Université de Bretagne Occidentale
FACULTÉ DES SCIENCES & TECHNIQUES

Rapport d'Ouverture Master

OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE DE MARKOWITZ ET ÉTUDE DU MARCHÉ BOURSIER BULGARIEN

L3 MIASHS 2022-2023

Léa MONTESTIER 22206306

Ming Wei ANG 22106585

TUTEUR :

AILLIOT Piere

ROUOT Jérémy

Table of Contents

<u>Optimisation de portefeuille de Markowitz et étude du marché boursier Bulgarien</u>

Introduction :

La théorie moderne du portefeuille est une théorie financière développée en 1952 par Harry Markowitz. Harry Max Markowitz est un économiste américain d'origine polonaise. Il est né à Chicago en 1927. Il a reçu le prix de théorie John-Von-Neumann en 1989 et est lauréat du prix Nobel d'économie en 1990, grâce au développement de la théorie moderne du portefeuille.

Cette théorie expose comment des investisseurs vont allouer leurs ressources financières dans chaque actif, c'est à dire la part de leurs ressources qu'ils vont allouer à chaque actif $(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{A_3}, \ldots)$ afin d'avoir un rendement maximal tout en minimisant le risque du portefeuille (=en minimisant le risque de perte de capital). Avant d'allouer leurs ressources, les investisseurs vont réfléchir au rendement désiré $(\boldsymbol{\mu_0})$. Sur le plan technique, il s'agit d'un problème d'optimisation quadratique appliqué au domaine de la finance.

I. Modélisation mathématique de la théorie du portefeuille

Mathématiquement, nous pouvons modéliser ce problème de la façon suivante :

$$\boldsymbol{Min\, Z \Rightarrow Min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{A_{ij}} \Rightarrow Min\, x^T \sum x} \quad [1]$$

Avec les contraintes **:**

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1}$$

$$\boldsymbol{x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \ldots + x_n \mu_n = \mu_0 \; ou \geqslant \mu_0 \Rightarrow \bar{P}^T \cdot x = \mu_0 \, ou \geqslant \mu_0}$$

$\boldsymbol{Z}$ est le risque du portefeuille

$\boldsymbol{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ est la part de la ressource financière allouée à chaque actif $(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_n})$

$\sum$ est la covariance des rendements.

$\boldsymbol{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) = P}$ est la variation moyenne des rendements des n actifs

La première contrainte signifie que la somme des parts de la ressource alloué à chaque actif doit être de 100%, autrement dit la totalité de la ressource est utilisée.

La deuxième contrainte signifie que le retour d'investissement doit être égal au rendement désiré si on choisit dans le problème $\bar{P}^T \cdot x = \mu_0$ ou supérieur au rendement désiré si on choisit dans le problème $\bar{P}^T \cdot x \geqslant \mu_0$.

On peut également rajouter une autre contrainte, $x_i \geqslant 0, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$ si on souhaite qu'i n'y ait pas de ventes à découvert sinon on laisse $x_i \in \mathbb{R}$ si on autorise les ventes à découverts.

Pour résoudre ce problème d'optimisation sous contrainte, on peut utiliser le Lagrangien :

$$\mathcal{L}\left(\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \lambda_1, \lambda_2\right) = x^T \sum x + \lambda_1 \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \lambda_2 \left(\mu_0 - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right)$$

On calcule les dérivées partielles du Lagrangien : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0$et on trouve une solution optimale $\left(\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right), \lambda_1^*, \lambda_2^*\right)$ où $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ est le portefeuille optimal.

$\lambda_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_0}$ est la mesure du risque marginal du portefeuille, c'est à dire de combien va augmenter le risque du portefeuille si on augmente d'une unité le rendement souhaité μ_0.

II. Applications simples de ce modèle

Supposons qu'il n'existe que 2 actifs dans un marché. L'Actif 0 (en bleu) a un taux de réussite 100% et actif 1 (en rouge) a un taux de réussite 0% (figure 1.1).

Premièrement, nous calculons les rendements logarithmique (taux de rendements) avec la formule $\ln\left(1 + \frac{\left(P_t - P_{t-1}\right)}{P_{t-1}}\right)$. D'après les taux de rendements, nous pouvons calculer les moyennes $\bar{p}$ (rendements d'actif) et les écarts-types (volatilité d'actif). Ensuite, nous générons des portefeuilles de l'actif 0 et l'actif 1 avec des pondérations différentes. Pour chaque portefeuille, nous pouvons calculer la moyenne du portefeuille avec la formule $\bar{P}^{\square} \cdot x$où x sont des pondérations du portefeuille, son écart-type $x^T \sum x$ où Σ est la matrice de covariance des actifs, et son Sharpe Ratio = $\frac{\bar{P}^{\square} \cdot x}{x^T \sum x}$. En testant plusieurs portefeuilles, nous pouvons simuler le graphe du portefeuille de Markowitz (Graphe Interactive 1.2) .

Puis, nous pouvons trouver le portefeuille avec volatilité minimum (figure 1.3 et Graphe Interactive 1.3.1) et le portefeuille en Sharpe Ratio maximum (figure 1.4 et Graphe Interactive 1.4.1) avec python. Le Sharpe Ratio du portefeuille avec volatilité minimum est 0,0011, Le rendement du portefeuille avec volatilité minimum est 0,0002 et L'écart-type du portefeuille avec volatilité minimum est 0,2027. En revanche, la valeur de Sharpe ratio maximum dans l'échantillon du portefeuille est 2,2151, le rendement du portefeuille en Sharpe ratio maximum est 0,4620 et la volatilité du portefeuille en Sharpe ratio maximum est 0,2085.

Entrons dans le vif du sujet, pour résoudre le problème [1], nous utilisons l'algorithme de SciPy qui est une bibliothèque Python pour calculer des mathématiques scientifiques ou des problèmes scientifiques. Lorsque nous attribuons 50% de pondération pour chacun des actifs, nous obtenons à l'aide de SciPy les résultats suivants. Le rendement du portefeuille est 0% et l'écart-type du portefeuille est 20,27% (figure 1.5 et Graphe Interactive1.5.1). Puis, lorsque nous attribuons 100% du pondération pour l'actif 0, le rendement et la volatilité du portefeuille sont 46,20% et 20,85% (figure 1.6 et Graphe Interactive 1.6.1).

D’après ces résultats, nous avons vérifié de deux façons différentes que les résultats sont corrects. C’est à dire que nous avons trouvé que le portefeuille avec une volatilité minimale est infiniment proche du portefeuille avec le risque minimal. Mais aussi que le portefeuille optimal est infiniment proche du Sharpe Ratio maximal. Finalement, nous pouvons tracer la courbe d’efficient frontière avec ces deux points et calculer les portefeuilles optimals sur la courbe (Graphe Interactive 1.7).

