目　录

§1 同调论简介

《同调论》是拓扑学, 流形几何学的一个基本且重要的工具. 对于初学者，可能较为关心的问题是，它的主要功能是什么？它在整个数学的体系中，起着何种作用？要回答这两个问题，我们需要了解一下拓扑学的一些特点.

1. 拓扑学(不计尺寸的几何学)

几何对象形形色色，诸如三角形、四边形、曲线、曲面，乃至高维流形。我们曾经学习过几何对象与度量有关的几何性质，如两直线的夹角；曲线的长度；曲面的面积；立体的体积等等。希望你也曾经接触过如下例子，它们表明几何对象具有许多和度量无关的性质。

例1.1. *Euler*定理:设M是如下两张曲面之一:

弯曲球面　　双环面

将M用弧段分割为一些互不重叠曲边形，令

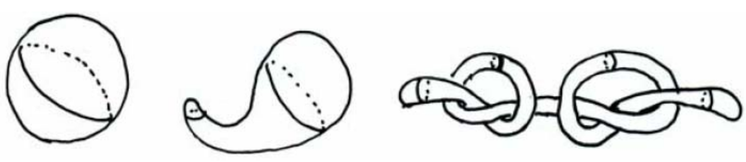
$b_0=$顶点的个数，$b_1=$弧段的条数，$b_2=$曲面块的张数；

并置$b=b_0-b_1+b_2$.

如果M是弯曲球面，则有$b=2$.

如果M是双环面，则有$b=-2$.

例1.2. *Gauss-Bonnet*定理:标准球面S^2可以以不同方式光滑地放入了3维欧氏空间.



2维球面S^2 可以以不同方式光滑地放入了3维欧氏空间

每一种放法都在S^2上确定了一个函数.

$$\kappa : S^2 \to \mathbb{R}, \quad \kappa(x) = x\text{点处的Gauss曲率}, x \in S^2$$

. 但是，积分$\frac{1}{2\pi}\oint_{S^2}\kappa$之值不依赖于放法，恒等于2.

双环面T_2有许多方式放入3维欧氏空间：

对于每一种放法，令$\kappa : T_2 \to \mathbb{R}$ 为相应的Gauss函数. 则有

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{T_2}\kappa = -2?$$

例1.3. *Brouwer不动点定理: 设D是平面中闭圆盘, $f : D \to D$是一个连续映射. 则方程 $f(x) = x, \quad x \in D$，必有一解.*

例1.4. *代数学基本定理:任一复系数多项式*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

在复域上必有一根.

上述例子表明，几何对象（如球面，双环面，及映射）具有许多和度量无关的几何性质。值得指出的是，这些现象并非偶然地，孤立地，而是普遍存在的。一言敝之，拓扑学所关心的，正是几何对象“与度量无关”的那些几何性质。

2. 同调论的作用

从一般意义上谈，拓扑学关心的对象有如下两类

“拓扑空间”与“连续映射”.

回忆一下，

1) 集合X称为一个**拓扑空间**,如果X有一族确定的子集(包括空集$\emptyset$与X),满足开集公理。

2) 拓扑空间X和Y之间的一个对应$f : X \to Y$称为**连续映射**,如果f在空间Y的任一开集U上的逆象$f^{-1}(U)$,是空间X中的一个开集.

3) 拓扑空间X与Y称为**同胚**,记为$X \cong Y$,如果存在一对连续映射

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y,$$

满足$f \circ g = 1_Y$, $g \circ f = 1_X$.

4)给集合{所有连续映射$f : X \to Y$}赋予紧致开拓扑,所得拓扑空间记为$\mathrm{Map}(X, Y)$.

拓扑学中的问题形形色色,但具有根本性的问题只有一个. 给定空间X, Y.

分类问题(拓扑学的根本问题):已知两个空间X和Y:

1)空间的分类问题:判定$X \cong Y$?

2)映射的分类问题:决定$\mathrm{Map}(X, Y) =$?

