ÁLGEBRA DE FUNCIONES

DEFINICIÓN: Álgebra de Funciones

Sean **f** y **g** dos funciones cuyos respectivos dominios son $\text{dom } f$ y $\text{dom } g$

I. La función suma denotada $\mathbf{f+g}$ se define $f+g: (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

con $\text{dom }(f+g) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$

II. La función diferencia denotada $\mathbf{f-g}$ se define $f-g: (f-g)(x) = f(x) - g(x)$

con $\text{dom }(f-g) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$

III. La función producto denotada $\mathbf{f.g}$ se define $f.g: (f.g)(x) = f(x).g(x)$

con $\text{dom }(f.g) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$

VI. La función cociente denotada $\mathbf{f/g}$ se define $\frac{f}{g}: \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

con $\text{dom}\frac{f}{g} = \text{dom } f \cap \text{dom } g - \{x/g(x) = 0\}$

OBSERVACIÓN

Una función existe si su dominio es distinto del conjunto vacío.

FUNCIÓN COMPUESTA

DEFINICIÓN: Función Compuesta

Dadas dos funciones **f** y **g** , la función denotada por $f \circ g: (f \circ g)(x) = f(g(x))$, se llama **función compuesta de f con g** . El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los x del dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

En símbolos

$$f \circ g: (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\text{dom } f \circ g = \{x \in \text{dom } g \, / g(x) \in \text{dom} f\}$$

Se puede definir la composición de diversas funciones, una muy importante para el trabajo en temas posteriores es $g \circ f$, por lo que escribiremos su definición a continuación.

OBSERVACIÓN

En general, las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ son diferentes.

FUNCION INVERSA

DEFINICIÓN: Función Inversa

La función **g** es la **función inversa** de la función **f** sí y sólo sí se cumple que:

$$\begin{cases} \forall x \in \text{dom } g, & (f \circ g)(x) = x \\ & \text{y} \\ \forall x \in \text{dom } f, & (g \circ f)(x) = x \end{cases}$$

Notación

Si g es la función inversa de f se simboliza f^{-1} y se lee " inversa de f ".

Nota importante

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

Observaciones

1) Si g es la función inversa de f, entonces f es la función inversa de g.

2) $\text{dom } f^{-1} = \text{rgo } f$ y $\text{rgo } f^{-1} = \text{dom } f$.

3) Si una función tiene función inversa, es **ÚNICA.**

DEFINICIÓN: Función Inyectiva

Una función f es **inyectiva** si y solo si para todo x_1 y x_2 del dominio de f si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.

En símbolos:

$$f \text{ es una función } \textbf{inyectiva} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \text{dom } f,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

¿Siempre hay que usar la definición dada para justificar la inyectividad?

No necesariamente.

Criterio de la recta horizontal

"Una función es inyectiva si y solo si toda recta horizontal corta a su gráfica a lo sumo en un punto"

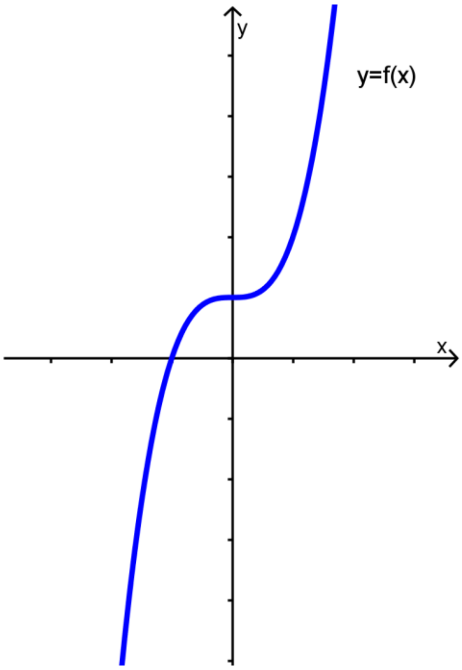
¿Qué significa a lo sumo en un punto?