III. Application du modèle du portefeuille au marché boursier Bulgare

Nous avons appliqué ce problème d’optimisation du portefeuille au marché boursier Bulgare en se consacrant aux stocks de prix des entreprises Bulgares de Janvier 2013 à Décembre 2016. Dans notre analyse, nous avons seulement pris en compte 40 entreprises sur les 50 de départ (les 10 autres entreprises sont exclues de l’analyse).

Interprétations des rendements :

Premièrement, nous avons affiché un tableau montrant les 10 entreprises offrant un rendement le plus élevé et les 10 entreprises offrant un rendement le plus faible. Grâce à ce tableau, nous avons remarqué que l’entreprise qui offre le plus de rendement est HVAR avec un rendement de 2,99% suivi des entreprises HNVEK et AGH avec un rendement respectif de 2,89% et 2,81%. Au contraire, on remarque que les 10 entreprises avec un rendement le plus faible ont un rendement négatif. Ce sont les entreprises GAZ avec –8,25%, PET avec –4,88% ou encore EUBG avec –1,5%.

Tableau 1

Les 10 premier rendements :

Actif	Rendement (%)
HVAR	2.99
HNVEK	2.89
AGH	2.81
HES	2.58
ALUM	2.35
MCH	2.14
CENHL	1.83
NEOH	1.61
0SP	1.57
BIOV	1.49

Les 10 derniers rendements :

Actif	Rendement (%)
GAZ	-8.25
PET	-4.88
EUBG	-1.53
BRP	-0.6
ATERA	-0.31
ZHBG	-0.3
CHIM	0.06
UPAC	0.2
GAGBT	0.2
LAND	0.29

Donc si l’on souhaite maximiser le rendement de notre portefeuille, il faut allouer une majorité de nos ressources aux 10 entreprises avec un rendement élevé et peu, voire pas du tout, allouer nos ressources aux entreprises avec un rendement négatif.

Interprétations des écarts-types :

Dans un deuxième temps, nous avons affiché un tableau montrant les 10 entreprises qui ont un écart type le plus élevé ainsi que les 10 entreprises avec un écart type le plus faible. En analysant nos résultats, nous avons remarqué qu’il y avait un lien entre l’écart type et le risque. En effet, plus l’écart type est élevé, plus le risque est élevé. Ainsi, nous pouvons dire que l’entreprise GAZ, qui est l’entreprise avec l’écart type le plus élevé (53,22%) est donc également l’entreprise avec le risque le plus élevé. De plus, les entreprises AROMA, UPAC et PET sont également des entreprises avec un écart type très élevé avec des valeurs égales à 34,69% pour AROMA, 19,2% pour UPAC et 18,81% pour PET.

D’autre part, les entreprises avec un écart type le plus faible sont les entreprises BSO avec 4,02%, OSP avec 4,4%, BREF avec 4,71% et TCH avec 5,2% d’écart type.

Tableau 2

Les 10 premiers ecart-types :

Actif	Ecart-type (%)
GAZ	53.22
AROMA	34.69
UPAC	19.2
PET	18.81
GAGBT	11.79
TRACE	11.61
ERGC3	11.14
HNVEK	10.69
FIB	9.89
TOPL	9.86

Les 10 derniers ecart-types :

Actif	Ecart-type (%)
BSO	4.02
0SP	4.4
BREF	4.71
ATERA	5.01
TCH	5.2
MONBAT	5.44
HVAR	5.5
SFARM	5.8
ODES	6.01
ALB	6.02

Ceci montre qu’il peut y avoir une très forte variabilité des écarts-types et donc également des risques des entreprises. De plus, si l’on souhaite minimiser le risque de notre portefeuille, il faut allouer une majorité de nos ressources aux 10 entreprises avec un écart type le plus faible et peu, voire pas du tout, allouer nos ressources aux entreprises avec un écart type élevé.

Interprétations de l’allocation des ressources :

A l’aide du programme python de résolution du problème d’optimisation en considérant le problème comme une minimisation du risque (la maximisation du rendement n’est pas prise en compte ici) nous obtenons les résultats suivants pour la pondération des actifs composant le portefeuille :

Tableau 3

	Moyennes (%)	Ecart-type (%)	Pondération (%)
FZLES	0.78	7.04	0.0000
BSO	0.82	4.02	0.0000
PET	-4.88	18.81	0.0000
BREF	0.54	4.71	3.6421
MCH	2.14	6.05	0.0000
BRP	-0.60	9.42	7.8338
LAND	0.29	8.43	0.0000
UPAC	0.20	19.20	1.2450
ODES	0.53	6.01	1.6962
HNVEK	2.89	10.69	5.6236
ELHIM	0.97	8.17	0.0000
NEOH	1.61	7.13	2.8623
CHIM	0.06	7.99	0.0000
DOVUHL	0.66	9.20	0.0000
GAGBT	0.20	11.79	0.0000
ZHBG	-0.30	7.13	0.0000
AGH	2.81	9.04	0.0000
TOPL	1.18	9.86	3.4954
LAVEN	1.41	7.84	11.7504
HES	2.58	7.52	0.0000
BIOV	1.49	9.00	0.0000
TCH	0.57	5.20	15.4637
SFARM	0.50	5.80	0.0000
EUBG	-1.53	9.55	1.2856
MONBAT	0.99	5.44	0.0000
CENHL	1.83	7.68	0.0000
ALB	0.91	6.02	9.7511
GAZ	-8.25	53.22	0.0000
TRACE	1.42	11.61	0.6977
E4AP	0.75	8.71	0.0000
MOMKR	0.35	8.11	0.9120
ATERA	-0.31	5.01	3.7629
FPP	0.85	7.16	3.3534
ALUM	2.35	7.68	0.0000
IHLBL	0.52	8.39	0.0000
AROMA	0.51	34.69	0.0000
ERGC3	0.90	11.14	3.2818
FIB	1.08	9.89	0.0000
0SP	1.57	4.40	18.0668
HVAR	2.99	5.50	5.2760

Le minimum volatilité Sharpe Ratio: 0.7800413406370292
Rendement du portefeuille : 1.0586 %
Ecart-type du portefeuille : 1.3572 %
Moyennes de volatilité : 10.10625 %
Ecart-type de volatilité : 8.729155887025959 %

En analysant ce tableau, on remarque que l'entreprise 0SP reçoit la plus grande part d'allocation des ressources avec un poids de 18,06%. Suivi de TCH avec un poids de 15,46%. De plus, 55,02% des ressources sont allouées à seulement 4 entreprises sur les 40 présentes dans l'analyse (0SP 18,06% + TCH 15,46% + LAVEN 11,75% + ALB 9,75%). En comparant avec le tableau des 10 entreprises dont l'écart type est le plus faible, on remarque que la majorité des entreprises avec l'écart type le plus faible sont celles qui ont un poids d'allocation des ressources le plus élevé.