直接去研究分类问题很困难,比如说,要说明两个空间X与Y同胚,需要去找一对映射

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$$

满足映射的方程

$$f \circ g = 1_Y, \quad g \circ f = 1_X.$$

而要说明空间X与Y不同胚,则需证明上述映射对无论如何不可能存在.

代数学关心的对象也有两类

群(环,域,⋯):具有运算的集合;

同态:保持同类运算的集合间的对应.

代数学中的问题形形色色,但从根本上说,也只有一个:

分类问题:已知两群G, H.

1) 判定 G是否与H同构?($G \cong H$?)

2) 令$\mathrm{Hom}(G,H)=$所有同态$h:G\to H$的集合. 计算$\mathrm{Hom}(G,H)=?$

和几何学(拓扑学)的分类问题相比较,代数学中相应的问题容易了许多. 比如说, 有限生成的Abel 群基本定理，表述了两个Abel群同构的充要条件. 又比如说

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})=\mathbb{Z},\quad \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p;$$
$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z})=0,\quad \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_q)=\mathbb{Z}_{(p,q)},$$

以及

$$\mathrm{Hom}(G_1\oplus G_2,H)=\mathrm{Hom}(G_1,H)\oplus\mathrm{Hom}(G_2,H);$$
$$\mathrm{Hom}(G,H_1\oplus H_2)=\mathrm{Hom}(G,H_1)\oplus\mathrm{Hom}(G,H_2).$$

完全解决了当G,H是Abel群时, 同态的集合 $\mathrm{Hom}(G,H)$ 的计算问题.

拓扑学的基本考虑是，通过在拓扑范畴和代数范畴之间建立具有同胚不变性的联系：

拓扑范畴		**代数范畴**
拓扑空间	$\xrightarrow{\text{联系（函子）到}}$	群或环
连续映射		同态

将几何问题转化为代数问题；利用代数的可算和可比较的特点，来解答原有的几何问题.

同调论所提供的, 正是这样一条从几何到代数的途径.

注1.1. 映射空间$\mathrm{Map}(X,Y)$的紧致开拓扑

记$T=\{X中所有紧集\}$, $F=\{Y中所有开集\}$. 对于$(K,U)\in T\times F$,

$$记\quad N(K,U)=\{f\in\mathrm{Map}(X,Y)|f(K)\subset U\}.$$

则形如$N(K,U)\subset\mathrm{Map}(X,Y)$的子集合生成集合$\mathrm{Map}(X,Y)$上的一个拓扑，称为集合$\mathrm{Map}(X,Y)$ 的紧致开拓扑.

3. 准备知识(同态与映射的下放问题)

对于两个Abel群 G, H 以及它们的子群

$$G_1 \subset G, \quad H_1 \subset H.$$

考虑商群以及商同态

$$p : G \to G/G_1, \quad q : H \to H/H_1.$$

同态的下放问题：给定一个同态$h : G \to H$. 在什么条件下，存在商群间一个同态

$$\overline{h} : G/G_1 \to H/H_1,$$

满足如下同态交换图表

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{h} & H \\ p\Big\downarrow & & \Big\downarrow q \\ G/G_1 & \xrightarrow{\overline{h}} & H/H_1 \end{array}$$

如果$\overline{h}$存在，则称它为同态 h 的下放问题的**解**.

定理1.1. *同态的下放问题*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{h} & H \\ p\Big\downarrow & & \Big\downarrow q \\ G/G_1 & \xrightarrow{?} & H/H_1 \end{array}$$

有解的充要条件是$h(G_1) \subset H_1$. 进一步，如果解存在，则必唯一.

证明. 习题. □

已知拓扑空间X, 以及X(做为集合)中一个等价关系$\sim$ (自反，对称，传递). 考虑商集$Z = X/\sim$以及自然投影

$$p : X \to Z = X/\sim.$$

在拓扑："$U \subset Z$是开集的充要条件是: $p^{-1}(U) \subset X$ 是开集"下, Z 构成一拓扑空间，称为X 关于关系$\sim$的**商空间**，p成为连续映射.