Significa que toda recta horizontal, o intersecta a la gráfica de una función inyectiva en un solo punto o en ninguno.

Este Criterio, que surge de la definición de función inyectiva, proporciona una herramienta geométrica (visual) para determinar si una función es o no inyectiva.

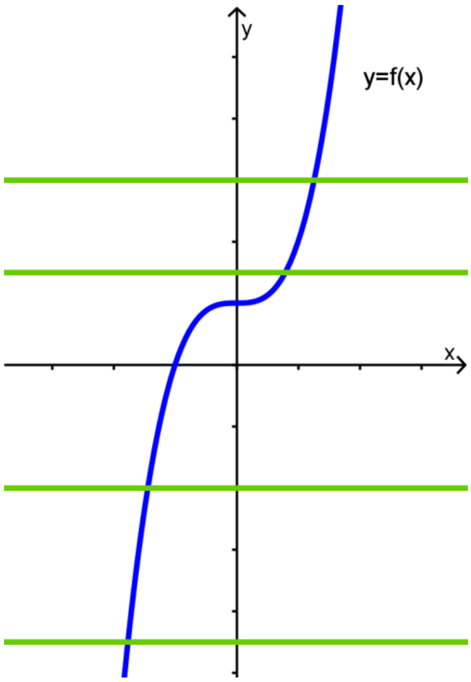
Ejemplos gráficos

a)



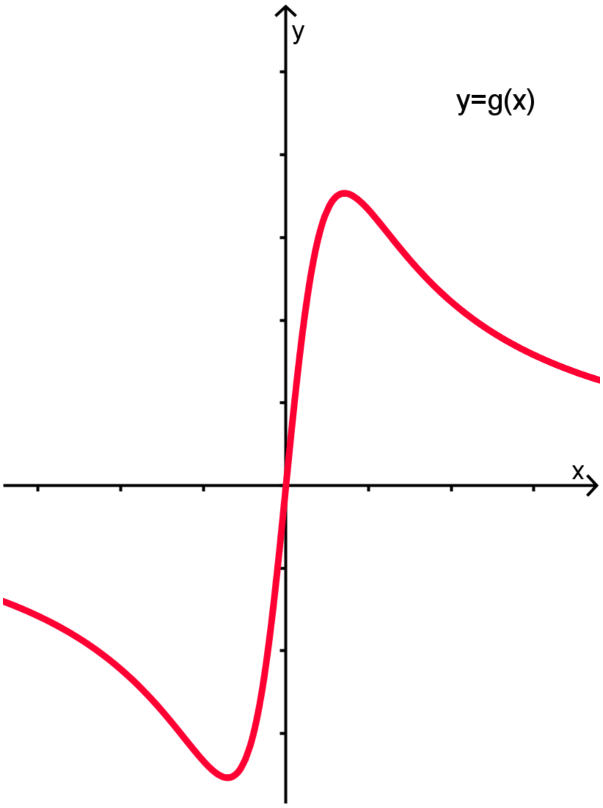
¿La función f es inyectiva?

Para responder tengamos en cuenta que como conocemos su gráfica, utilizaremos el Criterio de la recta horizontal.



