A) \cdot C && (\text{por propiedad antisimétrica del producto vectorial}) \\
 &= -(B \times A \cdot C) && (\text{por propiedad del producto escalar}) \\
 &= -(B \ A \ C) && (\text{por def. de triple producto escalar})
 \end{aligned}$$

Luego probamos que:

$$(A \ B \ C) = -(B \ A \ C)$$

3. Sean  $A, B, C \in \mathbb{R}^3 - \{\theta\}$  aristas de un paralelepípedo.



el volumen, que denotamos con  $Vol_{\text{paralelepípedo}}(A, B, C)$ , es igual a área de la base por la longitud de la altura.

$$Vol_{\text{paralelepípedo}}(A, B, C) = \text{área de la base} \cdot h \quad (1)$$

Si consideramos la base del paralelepípedo al paralelogramo de lados  $A$  y  $B$ , el área está dada por  $\|A \times B\|$ , por propiedad del producto vectorial (notar que  $\|A \times B\| \geq 0$ ). La altura del paralelepípedo es el segmento perpendicular a la base trazado desde el vértice opuesto hasta dicha base. Es decir, el vector altura  $H = P_{C, A \times B}$  y su longitud es la altura del paralelepípedo de base  $A$  y  $B$ , en consecuencia

$$\|H\| = \|P_{C, A \times B}\| = \frac{|C \cdot A \times B|}{\|A \times B\|}$$

Por lo tanto, reemplazando en (1)

$$\begin{aligned} Vol_{\text{paralelepípedo}}(A, B, C) &= \|A \times B\| \frac{|C \cdot A \times B|}{\|A \times B\|} \\ &= |C \cdot A \times B| \\ &= |A \times B \cdot C| \quad (\text{por propiedad conmutativa del producto escalar}) \\ &= |(A \ B \ C)| \quad (\text{por def. de triple producto escalar}) \end{aligned}$$

Luego

$$Vol_{\text{paralelepípedo}}(A, B, C) = |(A \ B \ C)|$$

4. Sin demostración.

□

**Ejercicios teóricos de integración 1.**

1. Califique con verdadero o falso las siguientes proposiciones:

■  $\forall A, B \in \mathbb{R}^n, \|A + B\| = \|A\| + \|B\|$

■  $\forall A, B \in \mathbb{R}^n, |A \cdot B| = \|A\| \|B\|$

2. Sean  $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ .

a) Demuestre que:  $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + 2A \cdot B + \|B\|^2$

b) Utilizando el apartado a) obtenga una expresión general para:  $\|A - B\|$ ,  $\|A + 2C\|$  y  $\|3A - B + 2C\|$ .