映射的下放问题：对于从X出发的连续映射$f: X \to Y$, 考虑映射的下放问题

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z \arrow[r, "?"] & Y \end{tikzcd}$$

若它的解存在，则称为f的**商映射**.

定理1.2. f 的商映射存在的充要条件是：每当$x \sim x'$(在X中), 必有$f(x) = f(x')$

参考书目

1.《基础拓扑学》，M.A.Armstrong；孙以丰译，北京大学出版社

2. 《同调论》，姜伯驹著；北京大学出版社，1997

3.《从微分观点看拓扑》，J.Milnor，熊金城译-上海科学技术出版社

4.《Algebraic Topology-A.first Course》M.Greenberg; J.Harper著.

§2 拓扑空间的同调群

1. 链复形及其同调（同调论的代数背景）

定义2.1. 一个交换群的同态序列 $\{\partial_n : C_n \to C_{n-1} |\ 0 \le n \le m\}$ 称为**一个链复形**，如果任意两个相邻同态的复合是平凡同态：

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 : C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1}, \quad 1 \le n \le m$$

链复形可简记为 $C_* = \{C_n, \partial_n |\ 0 \le n \le m\}$，其中

1) 群 C_n 称为链复形 C_* 的第 n 个**链群**;

2 同态 $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ 称为链复形 C_* 的第 n 个**边缘同态**。

链复形也可用图表示为:

$$0 \to C_m \to \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots \to C_0 \to 0$$

在一个链复形 C_* 中，条件 $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ 等价于说，进入每个链群 C_n 的边缘同态 ∂_{n+1} 的像, 总包含于出去的边缘同态 ∂_n 的核里:

$$\mathrm{Im}\partial_{n+1} \subseteq \mathrm{Ker}\partial_n.$$

定义2.2. 对于一个链复形 $C_* = \{C_n, \partial_n \mid 1 \le n \le m\}$，它的 n **维闭链群**和 n **维边缘链群**分别是

$$Z_n(C_*) = \mathrm{Ker}\partial_n, \qquad B_n(C_*) = \mathrm{Im}\partial_{n+1}, \quad n \ge 0.$$

商群

$$H_n(C_*) = Z_n(C_*)/B_n(C_*), \qquad n \ge 0$$

称为**链复形** C_* 的**第** n **维同调群**.

推论2.1. 推论: 对于一个有限链复形

$$0 \to C_m \xrightarrow{\partial_m} \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0$$

我们有 $H_m(C_*) = \mathrm{Ker}\partial_m, \ H_0(C_*) = C_0/\mathrm{Im}\partial_1$

定义2.3. $Z_n(C_*)$ 中的一个元素，称为链复形 C_* 的一个 n **维闭链**；$B_n(C_*)$ 中的一个元素，称为链复形 C_* 的一个 n **维边缘链**；$H_n(C_*)$ 中的一个元素，称为链复形 C_* 的一个 n **维同调类**.

一个闭链 $z \in Z_n(C_*)$ 在商同态 $Z_n(C_*) \to H_n(C_*)$ 下的像，记为 $[z] \in H_n(C_*)$，称为**闭链** z **代表的同调类**.

根据商群的定义，我们有：

命题2.1. 识别法则： 已知两个 n 维闭链 $z, z' \in Z_n(C_*)$

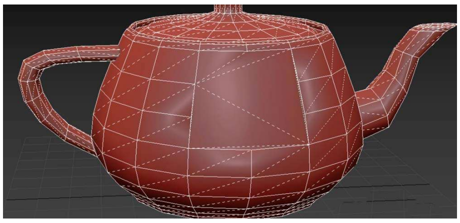
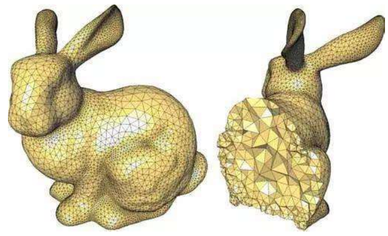
1) $[z] = [z'] \iff z - z' \in B_n(C_*)$;

2) $[z] = 0 \iff z \in B_n(C_*)$.

