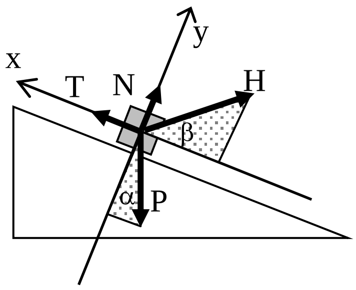
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología – UNT

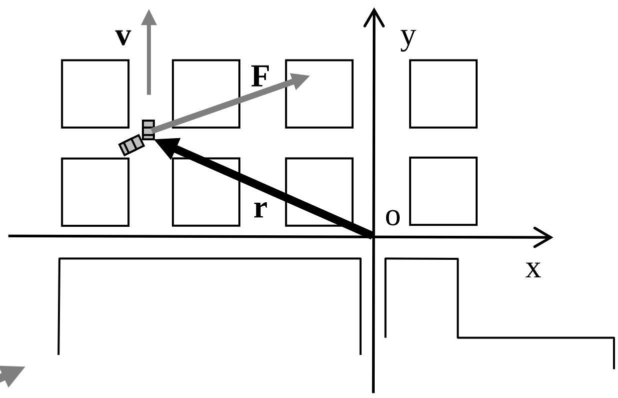
CURSO PARA INGRESANTES 2021

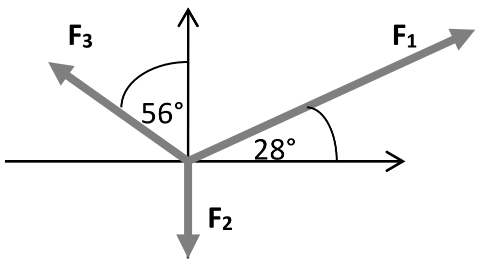
FÍSICA

VECTORES

PARTE TEÓRICA







Autor: Gastón Tannuré

LOS VECTORES. Esas herramientas que me permiten indicar claramente una dirección en el espacio

Algunas magnitudes físicas ("cosas" que se le puede medir a objetos, sustancias o fenómenos) son magnitudes escalares mientras que otras son magnitudes vectoriales. Aunque este curso trata sobre las magnitudes vectoriales, demos una rápida revisión de lo que entendemos por "magnitudes escalares"

MAGNITUDES ESCALARES

Cuando se desea conocer la temperatura exterior para saber que ropa usar; la única información necesaria es un número y una unidad, por ejemplo "temperatura actual 32 ºC". La temperatura es un ejemplo de una *magnitud escalar*.

Una *magnitud escalar* queda completamente especificada por un valor numérico (número real) acompañado por una unidad apropiada. Otros ejemplos de magnitudes escalares son los intervalos de tiempo, el volumen y la masa.

Por ejemplo:

Si nos dicen "te llamo en 2 horas", ese dato es suficiente para conocer toda la información de la magnitud. ¡No necesitamos decir para donde apuntan esas dos horas!

Algo parecido ocurre si decimos "750 cm^3 de agua mineral".

O también si uno tiene que comprar "3 kg de chorizo parrillero", con esos datos está todo dicho.

Para trabajar con magnitudes escalares se usan las reglas de la aritmética ordinaria. A lo largo del año aparecerán, en especial en la materia Física, varias magnitudes escalares. Pero ahora pasemos a lo que puntualmente nos interesa.

MAGNITUDES VECTORIALES

En numerosos aspectos de la física, y de la vida cotidiana, es necesario describir algún fenómeno en el cual es preciso indicar la dirección (u orientación) en la que ocurre. También muchas veces es necesario poder ubicar un punto en el espacio (lo que también implica indicar una dirección en el espacio con respecto a una referencia).

Pongamos algunos ejemplos:

Todos sabemos que no es lo mismo que dos personas empujen un auto desde atrás a que una lo haga desde la izquierda y la otra desde atrás. Aunque los esfuerzos musculares de las personas sean de la misma "intensidad", el auto se comportará de manera diferente en cada caso.

Si quiero levantar algo del piso seguramente "haremos" fuerza hacia arriba y no hacia abajo o hacia un costado. (la frase "hacer fuerza" es muy común, en física se dice "aplicar" fuerzas)

Dos automóviles que choquen (uno con una rapidez de 100 kilómetros por hora y el otro con una rapidez de 90 kilómetros por hora) no sufrirán las mismas consecuencias si colisionan de frente, o si el más rápido lo "toca" desde atrás al mas lento.

Casi siempre decimos que tal o cual edificio queda a dos cuadras "hacia el cerro" o yendo 5 cuadras "hacia El Bajo".

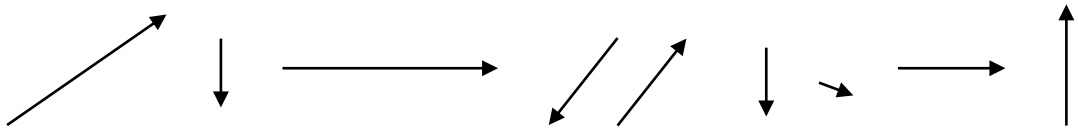
O cuando queremos ubicar alguna cosa en una habitación solemos decir "el resumidero está a dos metros del lavatorio yendo hacia la ducha".

En todos estos casos, y en otros muchos que ya irán apareciendo durante el cursado de materias universitarias, queda claro que hay que indicar una dirección en el espacio (además de una cantidad por supuesto).

Los físicos toman un "ente" matemático para poder describir lo mejor posible las situaciones descriptas arriba. Se ayudan de un elemento matemático que viene de la geometría y que se llama "VECTOR".

Geométricamente hablando un vector es: “un segmento orientado”.

O sea que es un segmento, pero en el cual hay que especificar una orientación. Esta orientación se pone de manifiesto con una “punta de flecha” en uno de sus extremos. Un vector tiene un cierto “tamaño”, es lo que se conoce como “módulo” o “norma de un vector” (cuando el vector se usa en física ese módulo consta de un número más una unidad de medida). Un vector está contenido sobre una recta, esto se conoce como la “dirección” (la recta puede estar orientada en cualquier dirección del espacio tridimensional). Y dentro de esa recta puede tener dos “orientaciones” (apuntando hacia un lado u otro de la recta), esto se conoce como el “sentido” del vector. Es importante que a estos tres elementos se los vaya visualizando con claridad. Acá abajo se muestran varios vectores. Algunos pueden tener algo en común (el mismo sentido, o la misma dirección, o el mismo módulo…o más de una coincidencia)… ¿se anima a decir que cosas tienen en común algunos de ellos?



Nota: Algunas veces es necesario aclarar otros dos elementos de un vector que son a) La recta de acción (que no es necesariamente lo mismo que la dirección, por ejemplo si pensamos en el suelo de la facultad hay muchas rectas verticales pero cada una de ellas puede estar pasando por un punto del suelo diferente), y b) el punto de aplicación del vector (el punto de esa recta donde está aplicado el vector).

En el caso de la física el vector tendrá características de magnitud física y ya no será solo un elemento geométrico, hablaremos del “vector posición”, o del “vector fuerza” o del “vector velocidad” y representará alguna magnitud física que requiera direccionalidad.

Para aclarar que algo está “orientado” necesariamente tiene que estar orientado “con respecto a alguna cosa”. Entonces debemos entender qué es una referencia, un sistema de coordenadas y que es un sistema de referencia, y eso es lo que haremos a continuación.

REFERENCIA, SISTEMA DE COORDENADAS Y SISTEMA DE REFERENCIA

Para describir el movimiento de un objeto tengo que aclarar qué posiciones va tomando en cada instante. Esta descripción se logra con una referencia y un sistema de coordenadas asociado a esa referencia: esto forma un “sistema de referencia”.

Una referencia es un “objeto físico real”. Puede ser nuestra casa, un pizarrón, el suelo, un colectivo de la línea 17, o la luna. Hay que tener cuidado con esto porque desde nuestra más tierna infancia damos por obvio que todo está referido al suelo que suponemos no se mueve (¿Qué no se mueve?... ¡piense en esto!). Pero en este curso y más adelante en la carrera la “referencia” puede ser otro objeto y no necesariamente siempre será el suelo del planeta tierra.

Por otra parte, un sistema de coordenadas es “una construcción matemática” que no tiene existencia real, y que asociaremos o aferraremos a esa referencia (“objeto”) elegido. La mayoría de las veces (casi siempre) el sistema de coordenadas estará “anclado” a la referencia y será solidario con ella. Otras veces el sistema de coordenadas se moverá (o también girará) con respecto a la referencia. Un sistema de coordenadas generalmente consta de rectas matemáticas, escalas, y orientaciones específicas entre sus ejes. La síntesis entre referencia y sistema de coordenadas es lo que en física se llama “Sistema de referencia espacial” (existen también sistemas de referencia temporales que incluye un “evento”, un cero de tiempo y una unidad de medida temporal, pero eso se lo trabajará en otra oportunidad).

Para aclarar la diferencia entre estos conceptos veamos algunos ejemplos:

Se puede decir: “la librería está a 3 cuadras sobre la avenida Roca hacia el oeste, medidas desde de la puerta de la facultad (puerta que está sobre esa avenida)”.
La cantidad de información que hay en esta inocente frase es muchísima y tenemos que aprender a interpretarla.

Lo primero en esta frase y que está implícito (¡esto lo hace peligroso!) es la referencia: es el suelo, el piso, San Miguel de Tucumán, en definitiva…el planeta tierra.

En ese piso (referencia) hemos anclado un sistema de coordenadas: una recta imaginaria sobre la “avenida Roca” que suponemos va hasta el infinito en ambos sentidos. Esta recta imaginaria tiene un “cero” de coordenadas, que es la puerta de la facultad. Esta recta imaginaria tiene una escala y unas unidades de medidas, son las cuadras (o podrían ser metros también). Esta recta imaginaria tiene dos sentidos, hacia el este y hacia el oeste. Esta recta imaginaria y el piso donde está anclada forman nuestro “sistema de referencia”. Este sistema de referencia espacial para ubicar un objeto tiene dimensiones de Longitud (para otras magnitudes el sistema de coordenadas tendrá otras dimensiones, por ejemplo para la velocidad tendrá dimensione de Longitud dividida en Tiempo).

En todo ese sistema (referencia+coordenadas) hemos ubicado a la librería.

Ahora intente usted hacer el mismo análisis en el ejemplo que sigue a continuación… ¡suerte!: Si estoy en un colectivo de larga distancia “en movimiento”, puedo decir: “el baño del ómnibus queda a 6 metros sobre el pasillo, medidos desde el asiento en el que estoy hacia el chofer”

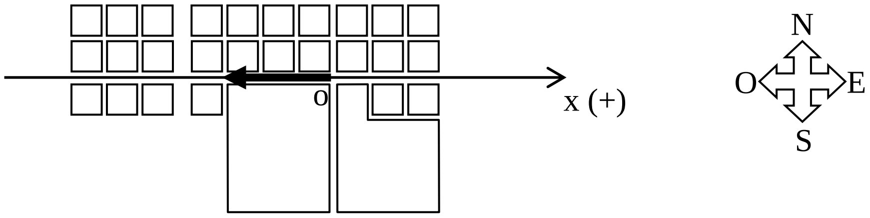
<u>SISTEMAS DE COORDENADAS CARTESIANAS Y SU RELACION CON LOS VECTORES</u>

El sistema de coordenadas más usado es el sistema de coordenadas cartesianas o coordenadas rectangulares. Es el sistema que más se trabaja en la escolaridad secundaria, así que no debería serle tan novedoso. Es el famoso sistema en el que aparecen frases como “sobre el eje <u>x</u>” o “en el eje de las <u>y</u>”. En este sistema se describe a todo el espacio con tres ejes perpendiculares entre si corrientemente llamados ejes <u>x</u>, <u>y</u> y <u>z</u> (en este apunte se subrayarán muchas veces los nombres de los ejes para no crear confusión; es solo un código para este apunte… ¡no es ninguna convención internacional!). En la secundaria rara vez habrá trabajado con el eje <u>z</u> pero es un eje simultáneamente perpendicular a los otros dos. Estos tres ejes se pueden visualizar imaginando el vértice de una habitación cúbica y se asocian normalmente a frases como “largo”, “ancho” y “alto” (<u>x</u>, <u>y</u>, y <u>z</u> respectivamente).

Volvamos al ejemplo de la ubicación de la librería. Los físicos y los matemáticos tienden a simplificar las cosas (¡si...aunque usted no lo crea!). Un físico ubicaría la librería con un vector, el “Vector Posición”, un segmento orientado que comienza en el origen de coordenadas y termina en el objeto en estudio, en este caso la librería.

Un físico le cambiaría el nombre a la recta imaginaria “avenida Roca”…la llamaría “x” (¡es mucho más sencillo!). Un físico a la “puerta de la facultad” le llamaría “origen” (en símbolos casi siempre “O”). Un físico al sentido “hacia el este” le llamaría sentido “positivo” (con símbolos “+”), y obviamente al otro sentido “hacia el oeste” le llamaría sentido “negativo” (con símbolos “-”). Esto último es muy importante entenderlo porque cuando hablemos de vectores el signo solo indicará un sentido. No existen los vectores negativos, va de nuevo…NO EXISTEN LOS VECTORES NEGATIVOS. El signo “menos” en una magnitud vectorial solo será un “indicador de sentido” en un sistema de coordenadas. Que más haría un físico: usaría una unidad de medida estándar y aceptada mundialmente como por ejemplo el “metro”. Para este ejemplo vamos a suponer que cada cuadra mide aproximadamente 100 m (lo que no es tan cierto, pero ahora nos es útil).

Acá abajo se muestra un croquis de la zona de la avenida, con el nombre de la recta “eje”, y los signos correspondientes a nuestro sistema de coordenadas. Dentro del croquis está dibujado el Vector Posición de la librería (el norte está hacia arriba y el este hacia la derecha como en la mayoría de los mapas). Puede ayudarse con Google Maps https://www.google.com.ar/maps/@-26.8392381,-65.234711,2244a,35y,13.22h,0.77t/data=!3m1!1e3



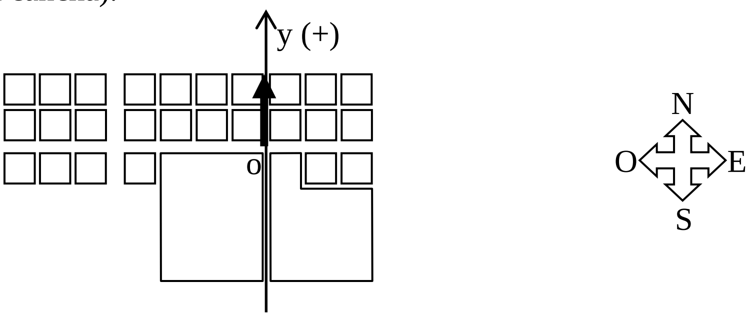
Entonces el vector posición de la librería sería descripto así (dentro de nuestro sistema de coordenadas):

Dirección: x
Módulo: 300m
Sentido: - (negativo)

¿Qué pasaría si ahora tengo que ubicar la Cancha de San Martín (perdón a los "Decanos" pero queda más cerca la cancha de los "Santos")?

Puedo extender mi sistema de coordenadas con las siguientes características: a la calle Pellegrini (continuación de la calle interna de la facultad llamada "2 de Abril") le cambiaría el nombre, la llamaría "y", una recta imaginaria sin fin. La "puerta de la facultad" ya está establecida como "0 m" en el eje "x" hagamos que coincida con el "0 m" del eje "y". Entonces será nuestro "origen del sistema de coordenadas". Al sentido "hacia el norte" le llamaría sentido "positivo", y obviamente al otro sentido "hacia el sur" le llamaría sentido "negativo". Para este eje "y" usaremos la misma unidad de medida estándar el "metro".

Acá abajo se muestra un croquis de la zona de la avenida, con el nombre de la recta "eje", y los signos correspondientes a nuestro sistema de coordenadas. Dentro del croquis está dibujado el Vector Posición de la cancha).



Entonces el vector posición de la cancha sería descripto así (dentro de nuestro sistema de coordenadas)

Dirección: y
Módulo: 200 m
Sentido: + (positivo)

Ahora que se ha establecido la necesidad de tener dos ejes el x y el y (en cursos de física algunas veces se trabajará solo con un eje o algunas otras veces con tres ejes. En este caso suponemos que los objetos están a 0 metros de altura sobre el eje z, por lo tanto ni lo tendremos en cuenta), podemos describir la ubicación de la librería y de la cancha usando ambos ejes en su descripción. Por convención se da primero el dato del eje x.

Por ejemplo, el vector posición de la librería estaría compuesto de:

Dirección: x Módulo: 300 m Sentido: -	y además	Dirección: y Módulo: 0 m Sentido: (sin signo)

Recuerde que estas coordenadas están vinculadas al piso (como se ve en los croquis al estar dibujadas las “manzanas” cercanas a la facultad), por lo tanto tienen una referencia. Entonces el vector descripto justo aquí arriba es un vector útil solo en este sistema de referencia.