Le portefeuille d'allocation des ressources obtenu en minimisant le risque a un rendement de 1,05% et un écart type de 1,35%. L'écart type associé au risque est particulièrement faible nous pouvons donc dire que notre portefeuille répond bien à notre problème de minimisation du risque. Afin d'améliorer ce portefeuille, il faudrait également prendre en compte la maximisation du rendement pour arriver à un portefeuille avec un rendement plus élevé.

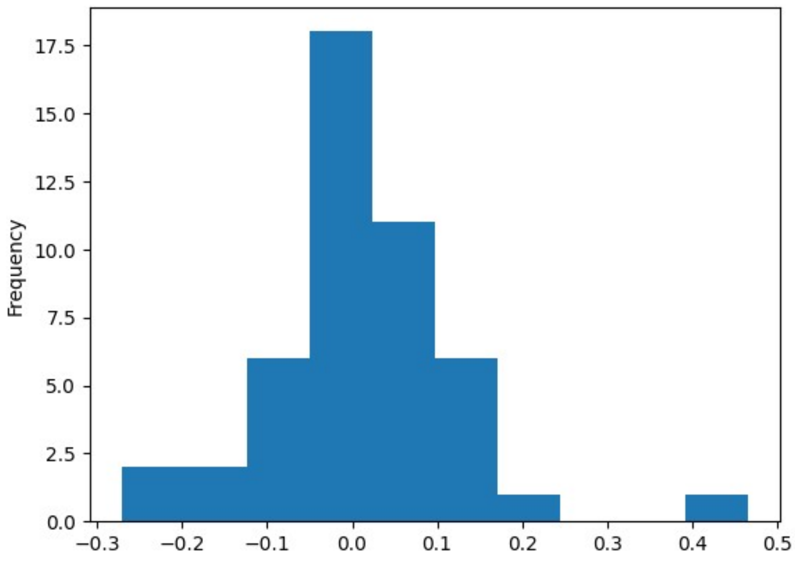
IV. Partie Supplémentaire

1. Puisque, nous avons utilisé le rendement logarithmique, nous pouvons construire un graphe de distribution log-normal.Pour cela, nous choisissons un actif au hasard et on trace son graphe.

```
## Affiche le graphe de distribution log-normale
## Nous choisissons un actif par hasard
taux_rendement["TRACE"].plot(kind = "hist") # Car nous avons utilisé rendements logarithmes
```

✓ 0.3s

```
<AxesSubplot: ylabel='Frequency'>
```



2. Nous avons trouvé le portefeuille avec rendement maximum qui est le tableau 4 dans le dossier. Puis, nous avons tracé le point de portefeuille avec rendement maximale (Graphe Interactive 2.1).

Tableau4

	Moyennes (%)	Ecart-type (%)	Pondération (%)
FZLES	0.78	7.04	0.0000
BSO	0.82	4.02	0.0000
PET	-4.88	18.81	0.0000
BREF	0.54	4.71	0.0000
MCH	2.14	6.05	0.0000
BRP	-0.60	9.42	0.0000
LAND	0.29	8.43	0.0000
UPAC	0.20	19.20	0.0000
ODES	0.53	6.01	0.0000
HNVEK	2.89	10.69	31.3535
ELHIM	0.97	8.17	0.0000
NEOH	1.61	7.13	0.0000
CHIM	0.06	7.99	0.0000
DOVUHL	0.66	9.20	0.0000
GAGBT	0.20	11.79	0.0000
ZHBG	-0.30	7.13	0.0000
AGH	2.81	9.04	0.0000
TOPL	1.18	9.86	0.0000
LAVEN	1.41	7.84	0.0000
HES	2.58	7.52	0.0000
BIOV	1.49	9.00	0.0000
TCH	0.57	5.20	0.0000
SFARM	0.50	5.80	0.0000
EUBG	-1.53	9.55	0.0000
MONBAT	0.99	5.44	0.0000
CENHL	1.83	7.68	0.0000
ALB	0.91	6.02	0.0000
GAZ	-8.25	53.22	0.0000
TRACE	1.42	11.61	0.0000
E4AP	0.75	8.71	0.0000
MOMKR	0.35	8.11	0.0000
ATERA	-0.31	5.01	0.0000
FPP	0.85	7.16	0.0000
ALUM	2.35	7.68	0.0000
IHLBL	0.52	8.39	0.0000
AROMA	0.51	34.69	0.0000
ERGC3	0.90	11.14	0.0000
FIB	1.08	9.89	0.0000
0SP	1.57	4.40	0.0000
HVAR	2.99	5.50	68.6465

```
Le Sharpe Ratio de portefeuille avec rendement maximum: 0.5861273072252655
Rendement de portefeuille avec rendement maximum : 2.9583 %
Ecart-type de portefeuille avec rendement maximum : 5.0472 %
Moyennes de volatilité des actif :  10.10625 %
Ecart-type de volatilité des actif :  8.729155887025959 %
```

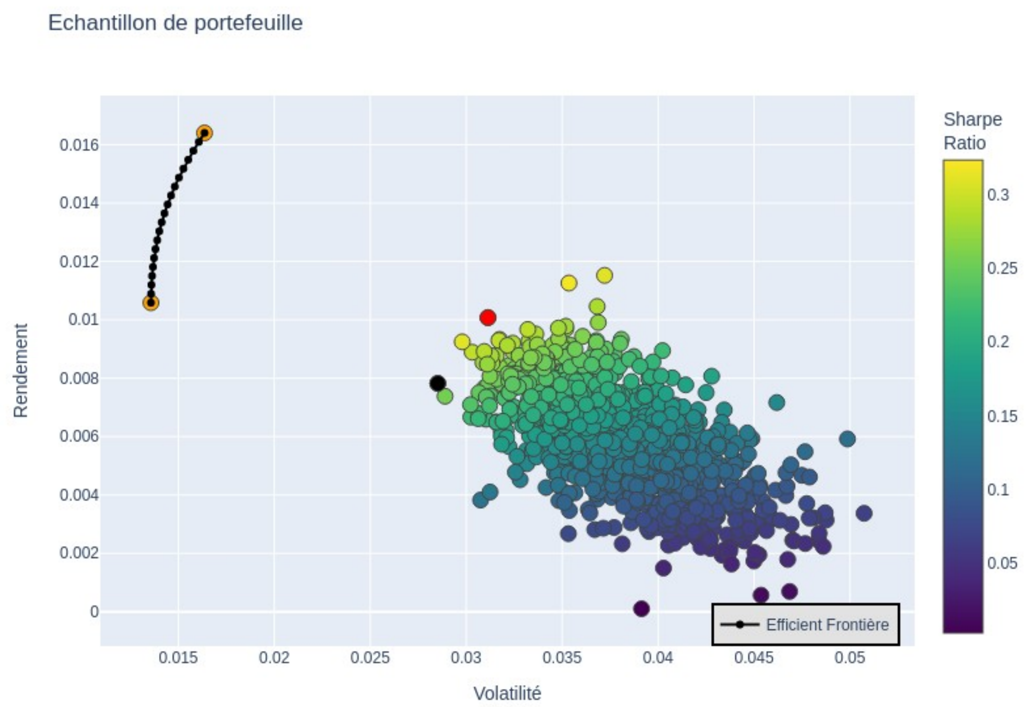
3. Nous avons calculé le portefeuille optimal qui est le tableau 5 du dossier. (Graphe Interactive 2.2)

