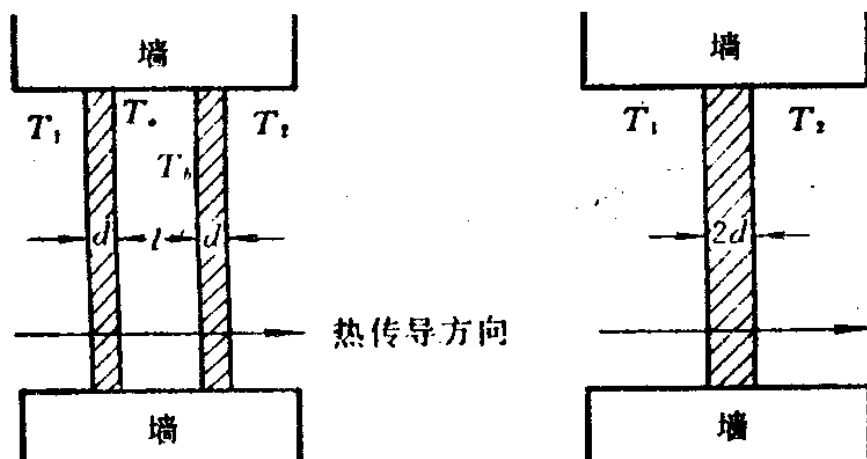


## 双层玻璃的功效

北方城镇的有些建筑物的窗户是双层的，即窗户上装两层厚度为 $d$ 的玻璃夹着一层厚度为 $l$ 的空气，如左图所示，据说这样做是为了保暖，即减少室内向室外的热量流失。

我们要建立一个模型来描述热量通过窗户的热传导（即流失）过程，并将双层玻璃窗与用同样多材料做成的单层玻璃窗（如右图，玻璃厚度为 $2d$ ）的热量传导进行对比，对双层玻璃窗能够减少多少热量损失给出定量分析结果。



### 一、模型假设

- 1、热量的传播过程只有传导，没有对流。即假定窗户的密封性能很好，两层玻璃之间的空气是不流动的；
- 2、室内温度 $T_1$ 和室外温度 $T_2$ 保持不变，热传导过程已处于稳定状态，即沿热传导方向，单位时间通过单位面积的热量是常数；
- 3、玻璃材料均匀，热传导系数是常数。

## 二、符号说明

$T_1$ ——室内温度  
 $T_2$ ——室外温度  
 $d$ ——单层玻璃厚度  
 $l$ ——两层玻璃之间的空气厚度  
 $T_a$ ——内层玻璃的外侧温度  
 $T_b$ ——外层玻璃的内侧温度  
 $k$ ——热传导系数  
 $Q$ ——热量损失

## 三、模型建立与求解

由物理学知道，在上述假设下，热传导过程遵从下面的物理规律：

厚度为  $d$  的均匀介质，两侧温度差为  $\Delta T$ ，则单位时间由温度高的一侧向温度低的一侧通过单位面积的热量为  $Q$ ，与  $\Delta T$  成正比，与  $d$  成反比，即

$$Q = k \frac{\Delta T}{d} \quad (1)$$

其中  $k$  为热传导系数。

### 1、双层玻璃的热量流失

记双层窗内窗玻璃的外侧温度为  $T_a$ ，外层玻璃的内侧温度为  $T_b$ ，玻璃的热传导系数为  $k_1$ ，空气的热传导系数为  $k_2$ ，由（1）式单位时间单位面积的热量传导（热量流失）为：

$$Q = k_1 \frac{T_1 - T_a}{d} = k_2 \frac{T_a - T_b}{l} = k_1 \frac{T_b - T_2}{d} \quad (2)$$

由  $Q = k_1 \frac{T_1 - T_a}{d}$  及  $Q = k_1 \frac{T_b - T_2}{d}$  可得  $T_a - T_b = (T_1 - T_2) - 2 \frac{Qd}{k_1}$

再代入  $Q = k_2 \frac{T_a - T_b}{d}$  就将（2）中  $T_a$ 、 $T_b$  消去，变形可得：

$$Q = \frac{k_1(T_1 - T_2)}{d(s+2)}, \quad s = h \frac{k_1}{k_2}, \quad h = \frac{l}{d} \quad (3)$$

## 2、单层玻璃的热量流失

对于厚度为  $2d$  的单层玻璃窗户，容易写出热量流失为：

$$Q' = k_1 \frac{T_1 - T_2}{2d} \quad (4)$$

## 3、单层玻璃窗和双层玻璃窗热量流失比较

比较 (3) (4) 有：

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{2}{s+2} \quad (5)$$

显然， $Q < Q'$ 。

为了获得更具体的结果，我们需要  $k_1, k_2$  的数据，从有关资料可知，不流通、干燥空气的热传导系数  $k_2 = 2.5 \times 10^{-4}$ （焦耳/厘米.秒.度），常用玻璃的热传导系数  $k_1 = 4 \times 10^{-3} \sim 8 \times 10^{-3}$ （焦耳/厘米.秒.度），于是

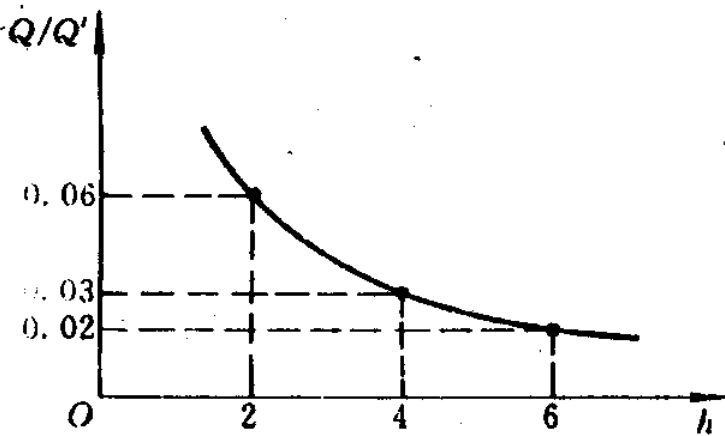
$$\frac{k_1}{k_2} = 16 \sim 32$$

在分析双层玻璃窗比单层玻璃窗可减少多少热量损失时，我们作最保守的估计，即取  $\frac{k_1}{k_2} = 16$ ，由 (3) (5) 可得：

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{1}{8h+1} \quad h = \frac{l}{d} \quad (6)$$

## 4、模型讨论

比值  $Q/Q'$  反映了双层玻璃窗在减少热量损失上的功效，它只与  $h = l/d$  有关，下图给出了  $Q/Q' \sim h$  的曲线，当  $h$  由 0 增加时， $Q/Q'$  迅速下降，而当  $h$  超过一定值（比如  $h > 4$ ）后  $Q/Q'$  下降缓慢，可见  $h$  不宜选得过大。



#### 四、模型的应用

这个模型具有一定的应用价值。制作双层玻璃窗虽然工艺复杂会增加一些费用，但它减少的热量损失却是相当可观的。通常，建筑规范要求  $h = l/d \approx 4$ 。按照这个模型， $Q/Q' \approx 3\%$ ，即双层玻璃窗比用同样多的玻璃材料制成的单层窗节约热量 97% 左右。不难发现，之所以有如此高的功效主要是由于层间空气的极低的热传导系数  $k_2$ ，而这要求空气是干燥、不流通的。作为模型假设的这个条件在实际环境下当然不可能完全满足，所以实际上双层玻璃窗的功效会比上述结果差一些。