Y el vector posición de la cancha será

Dirección: x Módulo: 0 m Sentido: (sin signo)	y además	Dirección: y Módulo: 200 m Sentido: +

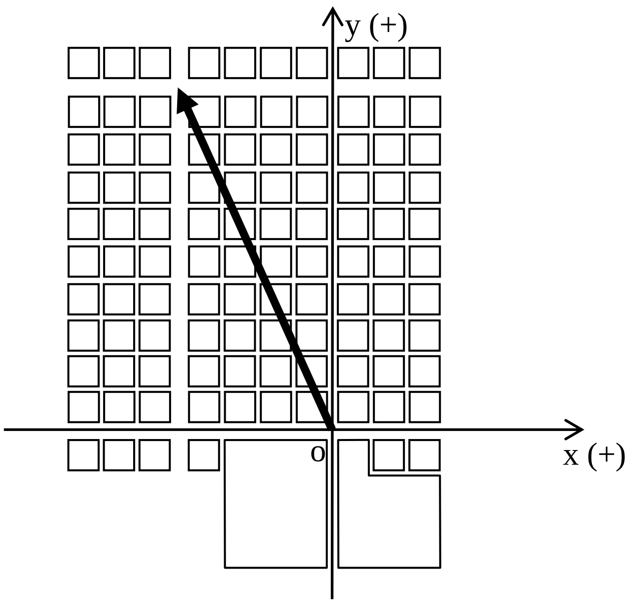
De alguna manera estamos describiendo el vector posición de un objeto (por ejemplo la librería), con otros dos vectores, uno de ellos en el eje <u>x</u> y otro de ellos en el eje <u>y</u>. Solo que en estos dos casos que estamos estudiando (librería y cancha) uno de esos vectores es el vector nulo (módulo cero). Para la librería el vector nulo es el que está en el eje <u>y</u>. Para la cancha el vector nulo está en el eje <u>x</u>.

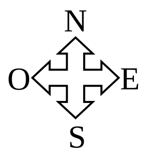
Cada uno de esos dos vectores con los que se describe a otro vector se denomina “vector componente” y a continuación lo explicaremos mucho mejor (si trabajáramos en el espacio de tres dimensiones, “3D”, serían tres los vectores componentes).

<u>VECTORES COMPONENTES</u>

Ahora un poco más interesante…

Supongamos que queremos ubicar la esquina de Mate de Luna y Colón, tomando como sistema de referencia el que venimos usando. Los dos casos anteriores (librería y cancha) fueron sencillos porque ambos objetos estaban sobre uno de los ejes elegidos. Sin embargo ahora estoy frente a un objeto que está en un punto cualquiera del plano <u>xy</u>. Esta esquina está 4 cuadras al oeste de la puerta y también a 9 cuadras al norte de la puerta. Si tuviera que dibujar este “Vector Posición” sería un vector que sale de la puerta de la facultad y termina con su punta de flecha en la esquina elegida.





Nota: convencionalmente se dibujan los ejes x y y con la flecha para un solo lado y se considera ese sentido (para donde apunta la flecha del eje), como sentido positivo. De allí es que de ahora en más no se explicitará el signo a los ejes, serán positivos en el sentido de su flecha.

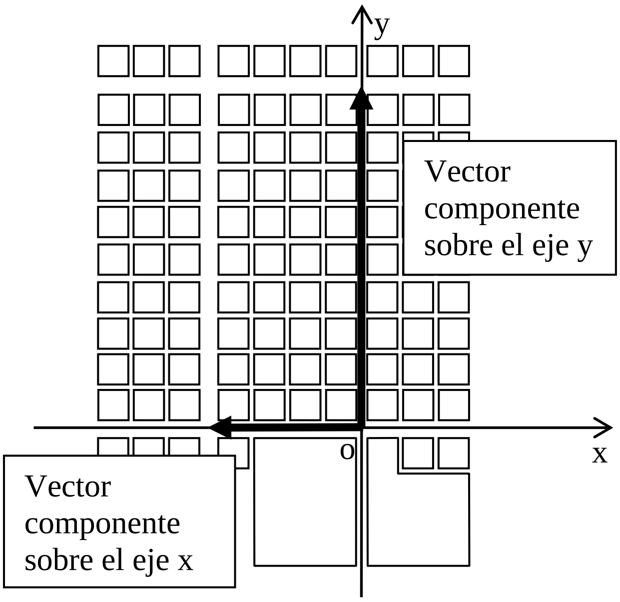
Este es un vector "oblicuo" o sea que no está contenido íntegramente sobre el eje x ni tampoco sobre el eje y. Describir un vector oblicuo puede ser engorroso (no es imposible…. ¡más adelante veremos cómo se hace!), hay que dar su módulo (lo que no es tan complicado) pero también hay que dar su dirección y sentido, y esto es lo que suele dar problemas.

Sin embargo, la descripción de la posición de la esquina se simplifica mucho usando "vectores componentes". O sea, la esquina se encuentra "simultáneamente" 400 metros hacia el oeste y 900 metros hacia el norte del origen de coordenadas.

Entonces el vector posición de la esquina estaría compuesto de:

Dirección: x Módulo: 400 m Sentido: -	simultáneamente con	Dirección: y Módulo: 900 m Sentido: +

Gráficamente las componentes vectoriales de la posición de la esquina son las siguientes:



Técnicamente se dice que hemos "descompuesto" un vector (el vector oblicuo) en sus dos componentes vectoriales ortogonales x e y. No puedo pensar simultáneamente (NI DIBUJAR SIMULTANEAMENTE) al vector oblicuo y a sus componentes vectoriales ortogonales. O trabajo con el vector oblicuo o trabajo con sus vectores componentes. ¡No "existen" simultáneamente el vector y sus componentes!

Lo que se pretende en este curso es mostrar la facilidad de trabajar con los vectores componentes.

Una cosa a tener presente es que la distancia (punto a punto) que hay entre la puerta de la facultad (origen) y la esquina de Mate de luna y Colón no es ni 400 metros ni 900 metros. Ni tampoco es la suma algebraica (no es igual a 400 m + 900 m = 1300 m…. ¡No!). Es la longitud del vector oblicuo y esto se calcula usando el Teorema de Pitágoras como lo veremos más adelante

¡Pero podemos hacer más simple las cosas!.... ¡Sí, todavía más sencillas….! Veamos como…

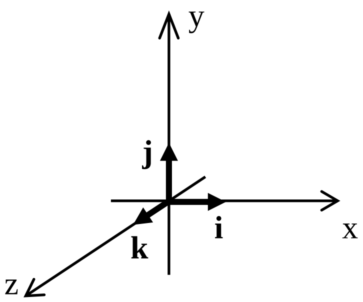
VECTORES UNITARIOS

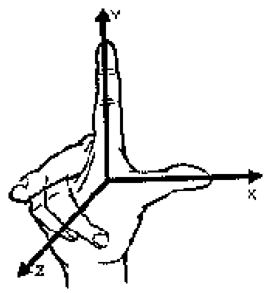
Al dividir un vector por su módulo se obtiene un vector adimensional pero de tamaño "1" (uno) sin dimensión ni unidad. Los vectores unitarios se utilizan para especificar una dirección y sentido dados y no tienen otra importancia física. Se usan sólo como conveniencia para describir una dirección en el espacio, razón por la cual no se le escribe la unidad.

Los vectores unitarios ¡SOLO SON INDICADORES DE DIRECCIÓN Y SENTIDO! La unidad de medida (por ejemplo para el vector posición será el "metro") vendrá dada en el módulo de algún vector dado.

Usaremos los símbolos $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ para representar vectores unitarios que apuntan en los sentidos positivos de los ejes x, y, y z, respectivamente. Los "sombreros" sobre los símbolos es una notación estándar para vectores unitarios. A estos vectores unitarios se los llama "VERSORES".

Los versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ forman un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares de un sistema de coordenadas de mano derecha. Se llama "sistema de mano derecha" porque si usted levanta esta mano y extiende simultáneamente el pulgar, el índice y el dedo mayor, puede poner simultáneamente perpendiculares estos tres dedos. Pulgar apuntando hacia x positivo, índice apuntando hacia y positivo y mayor apuntando hacia z positivo. Verifique con el gráfico de abajo (Ojo!!!...el grafico está en perspectiva, el eje z saldría de la hoja de papel hacia usted!!!). Atención: ¡aunque el signo de los ejes x e y pueden elegirse arbitrariamente, el signo del eje z queda determinado por el uso de la mano derecha y NO es arbitrario dentro de este sistema!





Una convención que usaremos será que todo lo que esté en negrita representará una magnitud vectorial. En apuntes manuscritos o en el pizarrón donde es difícil (¡o imposible!) estar escribiendo en negrita, las magnitudes vectoriales se representarán con una flechita de izquierda a derecha sobre el símbolo de la magnitud vectorial. Por ejemplo para el vector posición: $\vec{r}$. En el caso de los versores se los escribirá en este apunte en negrita también (en el pizarrón se le pondrá sombrerete).

En el caso de nuestro ejemplo de ubicar puntos en las cercanías de la facultad. Tenemos que imaginar un VERSOR llamado **i** que es un vector que mide "1" contenido en la recta x y apunta hacia el sentido positivo. Y otro VERSOR llamado **j** que es un vector que mide "1" contenido en la recta y, y apunta hacia el sentido positivo de esta recta. También podemos imaginar el versor **k** que apunta hacia el cielo según la convención de la mano derecha.

Con el uso de los versores se simplifica muchísimo la escritura vectorial.

Recordemos que sobre la avenida Roca estaba el eje x, hacia el "este" positivo. Sobre calle Pellegrini estaba la recta y con sentido positivo hacia el "norte". Entonces el vector posición de la librería, el de la cancha de los Santos y el de la esquina de Mate de Luna y Colón quedan perfectamente establecidos con la siguiente simbología (en física representamos el vector posición con la letra r minúscula y lo acompañamos con un subíndice para dar más información):

$$\mathbf{r}_{lib} = (-300\ m)\,\mathbf{i} + (0\ m)\,\mathbf{j} + (0\ m)\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{can} = (0\ m)\,\mathbf{i} + (+200\ m)\,\mathbf{j} + (0\ m)\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{esq} = (-400\ m)\,\mathbf{i} + (+900\ m)\,\mathbf{j} + (0\ m)\,\mathbf{k}$$

Los tres vectores anteriores están escritos en la forma llamada cartesiana o rectangular.

Por favor deténgase a pensar qué significa lo anterior en el marco de nuestro sistema de referencia y de coordenadas.

ANALISIS DE LA INFORMACIÓN CONTENIDA EN LA SIMBOLOGÍA VECTORIAL

Analizaremos como ejemplo solamente el último vector (el vector posición de la esquina):

1º) Los signos "+" que se encuentran inmediatamente después de los versores **i** y **j**, no implican una suma escalar, implican una suma vectorial que debe entenderse como lo siguiente "el vector tiene "tal" componente vectorial x, *y además (este es el signo más)* tiene "tal" componente vectorial en el eje y, *y además (este es el otro signo más)* tiene "tal" componente en el eje z".

En símbolos sería:

$$\mathbf{r}_{esq} = \mathbf{r}_{x\ esq} + \mathbf{r}_{y\ esq} + \mathbf{r}_{z\ esq}$$

2º) El eje x presenta la siguiente componente vectorial. Esto se escribe así (note el subíndice x)

$\mathbf{r}_{x\ esq} = -400\ \text{m}\ \mathbf{i}$

La cantidad escalar que acompaña al versor **i** se llama "componente x" y en este caso vale "-400 m" y se escribe así (nótese que no se escribirá en negrita ya que no es un vector, y además incluye el signo correspondiente y a la unidad de medida):

$r_{x\ esq} = -400\ \text{m}$

El tamaño de esta componente vectorial se llama "módulo de la componente vectorial x" y en este caso vale 400 m y se escribe así (nótese que lo que está entre las barras está en negrita ya que estamos escribiendo el módulo de un vector componente, nótese también que desapareció el signo ya que es un módulo, pero tiene unidades)

$\| \mathbf{r}_{x\ esq} \| = 400\ \text{m}$

La doble barra a ambos lados de un vector implica o se lee: "módulo del vector". Por razones prácticas en este apunte desde ahora y muchas veces en el pizarrón escribiremos módulo con una simple barra, de la manera siguiente:

$| \mathbf{r}_{x\ esq} | = 400\ \text{m}$ (¡no confundir con la barra de valor absoluto de un número!)

Le recordamos que en el pizarrón puede verlo escrito de esta manera $| \vec{r}_{x\ esq} |$.

Por favor deténgase a pensar acá si entiende claramente la diferencia entre "componente vectorial", "componente" y "módulo de la componente". Téngalo muy en claro porque más adelante hablaremos del "módulo del vector", qué es otra cosa más para tener en cuenta.

3º) El eje y y el eje z tienen las siguientes informaciones (observe por favor los datos que están en negrita o no)

Eje “y”

$\mathbf{r}_{y\ esq}$ = + 900 m **j** $r_{y\ esq}$ = + 900 m | $\mathbf{r}_{y\ esq}$ | = 900 m

En los dos primeros datos se ha dejado explícitamente el signo “+” para recordarle que en ese signo se encuentra la información del sentido. Se acostumbra hacerlo a ese signo implícito, pero por ahora lo mantendremos.

Eje “z”

$\mathbf{r}_{z\ esq}$ = 0 m **k** $r_{z\ esq}$ = 0 m | $\mathbf{r}_{z\ esq}$ | = 0 m

4º) Para finalizar le mostramos cómo suele escribirse este vector teniendo en cuenta que algunas de sus componentes vectoriales son nulas y aplicando las reglas de los signos que dicen “el signo más no se escribe” y la otra regla “mas por menos…menos”. El vector se transforma de la siguiente manera:

Forma “más correcta”:

$\mathbf{r}_{esq}$ = (- 400 m) **i** + (+ 900 m) **j** + (0 m) **k**

que usualmente se escribe así:

$\mathbf{r}_{esq}$ = - 400 m **i** + 900 m **j**

o también así

$\mathbf{r}_{\mathbf{esq}}$ = (- 400 **i** + 900 **j**) m o así inclusive $\mathbf{r}_{\mathbf{esq}}$ = (-400 m ; 900 m ; 0 m)

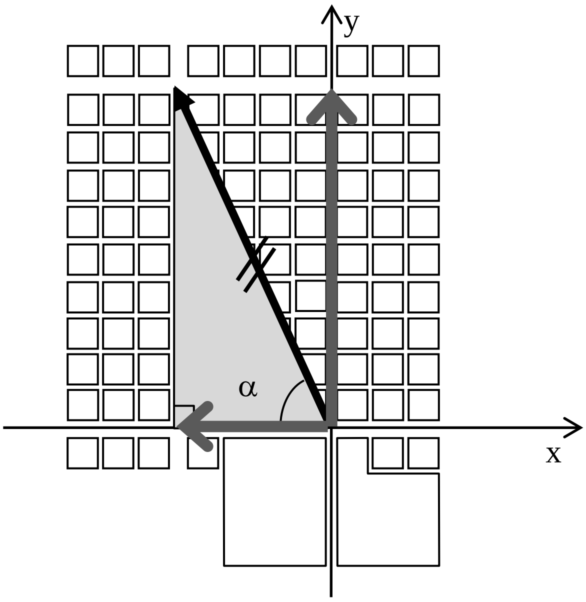
MÓDULO Y DIRECCIÓN DE UN VECTOR, FORMA POLAR

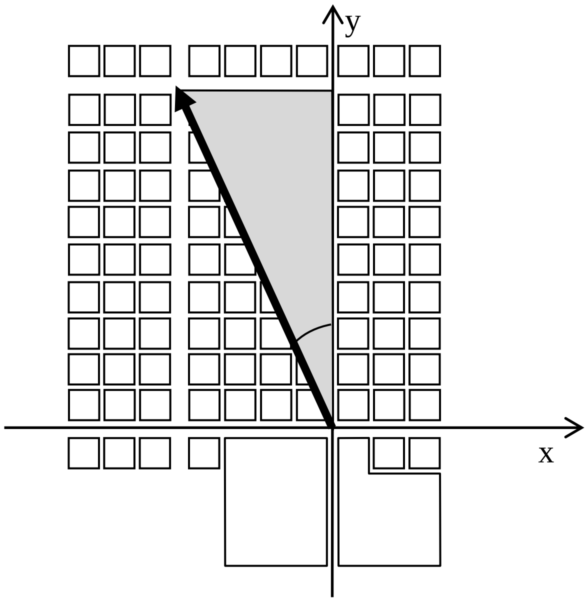
Consideremos de nuevo a nuestro vector que marca la posición de la esquina. Nosotros lo hemos analizado completamente a través de sus componentes vectoriales, recordemos $\mathbf{r}_{esq}$ = - 400 m **i** + 900 m **j** + 0 m **k**. Pero existe otra forma de analizarlo. Esta forma consiste en expresar el tamaño del vector (su módulo) y la orientación que tiene ese vector en el espacio con respecto a los ejes xyz de referencia (por razones de simpleza analizaremos solo vectores en dos dimensiones, quedando para el alumno en cursos superiores el análisis en tres dimensiones).