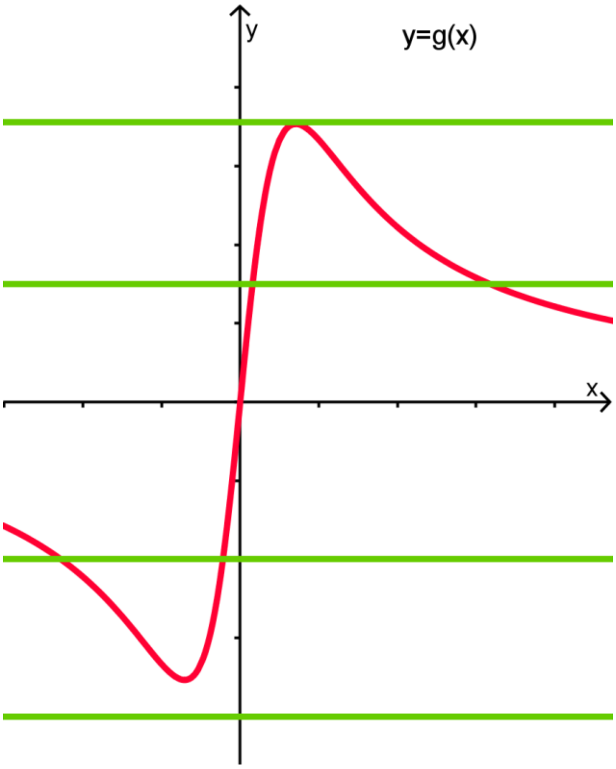
Trazamos rectas horizontales y verificamos que tales rectas (y cualquier otra recta horizontal) cortan a la gráfica de f en un solo punto, entonces por el Criterio de la recta horizontal, concluimos que **f es inyectiva**.

b)



¿La función g es inyectiva?

Como la gráfica de g está dada, para responder usaremos el Criterio de la recta horizontal.



Trazamos rectas horizontales y observamos que dos de las rectas que trazamos cortan a la gráfica de g en más de un punto. Por el Criterio de la recta horizontal, concluimos que **g no es inyectiva**.

Nota: Basta que una recta horizontal intersecte a la gráfica de una función en más de un punto, para concluir que la función no es inyectiva.

TEOREMA: Existencia de la función inversa

Una función f **admite función inversa** sí y sólo sí f es inyectiva.

Observaciones (que resultan del teorema anterior)**:**

- Si f es inyectiva, entonces f admite función inversa.
- Si f no es inyectiva, entonces f no admite función inversa.

Obtención de la función inversa de una función inyectiva

1°) De la expresión $y = f(x)$ expresamos **x** en términos de **y**, obteniendo $x = f^{-1}(y)$.

2°) Intercambiamos **x** por **y** e **y** por **x** y así llegamos a $y = f^{-1}(x)$.

RESULTADO: Propiedad reflexiva de la inversa

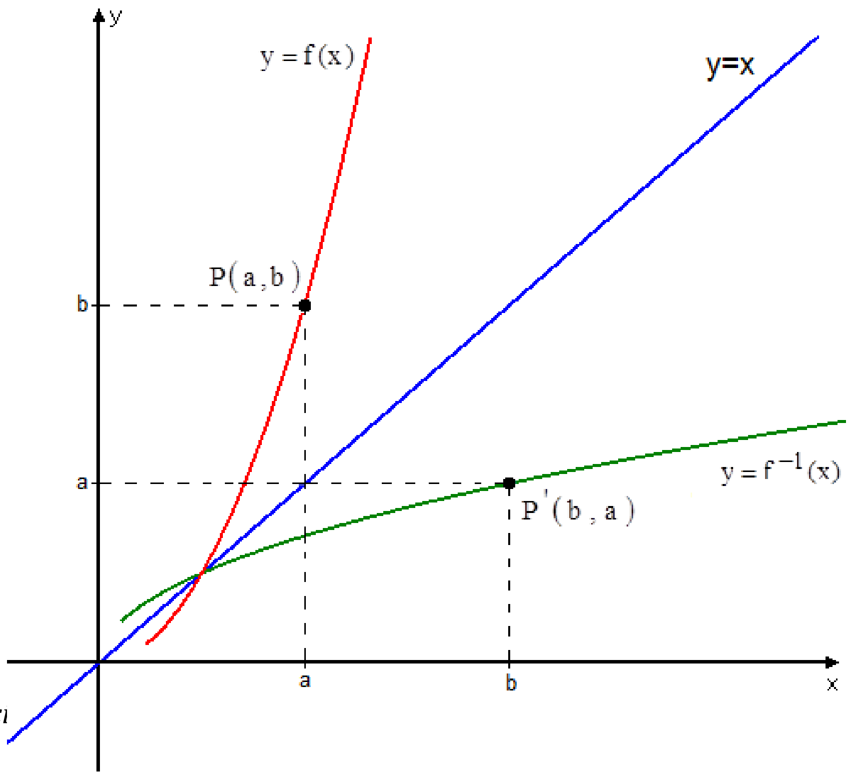
La gráfica de f^{-1} es simétrica a la gráfica de f respecto de la primera bisectriz $(y = x)$.