Tableau 5

	Moyennes (%)	Ecart-type (%)	Pondération (%)
FZLES	0.78	7.04	0.0000
BSO	0.82	4.02	0.0000
PET	-4.88	18.81	0.0000
BREF	0.54	4.71	0.0000
MCH	2.14	6.05	1.2183
BRP	-0.60	9.42	3.8490
LAND	0.29	8.43	0.0000
UPAC	0.20	19.20	0.1562
ODES	0.53	6.01	0.0000
HNVEK	2.89	10.69	9.2102
ELHIM	0.97	8.17	0.0000
NEOH	1.61	7.13	2.2569
CHIM	0.06	7.99	0.0000
DOVUHL	0.66	9.20	0.0000
GAGBT	0.20	11.79	0.0000
ZHBG	-0.30	7.13	0.0000
AGH	2.81	9.04	0.2961
TOPL	1.18	9.86	1.0960
LAVEN	1.41	7.84	10.7729
HES	2.58	7.52	1.8067
BIOV	1.49	9.00	0.0000
TCH	0.57	5.20	12.9611
SFARM	0.50	5.80	0.0000
EUBG	-1.53	9.55	0.0000
MONBAT	0.99	5.44	0.0000
CENHL	1.83	7.68	0.0000
ALB	0.91	6.02	6.7308
GAZ	-8.25	53.22	0.0000
TRACE	1.42	11.61	0.0000
E4AP	0.75	8.71	0.0000
MOMKR	0.35	8.11	0.7657
ATERA	-0.31	5.01	0.0000
FPP	0.85	7.16	1.7870
ALUM	2.35	7.68	4.5998
IHLBL	0.52	8.39	0.0000
AROMA	0.51	34.69	0.0000
ERGC3	0.90	11.14	2.4759
FIB	1.08	9.89	0.0000
0SP	1.57	4.40	25.8077
HVAR	2.99	5.50	14.2096

```
Le Sharpe Ratio de portefeuille optimum : 1.0023608138930835
Rendement du portefeuille optimum : 1.6403 %
 Ecart-type de portefeuille optimum : 1.6365 %
Moyennes de volatilité des actifs :  10.10625 %
Ecart-type de volatilité des actifs :  8.729155887025959 %
```

4. Nous avons aussi tracé l’efficient frontière du portefeuille. (Graphe Interactive 2.3).



Graphe Interactive 2.3

V. BIBLIOGRAPHIE

http://www.investing.com

https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_moderne_du_portefeuille

https://www.investopedia.com/terms/m/modernportfoliotheory.asp

https://lucaslouca.com/Why-Use-Logarithmic-Returns-In-Time-Series-Modelling/

https://en.wikipedia.org/wiki/Sharpe_ratio

https://ocw.mit.edu/courses/18-s096-topics-in-mathematics-with-applications-in-finance-fall-2013/resources/lecture-6-regression-analysis/

https://ocw.mit.edu/courses/18-s096-topics-in-mathematics-with-applications-in-finance-fall-2013/resources/lecture-14-portfolio-theory/

https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.minimize.html

https://www.youtube.com/watch?v=pw5dRqxLZds&ab_channel=OlivierMgbra

https://www.thestreet.com/investing/modern-portfolio-theory-14903955#:~:text=Markowitz%20theorized%20that%20investors%20could,investments%20using%20a%20quantitative%20method

https://towardsdatascience.com/efficient-frontier-in-python-detailed-tutorial-84a304f03e79

https://plotly.com/python/v3/ipython-notebooks/markowitz-portfolio-optimization/

VI. ANNEXE

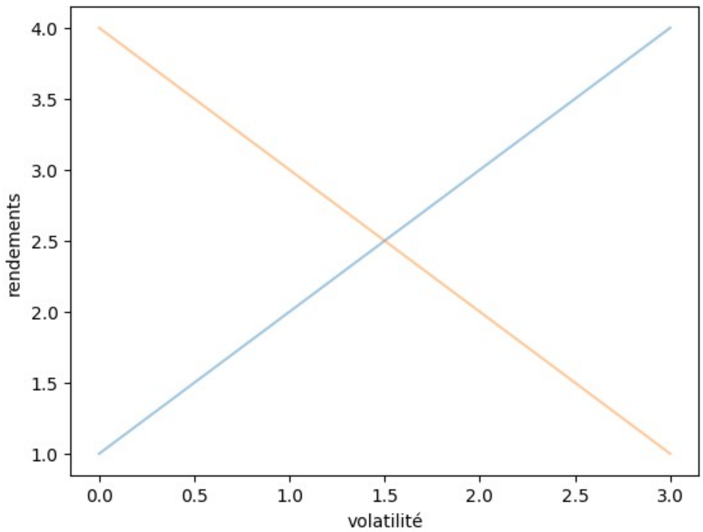
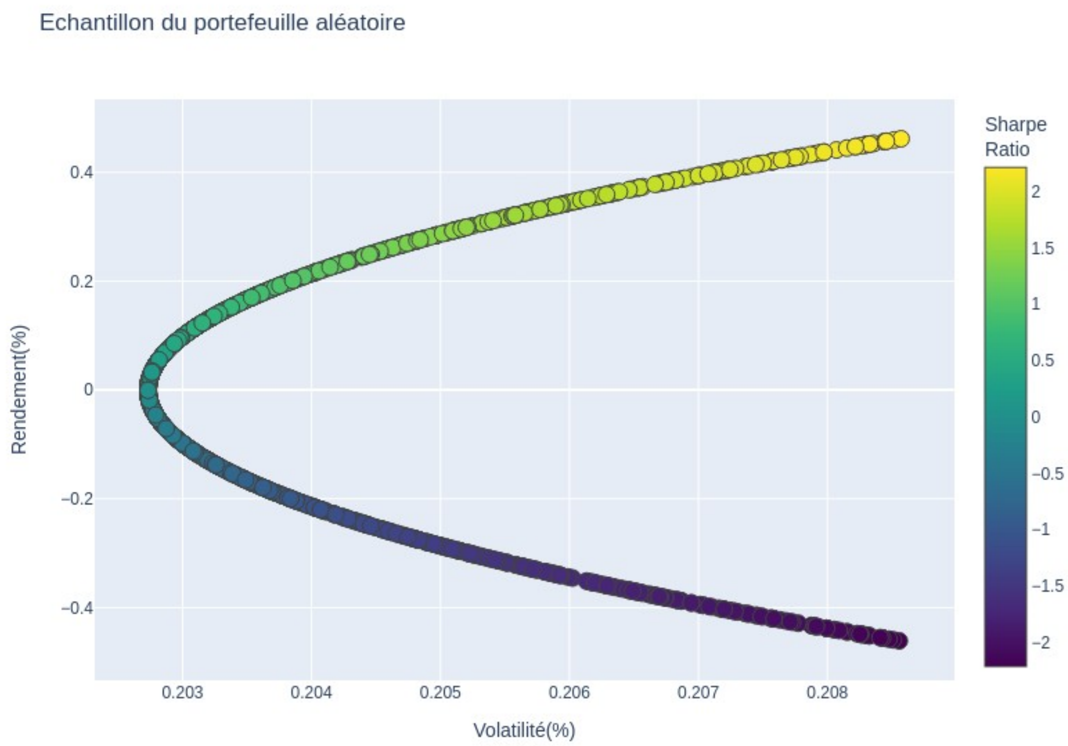