El vector (que se muestra nuevamente en la página siguiente) tiene un módulo y tiene una orientación en el sistema de coordenadas que hemos dado. En el caso del vector (posición) estudiado el módulo estará en metros (otras magnitudes físicas tendrán otras unidades) y la orientación del vector la daremos indicando un ángulo que forme el vector con alguno de los semiejes (x positivo, x negativo, y positivo o y negativo Este ángulo se puede expresar en varias unidades, usualmente será en grados (sistema sexagesimal, DEG o D en la calculadora científica) pero también puede darse en radianes (sistema circular, RAD o R en la calculadora científica). Por favor verifique su calculadora antes de hacer un cálculo con sistemas angulares, ¡es fuente de muchos errores!

Nota: En el caso de trabajar en tres dimensiones se deben dar tres datos: el módulo, y dos ángulos.

Como puede verse en el dibujo inferior se puede encontrar rápidamente dos triángulos rectángulos que vinculen al vector con los ejes x e y. Uno de los triángulos contiene al ángulo α y el otro al β. No es necesario trabajar con los dos triángulos, usted puede elegir con cual trabajar en función de los datos que tenga o en función de cual le resulta más sencillo.





Trabajaremos ahora con el triángulo que tiene al ángulo α (¡recuerde luego pensar como sería con el otro triángulo!).

Como puede verse en el gráfico, el módulo del vector oblicuo que estamos analizando coincide con la hipotenusa del triángulo y los módulos de las componentes vectoriales "x" e "y" de ese vector coinciden con los catetos que se encuentran paralelos al eje x y al eje y respectivamente.

Nota: por favor no piense que en el gráfico de la izquierda existen simultáneamente tres vectores, en realidad o se dibuja el vector oblicuo (color negro) o se dibujan los vectores componentes (vectores dibujados en trazo grueso en el esquema). Si usted necesita dibujar todos en un solo esquema (como es nuestro caso), se suele cruzar el vector oblicuo con un par de rayitas como indicando que se canceló y fue remplazado por los otros dos (vea las rayitas en el gráfico).

Es interesante notar acá que en un triángulo los lados no tienen signo, todos los lados de un triángulo son positivos. Esto ya nos da la pista que para trabajar con este triángulo y no equivocarnos, vamos a tener que trabajar con el módulo de los vectores ya que son todos positivos. Los signos aparecerán luego en función de "para donde" apunten las componentes vectoriales. También notemos que uno de los catetos (el que está sobre el eje x) es adyacente al ángulo y el otro (paralelo al eje y) es un cateto opuesto al ángulo α.

Y como de triángulos rectángulos estamos hablando, lo que cae de maduro es que podemos usar varias herramientas matemáticas como ser: el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas.

Recordemos nuestro vector:

$$\mathbf{r}_{esq} = -400\text{ m }\mathbf{i} + 900\text{ m }\mathbf{j}$$

Queda claro mirando ahora el dibujo del triángulo que el módulo de $\mathbf{r}_x$ es de 400 m y el módulo de $\mathbf{r}_y$ es de 900 m (¡como ya lo sabíamos además!). También queda claro que si esas son las longitudes de los catetos entonces puedo encontrar la longitud de la hipotenusa con el teorema de Pitágoras. Y la longitud de la hipotenusa es el módulo del vector $\mathbf{r}_{esq}$.

Entonces:

$hip^2 = ca^2 + co^2$ (ca = cat. adyacente; co=cat. opuesto; hip = hipotenusa)

$$|\mathbf{r}_{esq}|^2 = |\mathbf{r}_{x\,esq}|^2 + |\mathbf{r}_{y\,esq}|^2 = (400\text{ m})^2 + (900\text{m})^2 = 160000\text{ m}^2 + 810000\text{ m}^2$$

$|\mathbf{r}_{esq}|^2 = 970000\ m^2$

$|\mathbf{r}_{esq}| = \sqrt{970000\ m^2} = \sqrt{970000}\ \sqrt{m^2}$

$|\mathbf{r}_{esq}| = 984\ m$ (este valor es aproximado…no es el valor exacto de la raíz)

Advierta que hemos trabajado con escalares ya que los módulos son números reales siempre positivos.

Con esto hemos resuelto el módulo del vector $\mathbf{r}_{esq}$. Todavía nos falta encontrar la orientación del vector. Para ello entonces usamos la función trigonométrica tangente en este caso de manera que:

$\tan\alpha = co / ca$

$\tan\alpha = |\mathbf{r}_{y\ esq}| / |\mathbf{r}_{x\ esq}| = 900\ m / 400\ m = 2{,}25$

$\tan\alpha = 2{,}25$

Con esto encontramos la tangente, ahora aplicamos función trigonométrica inversa para encontrar el ángulo α. La función trigonométrica inversa de la tangente es arcotangente (arctan), pero con el uso de las calculadoras científicas (CASIO por ejemplo) aparece en las mismas como $\tan^{-1}$, inclusive hay alumnos que dicen “aplicá shift tangente” ya que el botón de la calculadora para habilitar esa función se llama “shift” (del inglés “cambiar”). ATENCIÓN: las calculadoras científicas en general no nos informan los dos resultados que tiene una función inversa trigonométrica, pero como en este apunte en general trabajaremos con triángulos rectángulos que van desde el vector hasta el semieje inmediato cercano, entonces podemos confiar en el resultado de la calculadora.

$\alpha = \arctan(2{,}25)$

$\alpha = 66^{o}$ (valor aproximado!)

Con esto hemos resuelto la orientación del vector. Este se encuentra entonces orientado 66 grados medidos desde el semieje x negativo hacia el semieje y positivo. Esta frase parece engorrosa pero solo hay que ponerse de acuerdo en “cómo se informará el ángulo”. Se puede informar la orientación de varias maneras siempre que para los interlocutores sea lo suficientemente claro. Inclusive se puede marcar el ángulo en un esquema y listo (como nuestro ángulo alfa de 66º que está en el dibujo).

Según la convención internacional, por ejemplo es usual marcar el ángulo midiéndolo desde el semieje x positivo y abriéndose hacia el semieje y positivo (generalmente, pero no siempre, esto es en sentido antihorario en la forma convencional de dibujar los ejes). En nuestro caso este ángulo informado no sería ni α ni β sino otro ángulo δ, que valdría 114º (¡Piense en esto!).

Entonces nuestro vector posición de la esquina puede informarse de dos formas alternativas, estas son equivalentes, y son las siguientes:

1ra forma:

$$\mathbf{r}_{esq} = -400\ m\ \mathbf{i} + 900\ m\ \mathbf{j}$$

2da forma:

$$|\mathbf{r}_{esq}| = 984\ m$$

Con una orientación de $\delta = 114^{o}$ (según el sistema convencional)

TRANSFORMACION DE UN VECTOR DE LA FORMA POLAR A LA CARTESIANA

Ambas formas son equivalentes y son intercambiables una con la otra. Algunos párrafos más arriba cambiamos de la primera forma, llamada generalmente "por componentes" o "rectangular" o "cartesiana"; a la segunda forma, llamada generalmente "polar".

¿Cómo se transforma al revés, o sea desde un formato polar a un vector por componentes?

Muy sencillo se trabaja con los datos "módulo" y "orientación" y se aplican las funciones trigonométricas seno y coseno. Veamos en nuestro caso…

Vamos a transformar a componentes cartesianas partiendo desde esta forma:

$|\mathbf{r}_{esq}| = 984 \text{ m}$

Con una orientación de 114º (según el sistema convencional medido desde el semieje x positivo y abriéndose el ángulo hacia el semieje y positivo)

Primero graficamos un sistema de ejes x e y que me permitan ubicar el vector (con el origen del vector en el punto "0,0"). La información del ángulo ya me indicará en que cuadrante con respecto a los semiejes x e y estará ubicado el vector (recordar que el ángulo puede estar dado de diversas formas….por ejemplo puede decir "un vector que forma un ángulo de 24º con respecto al eje y positivo y abriéndose hacia el eje x negativo"…o lo que es lo mismo "un ángulo de 66º medidos desde el semieje x negativo hacia el y positivo" etc.). Esta información es importantísima ya que al graficar los ejes y el vector se puede ir vislumbrando que signos tendrán las componentes x e y del mismo.

Luego se traza un triángulo "rectángulo" que incluya al vector como hipotenusa y a los dos catetos sobre los ejes x e y respectivamente. Para simplificar…supongamos nuevamente el triángulo que contiene al ángulo α. Del gráfico se deducirá que el ángulo α vale 66º (ya que es 180º menos los 114º que fueron dados como dato). Se sabe también que la hipotenusa vale 984 m (ya que es el módulo del vector).

Entonces cada uno de los catetos del triángulo se corresponderá con el módulo (obsérvese que calculamos el módulo de la componente y no la componente) de cada una de las componentes vectoriales (en este caso x e y). Entonces tenemos que calcular los catetos trigonométricamente (ayudarse con el grafico del triángulo que contiene al ángulo α en la página 10):

Para el cateto opuesto (eje vertical, eje y)

$\text{sen } \alpha = \text{co} / \text{hip}$ lo que implica…

$\text{co} = (\text{hip}) \text{ sen } \alpha$

$|\mathbf{r}_{y\ esq}| = |\mathbf{r}_{esq}| \text{ sen } \alpha$

$|\mathbf{r}_{y\ esq}| = 984 \text{ m sen } 66º$

$|\mathbf{r}_{y\ esq}| = 900 \text{ m}$

Con esto obtenemos el módulo de la componente sobre el eje y. Para escribir ahora el vector componente nos ayudamos del boceto del triángulo. Vemos que esa componente apunta para arriba entonces se corresponde con el sentido positivo sobre el eje y. Entonces la componente vectorial se construye definitivamente así:

$\mathbf{r}_{y\ esq} = + 900 \text{ m } \mathbf{j}$

Para el cateto adyacente (eje horizontal, eje x)

$\cos\alpha$ = ca / hip lo que implica…

ca = (hip) $\cos\alpha$

$|\mathbf{r}_{x\ esq}| = |\mathbf{r}_{esq}|\ \cos\alpha$

$|\mathbf{r}_{x\ esq}| = 984\ m\ \cos 66^{\circ}$

$|\mathbf{r}_{x\ esq}| = 400\ m$

Con esto obtenemos el módulo de la componente sobre el eje x. Para escribir ahora el vector componente nos ayudamos del boceto del triángulo. Vemos que esa componente apunta hacia la izquierda entonces se corresponde con el sentido negativo sobre el eje x. Entonces la componente vectorial sobre ese eje se construye definitivamente así:

$\mathbf{r}_{x\ esq} = -\ 400\ m\ \mathbf{i}$

Ahora que ya disponemos de las dos componentes vectoriales las sumamos (NO es suma algebraica sino vectorial) y construimos el vector por componentes:

$$\mathbf{r}_{esq} = -\ 400\ m\ \mathbf{i} \quad + \quad 900\ m\ \mathbf{j}$$

Nota: Recordar que si el triángulo elegido es otro entonces las funciones trigonométricas se aplicarán de otra manera. En este momento podría usted practicar con el otro triángulo (el que contenía al ángulo β para ver si obtiene los mismos resultados). Recuerde que los resultados expuestos acá en los apuntes están ligeramente redondeados para facilitar su escritura.

Observación para “expertos” (consulte si no entiende!!!): si se usa el sistema convencional de medición de ángulos que es aquel en el que se miden desde el semieje x positivo, abriéndose hacia el semieje y positivo; las funciones trigonométricas coseno y seno aplicadas al ángulo medido con esa convención darán directamente las componentes “x” e “y” del vector (respectivamente) con su signo correspondiente. Por ejemplo: tenemos un vector posición de módulo “984 m” y dirección “114º” (sistema convencional). Si calculamos el seno de ese ángulo da “0,9135” y si calculamos el coseno da “- 0,4067”. Al multiplicar el módulo del vector por el coseno se obtiene “- 400 m”, que ya tiene ¡el módulo y el signo! de la componente x del vector. De igual modo se obtiene la componente y multiplicando por el seno. ¡Piénselo!

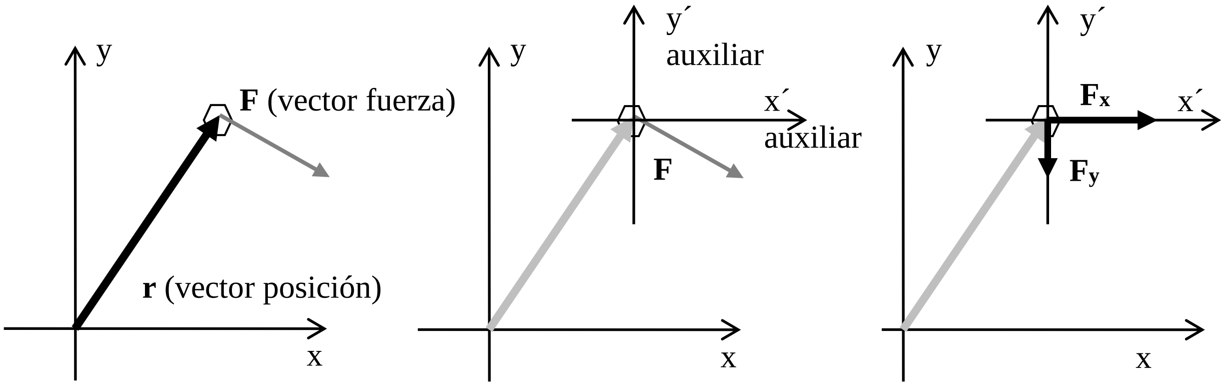
OTROS VECTORES IMPORTANTES

Todo el análisis anterior estuvo enfocado en el vector posición. Sin embargo hay otros vectores que quisiéramos tocar en este curso: vector velocidad, vector fuerza y vector aceleración.

A diferencia del vector posición, que siempre debe salir o comenzar desde el origen de coordenadas elegido, estos vectores (fuerza, velocidad o aceleración) se asocian a un objeto. La velocidad lineal (¡decimos “lineal” porque más adelante en el año usted estudiará también una “velocidad angular”…que también es un vector!) es un vector asociado a un objeto o partícula (es “la velocidad de la partícula”) y las fuerzas son vectores que se aplican “sobre un objeto”. Por lo tanto estos vectores tienen su origen en el propio objeto (generalmente a los vectores fuerzas los dibujamos aplicados sobre el objeto y al vector velocidad un poquito separado del mismo para no confundirlos).

El vector fuerza y el vector velocidad tienen sus propias unidades. En el caso de la velocidad su unidad en el sistema internacional (S.I.) es m/s (metros sobre segundos) y la fuerza tiene como unidad en el S.I. al N (newton). Como estos vectores tienen su origen NO coincidente necesariamente con el origen de coordenadas, para encontrar sus componentes o para indicar su dirección se usan ejes auxiliares, haciendo que el origen de estos ejes x´y´ auxiliares coincida con el origen del vector. Estos ejes auxiliares, sin embargo deben respetar la orientación de los originales (o sea que la recta del eje x, y la recta auxiliar x´ deben ser paralelas. Igual para el eje y) y el sentido de los originales (el sentido x´ positivo debe ser el mismo que el x positivo). Esto debe ser así para que haya coherencia con el trabajo de vectores ya que en más de una oportunidad se operará con vectores fuerza, velocidad y posición simultáneamente. Los ejes x y x´ se consideran "de igual" dirección.

En el gráfico siguiente se muestra un objeto (hexágono) ubicado en una cierta posición (marcado por su vector posición) y además se muestra un vector fuerza aplicado sobre él. Los gráficos que le siguen muestran los ejes auxiliares para trabajar con la fuerza y además se muestra la descomposición de ese vector fuerza en sus vectores componentes $\mathbf{F_x}$ y $\mathbf{F_y}$

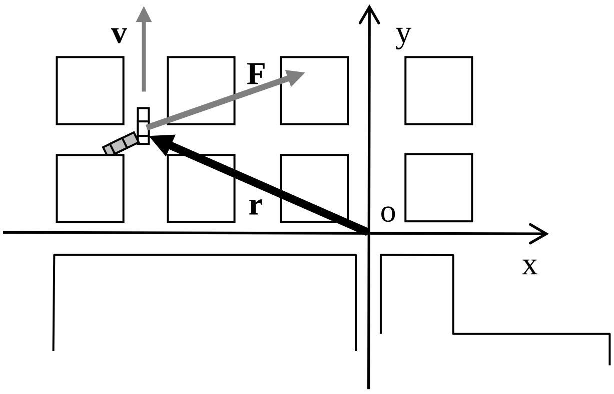


Otra cosa a tener en cuenta es que el vector velocidad de un cuerpo, tiene toda la información de la dirección hacia la cual se está moviendo ese cuerpo. Sin embargo en la vida cotidiana uno solamente se refiere al módulo de ese vector. Por ejemplo se escuchan frases como esta: " ¡ta´ loco el vago…iba a 200 kilómetros por hora! ". En esta frase no se indica la dirección, sino simplemente el módulo del vector velocidad. En física para no generar confusiones, al módulo del vector velocidad se le llama "rapidez" (en el inglés…siempre existieron dos palabras para esto speed = rapidez y velocity = vector velocidad).