En efecto:

$$(a, b) \in f \quad \Leftrightarrow \quad (b, a) \in f^{-1}$$

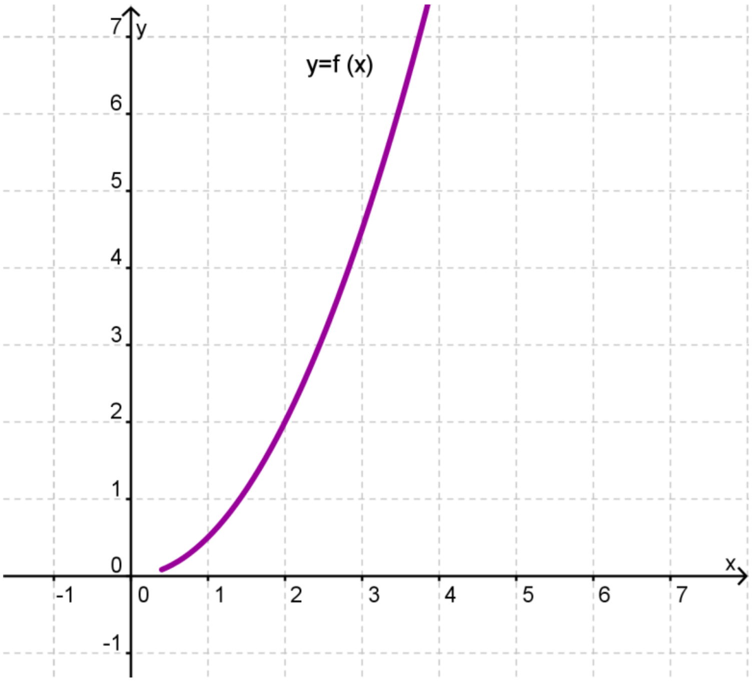
Desde el punto de vista gráfico:

$$P(a, b) \in \text{grafica de } f \quad \Leftrightarrow \quad P'(b, a) \in \text{grafica de } f^{-1}$$

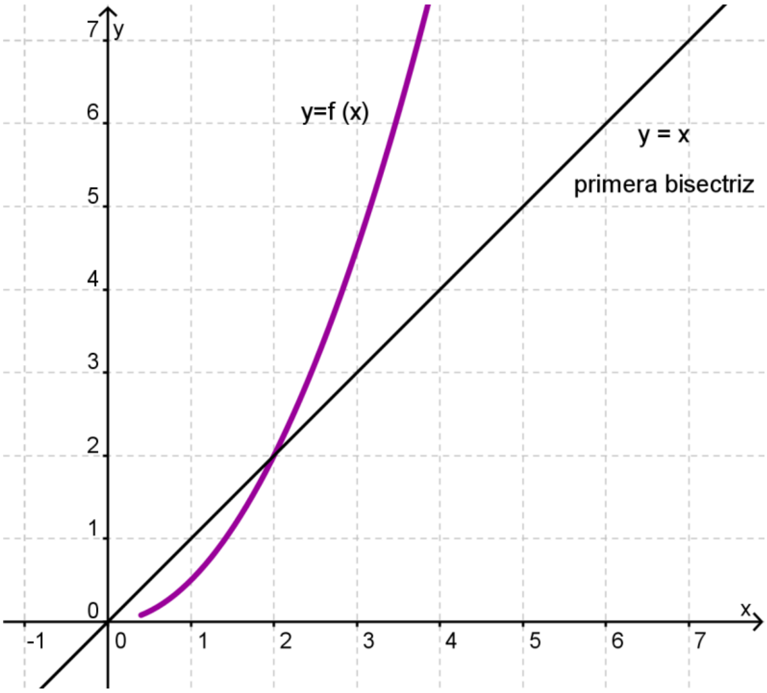


Observación

Conociendo la gráfica de f, ¿cómo obtenemos la gráfica de su función inversa f^{-1}?

