

椅子能在不平的地面上放稳吗？

把椅子往不平的地面上一放，通常只有三只脚着地，放不稳，然而只要稍挪动几次，就可以四脚着地，放稳了。下面用数学语言证明。

一、模型假设

对椅子和地面都要作一些必要的假设：

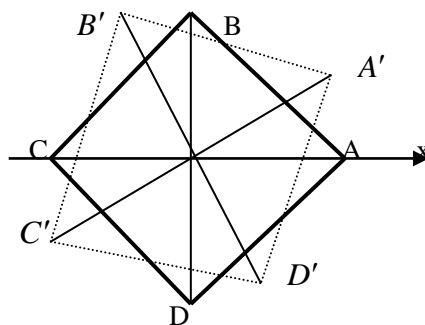
- 1、椅子四条腿一样长，椅脚与地面接触可视为一个点，四脚的连线呈正方形。
- 2、地面高度是连续变化的，沿任何方向都不会出现间断（没有像台阶那样的情况），即地面可视为数学上的连续曲面。
- 3、对于椅脚的间距和椅脚的长度而言，地面是相对平坦的，使椅子在任何位置至少有三只脚同时着地。

二、模型建立

中心问题是数学语言表示四只脚同时着地的条件、结论。

首先用变量表示椅子的位置，由于椅脚的连线呈正方形，以中心为对称点，正方形绕中心的旋转正好代表了椅子的位置的改变，于是可以用旋转角度 θ 这一变量来表示椅子的位置。

其次要把椅脚着地用数学符号表示出来，如果用某个变量表示椅



脚与地面的竖直距离，当这个距离为 0 时，表示椅脚着地了。椅子要挪动位置说明这个距离是位置变量的函数。

由于正方形的中心对称性，只要设两个距离函数就行了，记 A、C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$ ，B、D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$ ，显然 $f(\theta)、g(\theta) \geq 0$ ，由假设 2 知 $f、g$ 都是连续函数，再由假设 3 知 $f(\theta)、g(\theta)$ 至少有一个为 0。当 $\theta=0$ 时，不妨设 $g(\theta)=0, f(\theta)>0$ ，这样改变椅子的位置使四只脚同时着地，就归结为如下命题：

命题 已知 $f(\theta)、g(\theta)$ 是 θ 的连续函数，对任意 θ ， $f(\theta)*g(\theta)=0$ ，且 $g(0)=0, f(0)>0$ ，则存在 θ_0 ，使 $g(\theta_0)=f(\theta_0)=0$ 。

三、模型求解

将椅子旋转 90° ，对角线 AC 和 BD 互换，由 $g(0)=0, f(0)>0$ 可知 $g(\pi/2)>0, f(\pi/2)=0$ 。令 $h(\theta)=g(\theta)-f(\theta)$ ，则 $h(0)>0, h(\pi/2)<0$ ，由 $f、g$ 的连续性知 h 也是连续函数，由零点定理，必存在 $\theta_0(0<\theta_0<\pi/2)$ 使 $h(\theta_0)=0$ ， $g(\theta_0)=f(\theta_0)$ ，由 $g(\theta_0)*f(\theta_0)=0$ ，所以 $g(\theta_0)=f(\theta_0)=0$ 。

四、评 注

模型巧妙在于用一元变量 θ 表示椅子的位置，用 θ 的两个函数表示椅子四脚与地面的距离。利用正方形的中心对称性及旋转 90° 并不是本质的，同学们可以考虑四脚呈长方形的情形。