Tenga muy en cuenta entonces que cuando en física se le pide que indique una "velocidad" o que compare dos "velocidades", se está hablando de magnitudes vectoriales. Para ejemplificar a continuación se muestran cuatro velocidades "distintas" (repetimos… ¡NO son iguales!) pero que se corresponden con la "misma" rapidez (¡iguales!). Piense en $\mathbf{v_4}$ en especial:

$\mathbf{v}_1 = +5{,}0\ \text{m/s}\ \mathbf{j}$ $\quad\mathbf{v}_2 = -5{,}0\ \text{m/s}\ \mathbf{i}$ $\quad\mathbf{v}_3 = +5{,}0\ \text{m/s}\ \mathbf{i}$ $\quad\mathbf{v}_4 = +3{,}0\ \text{m/s}\ \mathbf{i} + 4{,}0\ \text{m/s}\ \mathbf{j}$

Para aclarar más todavía, en el gráfico de abajo se muestra un auto (blanco) que está moviéndose y que lamentablemente lo están chocando en una esquina. Se muestran los vectores posición del auto (parte del origen), se muestra el vector velocidad del auto (un poquito separado del auto como ya dijimos) y se muestra el vector fuerza que le aplica el auto que lo está chocando. Abajo del croquis están explicitados los vectores desarrollados por componentes (recordar que estamos estudiando todo por ahora en dos dimensiones así que no se escribirán las componentes sobre el eje z que saldrían del papel). ¡Ojo!…estamos dibujando tres vectores que tienen diferentes unidades y que corresponden a magnitudes físicas totalmente distintas en un solo esquema (ejes x e y solo indican direcciones… ¡No tienen unidades!). Son magnitudes conceptualmente muy diferentes pero todas son magnitudes vectoriales y se expresan usando el ente "vector".



Solo como para ejemplificar y verificar las orientaciones de las compontes vectoriales, los valores "posibles" de los tres vectores que se graficaron podrían ser los siguientes (están dados como componentes…si usted quiere y como un desafío puede transformar cada vector a la forma polar):

$$\mathbf{r}_{\text{auto}} = -200\text{ m }\mathbf{i} + 100\text{ m }\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_{\text{auto}} = +20\text{ m/s }\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = +16000\text{ N }\mathbf{i} + 9000\text{ N }\mathbf{j}$$

Observe el gráfico y los signos de las componentes. Observe también que hay componentes nulas y por eso no se las escribió. Preste atención también a las unidades.

Con esto cerramos la parte de este apunte donde tratamos de entender y conceptualizar que es un vector, cuáles son las formas más usuales de escribirlo y cuales son algunas magnitudes físicas vectoriales. A continuación veremos cómo se trabaja con vectores cuando hay que operar con ellos.

OPERACIONES CON VECTORES

Existen numerosas operaciones que se pueden realizar entre vectores o con vectores y escalares.

En este cursillo solo veremos algunas, a saber:

i) multiplicación de un escalar por un vector,

ii) división de un vector por un escalar (que no es otra cosa que el producto del vector por la inversa del escalar),

iii) Suma de dos o más vectores,

iv) Resta entre dos vectores,

v) Producto escalar (o producto punto) entre dos vectores

vi) Producto vectorial (o producto cruz) entre dos vectores.

También es bueno aclarar acá que NO existe el cociente entre dos vectores (no puedo dividir un vector en otro vector). No está matemáticamente definida esta operación.

ALGUNAS DEFINICIONES:

a) Igualdad de vectores: dos vectores **A** y **B** son iguales si tienen el mismo módulo y apuntan en la misma dirección. También son iguales si tienen todas sus componentes correspondientes iguales entre sí. Para muchos casos prácticos dos vectores son iguales aunque estén en rectas paralelas, pero sin embargo pueden producir efectos físicos distintos. Por ejemplo: yo puedo intentar levantar mi cama haciendo una fuerza de 400 N hacia arriba aplicando esa fuerza en la cabecera de la cama o aplicando esa fuerza en los "pies" de la cama. Aunque la fuerza es la misma (módulo, dirección y sentido iguales), el punto de aplicación de la fuerza hace que la forma en que la cama se mueve sea distinta.

Atención: dos vectores que tengan el mismo módulo pero distinta dirección o sentido NO son iguales ($\mathbf{F_1}$ = +10 N **i**, no es igual a $\mathbf{F_2}$ = -10 N **i** ni a $\mathbf{F_3}$ = +10 N **j**)

b) Vector Nulo: es un vector cuyo módulo es cero, es decir su origen coincide con su final. Todas las componentes de un vector nulo valen cero.

c) Opuesto a un vector dado: se llaman vectores opuestos entre sí a dos vectores que tienen el mismo módulo, la misma dirección pero sentidos opuestos. Dos vectores son opuestos también si todas sus componentes correspondientes tienen signos opuestos. Por ejemplo:

$\mathbf{F_A}$ = + 18 N **i** - 9 N **j** es opuesto a $\mathbf{F_B}$ = - 18 N **i** + 9 N **j**

Los vectores opuestos pueden representarse con el nombre del vector original anteponiéndole el signo menos. Por ejemplo, el vector $\mathbf{F_B}$ también podría llamarse $\mathbf{-F_A}$.

Ahora si veamos las operaciones con vectores que nos interesan en este curso:

i) Multiplicación de un escalar por un vector:

La multiplicación de un escalar por un vector da como resultado un nuevo vector. Un vector puede multiplicarse por cualquier escalar positivo, negativo o nulo. El escalar puede ser una magnitud física por ejemplo una "masa" con sus respectivas unidades o puede ser un número real adimensional. La multiplicación por un escalar NUNCA cambia la dirección de un vector (si puede cambiar su módulo y su sentido como veremos).

Cuando el vector está expresado en componentes y se multiplica por un escalar, el vector resultante es aquel en el cual cada una de las componentes se multiplica por el escalar. En símbolos, si el vector es $\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j}$ (por ejemplo una velocidad) y el escalar es m (por ejemplo una masa), el resultado es el vector $\mathbf{p} = mv_x\,\mathbf{i} + mv_y\,\mathbf{j}$ (este vector ya no es una velocidad es otra magnitud física que se estudiará durante el año, y se llama "cantidad de movimiento lineal").

Ejemplos:

Vamos a multiplicar este vector **v** = 2,0 m/s **i** - 4,5 m/s **j** por tres escalares diferentes

Por "0"

0 **v** = (0)2,0 m/s **i** - (0)4,5 m/s **j** = 0 m/s **i** + 0 m/s **j**

Da como resultado el vector nulo de velocidad: **v´** = 0 m/s (indicamos v´ ya que es otro vector)

Multiplicación por una masa de 7,0 kg

7,0 kg **v** = (7,0 kg 2,0 m/s) **i** - (7,0 kg 4,5 m/s) **j**

Da como resultado el vector **p** = 14 kg m/s **i** - 31,5 kg m/s **j** (este vector ya no es una velocidad es otra magnitud física que estudiará más adelante).

Por el número "-2"

-2 **v** = (-2) 2,0 m/s **i** - (-2) 4,5 m/s **j**

Da como resultado el vector **v´** = - 4,0 m/s **i** + 9,0 m/s **j** (obsérvese…dice v´ ya que es una velocidad, debido a que el escalar por el que se multiplicó el vector velocidad es adimensional)

Si el vector original, supongamos una velocidad **v**, estuviera expresado como polar, la multiplicación por un escalar tiene las siguientes características:

a) Si el escalar es una cantidad nula (cero), entonces da como resultado el vector nulo.

b) Si se multiplica por un escalar positivo, se obtiene un nuevo vector que tiene la misma dirección y el mismo sentido que el vector original, pero el módulo es igual al producto del escalar por el módulo del vector original (en nuestro ejemplo |**p**|= m|**v**| ¡con sus respectivas unidades!).

c) Si el escalar es un numero negativo "n" el vector resultante tiene la misma dirección que el original, el módulo será |**v´**|=(-n)|**v**|, pero tendrá sentido contrario al vector original.

Como ejemplo vamos a multiplicar este vector |**v|** = 4,92 m/s con un ángulo de 293º medidos en el sistema convencional, por tres escalares diferentes

Por "0"

Da como resultado el vector nulo de velocidad: **v´** = 0 m/s

Por una masa de 7,0 kg

7,0 kg |**v**| = 34,4 kg m/s

Da como resultado el vector |**p|** = 34,4 kg m/s y con un ángulo de 293º (ya que al ser un escalar positivo no cambia el sentido ni la dirección)

Por el número "-2"

(2)|**v**| = 9,84 m/s (observe que en este renglón dice "2" y no "-2")

Da como resultado el vector de módulo |**v´|** = 9,84 m/s y con un ángulo de 113º (ya que al ser un escalar negativo no cambia la dirección pero SI el sentido, de allí que 113º = 293º-180º. Esto de último de los ángulos solo es válido para el trabajo en dos dimensiones, en 3D es más complicado)

ii) <u>División de un vector por un escalar</u>:

Un vector puede dividirse por cualquier escalar positivo o negativo, pero nunca por cero. El resultado de dividir un vector en un escalar da como resultado un nuevo vector. El escalar puede ser una magnitud física por ejemplo una "masa" con sus respectivas unidades o puede ser un número real. La división por un escalar NUNCA cambia la dirección de un vector (si puede cambiar su módulo y su sentido como veremos luego).

Nota: A todos los fines prácticos dividir un vector por un escalar (por ejemplo dividirlo en 5) es lo mismo que multiplicar ese vector por la inversa del escalar (o sea multiplicarlo por 1/5). De todos modos explicaremos esta operación como división para trabajar más tranquilos.

Cuando el vector está expresado en componentes y se divide por un escalar, el vector resultante es aquel en el cual cada una de las componentes se divide por el escalar. En símbolos si el vector es un vector fuerza, como ejemplo genérico, **F** = F_x **i** + F_y **j** y el escalar es m, el resultado es el vector **a** = F_x/m **i** + F_y/m **j** (este vector ya no es una fuerza es otra magnitud física que se estudiará durante el año, se llama "aceleración lineal" o simplemente "aceleración")

. Ejemplos:

Vamos a dividir este vector **F** = - 20 N **i** + 45 N **j** por tres escalares diferentes

Por "0"

Imposible resolver. Matemáticamente es una indeterminación.

En una masa de 5,0 kg

Entonces **F** / 5,0 kg = (- 20 N/ 5,0 kg) **i** + (45 N/5,0 kg) **j**

Da como resultado el vector **a** = - 4,0 m/s^2 **i** + 9,0 m/s^2 **j** (este vector ya no es una fuerza es otra magnitud física es la aceleración y tiene las unidades m/s^2 como se estudiará en el año)

En el número "-2"

Entonces **F** / (-2) = (- 20 N / -2) **i** + (45 N / -2) **j**

Da como resultado el vector **F´** = 10 N **i** - 22,5 N **j** (indicamos **F´** ya que es otro vector distinto al original)

Si el vector original, supongamos un vector fuerza **F** (tomaremos fuerza solo como ejemplo, puede ser cualquier vector) estuviera expresado en forma polar, la división por un escalar tiene las siguientes características:

a) Si se divide por un escalar positivo (puede ser una magnitud física escalar, por ejemplo m, "de masa") se obtiene un nuevo vector que tiene la misma dirección y el mismo sentido que el vector original, pero su módulo es igual a la división entre el módulo del vector original y el escalar (en nuestro ejemplo |**a**| = |**F**|/m ¡con sus respectivas unidades!).

b) Si el escalar es un numero negativo "n" el vector resultante tiene la misma dirección que el original, el módulo será |**F´**| = |**F**|/(-n) pero tendrá sentido contrario al vector original.

Como ejemplo vamos a dividir este vector |**F**| = 49,2 N con un ángulo de 113º medidos en el sistema convencional, en tres escalares diferentes

Por "0"

Imposible resolver. Matemáticamente es una indeterminación.

En una masa de 5,0 kg

Entonces |**F**| / 5,0 kg = 9,8 m/s^2

Da como resultado el vector |**a**| = 9,8 m/s^2 y con un ángulo de 113º (ya que al ser un escalar positivo no cambia el sentido ni la dirección)

Por el número "-2"

Entonces |**F**| / (2) = 24,6 N (nótese que dice "2" y no "-2")

Da como resultado el vector de módulo |**F´**| = 24,6 N y con un ángulo de 293º (ya que al ser un escalar negativo no cambia la dirección pero SI el sentido, de allí que 293º = 113º+180º. Este cambio de ángulo solo es válido para dos dimensiones, en tres dimensiones es más complicado)

Nota sobre la división: si analizamos la expresión **F**/m = **a**, con la que se trabajó recién y se despeja de esa ecuación la variable m, se obtiene **F**/**a** = m. Este cociente matemáticamente es inexistente (no está definido el cociente entre dos vectores), sin embargo si trabajamos con las componentes (escalares) de los vectores, son posibles los siguientes cocientes F_x/a_x y F_y/a_y, (está todo sin negritas…son componentes escalares que deben estar con sus respectivos signos). Estos dos cocientes deben dar exactamente el mismo resultado para que la expresión **F**/**a** = m se pueda usar (en ambos casos el resultado del cociente será el escalar "m"). De esta forma se calcula en física la masa de un objeto en varias oportunidades.

iii) <u>Suma de dos o más vectores</u>.

Al sumar dos o más vectores se obtiene un nuevo vector. En física estos dos o más vectores deben corresponder a la misma dimensión vectorial (por ejemplo todos los sumandos deben ser fuerzas; o puede ser uno posición y el otro desplazamiento) y se obtiene un vector de la misma dimensión física. No tendría sentido sumar un vector fuerza con un vector posición (en realidad lo mismo pasa con los escalares… ¡no podemos sumar 3 horas con 6 kilogramos!).

Comencemos razonando sobre lo que ocurre al sumar fuerzas. Por ejemplo, al sumar dos vectores fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ (o pueden ser más) que se aplican juntas sobre un cuerpo, se obtiene una fuerza que no tiene existencia real y que es la "fuerza resultante" (se le suele llamar $\mathbf{\Sigma F}$ o $\mathbf{F_R}$ o $\mathbf{R}$, el símbolo "Σ" es una letra griega, se llama sigma y se lee sumatoria). Este concepto de "Fuerza Resultante" es el vector fuerza que provocaría el mismo efecto que las dos anteriores juntas.

Para sumar vectores existen diversos métodos gráficos que no estudiaremos en este curso. Le solicitamos que usted mismo investigue en la bibliografía por su cuenta (se suelen llamar "método del paralelogramo" y "método del polígono").

En este curso estudiaremos el método analítico. Para que este método sea mucho más fácil de aplicar los vectores que se van a sumar tienen que estar todos en la forma cartesiana o por componentes.

Se define el vector suma como el vector cuyas componentes son la suma de las componentes respectivas de cada uno de los vectores sumandos. Por ejemplo quiero encontrar el vector $\mathbf{R}$ (Muchas veces escrito como $\mathbf{\Sigma F}$) que es la suma de los tres vectores $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ y $\mathbf{F_3}$.

En símbolos: $\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3}$

Cada uno de los vectores que van a ser sumados tiene que estar expresados por componentes (nuevamente aclaramos que vamos a trabajar en solo dos dimensiones sin tener en cuenta el eje z, aunque las reglas para sumar son las mismas):

$$\mathbf{F_1} = \mathbf{F_{1x}} + \mathbf{F_{1y}} = F_{1x}\,\mathbf{i} + F_{1y}\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F_2} = \mathbf{F_{2x}} + \mathbf{F_{2y}} = F_{2x}\,\mathbf{i} + F_{2y}\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F_3} = \mathbf{F_{3x}} + \mathbf{F_{3y}} = F_{3x}\,\mathbf{i} + F_{3y}\,\mathbf{j}$$

Nota: observar atentamente que el signo "+" en la expresión $\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3}$, no tiene la misma "intensión de uso" que en esta expresión $\mathbf{F_1} = \mathbf{F_{1x}} + \mathbf{F_{1y}}$. A la larga las dos son sumas vectoriales pero en un caso, en el último, está usado para explicitar las componentes vectoriales de un dado vector y en el otro caso hacen referencia a una suma de dos o más vectores (cada uno de los cuales puede tener sus componentes vectoriales). ¡Le pedimos que reflexione sobre esto!

Entonces la suma se opera así (observe que $\mathbf{R}$ también tiene sus vectores componentes!!!):

$$\mathbf{R} = (\mathbf{F_{1x}} + \mathbf{F_{2x}} + \mathbf{F_{3x}}) + (\mathbf{F_{1y}} + \mathbf{F_{2y}} + \mathbf{F_{3y}})$$ (nuevamente acá piense en el signo "+")

$$\mathbf{R} = (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x})\,\mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y} + F_{3y})\,\mathbf{j} = R_x\,\mathbf{i} + R_y\,\mathbf{j} = \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y$$

Este es el resultado de la suma, simplemente se suman todas las componentes del mismo eje (¡con sus signos respectivos!) de los vectores sumandos y se obtiene como resultado las componentes del vector resultante.