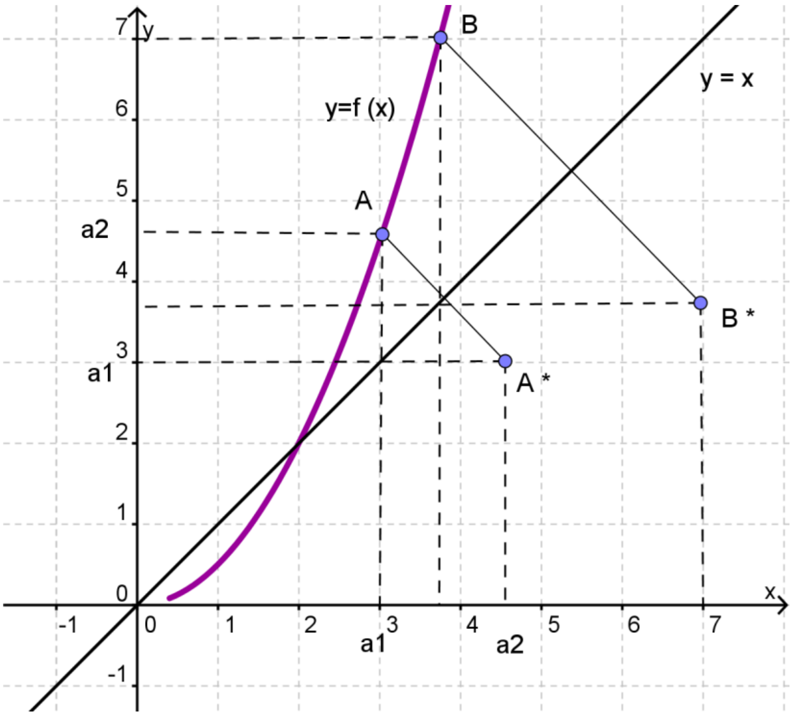


Trazamos la primera bisectriz:



Tazamos rectas perpendiculares a la primera bisectriz hasta intersectar la gráfica de f.

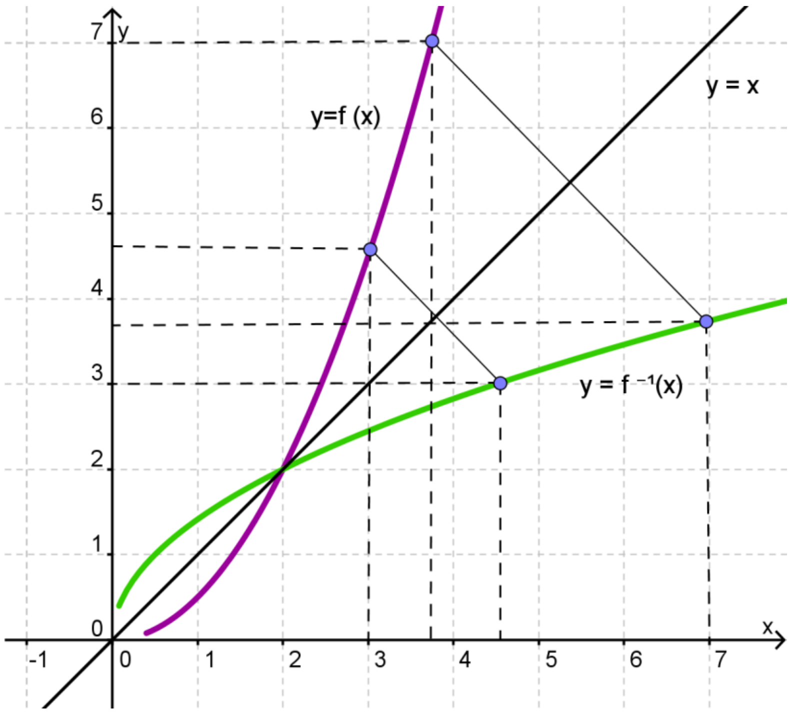
Los puntos simétricos de dichos puntos de intersección respecto de la primera bisectriz, serán puntos de la gráfica de la función inversa f^{-1}.