Figure 1.1



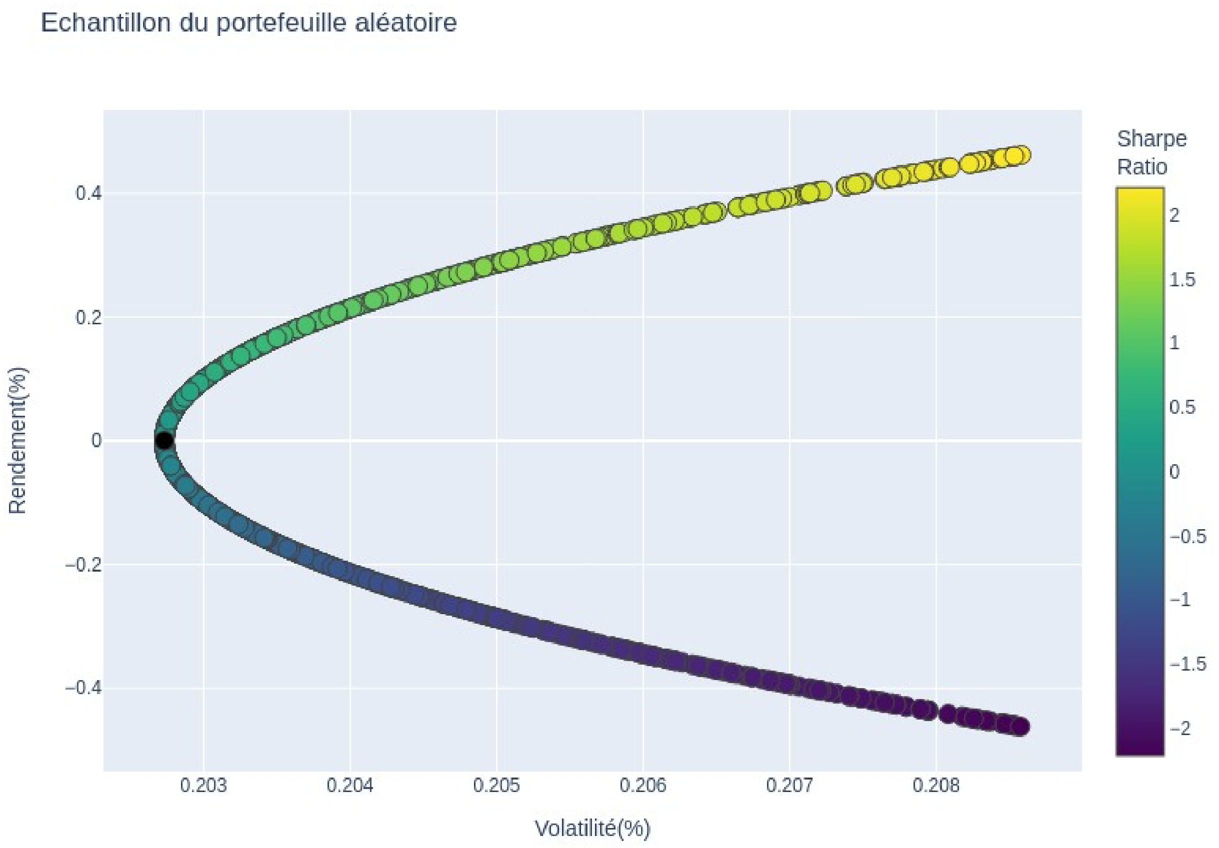
Graphe Interactive 1.2

```python
####____####
## Chercher le minimum volatilité dans la graphe
minIndex = risq.argmin()
print("Le Sharpe Ratio de minimum volatilité :",SR[minIndex])
print("Le rendement de minimum volatilité :", R_esp[minIndex])
print("L'ecart-type de minimum volatilité :", risq[minIndex])
print("La pondération de minimum volatilité :",xpond[minIndex])
```

✓ 0.7s

```
Le Sharpe Ratio de minimum volatilité : 0.001196706990212088
Le rendement de minimum volatilité : 0.00024261146653706267
L'ecart-type de minimum volatilité : 0.2027325556893969
La pondération de minimum volatilité : [0.5002625107697269, 0.49973748923027306]
```