Ejemplo numérico:

Encontrar el resultado de la suma de estas tres fuerzas:

$\mathbf{F_1} = 30\ \text{N}\ \mathbf{i} - 8{,}0\ \text{N}\ \mathbf{j}$; $\mathbf{F_2} = 12\ \mathbf{j}$ **y** $\mathbf{F_3} = -45\ \text{N}\ \mathbf{i} + 15\ \text{N}\ \mathbf{j}$

$$\mathbf{R} = (30\ \text{N} + 0\ \text{N} - 45\ \text{N})\,\mathbf{i} + (-8{,}0\ \text{N} + 12\ \text{N} + 15\text{N})\,\mathbf{j} = -15\ \text{N}\,\mathbf{i} + 19\ \text{N}\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R} = -15\ \text{N}\,\mathbf{i} + 19\ \text{N}\,\mathbf{j} = R_x\,\mathbf{i} + R_y\,\mathbf{j} = \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y$$

Y listo, ese es el vector resultado. La suma es realmente sencilla, ¿no le parece?. Con esas componentes usted si quiere puede transformar ese vector a la forma polar. Pero eso no es ni obligación ni necesario (salvo que se lo requiera el problema). Por ejemplo, alguien le podría preguntar ¿Cuál es el módulo del vector **R** y que dirección tiene?...¿se anima a responder esta pregunta…?

Nota: La suma $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3}$ es muy diferente a $|\mathbf{F_1}| + |\mathbf{F_2}| + |\mathbf{F_3}|$. La primera es una adición vectorial y la debemos manejar con mucho cuidado. La siguiente afirmación NO ES CIERTA: $|\mathbf{R}| = |\mathbf{F_1}| + |\mathbf{F_2}| + |\mathbf{F_3}|$ (salvo en la <u>única</u> ocasión en la que los vectores sumandos sean todos de la misma dirección y sentido)

Sugerencia para cuando necesite sumar dos o más vectores (use este procedimiento paso a paso):

-. Elija un sistema de coordenadas conveniente. Siempre se sugiere elegir ejes <u>x</u> e <u>y</u> que estén orientados igual que la mayor cantidad posible de vectores. Esto reduce el número de componentes que necesite calcular. Los ejes pueden tener cualquier orientación (¡siempre ortogonales entre si!) y cualquier asociación de signos para los sentidos (¡siempre para un lado positivo y para el otro negativo!). Lo siguiente también es muy importante: si todos los vectores se encuentran en un solo eje se suele trabajar simplemente con las componentes (con su respectivo signo) y se deja de escribir el versor correspondiente.

-. Trace un esquema con los vectores que da el problema y use los símbolos y letras correspondientes. Use subíndices (por ejemplo $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ si hubiera dos fuerzas).

-. Encuentre las componentes <u>x</u> e <u>y</u> de todos los vectores. Para ello guíese de un triángulo rectángulo auxiliar (debe usar tantos triángulos como vectores tenga) en el que la hipotenusa sea el vector y los catetos estén sobre los ejes <u>x</u> e <u>y</u> (o sobre ejes auxiliares <u>x´</u> y <u>y´</u>). Luego calcule los módulos de esas componentes usando las funciones seno y coseno respectivos a un cierto ángulo que usted elegirá según el esquema. Una vez calculados esos módulos, observe en qué sentido apuntan esas componentes y entonces colóqueles el signo correspondiente.

-. Encuentre las componentes resultantes (la suma algebraica de las componentes) en las direcciones <u>x</u> e <u>y</u>. Y exprese el vector resultante en forma de "suma" de componentes vectoriales. Acá terminó la operación.

-. Solo si es necesario o se lo piden expresamente, use el teorema de Pitágoras para hallar la magnitud del vector resultante. Y/o seleccione una función trigonométrica apropiada para hallar el ángulo que el vector resultante forma con el semieje <u>x</u> positivo (o con cualquier otro semieje que le parezca apropiado).

Algunas propiedades de la suma de vectores:

a) La suma es conmutativa: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

b) La suma es asociativa: $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

iv) <u>Resta entre dos vectores</u>.

Al restar un vector de otro se obtiene un nuevo vector. A diferencia de la suma, la resta de vectores no es conmutativa. Uno de los vectores tomará el rol de minuendo y el otro de sustraendo. Esto quiere decir que es muy importante que usted reconozca cual vector se resta de cual. En física estos dos vectores deben corresponder a la misma magnitud vectorial (por ejemplo los dos deben ser velocidades) y se obtiene un vector de la misma magnitud física (en este ejemplo…velocidad).

Para restar vectores existen también métodos gráficos que no estudiaremos en este curso. Puede usted investigar al respecto.

En este curso estudiaremos el método analítico de la resta. Para que este método sea mucho más fácil de aplicar los vectores que se van a restar tienen que estar todos en la forma cartesiana o por componentes.

Se define el vector resta como el vector cuyas componentes son la resta de las componentes respectivas. Por ejemplo: quiero encontrar el vector **d** que es la resta de los dos vectores $\mathbf{r_1}$, y $\mathbf{r_2}$. Siendo $\mathbf{r_2}$ minuendo y $\mathbf{r_1}$ el sustraendo.

En símbolos: $\mathbf{d} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ (recuerde que la resta NO es conmutativa)

Los dos vectores que están implicados en la resta tienen que estar expresados por componentes (aclaramos que vamos a trabajar solo en dos dimensiones. En 3D la idea es la misma):

$\mathbf{r_1} = \mathbf{r_{1x}} + \mathbf{r_{1y}} = r_{1x}\,\mathbf{i} + r_{1y}\,\mathbf{j}$

$\mathbf{r_2} = \mathbf{r_{2x}} + \mathbf{r_{2y}} = r_{2x}\,\mathbf{i} + r_{2y}\,\mathbf{j}$

Nota: observar atentamente que el signo "+" en estas expresiones se usa para explicitar las componentes vectoriales de un dado vector.

Entonces la resta se opera así:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{r_{2x}} - \mathbf{r_{1x}}) + (\mathbf{r_{2y}} - \mathbf{r_{1y}})$$ (nuevamente acá piense en el signo "+")

$$\mathbf{d} = (r_{2x} - r_{1x})\,\mathbf{i} + (r_{2y} - r_{1y})\,\mathbf{j} = d_x\,\mathbf{i} + d_y\,\mathbf{j} = \mathbf{d}_x + \mathbf{d}_y$$

Este es el resultado de la resta, simplemente se restan componentes respectivas (¡con sus signos!) y se obtiene como resultado las componentes del vector resta.

Ejemplo numérico:

Encontrar el resultado "**d**" de la resta de estas dos posiciones $\mathbf{r_2}$ y $\mathbf{r_1}$, siendo $\mathbf{d} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$:

$\mathbf{r_1} = 200\text{ m }\mathbf{i} - 500\text{ m }\mathbf{j}$ y $\mathbf{r_2} = 100\text{ m }\mathbf{i} + 300\text{ m }\mathbf{j}$

$\mathbf{d} = (100\text{ m} – 200\text{ m})\,\mathbf{i} + (300\text{ m} – [-500\text{ m}])\,\mathbf{j} = -100\text{ m }\mathbf{i} + 800\text{ m }\mathbf{j}$

$\mathbf{d} = -100\text{ m }\mathbf{i} + 800\text{ m }\mathbf{j}$

Y listo, ese es el vector resultado. La resta también es sencilla, ¡siempre que los vectores a restar estén expresados en componentes cartesianas ortogonales! Solo tenga cuidado con los signos. Con esas componentes usted si quiere puede transformar ese vector a la forma polar. Pero eso no es obligación, salvo que se lo pidan expresamente. ¿Se anima a hacerlo?

Notas:

1) Algunas veces se expresa la resta de vectores como la "suma" de un vector con el "opuesto" del otro: **A** - **B** = **A** + (- **B**). Piense en ello.

2) Muchas veces en física restar dos vectores es muy importante para ver el cambio que tuvo una determinada magnitud mientras transcurrió el tiempo. Por ejemplo al restar dos vectores posición que tuvo un objeto en dos instantes de tiempos diferentes, se obtiene el cambio de posición del objeto (es lo que se conoce como "desplazamiento"). O al restar dos vectores velocidad se obtiene el "vector cambio de velocidad". En física es tan importante calcular el cambio de una determinada magnitud que se usa un símbolo especial, la letra griega "delta" mayúscula, cuyo símbolo es el siguiente Δ. Una magnitud precedida por este signo, significa siempre una resta entre algo final menos algo inicial (lo "final" ocurre más tarde en el tiempo y se usan los subíndices "i" y "f" para indicar inicial y final. También es usual los números "1" y "2" o las letras "a" y "b" entendiendo que "2" y "b" ocurren más tarde que "1" y "a" respectivamente). Por ejemplo habiendo

un objeto que tuvo dos posiciones diferentes mientras transcurría el tiempo ($\mathbf{r_f}$ y $\mathbf{r_i}$), si se escribe $\mathbf{\Delta r}$ se entiende que hay que calcular $\mathbf{\Delta r} = \mathbf{r_f} - \mathbf{r_i}$, Para los escalares también se aplica: al restar la masa que tiene actualmente con la masa que tuvo usted al nacer, obtiene el cambio de su masa, $\Delta m = m_f - m_i$, desde que nació hasta el día de hoy. Otro ejemplo: la expresión ΔT (generalmente "T" mayúscula es temperatura y "t" minúscula es tiempo) implica restar dos temperaturas, la temperatura final menos la inicial, esto es: $\Delta T = T_f - T_i$.

v) <u>Producto escalar entre dos vectores (o producto "punto")</u>.

Al realizar la operación producto escalar o producto "punto" de un vector por otro vector se obtiene un escalar. Este escalar es un número real (positivo, negativo o nulo). Si uno o ambos de los vectores que se multiplican tienen unidades, el escalar que resulta de la multiplicación tiene unidad igual al producto de las unidades de los vectores que se multiplican. Por ejemplo si se multiplica escalarmente un vector fuerza (medido en newtons) por un vector velocidad (medido en metros sobre segundo), se obtiene un número acompañado por la unidad "newton por metros sobre segundos" (N m/s).

Se puede realizar la multiplicación escalar entre vectores estando estos vectores en la forma cartesiana o también estando en forma polar. Ambas formas de obtener el resultado son equivalentes. Es mucho más sencillo obtener el producto escalar si los vectores están expresados en la forma cartesiana, por lo tanto comenzaremos estudiando esta forma de realizarlo y luego lo haremos en forma polar.

A) Producto escalar de vectores expresados en forma cartesiana:

Se define el producto escalar entre dos vectores como el escalar que resulta de multiplicar componente a componente dos vectores y luego sumar esos productos. Por ejemplo quiero encontrar un escalar "P" que resulta de multiplicar escalarmente el vector **F** con el vector **v**.

En símbolos: $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

Como puede verse en la simbología, el producto escalar entre dos vectores se representa con un punto entre los factores (de ahí el nombre de "producto punto"). El punto suele marcarse muy bien.

Ambos vectores que van a ser multiplicados tiene que estar expresados por componentes (vamos a trabajar en tres dimensiones ya que la operatoria es muy sencilla):

Disponemos de los vectores **F** y **v**:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_x} + \mathbf{F_y} + \mathbf{F_z} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_x} + \mathbf{v_y} + \mathbf{v_z} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$$

Entonces el producto escalar se opera así:

$$P = F_x\, v_x + F_y\, v_y + F_z\, v_z \qquad \text{(acá el signo “+” es suma algebraica común)}$$

Este es el resultado, simplemente se suman todos los productos entre componentes de la misma dirección, y se obtiene un escalar.

Nota: el producto es entre componentes con sus respectivos signos. No son los módulos de las componentes!

Ejemplo numérico:
Encontrar el resultado del producto escalar “P” entre estos dos vectores.

F = 8,0 N **i** - 4,0 N **j** + 0 N **k** = (+8,0 N) **i** + (- 4,0 N) **j** + (0 N) **k**

v = 5,0 m/s **i** + 6,0 m/s **j** - 10 m/s **k** = (+5,0 m/s) **i** + (+6,0 m/s) **j** + (-10 m/s) **k**

En símbolos:

$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$

$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (8{,}0\ N)(5{,}0\ m/s) + (-\ 4{,}0\ N)(\ 6{,}0\ m/s) + (\ 0\ N)\ (-10\ m/s)$

$P = 40\ Nm/s + (-24\ Nm/s) + (0\ Nm/s)$

$p = 16\ Nm/s$

B) Producto escalar entre dos vectores expresados en forma polar.

Puede demostrarse que el producto escalar entre dos vectores puede calcularse como el escalar que resulta de multiplicar el módulo de un vector por el módulo del otro vector por el coseno del ángulo subtendido entre esos dos vectores (ángulo subtendido al desplazar los vectores hasta que se superpongan sus orígenes). Esto es sumamente útil cuando los vectores a multiplicar están expresados en forma polar. El mayor problema de esta forma de calcular el producto escalar, es encontrar el ángulo que forman los dos vectores, ya que es un ángulo desarrollado en el espacio tridimensional. Ambos vectores siempre definen un plano (siempre que no sean colineales) y hay que encontrar el ángulo entre ellos en ese plano. Cuando los vectores están en algún plano conocido como por ejemplo el plano xy (o el xz o el yz) esta forma de operar puede resultar sencilla.

En el ejemplo que trabajaremos a continuación supondremos que los vectores están en el plano xy (en el caso de vectores con cualquier orientación en el espacio es más complicado y va más allá de este curso).

Por ejemplo quiero encontrar un escalar “P” que resulta de multiplicar escalarmente el vector **F** con el vector **v**. Estos vectores tienen módulo conocidos | **F** | y | **v** |; y el ángulo entre ellos es γ.

En símbolos: $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{v}| \cos \gamma$

Notas:

a) Como la función trigonométrica usada es el “coseno”, el ángulo γ entre los dos vectores en el espacio puede ser tomado indistintamente como el ángulo convexo entre los vectores (sería el menor entre los vectores de 0º hasta 180º) o el ángulo cóncavo entre los vectores (de 180º a 360º); el resultado será el mismo. Por una cuestión de comodidad o sencillez se suele medir el ángulo menor que 180º.

b) Tener en cuenta que γ es el ángulo “entre” ambos vectores. No es el ángulo con el cual suele expresarse uno o el otro de los vectores expresados en forma polar.

Ejemplo numérico:

Encontrar el resultado del producto escalar "P" entre estos dos vectores (ambos pertenecientes al plano "xy").

F :

$|\mathbf{F}| = 12{,}0$ N

$\alpha = 157º$ (según el sistema convencional)

v:

$|\mathbf{v}| = 4{,}0$ m/s

$\beta = 23º$ (según el sistema convencional)

Como puede verse, disponemos claramente de los módulos de ambos vectores pero no tenemos el ángulo γ subtendido entre ellos. Es muy sencillo darse cuenta del valor de este ángulo debido a que los vectores están en un plano conocido, el plano "xy" (ayúdese con un esquema rápido si quiere). El valor del ángulo entre los vectores es entonces 134º (que aparece de la resta de ambos ángulos de orientación de los vectores). Observación: el otro ángulo subtendido (el concavo) es de 226º, pero da lo mismo su coseno que el de 134º (verifique!!!).

En símbolos:

$$P = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{v}| \cos\gamma$$

$$P = 12{,}0 \text{ N } 4{,}0 \text{ m/s} \cos 134º$$

$$P = -\,33{,}3 \text{ Nm/s}$$

Algunas propiedades del producto escalar entre dos vectores:

a) El producto escalar o producto punto es conmutativo: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

b) El valor máximo positivo que puede tomar el producto escalar es cuando los vectores son coincidentes en dirección y sentido (ángulo subtendido entre ellos: 0º). Mientras que el valor máximo negativo es cuando tienen la misma dirección pero sentidos opuestos (ángulo subtendido entre ellos: 180º).

c) El producto escalar arroja un resultado nulo cuando los vectores producto son perpendiculares entre si (ángulo subtendido entre ellos: 90º).

vi) Producto vectorial entre dos vectores (o producto "cruz").

Al realizar la operación producto vectorial de un vector por otro vector se obtiene como resultado otro vector. Si los vectores que se multiplican tienen unidades, el vector que resulta de la multiplicación tiene unidad igual al producto de las unidades de los vectores que se multiplican. Por ejemplo si se multiplica vectorialmente un vector fuerza (medido en newtons) por un vector posición (medido en metros), se obtiene un vector expresado en la unidad "newton metro" (Nm).

Se puede realizar la multiplicación vectorial entre vectores estando estos vectores en la forma cartesiana o también estando en forma polar. Ambas formas de obtener el resultado son equivalentes. Es mucho más sencillo obtener el producto vectorial si los vectores están expresados en la forma cartesiana, por lo tanto comenzaremos estudiando esta forma de realizarlo y luego lo haremos en forma polar.

A) Producto vectorial entre vectores expresados en forma cartesiana:

Se define el producto vectorial como el vector que resulta luego de una serie de operaciones con las componentes de los vectores originales. No es fácil describir esta operación con una frase corta y sencilla así que lo haremos directamente con un ejemplo. Por ejemplo quiero encontrar un vector "**L**" que resulta de multiplicar vectorialmente el vector **r** con el vector **p**.

En símbolos: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

Como puede verse en la simbología, el producto vectorial entre dos vectores se representa con una cruz de multiplicación entre los factores (de ahí el nombre de "producto cruz"). Aunque después lo recordaremos, vamos anticipándole que el producto cruz NO es conmutativo, por lo tanto el hecho que la letra **r** esté escrita antes que la letra **p** es muy importante!!!