Observemos que:

Como el punto $A(a_1,a_2)$ pertenece a la gráfica de f entonces su simétrico respecto de la primera bisectriz $A^*(a_2,a_1)$ pertenece a la gráfica de f^{-1}.

Y si lo seguimos haciendo con otros puntos, podemos esbozar la gráfica de f^{-1}.

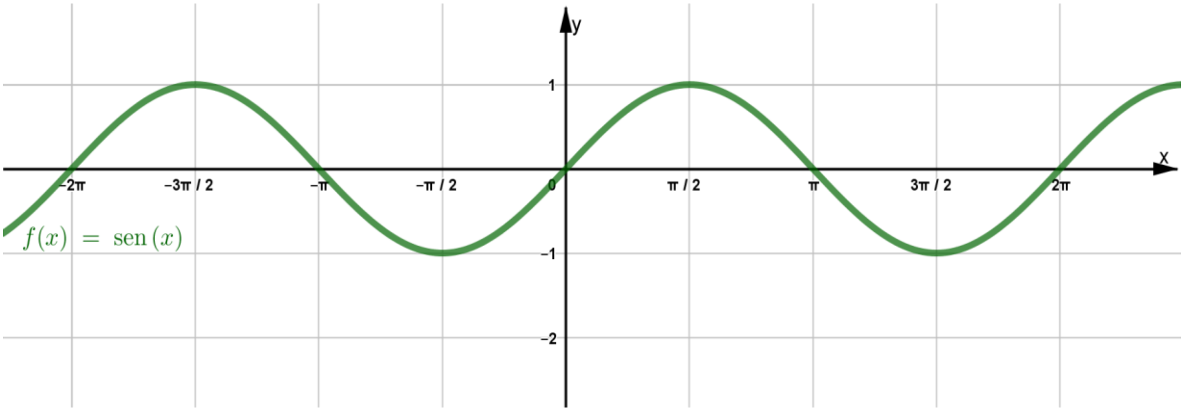


Nota Importante:

La gráfica de f^{-1} la obtendremos como imagen especular de la gráfica de f respecto de la recta de ecuación $y = x$, teniendo en cuenta la Propiedad reflexiva de la inversa.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas no son inyectivas porque son periódicas y por lo tanto no admiten funciones inversas. Como ejemplo consideremos la función seno:

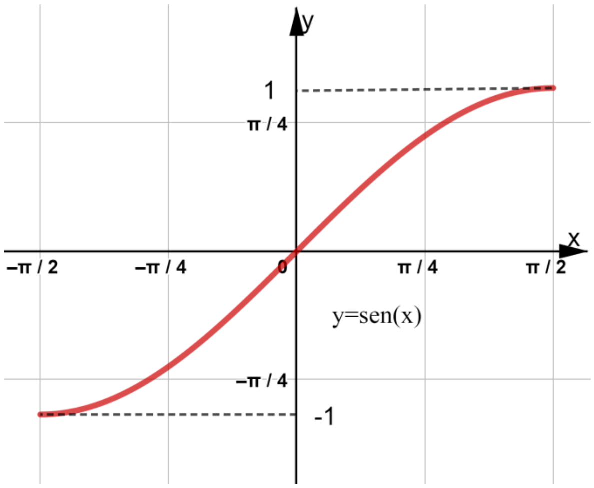


Pero restringiendo adecuadamente sus dominios se obtienen nuevas funciones que sí tienen funciones inversas.