Figure 1.3



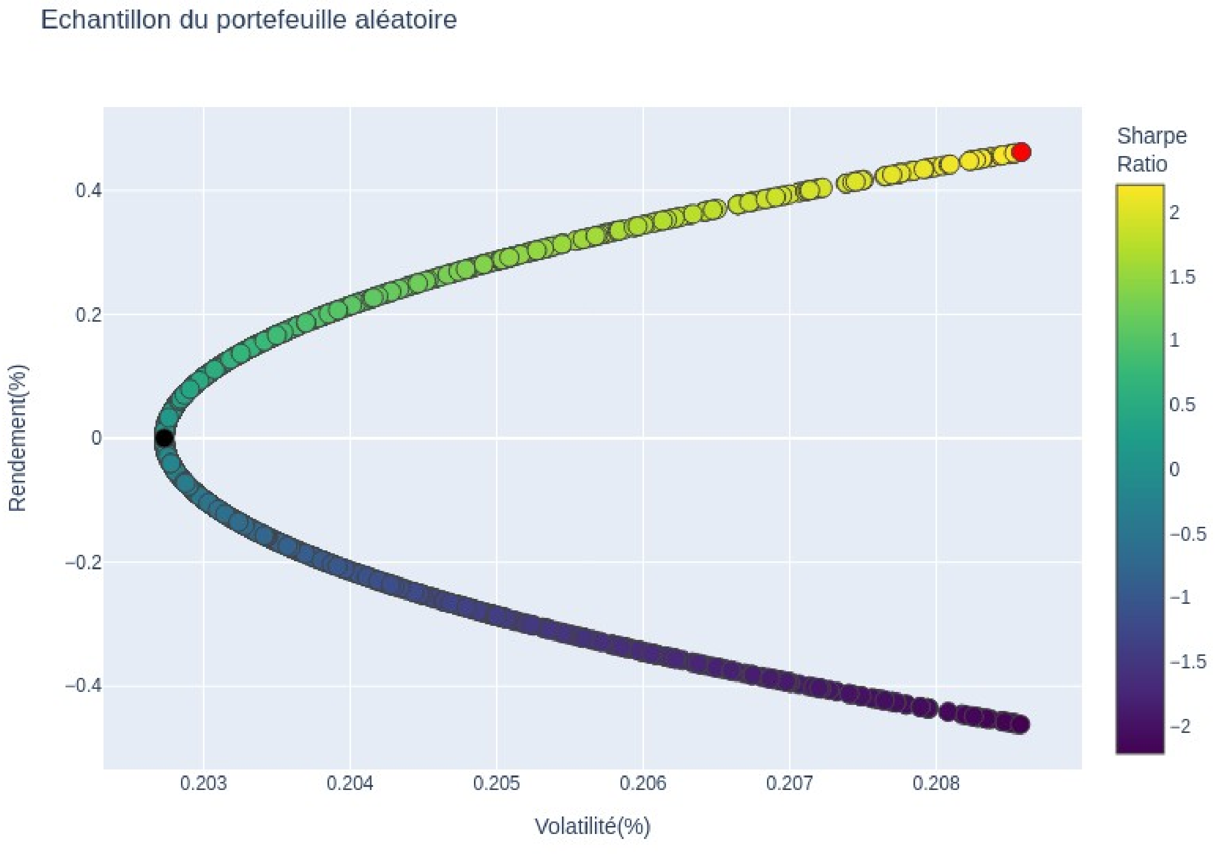
Graphe Interactive 1.3.1

```python
####____####
## Cherher le maximum de Sharpe Ratio
maxIndex = SR.argmax()
print("La maximum du Sharpe Ratio :",SR[maxIndex])
print("Le rendement de la maximum du Sharpe Ratio :", R_esp[maxIndex])
print("L'ecart-type de la maximum du Sharpe Ratio :", risq[maxIndex])
print("La pondération de la maximum du Sharpe Ratio :",xpond[maxIndex])
```

✓ 0.7s Python

```
La maximum du Sharpe Ratio : 2.2151220743511173
Le rendement de la maximum du Sharpe Ratio : 0.46202812850598257
L'ecart-type de la maximum du Sharpe Ratio : 0.20857908187354685
La pondération de la maximum du Sharpe Ratio : [0.9999242673100924, 7.573268990762333e-05]
```

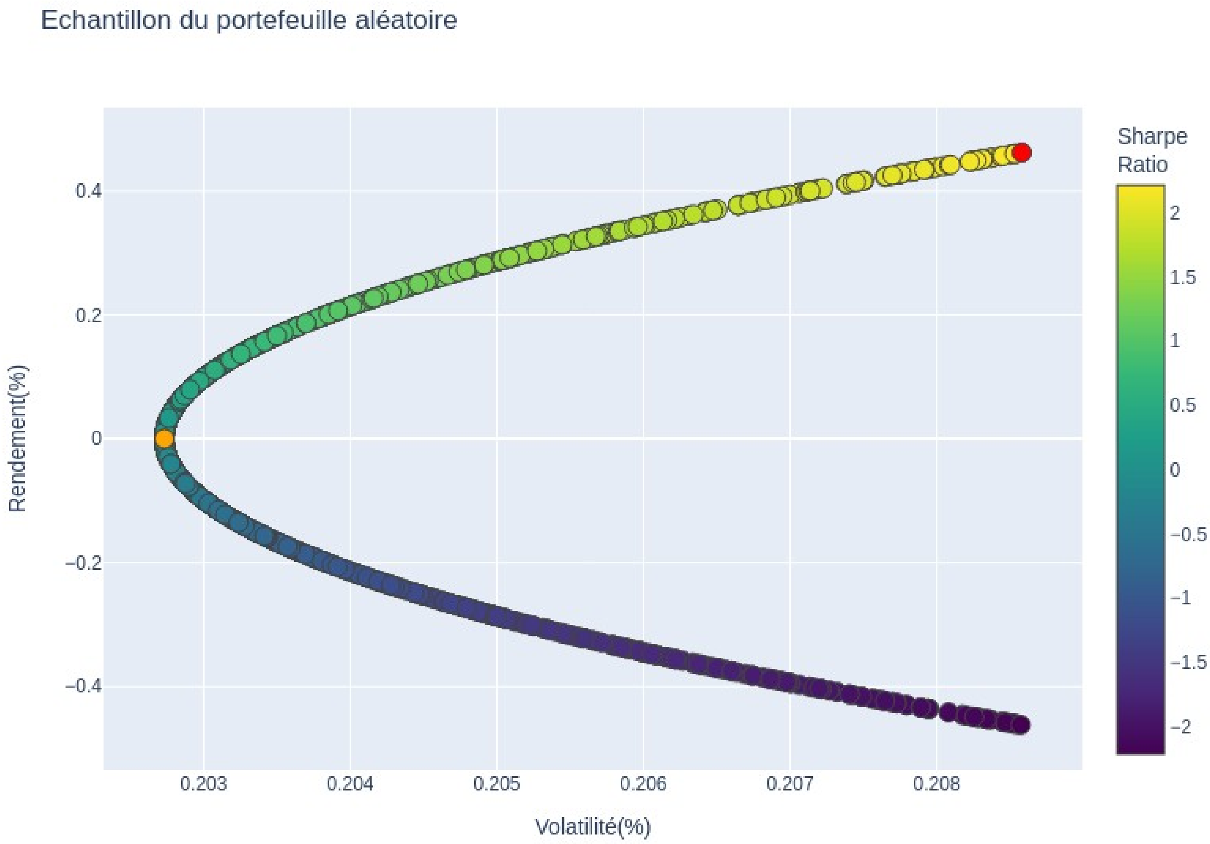
Figure 1.4



Graphe Interactive 1.4.1 : Le point rouge

```
   Moyennes (%)  Ecart-types (%)  Pondération (%)
0         46.21            20.86             50.0
1        -46.21            20.86             50.0
Le minimum volatilité Sharpe Ratio: -4.1072203344645862e-16
Rendement du portefeuille : -0.0 %
 Ecart-type du portefeuille : 20.2733 %
Moyennes de volatilité :  20.86 %
Ecart-type de volatilité :  0.0 %
```