Ambos vectores que van a ser multiplicados tiene que estar expresados por componentes cartesianas (vamos a trabajar en tres dimensiones):

Entonces, supongamos que disponemos de los vectores **r** y **p**:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_x} + \mathbf{r_y} + \mathbf{r_z} = r_x\,\mathbf{i} + r_y\,\mathbf{j} + r_z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p_x} + \mathbf{p_y} + \mathbf{p_z} = p_x\,\mathbf{i} + p_y\,\mathbf{j} + p_z\,\mathbf{k}$$

Entonces el producto vectorial se define así (debe ser hecho tal cual está escrito acá, en ese orden y esas componentes vectoriales):

$$\mathbf{L} = (r_y\,p_z - r_z\,p_y)\,\mathbf{i} + (r_z\,p_x - r_x\,p_z)\,\mathbf{j} + (r_x\,p_y - r_y\,p_x)\,\mathbf{k}$$

(acá el signo "+" es "además", es una indicación de que hay más componentes)

Nota: el producto es entre componentes con sus respectivos signos. No son los módulos de las componentes!

O sea que las componentes respectivas son:

$$L_x = r_y\,p_z - r_z\,p_y$$

$$L_y = r_z\,p_x - r_x\,p_z$$

$$L_z = r_x\,p_y - r_y\,p_x$$

Con un poco de atención se observa una regla mnemotécnica para recordar como hacer el producto. Por ejemplo se nota que los minuendos y sustraendos tienen cambiados sus subíndices. También se observa que si la componente resultado es la componente x, los dos subíndices que siguen son el y y el z, con el primer subíndice para el primer vector del producto cruz (**r** en nuestro ejemplo); luego las otras componentes producto siguen una secuencia rotativa entre x, y y z.

Ejemplo numérico:

Encontrar el resultado del producto vectorial "$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$" entre estos dos vectores:

$$\mathbf{r} = 2{,}0\text{ m}\,\mathbf{i} - 0\text{ m}\,\mathbf{j} + 1{,}0\text{ m}\,\mathbf{k} = (+2{,}0\text{ m})\,\mathbf{i} + (0\text{ m})\,\mathbf{j} + (+1{,}0\text{ m})\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{p} = 10\text{ kg m/s}\,\mathbf{i} - 10\text{ kg m/s}\,\mathbf{j} + 30\text{ kg m/s}\,\mathbf{k} = (+10\text{ kg m/s})\,\mathbf{i} + (-10\text{ kg m/s})\,\mathbf{j} + (+30\text{ kg m/s})\,\mathbf{k}$$

Entonces las componentes serían:

$L_x = r_y\, p_z \; - \; r_z\, p_y = (0\ m)\ (+30\ kg\ m/s) - (+1{,}0\ m)\ (-10\ kg\ m/s) = \quad + 10\ kg\ m^2/s$

$L_y = r_z\, p_x \; - \; r_x\, p_z = (+1{,}0\ m)\ (+10\ kg\ m/s) - (+2{,}0\ m)\ (+30\ kg\ m/s) = \quad - 50\ kg\ m^2/s$

$L_z = r_x\, p_y \; - \; r_y\, p_x = (+2{,}0\ m)\ (-10\ kg\ m/s) - (0\ m)\ (+10\ kg\ m/s) = \quad - 20\ kg\ m^2/s$

y finalmente entonces el producto vectorial queda:

$\mathbf{L} = (+ 10\ kg\ m^2/s)\ \mathbf{i} + (- 50\ kg\ m^2/s)\ \mathbf{j} + (- 20\ kg\ m^2/s)\ \mathbf{k}$

O lo que es lo mismo:

$\mathbf{L} = 10\ kg\ m^2/s\ \mathbf{i} - 50\ kg\ m^2/s\ \mathbf{j} - 20\ kg\ m^2/s\ \mathbf{k}$

B) Producto vectorial entre dos vectores expresados en forma polar.

El producto vectorial entre dos vectores puede calcularse como el vector que resulta de aplicar las siguientes reglas: a) el módulo del vector resultado se obtiene al multiplicar el módulo de un vector por el módulo del otro vector por el seno del ángulo convexo (de 0º hasta 180º) comprendido entre esos dos vectores en el espacio (ángulo subtendido al desplazar los vectores hasta que se superpongan sus orígenes), b) la dirección del vector resultado es la dirección perpendicular al plano que definen los dos vectores que se multiplican, y c) el sentido es aquel al que apunta el pulgar de la mano derecha (si o si la derecha!!!) al apoyar el canto de la mano (canto con el que pega un karateka) en el plano hipotético que forman ambos vectores originales, haciendo que el canto de la mano se apoye en el primer vector del producto con los dedos apuntando en el sentido del vector y cerrar naturalmente los dedos (meñique, anular, mayor e índice) en la dirección de giro que va desde el primer vector expresado en el producto vectorial hacia el segundo vector expresado en el producto, yendo estos dedos barriendo el ángulo convexo (no el cóncavo!!!). La mano puede apoyarse en ambas "caras" del plano y en solo una de esas caras los dedos se podrán cerrar, entonces en esa situación el pulgar apunta en el sentido del vector resultado.

Como se puede ver, la descripción del método no es tan sencilla, sin embargo con un poco de práctica se va dominando la técnica. En particular esta técnica es muy útil cuando los vectores a multiplicar están expresados en forma polar y además ambos están en algún plano conocido (como el plano xy), ya que el resultado estará en el eje perpendicular a ese plano (en este caso el eje z). Un problema también radica en encontrar el ángulo que forman los dos vectores, ya que es un ángulo desarrollado en el espacio tridimensional. Ambos vectores siempre definen un plano y hay que encontrar el ángulo entre ellos en ese plano.

En el ejemplo que trabajaremos a continuación supondremos que los vectores a multiplicarse están en el plano xy (en el caso de vectores con cualquier orientación en el espacio es más complicado y va más allá de este curso).

Por ejemplo quiero encontrar un vector **L** que resulta de multiplicar vectorialmente el vector **r** con el vector **p**. En este orden $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ (observar que **r** está antes que **p**). Estos vectores tienen módulo conocidos $|\mathbf{r}|$ y $|\mathbf{p}|$; y el ángulo entre ellos es δ.

Aplicando la técnica encontramos el módulo del resultado de la siguiente manera:

$$|\mathbf{L}| = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{p}|\ \text{sen}\ \delta$$

A la dirección de **L**, la encontraremos observando primero el plano que forman los dos vectores **r** y **p**. Luego, **L**, será perpendicular a ese plano.

Al sentido lo encontramos apoyando el canto de la mano (canto del karateka) en ese plano imaginario y cerrando los dedos desde **r** hacia **p** (yendo por el ángulo más pequeño, el convexo); el pulgar indica el sentido

Notas:

a) Como la función trigonométrica usada es el “seno”, el ángulo δ entre los dos vectores en el espacio puede ser tomado únicamente como el ángulo convexo entre los vectores (sería el menor ángulo entre los vectores, sería de 0º hasta 180º). Para el calculo del módulo del vector resultado, se podría también tomar el ángulo cóncavo, calcular su seno (que dará negativo) y tomar solo el valor del seno ignorando el signo negativo. O también se podría usar cualquier ángulo entre los vectores con la aclaración que hay que tomar el valor absoluto del seno del ángulo. Usted decida que le resulta más fácil.

b) Tener en cuenta que δ es el ángulo entre ambos vectores. No es el ángulo con el cual suele expresarse un vector en forma polar.

Ejemplo numérico:

Encontrar el resultado del producto vectorial **L**, siendo **L** = **r** x **p**, y los vectores multiplicados ambos pertenecientes al plano xy.

r :

$|\mathbf{r}| = 40$ m

$\alpha = 22$ º (según el sistema convencional)

p:

$|\mathbf{p}| = 8{,}0$ kg m/s

$\beta = 274$ º (según el sistema convencional)

Como puede verse, disponemos claramente de los módulos de ambos vectores pero no tenemos el ángulo convexo δ subtendido entre ellos. Es muy sencillo darse cuenta del valor de este ángulo debido a que los vectores están en un plano conocido, el plano xy. El valor del ángulo convexo entre los vectores es entonces 108º (por favor, deténgase a pensar como se obtuvo este valor, ayúdese con un esquema rápido si quiere)

Primero obtenemos el módulo:

$|\mathbf{L}| = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{p}|$ sen δ

$|\mathbf{L}| = 40$ m $8{,}0$ kg m/s sen 108º

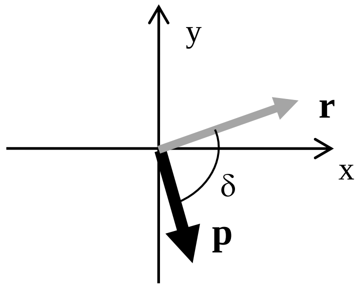
$|\mathbf{L}| = 304{,}3$ kg m^2/s

Ahora la dirección:

Como los dos vectores a multiplicar están contenidos en el plano xy, el vector resultado **L**, estará en un eje perpendicular a ese plano, o sea que en este caso será el eje z, eje que está caracterizado por el versor **k**.

Y finalmente el sentido:

Ayudados por el croquis que se encuentra aquí abajo (se muestran los ejes x e y, pero recuerde que según “la regla de la mano derecha” el eje z es perpendicular a la hoja y es positivo en el sentido que va desde la hoja hacia usted), vemos que si apoyamos el canto de la mano derecha (canto del karateka) en **r** con los dedos apuntando hacia donde apunta el vector **r** y queremos doblar los dedos barriendo el ángulo cónvexo para llegar a **p**, no lo podemos hacer apoyando la mano en este lado de la hoja, ya que se nos quebrarían los dedos!!!. Por lo tanto hay que apoyar la mano derecha sobre **r**, del otro lado de esta hoja de papel (recuerde que el plano xy donde están los vectores es el plano de esta hoja de papel) y ahí si podremos doblar los dedos yendo hacia **p** por el ángulo convexo. Entonces el pulgar derecho indica el sentido del vector resultado, y en este caso el pulgar está apuntando hacia atrás de la hoja, esto significa que (según como están dibujados los ejes) el signo del vector resultado es el signo "negativo" (lo que indica su sentido).



Ahora que tenemos módulo, dirección y sentido del vector resultado lo podemos escribir completamente, y sería el siguiente:

$\mathbf{L} = -\ 304{,}3 \text{ kg m}^2/\text{s } \mathbf{k}$

Algunas propiedades del producto vectorial entre dos vectores:

a) El producto vectorial no es conmutativo: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$

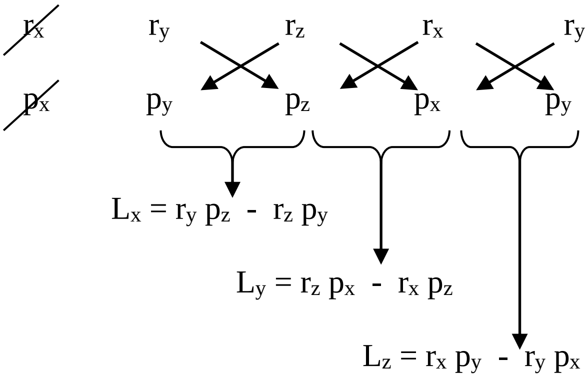
b) El valor máximo que puede tomar el módulo del vector resultado del producto vectorial es cuando los vectores multiplicados son perpendiculares entre sí.

c) El producto vectorial arroja un resultado nulo (vector nulo) cuando los vectores producto son colineales entre si (o sea tienen la misma dirección en el espacio, en igual o diferente sentido).

d) En algunos textos la "cruz" suele reemplazarse por el símbolo " ^ " , como ejemplo: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$.

f) Truco para operar rápidamente el producto vectorial con vectores en coordenadas cartesianas: colocar las componentes del primer vector una al lado de la otra (r_x, r_y, y r_z), luego a continuación colocar de nuevo las dos primeras componentes (r_x y r_y), repetir para el otro vector en el renglón de abajo y encolumnando componentes del mismo eje. Tachar la primera columna de la izquierda. Ahora para obtener cada componente se hacen productos cruzados y restas entre las otras columnas como se muestra en este esquema:

Se busca el siguiente producto vectorial $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, entonces las componentes se obtienen de la siguiente forma:



Nota final sobre algunos productos vectoriales que aparecen en la Física:

En la Mecánica aparecen dos productos vectoriales con frecuencia, que son el del cálculo de la Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula (**L**) y el del cálculo del Momento de Rotación de una Fuerza (**M**). En ecuaciones serían respectivamente:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

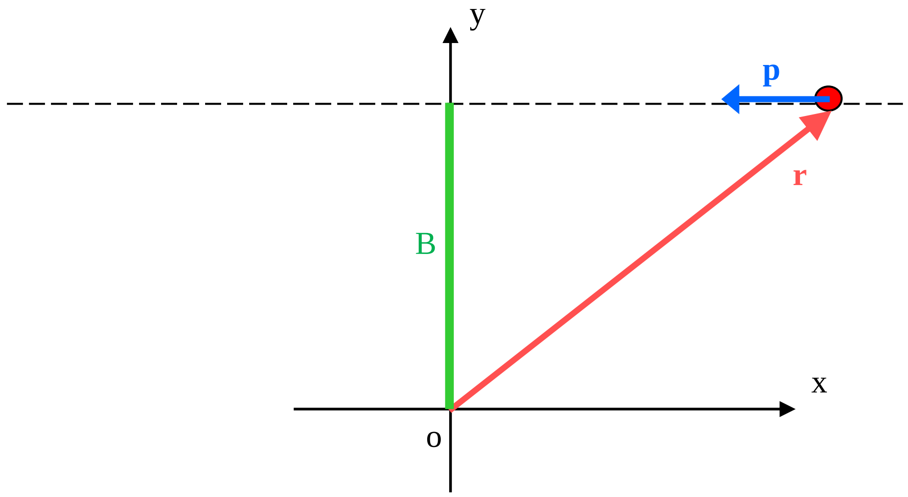
Como puede verse, en ambas ecuaciones, aparecen vectores posición, en el primer caso el vector posición de la partícula, y en el segundo caso el vector posición del punto de aplicación de una fuerza (ATENCION: si estamos estudiando una partícula, entonces el vector posición del punto de aplicación de la fuerza es también el vector posición de la partícula, ya que la fuerza está aplicada en ella).

En el cálculo de estos vectores hay una técnica más para conocer el módulo del vector resultado y es la técnica del "Brazo de Palanca". (Le recordamos que con esta técnica solo se conoce el Módulo del resultado, la dirección y el sentido los conocerá revisando los ítems b y c de la página 2 de estos apuntes tipeados.)

Entonces: primero definimos que es el Brazo de Palanca (lo llamaremos de ahora en más "B"). Se define el brazo de palanca como la "Mínima distancia entre la recta que contiene al segundo vector del producto y el origen de coordenadas". B es un escalar positivo y tiene unidades de metros (m).

Veamos un ejemplo.

Imaginemos una partícula que se mueve por una recta (línea de puntos) con una cantidad de movimiento **p** = - 12 kg m/2 **i**. El origen del sistema de coordenadas está representado por la letra "o". Y en ese sistema de coordenadas está graficada la "recta de acción" del vector **p**. También está graficado el vector posición **r** para ese instante, pero también se ha graficado el brazo de palanca (B) de **p**. Imaginemos que ese brazo de palanca mide 6 m.



Es este esquema, a pesar que el vector **r** está oblicuo en el sistema de coordenadas, el módulo del vector **L** se puede obtener multiplicando dos escalares, el módulo del vector **p** por la longitud del brazo de palanca B. Atención: la ecuación que sigue son todos escalares positivos (nótese que no está en negrita).

$$L = p\ B$$

$$L = 12\ kg\ m/s\ 6\ m = 72\ kg\ m^2/s$$

Es muy, pero muy interesante, notar entonces que si la partícula se mueve permanentemente por la misma recta de acción (línea de puntos) entonces el B medirá siempre lo mismo, y si además la partícula lleva rapidez y sentido constantes, entonces el módulo de **p** será constante. Por lo tanto en este ejemplo tan especial el módulo de la Cantidad de Movimiento Angular (L) de la partícula permanecerá constante.
Le recordamos que además del módulo que acabamos de calcular necesitamos de la dirección y el sentido. Para ello revise los ítems b y c de la página 2 de estos apuntes tipeados. Si ya los revisó se dará cuenta que el vector **L** constante para este ejemplo es de:

$$\mathbf{L} = +\ 72\ kg\ m^2/s\ \mathbf{k}$$

Una regla idéntica puede hacer para obtener el módulo de un momento de rotación de una fuerza (**M**).