2. 同调论的起源

例2.1.【单纯同调】 *1900*年，庞加莱在研究*3*维流形的过程中，发明了"单纯同调"。我们以闭曲面为例，介绍该同调群产生方式与作用.

对于一张闭曲面 M，取它的一个三角剖分 $M = \bigcup\limits_{1\leq k\leq m} \Delta_k$：

并令

$C_0(M) =$ 三角剖分中顶点的集合所生成的交换群；

$C_1(M) =$ 三角剖分中边的集合所生成的交换群；

$C_2(M) =$ 三角剖分三角形的集合 F 所生成的交换群.

考虑交换群的同态序列：

$$0 \to C_2(M) \xrightarrow{\partial_2} C_1(M) \xrightarrow{\partial_1} C_0(M) \to 0$$

其中

$$\partial_2(\Delta(ABC)) = BC - CA + AB; \quad \partial_1(AB) = B - A.$$

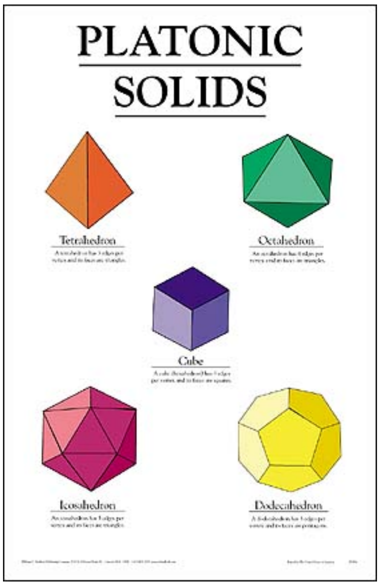
由于 $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$, 它是一个链复形。庞加莱定义闭曲面 M 的同调群是如下规定的三个交换群：

$$H_0(M) := \frac{C_0(M)}{Im\partial_1}; \quad H_1(M) := \frac{\ker \partial_1}{Im\partial_2}; \quad H_2(M) := \ker \partial_2.$$

并且证明了：

*i)*闭曲面 M 的同调群与它的三角剖分的取法无关，从而是曲面的同胚不变量。

*ii)*两张闭曲面 M, N 同胚的充分必要条件是，它们的各维同调群同构: $H_k(M) = H_k(N)$, $k = 0, 1, 2$.



*2*维球面的*5*种三角刨分

例2.2.【胞腔同调】*1926*年，莱夫谢茨发展了庞加莱的方法，对于一个胞腔复形 M，引入了胞腔同调

1. M **的** n **维胞腔链群**：$C_n(M) = M$ 中的全体 n 维胞腔 $\{e_1^n, \cdots, e_{k(n)}^n\}$ 所生成的交换群；

2. M **的** n **维边缘同态**：$\partial_n : C_n(M) \to C_{n-1}(M)$,

$$\partial_n(e_i^n) = a_{i,1} \cdot e_1^{n-1} + \cdots + a_{i,k(n-1)} \cdot e_{k(n-1)}^{n-1}$$

其中的系数 $a_{i,k}$ 是胞腔 e_i^n 的粘贴映射 f 在胞腔 e_j^{n-1} 上的**映射度**. 于是得到一个交换群的同态序列(称为 M 的**胞腔链复形**):

$$\cdots \to C_{n+1}(M) \stackrel{\partial_{n+1}}{\to} C_n(M) \stackrel{\partial_n}{\to} C_{n-1}(M) \stackrel{\partial_{n-1}}{\to} \cdots, \quad \partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

对于一个胞腔复形 M，莱夫谢茨定义了它的 r **维胞腔同调群**是如下规定的交换群:

$$H_r(M) = \frac{\ker \partial_r}{Im \partial_{r+1}}, \quad 0 \leq r \leq \dim X.$$

据此，胞腔复形 M 的胞腔同调群，运用群的语言，记录 M 的几何构造. 莱夫谢茨进一步证明了:

i) 胞腔复形 M 的同调群和它的胞腔分解的取法无关，因而是 M 的同胚不变量.

ii) 对于 *2*、*3* 维流形 M 而言, $H_n(M) =$ 庞加莱的同调群.