Sen: $y = \operatorname{sen} x \,, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Es conveniente marcar en el gráfico que sigue, en el eje x los valores $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ y el 1 en el eje y.

Figura 1



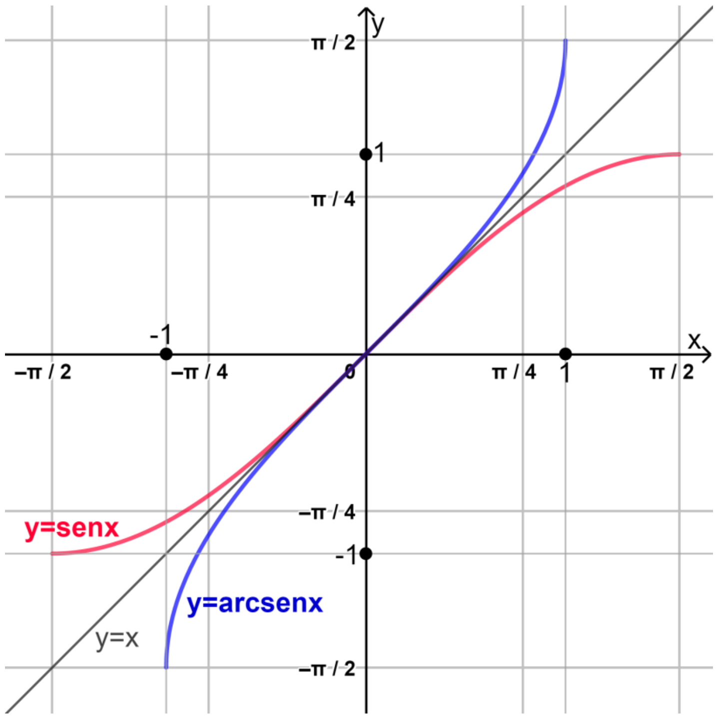
La función **Sen** es inyectiva por el criterio de la recta horizontal y por lo tanto admite función inversa.

La función inversa de la función Sen se simboliza $\mathbf{sen^{-1}}$ o **arc sen**.

Su gráfica la obtenemos por reflexión de la función **Sen** en la primera bisectriz. En la práctica no se hace la distinción usando la letra mayúscula para la función seno pero siempre se debe tener presente que las **funciones trigonométricas inversas provienen de funciones trigonométricas con dominio restringido**

$$f : f(x) = \text{sen } x\,, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad f^{-1} : f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$$

Tener en cuenta la figura 1 de la página anterior para el gráfico



$$\text{dom sen}^{-1} = \text{rgo sen} = [-1,1]$$

$$\text{rgo sen}^{-1} = \text{dom sen} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Definición, dominio, gráfica y rango de las funciones trigonométricas inversas

Definición	Dominio	Rango
$\text{arcsen}: y = \text{arcsen}x \Leftrightarrow x = \text{sen}y,\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\text{arccos}: y = \text{arccos}x \Leftrightarrow x = \cos y,\ y \in [0,\pi]$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\text{arctg}: y = \text{arctg}x \Leftrightarrow x = \text{tg}y,\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	IR	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\text{arc}\cot g: y = \text{arc}\cot g\,x \Leftrightarrow x = \cot g\,y,\ y \in (0,\pi)$	IR	$(0,\pi)$
$\text{arcsec}: y = \text{arcsec}x \Leftrightarrow x = \text{sec}y, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
$\text{arccosec}: y = \text{arccosec}x \Leftrightarrow x = \text{cosec}y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Las gráficas se encuentran en las páginas 59 y 60 de la Guía de Trabajos Prácticos 2022.