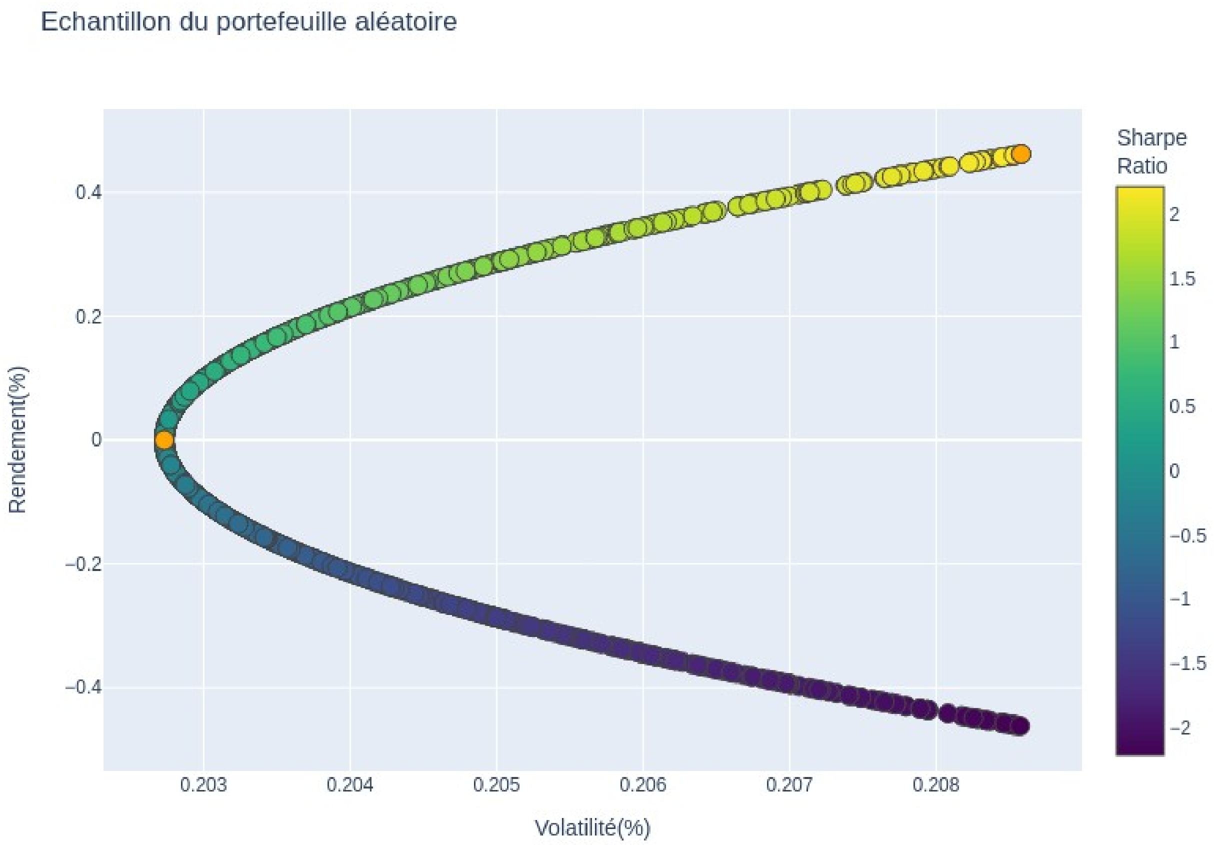
Figure 1.5



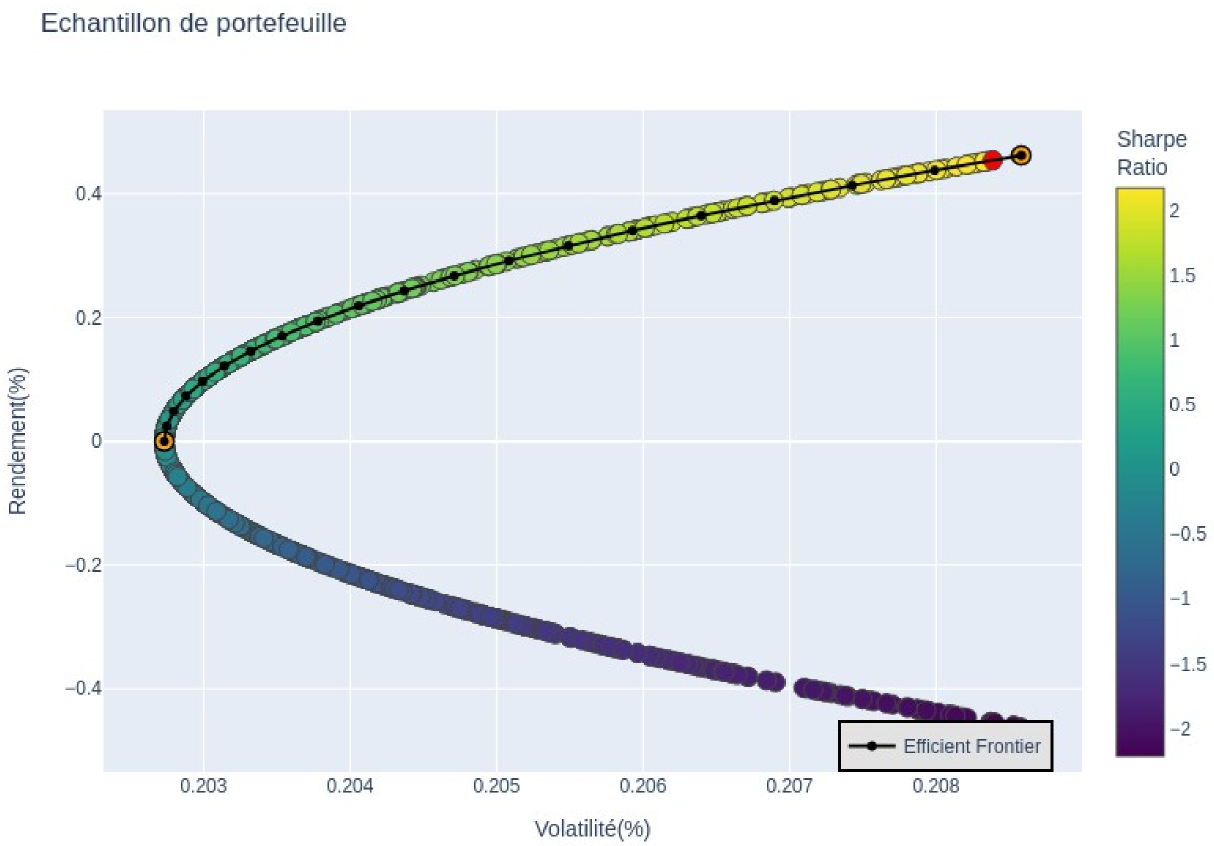
Graphe Interactive 1.5.1 : Le point orange au milieu

```
   Moyennes (%)  Ecart-type (%)  Pondération (%)
0         46.21           20.86            100.0
1        -46.21           20.86              0.0
L'optimum Sharpe Ratio: 2.215439087192137
Rendement du portefeuille : 46.2098 %
 Ecart-type du portefeuille : 20.8581 %
Moyennes de volatilité :  20.86 %
Ecart-type de volatilité :  0.0 %
```