此外，利用闭曲面的胞腔分解

$$S^2 = * \cup D^2; \ n \cdot T^2 = (\vee_{2n} S^1) \cup_{f_n} D^2, \ n \cdot PR^2 = (\vee_n S^1) \cup_{g_n} D^2,$$

可以直接算出它们的胞腔同调群:

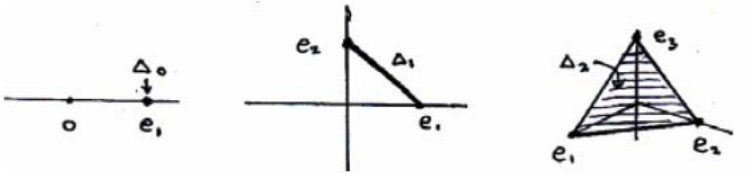
M	S^2	$n \cdot T^2$	$n \cdot PR^2$
$H_0(M)$	Z	Z	Z
$H_1(M)$	0	Z^{2n}	$Z^{n-1} \oplus Z_2$
$H_2(M)$	Z	Z	0

3. 欧氏空间中的标准单形

设 $\mathbb{R}^m$ 是以 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 为单位正交基底的欧氏空间,其中 m 足够大. 对每个 $n < m$, $\mathbb{R}^m$ 中的子空间

$$\triangle_n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^m | x_i \geq 0, \Sigma x_i = 1\}$$

称为 n **维标准单形**.



对于每个 $1 \leq i \leq n+1$, 连续映射

$$\delta_n^i : \triangle_{n-1} \to \triangle_n,$$

$$\delta_n^i(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n+1}, 0, \cdots, 0).$$

称为 n 维标准单形 $\triangle_n$ 的**第 i 个面**。

命题2.2. n 维标准单形 $\triangle_n$ 是欧氏空间中以基底向量 $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ 为顶点的凸多面体 $[e_1, \cdots, e_{n+1}]$. 进一步,

1) 映射 δ_n^i 将 $n-1$ 维标准单形 $\triangle_{n-1}$ 线性同构地映为 n 维标准单形 $\triangle_n$ 的顶点 e_i 所对的面 $(= \triangle_{n-1})$.

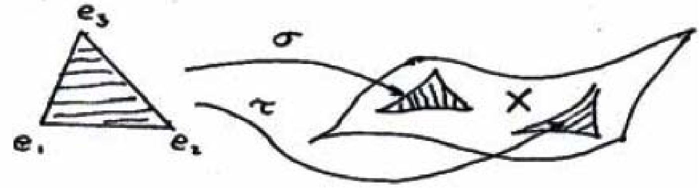
2) 对于 $1 \leq i \leq j \leq n+1$ ，下述映射的等式成立

$$\delta_n^i \circ \delta_{n-1}^j = \delta_n^{j+1} \circ \delta_{n-1}^i : \triangle_{n-2} \to \triangle_n.$$

4.拓扑空间的同调群及维数公理

定义2.4. 拓扑空间 X 的一个n **维单形**是一个连续映射 $\sigma : \triangle_n \to X$.

例2.3. 空间 X 的一个 0 维单形是 X 中的一个点;
空间 X 的一个 1 维单形是 X 中的一条参数曲线;
空间 X 的一个 2 维单形是 X 中一张参数曲面.



X 的两个2-单形

对于一个拓扑空间 X ，以及一个自然数 $n \in N$, 令 $S_n(X)$ 为空间 X 的 n 维单形所生成的自由Abel群，即

$$S_n(X) = \{ \sum_{\sigma:\triangle_n \to X} a_\sigma \cdot \sigma | \ a_\sigma \in \mathbb{Z}, a_\sigma \neq 0 \text{有限} \},$$

定义同态 $\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ 如下：

1）对于 X 的一个 n 维单形 $\sigma : \triangle_n \to X$，令

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{1 \le i \le n+1} (-1)^i \sigma \circ \delta_n^i \in S_{n-1}(X);$$

2）作线性扩张.

