

# 《数学的天空》小组讨论题一

第十组：左翊昆，阿尔乔姆，王宇恒，徐惠东。

2022.3.1

## 目录

- [目录](#)
- [题目重述](#)
- [建模与求解](#)
- [思考与拓展](#)
- [分工与合作](#)

## 题目重述

CCTV 贺岁杯围棋赛的选手是中日韩三国各一位顶尖棋手。比赛共 3 轮，每一轮下一盘棋。第一轮参赛选手由抽签决定，胜者进入第三轮即决赛，而负者与第一轮轮空者进入第二轮；第二轮的负者获得第三名，而胜者进入决赛。2016 年的将近分配如下：冠军 80 万，亚军 40 万，季军 20 万。2016 年的参赛者为世界三冠王、中国第一人柯洁，日本新人王一力辽，世界十四冠王、韩国第二人李世石。柯洁在第一盘与一力辽的比赛中死里逃生而饱受批评，但他在赛后接收采访时淡然回答，第一盘棋不重要，言下之意即使第一盘输了，他仍然可以连胜后两盘夺冠。请问柯洁的判断是否科学合理？

我们经过初步思考，认为这道题目 **对问题的理解** 尤其关键。如果理解为这道题是在问 **连胜后两盘夺冠** 这句话是否科学合理的话，显然，在这种双败赛的赛制下，无论是谁 **赢得两场比赛** 都将获得冠军，那未免太过于简单且忽略了题目的许多重要信息。

数学建模是解决数学问题的核心与关键。因此，经过小组讨论后我们提出以柯洁 **在第一盘棋获胜的前提下最终获得的奖金期望** 和 **在第一盘棋落败的前提下最终获得的奖金期望** 的大小比较作为判准，来判断柯洁的判断是否科学合理。如果前者始终 **大于** 后者，则柯洁有马后炮的嫌疑，即判断不合理。反之合理。

经过如下建模与求解，我们小组最终认为柯洁的话不科学不合理。

## 建模与求解

设冠军、亚军和季军奖金分别为  $a_1, a_2, a_3$  万人民币，在本题中有：

$$a_1 = 80, a_2 = 40, a_3 = 20$$

不妨以选手中文名大写首字母来表示不同选手，即用  $K$  来表示柯洁，用  $Y$  来表示一力辽，用  $L$  来表示李世石。

由于过往胜率未知，我们用  $p_{ij}$  来表示  $i$  对  $j$  的胜率大小，显然  $0 \leq p_{ij} \leq 1$ 。例如柯洁对一力辽的胜率是  $p_{KY}$ ，一力辽对柯洁的胜率是  $p_{YK}$ ，显然有  $p_{KY} + p_{YK} = 1$ 。

则在  $K$  第一局胜  $Y$  的情况下， $K$  不可能获得季军， $K$  获得亚军当且仅当  $K$  在决胜局输给  $Y$  和  $L$  的胜出者， $K$  获得冠军当且仅当  $K$  在决胜局赢了  $Y$  和  $L$  的胜出者。

我们记柯洁在第一盘棋获胜的前提下最终获得的奖金期望为  $W_T$ ，有

$$\begin{aligned} W_T &= a_3 \times 0 + a_2 \times (p_{YL} \times p_{YK} + p_{LY} \times p_{LK}) + a_1 \times (p_{YL} \times p_{KY} + p_{LY} \times p_{KL}) \\ &= 40 \times ((1 - p_{LY}) \times p_{YK} + p_{LY} \times (1 - p_{KL})) + 80 \times ((1 - p_{LY}) \times (1 - p_{YK}) + p_{LY} \times p_{KL}) \\ &= 40 \times (2 + p_{KL} \times p_{LY} - p_{LY} - p_{YK} + p_{LY} \times p_{YK}) \end{aligned}$$

在  $K$  第一局输  $Y$  的情况下， $K$  获得季军当且仅当  $K$  再输给  $L$ ， $K$  获得亚军当且仅当  $K$  赢了  $L$  并再输了  $Y$ ， $K$  获得冠军当且仅当  $K$  之后连赢两盘。

我们记柯洁在第一盘棋落败的前提下最终获得的奖金期望为  $W_F$ ，有

$$\begin{aligned}W_F &= a_3 \times p_{LK} + a_2 \times p_{KL} \times p_{YK} + a_3 \times p_{KL} \times p_{KY} \\&= 20 \times (1 - p_{KL}) + 40 \times p_{KL} \times p_{YK} + 80 \times p_{KL} \times (1 - p_{YK}) \\&= 20 \times (1 + 3 \times p_{KL} - 2 \times p_{YK} \times p_{KL})\end{aligned}$$

因此，我们记前者和后者的差为  $\Delta W$ ，有

$$\begin{aligned}\Delta W &= W_T - W_F \\&= 20 \times (4 + 2 \times p_{KL} \times p_{LY} - 2 \times p_{LY} - 2 \times p_{YK} + 2 \times p_{LY} \times p_{YK}) - 20 \times (1 + 3 \times p_{KL} - 2 \times p_{YK} \times p_{KL}) \\&= 20 \times (3 - 2 \times p_{LY} - 2 \times p_{YK} - 3 \times p_{KL} + 2 \times p_{LY} \times p_{YK} + 2 \times p_{YK} \times p_{KL} + 2 \times p_{KL} \times p_{LY}) \\&= 20 \times ((1 - p_{KL}) + 2 \times (1 - p_{LY} - p_{YK} - p_{KL} + p_{LY} \times p_{YK} + p_{YK} \times p_{KL} + p_{KL} \times p_{LY})) \\&= 20 \times ((1 - p_{KL}) - 2 \times ((p_{LY} - 1) \times (p_{YK} - 1) \times (p_{KL} - 1)) + 2 \times p_{LY} \times p_{YK} \times p_{KL}) \geq 0\end{aligned}$$

因此，我们证明出，无论柯洁、一力辽和李世石相互的胜率是多少，柯洁在第一局胜的前提下获得的奖金期望总是不低于在第一局输的前提下获得的奖金期望，所以柯洁的话没有科学依据。

## 思考与拓展

这应该是个开放式的问题，每个人对 **科学合理** 的理解不同会造成这道题的建模求解过程的巨大差异。我们小组以柯洁的第一局胜负对奖金期望的影响为切入点，通过建模与数学证明的方式，求证了第一局的重要性，从而说明柯洁的不是科学合理的。这也同时引发了我们对过往胜率如何计算、不同胜率对奖金期望的影响程度等问题的进一步思考。

## 分工与合作

第十组 **左翊昆** 同学提供了完整思路，**徐惠东** 主要撰写了论文，**王恒宇** 和 **阿尔乔姆** 参与了思路讨论与论文完善，感谢第十组全体同学的付出。