<u>EJEMPLO FINAL (Tipo “problema”) DONDE SE EXPLICAN ALGUNAS “DIFICULTADES” DE LA SIMBOLOGÍA:</u>

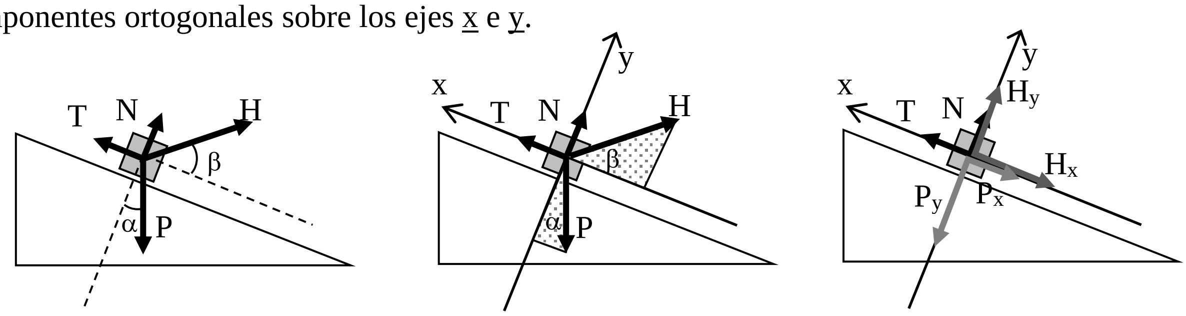
En el gráfico (que se encuentra mas abajo) se muestran cuatro fuerzas actuando sobre un cuerpo (cuadradito gris) que está apoyado sobre un plano inclinado: la fuerza peso (**P**) que hace el planeta tierra, la fuerza normal (**N**) que hace el plano inclinado, la fuerza que hace un hombre (**H**), y la fuerza de tensión (**T**) que hace una cierta cuerda. Todas son fuerzas actuando sobre el objeto.

Disponemos de los siguientes datos:

a) el módulo de **P**, |**P**| = 50 N
b) el módulo de **H**, |**H**| = 48 N
c) el valor del ángulo α, $\alpha = 27º$
d) el valor del ángulo β, $\beta = 55º$
e) Además nos informan que la fuerza resultante o total actuando en un eje paralelo al plano tiene un módulo de 28,2 N y apunta en el mismo sentido que **T**. Recuerde que esta fuerza “resultante” no es una fuerza aplicada sino el resultado de la sumatoria (suma) de fuerzas en ese eje.
f) También sabemos como “dato” que en la dirección perpendicular al plano inclinado no hay fuerza resultante (la suma en ese eje da el vector nulo 0 N).

¿Y que se nos pide que resolvamos?...Se nos piden dos cosas
1) Que encontremos la fuerza **N**
2) Y que encontremos la fuerta **T**

Abajo se muestra también, la mejor selección de ejes posibles para esta situación (debido a que se acomodan un par de fuerzas en las direcciones de los ejes y debido a los datos que tenemos y a lo que se nos pide calcular). En el dibujo del medio se muestra la elección de un par de triangulitos auxiliares para calcular las componentes de **P** y de **H** (la elección de estos triangulitos está claramente relacionada con los datos de los ángulos α y β). No hay obligación de dibujar estos triangulitos explícitamente, ya con el tiempo aprenderá solamente a imaginarlos y trabajar con esa imagen mental. En el grafico final se muestran todos los vectores descompuestos en sus componentes ortogonales sobre los ejes <u>x</u> e <u>y</u>.



AHORA A RESOLVER:

Hemos elegido las direcciones de los ejes y sus signos también (ver para donde apuntan las flechas de los ejes…ese sentido es positivo. Elegimos positivo el sentido “subiendo por el plano” solamente porque la resultante, en ese eje, apunta para allí …pero es indistinto)

Ahora podemos escribir todos los vectores que tenemos como datos, en sus formas ortogonales (por componentes).

Pensemos en **P**. Conocemos su módulo (|**P**| = 50 N) y también vemos que está apuntando en una dirección oblicua con respecto a los ejes. Entonces ayudados por el triangulito que tiene el ángulo α, y aplicando funciones trigonométricas seno y coseno (¡calculadora en “DEG” por favor!)

podemos calcular los módulos de los vectores componentes de **P**, de la siguiente manera (recordar ca=cateto adyacente; co=cateto opuesto e hip=hipotenusa):

sen α = co / hip lo que implica…

co = (hip) sen α

$|\mathbf{P_x}| = |\mathbf{P}|$ sen α

$|\mathbf{P_x}| =$ 50 N sen 27º

$|\mathbf{P_x}| =$ 22,7 N

y por otra parte

cos α = ca / hip lo que implica…

ca = (hip) cos α

$|\mathbf{P_y}| = |\mathbf{P}|$ cos α

$|\mathbf{P_y}| =$ 50 N cos 27º

$|\mathbf{P_y}| =$ 44,5 N

Ahora, ayudados por el gráfico, nos tenemos que fijar para dónde apunta cada una de estas componentes y eso nos permitirá escribir el vector correctamente (recuerde que con las funciones trigonométrica solo calculó los módulos de las componentes).

Vemos que $\mathbf{P_x}$ tiene sentido negativo y que $\mathbf{P_y}$ tiene sentido negativo también (en sus respectivos ejes). Entonces el vector queda finalmente de esta manera:

P = (- 22,7 N) **i** + (- 44,5 N) **j** o simplemente **P** = - 22,7 N **i** - 44,5 N **j**

Observemos ahora el vector **H**. Se puede hacer algo muy parecido a lo que se hizo con el vector **P**, pero teniendo en cuenta ahora el triangulito que tiene al ángulo β. Haciendo ese trabajo (queda para que lo haga usted…no se conforme con leer el resultado más abajo… ¡hágalo!) se obtiene finalmente:

H = (- 27,5 N) **i** + (+ 39,3 N) **j** o simplemente **H** = - 27,5 N **i** + 39,3 N **j**

Ahora tenemos nuestros dos vectores "datos" expresados mediante sus componentes. Se lo pasamos en limpio:

P = - 22,7 N **i** - 44,5 N **j**

H = - 27,5 N **i** + 39,3 N **j**

Ahora hablemos de los vectores "incógnitas" que son **T** y **N**.

Preste atención al vector **T**, vemos que NO tiene componente en el eje <u>y</u> ($\mathbf{T_y}$ = 0N **j**). Entonces este vector se escribirá en la forma:

T = T_x **i** + 0 N **j** (o simplemente **T** = T_x **i**)

El objetivo será encontrar el valor de la componente T_x. Esperamos que esta componente sea positiva por el sentido que tiene **T** en el esquema.

Nota: tenga en cuenta que al estar el vector contenido sobre un eje, faltándole una de sus componentes vectoriales entonces es exactamente lo mismo **T** que $\mathbf{T_x}$. Sin embargo le sugerimos que no lo piense tan estrictamente así porque nunca un vector está "exactamente" sobre un eje. Esto es: nunca podemos garantizar que una componente vectorial vale "exactamente" cero. Se dice que "dentro del error" esa componente vale cero (esto lo aprenderá más adelante en laboratorio de física donde verá que en ciencias las mediciones NO son exactas y siempre tienen un margen de duda).

También sabemos (se ve en el esquema del problema) que la fuerza $\mathbf{N}$ solo tiene componentes en el eje y, o sea que tendrá la forma $\mathbf{N} = 0\text{ N }\mathbf{i} + N_y\,\mathbf{j}$. Entonces conocemos que la componente x de esta fuerza vale: $\mathbf{N_x} = 0\text{ N }\mathbf{i}$. Y lo que no sabemos es el valor de la componente $\mathbf{N_y}$. Esto habrá que encontrarlo en algún momento.

A la fuerza resultante, que es la suma vectorial de las cuatro fuerzas existentes, vamos a llamarla $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{T} + \mathbf{H}$$

Recordar que esta fuerza NO es una fuerza aplicada, ni tiene existencia real; simplemente es la suma de las otras y es un concepto matemático y abstracto útil (el único caso en el que la resultante es una fuerza real es el caso en el que actúa una única fuerza real sobre un objeto, esa fuerza será también la resultante…pero no es el caso del problema que estamos estudiando ahora).

A esta fuerza $\mathbf{R}$ también puedo imaginarla y trabajarla con sus vectores componentes $\mathbf{R_x}$ y $\mathbf{R_y}$. Estos vectores componentes están relacionados con las fuerzas aplicadas de la siguiente manera:

$$\mathbf{R_x} = \mathbf{P_x} + \mathbf{N_x} + \mathbf{T_x} + \mathbf{H_x}$$

$$\mathbf{R_y} = \mathbf{P_y} + \mathbf{N_y} + \mathbf{T_y} + \mathbf{H_y}$$

Estas últimas dos ecuaciones son interesantes…tomemos la primera: $\mathbf{R_x} = \mathbf{P_x} + \mathbf{N_x} + \mathbf{T_x} + \mathbf{H_x}$

Es una ecuación vectorial, pero como todos los vectores en juego están sobre el eje x, entonces se puede ignorar el versor $\mathbf{i}$. Es muy usual hacerlo y trabajar con las componentes, que son escalares (recuerde la diferencia entre “vector componente” y “componente”). ¡Estas componentes tiene signo!

$\mathbf{R_x} = \mathbf{P_x} + \mathbf{N_x} + \mathbf{T_x} + \mathbf{H_x}$ es lo mismo que $R_x\,\mathbf{i} = P_x\,\mathbf{i} + N_x\,\mathbf{i} + T_x\,\mathbf{i} + H_x\,\mathbf{i}$

Obviando el versor, ya que como dijimos todo está sobre el mismo eje, se puede escribir y trabajar con la ecuación siguiente:

$R_x = P_x + N_x + T_x + H_x$ (¡nótese que no está en negrita!).

Algo parecido podemos hacer con el eje y (obviando el versor $\mathbf{j}$) y transformar esta ecuación “vectorial”: $\mathbf{R_y} = \mathbf{P_y} + \mathbf{N_y} + \mathbf{T_y} + \mathbf{H_y}$, en esta ecuación “escalar”: $R_y = P_y + N_y + T_y + H_y$.

Notas importantes…en serio ¡IMPORTANTISIMAS!:

a) Transformar ecuaciones vectoriales, en las cuales TODOS los vectores están el MISMO eje, a ecuaciones escalares, es muy usado y se considera correcto (solo hay que tener cuidado con los signos que indican el sentido de los vectores componentes).

b) $\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{T} + \mathbf{H}$ …NO es igual a….. $|\mathbf{R}| = |\mathbf{P}| + |\mathbf{N}| + |\mathbf{T}| + |\mathbf{H}|$. Una ecuación es vectorial y la otra es escalar (de hecho le segunda ecuación no se usa nunca ya que no tiene ningún interés físico sumar los módulos de los vectores sin tener en cuenta su dirección).

c) $R_x = P_x + N_x + T_x + H_x$ …NO es igual a... $|\mathbf{R_x}| = |\mathbf{P_x}| + |\mathbf{N_x}| + |\mathbf{T_x}| + |\mathbf{H_x}|$ error muy común ya que las dos ecuaciones son escalares, pero en la primera (de componentes) cada termino tiene su signo (por ejemplo la componente P_x es negativa en el problema que estamos resolviendo), mientras que en la segunda, como son módulos, todos los términos son positivos. ¡Por favor recordar esto!...no es lo mismo $\mathbf{P_x}$, que P_x, ni que $|\mathbf{P_x}|$, vector componente, componente y módulo de la componente. respectivamente. En el pizarrón estos símbolos serían: $\vec{P}_x$, P_x y $|\vec{P}_x|$.

d) También NO es igual $R_y = P_y + N_y + T_y + H_y$ con $|\mathbf{R_y}| = |\mathbf{P_y}| + |\mathbf{N_y}| + |\mathbf{T_y}| + |\mathbf{H_y}|$. Se lo enfatizamos porque en muchos libros o nosotros mismos, los profesores, cuando escribimos en el pizarrón solemos usar la siguiente simbología: cuando hablamos de vector le ponemos una flechita arriba, así $\vec{P}_y$, y cuando hablamos de "módulo" de ese vector (en el pizarrón) lo escribimos sin la flechita: P_y ; cuando lo correcto sería con las barras a los lados. Con esa forma de escribir en el pizarrón, sin las barras, se genera una confusión entre "componente escalar" y el "módulo de la componente vectorial". Es una forma usual de escritura que en el fondo tiene un cierto error. Así que le pedimos que cuando dude si se está hablando de la componente escalar de un vector (que puede ser positiva o negativa) o del módulo de esa componente (que siempre es positivo)… ¡pregunte a su profesor (o mándele un mail al autor del libro)! Hemos encontrado que esta forma de escribir y usar símbolos (sin la barra de módulo) genera varios inconvenientes (en especial de signos y sentidos), así que por favor tenga cuidado.

Volvamos al problema y resolvamos ahora lo que se nos pidió, que eran dos cosas:
1º) "la fuerza **N**".
2º) "la fuerza **T**"

Veremos dos maneras de hacer el ejercicio. A estas dos maneras la llamaremos a) "Como debe hacerse", y b) "Lo usual" que es como puede hacerse sin estar equivocado, pero hay que tener mucho cuidado con pequeños cambios en la simbología que se hacen en los libros o que hacemos los profes muchas veces (¡lo que hablábamos más arriba de sacarle las barras de módulo!).

a) PRIMERA FORMA… ¡Como debe hacerse!:
"Calculo de la fuerza **N**".
Del grafico sabemos que $\mathbf{N_x} = 0\ \text{N}\ \mathbf{i}$, por lo tanto este no es nuestro problema (ATENCIÓN: notar aquí que una letra **N** alude a una fuerza y la otra N es la unidad de medida de fuerza, el newton). Lo que tenemos que encontrar es la componente y. Para resolver esta componente (y) usamos como dato la frase del problema que dice "en la dirección perpendicular al plano inclinado no hay fuerza resultante". Esa dirección es la que nosotros tomamos como eje y. Esto significa que la resultante de fuerzas en ese eje es nula: $\mathbf{R_y} = 0\ \text{N}\ \mathbf{j}$. Entonces sumemos los vectores componentes y de todas las fuerzas, y su resultado será $0\ \text{N}\ \mathbf{j}$, (esto nos servirá para calcular $\mathbf{N_y}$):

$$\mathbf{R_y} = \mathbf{P_y} + \mathbf{H_y} + \mathbf{T_y} + \mathbf{N_y} = 0\ \text{N}\ \mathbf{j}$$

Entonces

$$\mathbf{P_y} + \mathbf{H_y} + \mathbf{T_y} + \mathbf{N_y} = 0\ \text{N}\ \mathbf{j}$$

$$P_y\ \mathbf{j} + H_y\ \mathbf{j} + T_y\ \mathbf{j} + N_y\ \mathbf{j} = 0\ \text{N}\ \mathbf{j}$$

$$(-\ 44{,}5\ \text{N})\ \mathbf{j} + (+\ 39{,}3\ \text{N})\ \mathbf{j} + (\ 0\ \text{N})\ \mathbf{j} + N_y\ \mathbf{j} = 0\ \text{N}\ \mathbf{j}$$

Que sacando paréntesis es lo mismo que

$$-\ 44{,}5\ \text{N}\ \mathbf{j} + 39{,}3\ \text{N}\ \mathbf{j} + 0\ \text{N}\ \mathbf{j} + N_y\ \mathbf{j} = 0\ \text{N}\ \mathbf{j}$$

Y ahora despejando nos queda

$$N_y\ \mathbf{j} = +44{,}5\ \text{N}\ \mathbf{j} - 39{,}3\ \text{N}\ \mathbf{j} - 0\ \text{N}\ \mathbf{j}$$

$$N_y\ \mathbf{j} = +\ 5{,}2\ \text{N}\ \mathbf{j}$$

Este resultado indica módulo, dirección y sentido de la fuerza normal **N** que ejerce el plano sobre el cuerpo.

Nota: recuerde que en las cinco (5) últimas ecuaciones si usted quiere puede obviar el versor (**j** en este caso), ya que todas las componentes están en el mismo eje (eje y en este caso) y operar todo con algebra común. En las ecuaciones anteriores se lo dejó al "versor" solo para enfatizar el carácter vectorial de los cálculos que se están haciendo. Obviar el versor para componentes colineales (todas en la misma línea o eje) es muy usual, tiene rigor científico y está muy bien visto… ¡puede hacerlo con tranquilidad! O sea escribir por ejemplo: $P_y + H_y + T_y + N_y = R_y$ es totalmente correcto (no se están sumando módulos sino componentes y tendrán sus signos respectivos).

Volviendo entonces a los cálculos que hicimos hace un momento, esto nos da como resultado:

$\mathbf{N_y} = +5{,}2\ \text{N}\ \mathbf{j}$

Entonces al tener el valor de las dos componentes vectoriales de **N** (que son $\mathbf{N_x}$ y $\mathbf{N_y}$) hemos resuelto el valor de ese vector:

Respuesta a la primera pregunta:

$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{N_x} + \mathbf{N_y} = N_x\ \mathbf{i} + N_y\ \mathbf{j} = (0\ \text{N})\ \mathbf{i} + (5{,}2\ \text{N})\ \mathbf{j}}$ o simplemente $\mathbf{N} = +5{,}2\ \text{N}\ \mathbf{j}$

Nota: estaría bueno que desde ahora y en los prácticos, exámenes parciales o exámenes finales Ud se acostumbre a "señalar" de alguna manera las respuestas. Nosotros acá se la destacamos con una frase que dice "Respuesta a la primera pregunta" y con un recuadro, pero usted puede usar varias técnicas: usar resaltador, escribirlas en otro color, subrayarla, etc.

Continuemos con lo otro que se nos pedía: "Calcular **T**" (lo realizaremos por el método: "Como debe hacerse").