则有

命题2.3. (***Poincare*引理**): *对于拓扑空间 X ，交换群的同态序列 $S_*(X) = \{S_n(X), \partial_n \mid \ n \ge 0\}$ 是一个链复形.*

证明. 对于空间 X 的每个 n 维单形 $\sigma : \triangle_n \to X$, 有

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) &= \partial_{n-1} \sum_{1 \le i \le n+1} (-1)^i \sigma \circ \delta_n^i \\
&= \sum_{1 \le i \le n+1} (-1)^i \sum_{1 \le j \le n} (-1)^j \sigma \circ (\delta_n^i \circ \delta_{n-1}^j) \\
&= \sum_{j \le i} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\delta_n^i \circ \delta_{n-1}^j) \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\delta_n^i \circ \delta_{n-1}^j) = 0.
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式来自于命题3.1中的关系式: 对于 $i \le j$, 有

$$\delta_n^i \circ \delta_{n-1}^j = \delta_n^{j+1} \circ \delta_{n-1}^i.$$

□

定义2.5. 对于拓扑空间 X , 链复形$S_*(X) = \{S_n(X), \partial_n \mid \ n \ge 0\}$称为**空间 X 的链复形**. 令

$$Z_n(X) := Z_n(S_*(X)), \quad B_n(X) := B_n(S_*(X)), \ \ n \ge 0,$$

它们分别称为空间 X 的**第 n 维闭链群**和**第 n 维边缘链群**.

链复形 $S_*(X)=\{S_n(X),\partial_n \mid \ n\geq 0\}$ 所决定的同调群

$$H_n(X):=H_n(S_*(X))=Z_n(X)/B_n(X),\quad n\geq 0,$$

称为空间 X 的**第 n 维同调群**.

闭链群 $Z_n(X)$ 中的一个元素，称为空间 X 的一个 n **维闭链**；边缘链群 $B_n(X)$ 中的一个元素，称为空间 X 的一个 n **维边缘链**; 同调群 $H_n(X)$ 中一个的元素, 称为空间 X 的一个 n **维同调类**.

定理2.1. *拓扑空间 X 的同调具有以下性质:*

1)(维数公理) 如果 $X=pt$ 是单点空间，则

$$H_0(X)=\mathbb{Z},\quad H_n(X)=0,\quad 若 n>0.$$

2) 如果 X 道路连通，则 $H_0(X)=\mathbb{Z}$.

3)如果 $X=\coprod\limits_{1\leq i\leq k}X_i$, 其中 X_i 道路连通，则 $H_n(X)=\bigoplus\limits_{1\leq i\leq k}H_n(X_i)$.

证明. 1) 如果 $X=pt$, 则 X 的每个 n 单形 $\sigma:\triangle_n\to X$ 都是常值映射，从而有 $S_n(X)=\mathbb{Z}$，生成元是常值映射 $\sigma_n:\Delta_n\to X$. 相应地，边缘同态

$$\partial_n:S_n(X)=\mathbb{Z}\to S_{n-1}(X)=\mathbb{Z}$$

是

i) $\partial_n(\sigma_n)=0$, 如果 n 奇或 $n=0$；

ii) $\partial_n(\sigma_n)=-\sigma_{n-1}$, 如果 n 偶且 $n\geq 2$.

性质1)得证.

2)对于一个拓扑空间 X ，$S_1(X)\xrightarrow{\partial_1}S_0(X)\xrightarrow{\partial_0}0$,表明

$$H_0(X)=\frac{S_0(X)}{B_0(X)},$$

其中

$$S_0(X)=\{\sum_{x\in X}a_x\cdot x|\ a_x\in\mathbb{Z},\ a_x\neq 0 有限\}.$$

定义满同态 $C: S_0(X)\to\mathbb{Z}$, $C(\sum\limits_{x\in X}a_x\cdot x)=\sum\limits_{x\in X}a_x$. 则有

$$\frac{S_0(X)}{\mathrm{Ker}C}=\mathbb{Z}$$

只需要证明 $\mathrm{Ker}C=B_0(X)$.