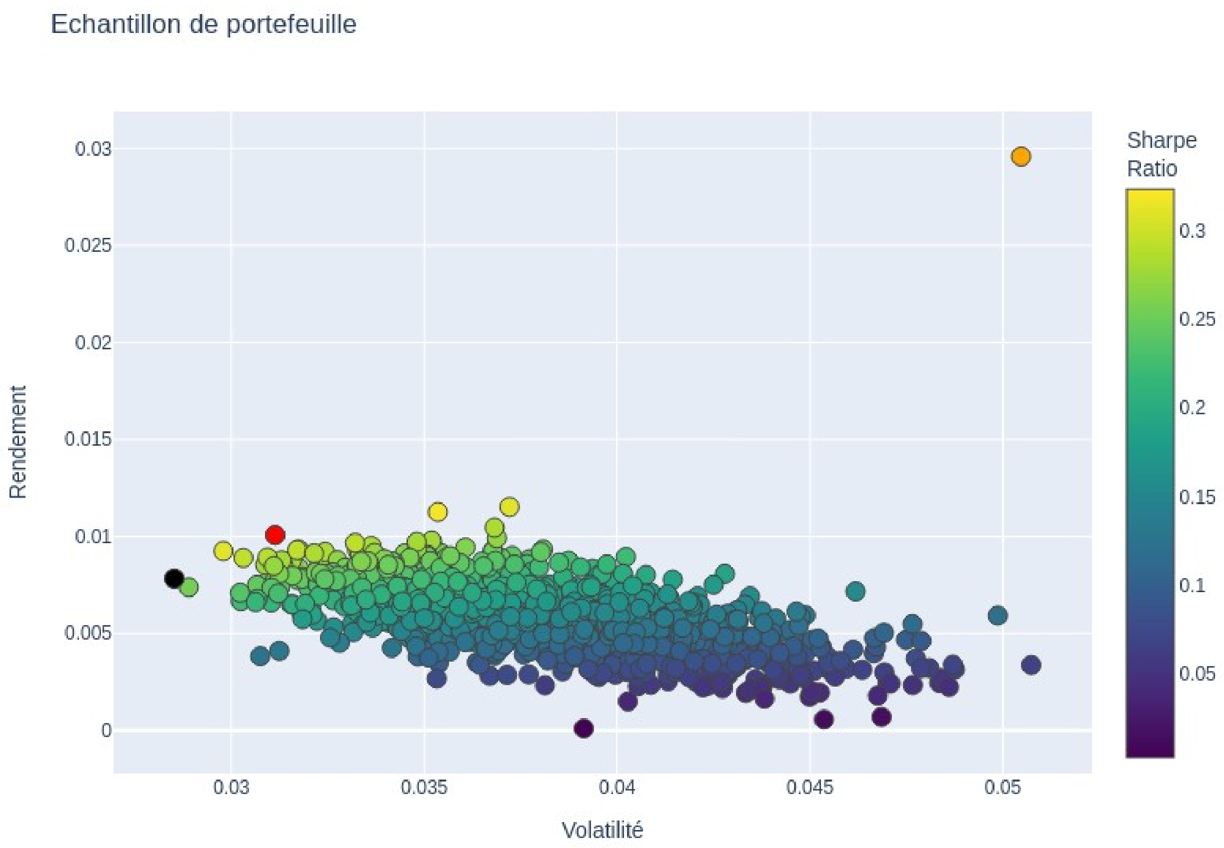
Figure 1.6



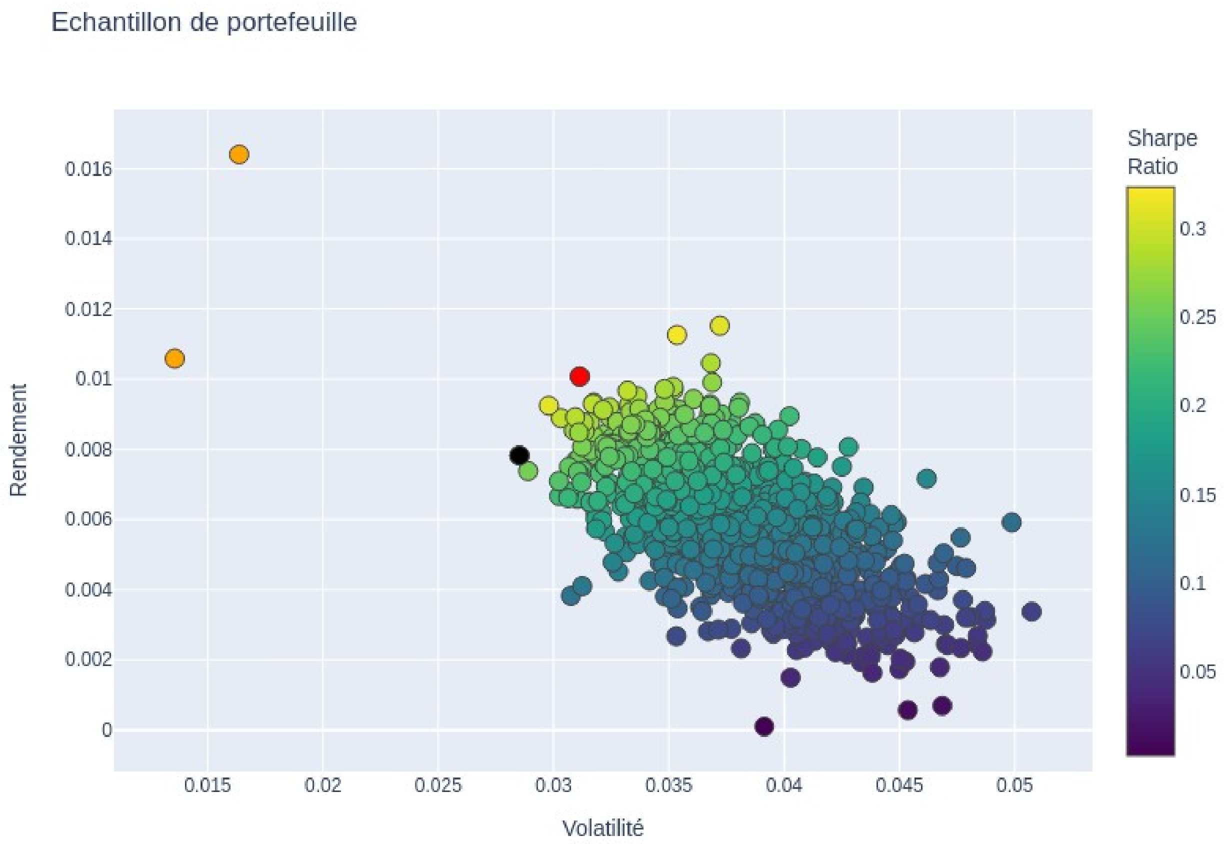
Graphe Interactive 1.6.1



Graphe Interactive 1.7



Graphe Interactive 2.1



Graphe Interactive 2.2