Del grafico sabemos que $\mathbf{T_y} = 0\ \text{N}\ \mathbf{j}$, por lo tanto este no es nuestro problema. Lo que tenemos que encontrar es la componente x de **T**, esto es: $\mathbf{T_x}$. Para resolver esta componente (x) usamos la frase "dato" del problema que dice "la fuerza resultante o total actuando en un eje paralelo al plano tiene un módulo de 28,2 N y apunta en el mismo sentido que **T**".

El eje paralelo al plano es el x y a esa fuerza total sobre el eje x le llamamos $\mathbf{R_x}$. O sea que de la frase "dato" se deduce lo siguiente: $\mathbf{R_x} = +28{,}2\ \text{N}\ \mathbf{i}$ (el signo positivo de la componente se debe a que "apunta en el mismo sentido que **T**", y ese sentido lo determinamos como positivo). Entonces sumemos todos los vectores solamente en sus componentes x y encontraremos lo pedido:

$\mathbf{R_x} = \mathbf{P_x} + \mathbf{N_x} + \mathbf{T_x} + \mathbf{H_x}$

$$\mathbf{R_x} = \mathbf{P_x} + \mathbf{N_x} + \mathbf{T_x} + \mathbf{H_x}$$

$$R_x\ \mathbf{i} = P_x\ \mathbf{i} + N_x\ \mathbf{i} + T_x\ \mathbf{i} + H_x\ \mathbf{i}$$

$$(+28{,}2\ \text{N})\ \mathbf{i} = (-22{,}7\ \text{N})\ \mathbf{i} + (0\ \text{N})\ \mathbf{i} + T_x\ \mathbf{i} + (-27{,}5\ \text{N})\ \mathbf{i}$$

Que sacando paréntesis es lo mismo que:

$$28{,}2\ \text{N}\ \mathbf{i} = -22{,}7\ \text{N}\ \mathbf{i} + 0\ \text{N}\ \mathbf{i} + T_x\ \mathbf{i} - 27{,}5\ \text{N}\ \mathbf{i}$$

Y ahora despejando T_x:

$T_x\ \mathbf{i} = 28{,}2\ \text{N}\ \mathbf{i} + 22{,}7\ \text{N}\ \mathbf{i} + 27{,}5\ \text{N}\ \mathbf{i}$

$T_x\ \mathbf{i} = +78{,}4\ \text{N}\ \mathbf{i}$ En este resultado tenemos módulo, dirección y sentido

Nota: recuerde que en las cinco (5) últimas ecuaciones puede obviar con total tranquilidad el versor **i** y escribir por ejemplo $R_x = P_x + N_x + T_x + H_x$, lo que es totalmente correcto ya que todo está sobre el mismo eje x.

Por lo tanto de los cálculos anteriores se obtiene:

$\mathbf{T_x}$ = + 78,4 N **i**

Entonces al tener ahora el valor de las dos componentes vectoriales de **T** (que son $\mathbf{T_x}$ y $\mathbf{T_y}$) hemos resuelto el valor de ese vector:

Respuesta a la segunda pregunta:

$\boxed{\mathbf{T} = \mathbf{T_x} + \mathbf{T_y} = T_x\,\mathbf{i} + T_y\,\mathbf{j} = (+\,78{,}4\text{ N})\,\mathbf{i} + (0\text{ N})\,\mathbf{j}}$ o simplemente **T** = + 78,4 N **i**

Obsérvese que al escibir **T** = + 78,4 N **i**, tenemos todo los datos que necesitamos de la fuerza que era una de las incógnitas del problema: sabemos que no tiene componentes y, y sabemos que la componente x es positiva por lo tanto apunta “subiendo por el plano” (se puso explícitamente el signo “mas” delante del valor).

b) SEGUNDA FORMA… ¡Como es lo usual!...no decimos que sea incorrecta:

Para explicar qué es esto de “la forma usual” y qué precauciones se deben tener, solo resolveremos y encontraremos **T**, o sea solo lo aplicaremos a la segunda pregunta que nos hicieron (después como práctica Ud. podría hacerlo para responder la primera pregunta).

Sabemos que $\mathbf{T_y}$ = 0 N **j** (ver gráfico). Entonces vamos a focalizarnos en calcular $\mathbf{T_x}$.

Para calcular el valor de $\mathbf{T_x}$, vamos a usar ecuaciones donde aparecerán solo las componentes x de las fuerzas.

Como se trabajará solo con componentes que están sobre el mismo eje, lo “usual” es trabajar directamente con ecuaciones escalares prestándole atención a dos cosas: por un lado a los módulos de las componentes sobre ese eje y por otro lado a los sentidos de esas componentes (dato que muchas veces se obtiene del esquema). Aparecen entonces frases como “ese vector vale ´tanto´ y apunta subiendo por el plano...entonces es positivo” o “ese otro vale ´tanto´ y apunta bajando por el plano...entonces es negativo”. Pero esto es riesgoso para la comprensión porque NO existen los vectores negativos.

O también en esta forma, muy usada y en la que se disocia (separa) el módulo de la componente de su sentido de orientación, se cambia muchas veces la forma de escribir en el pizarrón o se inventan códigos de escritura que no están del todo bien (recuerde que en muchos libros lo encontrará también). Por ejemplo lo que era una “SUMA” de componentes vectoriales con sus respectivos signos, termina convirtiéndose en una SUMA y RESTA de módulos. Aparecen frases como “H_y más N menos P_y…es igual a cero” (vea el esquema de nuestro problema). Y esto también es riesgoso porque la definición de fuerza resultante sobre un eje dice “SUME los vectores en ese eje” (y acá está apareciendo la palabra “menos”).

Vamos a redactarlo como una especie de relato de lo que se suele “escuchar” (o leer) y vamos a ir mostrando lo que se suele hacer en el pizarrón (¡preste atención!..y vaya siguiendo el relato con el esquema de fuerzas de la página 22)

Esto se escucha: “*Px vale 22,7 N y apunta ´bajando por el plano´ entonces es negativo… Nx vale cero… Tx no sé cuanto vale pero apunta ´para arriba por el plano´ entonces es positivo… Hx vale 27,5 N y apunta ´para abajo por el plano´ entonces es negativo…y además sé que Rx vale 28,2 N y apunta ´para arriba por el plano´ entonces es positivo... Entonces: si aplico sumatoria de fuerzas me queda que: menos Px más Nx mas Tx menos Hx, va a ser igual a Rx …ahhh como Nx es cero entonces lo tacho.*” (esto es riesgoso también porque dice “aplico sumatoria”… ¡y hay sumas y restas!)

Lo que sigue se ve escrito en el pizarrón o en los libros (que está asociado a lo que “se escucha”…):

$R_x = - P_x + \cancel{N_x} + T_x - H_x$ (tachado el termino de Nx por valer cero newton)

Nótese en la expresión como los signos “salieron” fuera de las fuerzas (¡riesgoso!)
Se escucha ahora: “*mi incognita es T_x…entonces la despejo*”
Y, despejando de la ecuación anterior, se escribe en el pizarrón lo siguiente:

$T_x = R_x + P_x + H_x$

Se escucha ahora… “*reemplazo los valores de R_x, P_x y H_x y listo…calculo T_x*”

¿Qué tiene lo anterior de “poco” correcto? ¿O de riesgoso?...
¡Es que ahora nos asalta la duda ! Cuando tenga que reemplazar R_x, P_x y H_x… en la última expresión ¿qué signos le pongo?..por ejemplo: P_x…¿es positivo o negativo?…donde dice P_x en la ecuación anterior… ¿pongo “22,7 N” o “-22,7 N”?.

La duda aparece porque en realidad en la primera ecuación (¡la que tiene el tachado!) se están confundiendo los módulos con las componentes. Compare por favor los signos de esta ecuación $R_x = -P_x + N_x + T_x - H_x$ con los de la ecuación de la página 26 (dentro de “Nota: recuerde…) y vea como la diferencia de signos puede ser fuente de error.

Preste atención que se diluye la idea de “sumatoria” de fuerzas y aparece como una idea de “sumar y restar” vectores. Porque al haber sacado el signo del vector y haber cambiado ese signo que viene del “sentido” transformándolo en el signo algebraico de suma o resta…se están sumando y restando módulos y no componentes (reflexione sobre esto…se suman y restan módulos!!!).

El problema aparece simplemente por no haber escrito las barras de módulo en la primera ecuación. Recuerde que muchos libros o nosotros los profesores muchas veces hacemos esto de ignorar las barras de módulos…así que esté atento y si tiene dudas, pregunte que simbología se está usando y si lo que está escrito es “módulo” o “componente”.

La forma correcta de escribir la ecuación hubiera sido la siguiente:

$+ |\mathbf{R_x}| = - |\mathbf{P_x}| + |\mathbf{N_x}| + |\mathbf{T_x}| - |\mathbf{H_x}|$

Lo que despejándo nos lleva a : $+ |\mathbf{T_x}| = + |\mathbf{R_x}| + |\mathbf{P_x}| + |\mathbf{H_x}| + |\mathbf{N_x}|$

Nota: En este problema, de casualidad, todos estos signos (de la última ecuación) son positivos, pero pueden ser de cualquier tipo.

Y acá NO queda duda de que los datos que tengo que colocar son módulos (¡o sea que donde más arriba teníamos la duda sobre P_x teníamos que poner “22,7N” !).

De la ecuación anterior entonces encontramos el módulo de $\mathbf{T_x}$:

$+ |\mathbf{T_x}| = + |\mathbf{R_x}| + |\mathbf{P_x}| + |\mathbf{H_x}| + |\mathbf{N_x}|$
$|\mathbf{T_x}| = 28,2 \text{ N} + 22,7 \text{ N} + 27,5 \text{ N} + 0 \text{ N}$
$|\mathbf{T_x}| = 78,4 \text{ N}$

De acá entonces podemos “armar” lo que se nos pidió que era el vector **T** ya que ahora sabemos el módulo y el sentido de $\mathbf{T_x}$, y recordando que $\mathbf{T_y} = 0 \text{ N } \mathbf{j}$, quedaría entonces:

Respuesta:

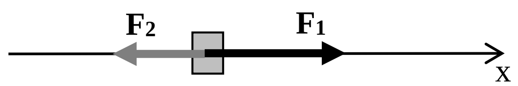
$\mathbf{T} = \mathbf{T_x} + \mathbf{T_y} = T_x\,\mathbf{i} + T_y\,\mathbf{j} = +|\mathbf{T_x}|\,\mathbf{i} + T_y\,\mathbf{j} = + (78,4 \text{ N})\,\mathbf{i} + (0 \text{ N})\,\mathbf{j} = (+78,4 \text{ N})\,\mathbf{i} + (0 \text{ N})\,\mathbf{j}$

O simplemente: **T** = + 78,4 N **i**

Le pedimos por favor que ahora se tome un tiempo para comparar con la forma que denominamos "correcta", para que pueda encontrar las sutiles diferencias (y algunos peligros también) de disociar módulos y sentidos "olvidándose" de escribir las barras de módulo. También, como quien practica, puede usar esta forma "usual" para calcular la fuerza **N**. Suerte. Si tiene dudas…consulte.

Otros de los problemas que genera esta forma de escritura "disociada" es el hecho de que si no conocemos el sentido de la incógnita (esto es…si desconocemos si "apunta" para los negativos o para los positivos), entonces debemos suponer nosotros un sentido, y por lo tanto un signo, y acompañar el módulo de la incógnita con ese signo propuesto. Esta suposición del sentido de la incógnita estará basada en el sentido común o en algunas características del problema, pero repetimos, es solo una suposición de sentido, si nuestra suposición es correcta o no lo sabremos al despejar el módulo de la incógnita: si al despejar el módulo este aparece con signo positivo, entonces nuestra suposición de sentido era correcta; pero si el módulo aparece con signo negativo (lo que es inexistente!!!), entonces la incógnita tiene sentido opuesto al propuesto por nosotros. Esto suele ser difícil de entender, por lo tanto veamos un miniejemplo:

Abajo se muestra un objeto que está sometido a "tres" fuerzas aplicadas reales: $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, y $\mathbf{F_3}$. De esas tres fuerzas solamente se conocen dos que son $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ (graficadas), de la tercera fuerza no se conoce ni su sentido ni su módulo, pero se sabe que está contenida en el eje x. Los módulos de las fuerzas son: $|\mathbf{F_1}| = 650$ N y $|\mathbf{F_2}| = 317$ N. Además se conoce la fuerza resultante **R** del sistema (suma de las TRES fuerzas aplicadas): su modulo vale $|\mathbf{R}| = 412$ N y sabemos que apunta hacia la derecha ("positiva"). Por simplicidad todas las fuerzas están sobre el mismo eje horizontal (eje x) que se propone positivo hacia la derecha



Como se resolvería con el método "usual" (hibrido):

Se escucharía: "*aplico sumatoria de fuerzas….R es igual a la suma de las fuerzas…R vale 412 N y es positiva porque apunta a la derecha … F1 que vale 650 N y apunta hacia la derecha entonces es positiva…F2 vale 317 N y apunta a la izquierda entonces es negativa…y tengo que sumar F3 que no sé cuánto vale ni para donde apunta….Entonces supongo y propongo que F3 apunta hacia la izquierda. Ahora aplico sumatoria de fuerzas y me queda que más R es igual a F1 menos F2 menos F3 (este último menos lo pongo en función de lo que acabo de suponer)*"

Lo que sigue se ve escrito en el pizarrón o en los libros (que está asociado a lo que "se escucha"…):

$R = F_1 - F_2 - F_3$

Recuerde que mejor debería escribirse: $+|\mathbf{R}| = +|\mathbf{F_1}| - |\mathbf{F_2}| - |\mathbf{F_3}|$ para que no haya confusión al despejar. Nótese que $|\mathbf{F_3}|$ tiene asociado el signo "menos", que implica un sentido "propuesto" para esa fuerza.

Despejando de acá F_3 se obtiene:

$|\mathbf{F_3}| = -|\mathbf{R}| + |\mathbf{F_1}| - |\mathbf{F_2}|$

$|\mathbf{F_3}| = -(412\ \text{N}) + (650\ \text{N}) - (317\ \text{N})$

$|\mathbf{F_3}| = -79$ N

Nótese que el resultado del módulo es un número (79 N) pero negativo, lo que es una incongruencia vectorial (no hay módulos negativos!!!). Esto significa que la fuerza $\mathbf{F_3}$ tiene un módulo de "79 N" y "apunta" para el lado contrario al que nosotros habíamos propuesto. Como nosotros propusimos que la fuerza era "hacia la izquierda", ahora descubrimos que la fuerza en realidad apunta hacia la derecha.

¡Hemos solucionado el problema! ¡Ya conocemos la fuerza $\mathbf{F_3}$ en su totalidad!: vale 79 N de intensidad y sentido hacia la derecha. Lo que significa: $\mathbf{F_3} = +\ 79\ \mathrm{N}\ \mathbf{i}$. Como desafío resuelva el problema haciendo la suposición de que la fuerza va hacia la derecha y observe lo que obtiene.

Para terminar…¿Cómo se hubiera resuelto este miniproblema por el método "Como debe hacerse"?

Planteamos la ecuación vectorial sumatoria de fuerzas: $\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3}$, despejo de esta ecuación vectorial el vector fuerza incógnita $\mathbf{F_3}$, y reemplazo los datos que los trato como los vectores que son. Entonces:

Estos son los datos:

$\mathbf{R} = +\ 412\ \mathrm{N}\ \mathbf{i}$ $\qquad$ $\mathbf{F_1} = +\ 650\ \mathrm{N}\ \mathbf{i}$ $\qquad$ $\mathbf{F_2} = -\ 317\ \mathrm{N}\ \mathbf{i}$

De $\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3}$ despejo $\mathbf{F_3}$ y obtengo: $\mathbf{F_3} = \mathbf{R} - \mathbf{F_1} - \mathbf{F_2}$, y remplazo los datos en esta nueva ecuación vectorial:

$$\mathbf{F_3} = \quad \mathbf{R} \quad - \quad \mathbf{F_1} \quad - \quad \mathbf{F_2}$$

$$\mathbf{F_3} = (+\ 412\ \mathrm{N}\ \mathbf{i}) - (+\ 650\ \mathrm{N}\ \mathbf{i}) - (-\ 317\ \mathrm{N}\ \mathbf{i})$$

Aplicando "regla de los signos" al sacar los paréntesis, nos queda:

$$\mathbf{F_3} = 412\ \mathrm{N}\ \mathbf{i} - 650\ \mathrm{N}\ \mathbf{i} + 317\ \mathrm{N}\ \mathbf{i}$$

$$\mathbf{F_3} = +\ 79\ \mathrm{N}\ \mathbf{i}$$

Y hemos solucionado el miniproblema aplicando "sumatoria" de fuerzas que es la definición de fuerza resultante, logrando encontrar "todo junto": ¡módulo, dirección y sentido de la incógnita!

Por favor observe las sutiles diferencias entre estas dos formas de resolver el miniproblema.

Acá termina este apunte del cursillo de vectores. Esperamos que haya sido de su agrado y que lo lleve como material de consulta permanente durante este año de trabajo.

Saludos…Gastón Tannuré.

PD: si encuentra algún error en el cuadernillo y/o quiere hacer una sugerencia, por favor hágalo a gastontannure@yahoo.com.ar

Gracias!!!