取定一基点 $x_0\in X,\forall x\in X$, 令 $\sigma_x:\triangle_1=[0,1]\to X$ 为从 x_0 到 x 的一条道路, 则 $b=\sum\limits_{x\in X}a_x\cdot x\in\mathrm{Ker}C$ 等价于

$$b=\sum_{x\in X}a_x\cdot x-(\sum_{x\in X}a_x)\cdot x_0=\partial_1(\sum_{\sigma_x:\Delta_1\to X}a_x\cdot\sigma_x)\Leftrightarrow b\in B_0(X).$$

性质2) 得证.

3) 如果 $X=\coprod\limits_{1\le i\le k}X_i$, 其中 X_i 道路连通, 则有自然分解

$$S_n(X)=\bigoplus_{1\le i\le k}S_n(X_i)$$

(道路连通空间在连续映射下的像，位于像空间的某个道路连通分支)，相应的

$$\partial_X=\oplus\partial_{X_i}:S_n(X)\to S_{n-1}(X)$$

性质3)的证明由习题4中的关系式 $H_n(C_*\oplus D_*)=H_n(C_*)\oplus H_n(D_*)$ 完成。

$\square$

复习题：

1.什么是链复形? 什么是链复形产生的同调群?

2.什么是欧氏空间中的标准 n 维单形?

3.什么是拓扑空间 X 的一个 n 维单形?

4.什么是拓扑空间 X 的链复形?

5.什么是拓扑空间 X 的 n 维同调群?

习题1：证明任一同态序列

$$\cdots\xrightarrow{0}G_n\xrightarrow{0}G_{n-1}\xrightarrow{0}G_{n-2}\xrightarrow{0}\cdots$$

均是链复形，决定它的同调群.

习题2：设m是一个正整数, 定义一串交换群如下：

$$C_r = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{如果} r \in \{0, 2, 4, \cdots, 2m\}; \\ 0, & \text{如果} r \notin \{0, 2, 4, \cdots, 2m\}. \end{cases}$$

1) 证明任一同态序列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots$$

都是一个链复形；

2) 计算它的各维同调群 $H_r = ?$.

习题3：设 m 是一个正整数. 定义一串交换群如下：

$$C_r = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{如果 } r \in \{0, 1, 2, \cdots, m\}; \\ 0, & \text{如果 } r \notin \{0, 1, 2, \cdots, m\}. \end{cases}$$

定义同态 $\partial_r : C_r \to C_{r-1}$ 为:

$$\partial_r = \begin{cases} \times(1 + (-1)^r), & \text{如果} r \in \{0, 1, 2, \cdots, m\}; \\ \times 0, & \text{如果} r \notin \{0, 1, 2, \cdots, m\}. \end{cases}$$

1) 证明同态序列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots$$

是一个链复形；

2) 计算它的各维同调群 $H_r = ?$ (提示：分 $r =$ 奇、偶情形讨论).

习题4：已知两个链复形 $C_* = \{C_n, \partial_n\}$, $D_* = \{D_n, \partial'_n\}$. 证明

1） $C_* \bigoplus D_* = \{C_n \bigoplus D_n, \partial_n \bigoplus \partial'_n\}$ 也是一个链复形；

2） $H_*(C_* \bigoplus D_*) = H_*(C_*) \bigoplus H_*(D_*)$.

§3 连续映射的诱导同态

1. 链映射及其诱导同态

已知两个链复形 $C_* = \{C_n, \partial_n\}$, $D_* = \{D_n, \partial'_n\}$。一个同态序列 $f = \{f_n : C_n \to D_n\}$ 称为从链复形 C_* 到链复形 D_* 的一个**链映射**, 记为

$$f : C_* \to D_*$$

如果对于每个 $n \geq 1$, 下述同态的等式成立：

$$\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n : C_n \to D_{n-1}$$

.

即有群同态的交换图表

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ {\scriptstyle f_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} \\ D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} \end{array}$$

.

命题3.1. 设 $f : C_* \to D_*$ 是一个链映射, 则对于每个 $n \geq 0$, 有

$$f_n(Z_n(C_*)) \subseteq Z_n(D_*); \quad f_n(B_n(C_*)) \subseteq B_n(D_*).$$

根据定理1.1，同态的下放问题

$$\begin{array}{ccc} B_n(C_*) & & B_n(D_*) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ Z_n(C_*) & \xrightarrow{f_n} & Z_n(D_*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(C_*) & \xrightarrow{?} & H_n(D_*) \end{array}$$

有唯一一个解,记为：

$$f_* : H_n(C_*) \to H_n(D_*)$$

定义3.1. 同调群间的同态 $f_* : H_n(C_*) \to H_n(D_*)$ 称为链映射 $f : C_* \to D_*$ 的**诱导同态**.

命题3.2. 链映射的诱导同态具有以下性质:

1) 如果 $f = id : C_* \to C_*$, 则 $f_* = id : H_n(C_*) \to H_n(C_*)$;

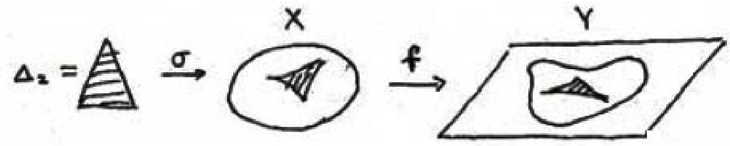
2) 如果 $f : C_* \to D_*, g : D_* \to E_*$ 是两个链映射，则 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

证明. 性质 1) 显然.

两个链映射的复合 $g \circ f : C_* \to E_*$ 仍然是一个链映射；而下放同态的复合，是复合同态的下放。性质 2 得证。 □

2.连续映射的诱导同态及函子公理

已知一个连续映射 $f : X \to Y$，以及空间 X 的一个 n 单形 $\sigma : \triangle_n \to X$。则复合映射$f \circ \sigma : \triangle_n \to Y$ 是空间 Y 的一个 n 单形:



连续映射 f 的作用：将空间 X 的单形映为空间 Y 的单形

线性扩张决定同态 $f_n : S_n(X) \to S_n(Y)$:

$$f_n(\sum_{\sigma:\triangle_n \to X} a_\sigma \cdot \sigma) = \sum_{f\circ\sigma:\triangle_n \to Y} a_\sigma \cdot f \circ \sigma$$

由复合映射的结合律 $(f \circ \sigma) \circ \delta_n^i = f \circ (\sigma \circ \delta_n^i)$ 知

命题3.3. 同态序列 $f_\# = \{f_n : S_n(X) \to S_n(Y) | n \geq 0\}$ 是一个链映射.

根据命题3.3, 链映射 $f_\#$ 决定一串同调群之间的同态

$$f_* : H_n(X) \to H_n(Y), \quad n \geq 0.$$

定义3.2. 同调群间的同态 f_* 称为连续映射 $f : X \to Y$ 的**诱导同态**.

进一步，命题2.3断言

定理3.1. （同调论函子公理）连续映射的诱导同态具有如下性质*:*

*1)*如果 $f = id : X \to X$ 是空间 X 的恒同映射，则诱导同态 $f_* = id : H_n(X) \to H_n(X)$ 是同调群的恒同同构*.*

*2)*对于两个连续映射 $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$,有

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_n(X) \to H_n(Z), \quad n \geq 0.$$

作为函子性质的应用，我们得到

推论3.1. (**同调群的同胚不变性**)*:*

如果 $X \cong Y$, 则 $H_n(X) \cong H_n(Y), \quad n \geq 0.$

证明*.* 回忆一下，两个空间同胚 $X \cong Y$ 的充要条件是，存在一对映射

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$$

满足$f \circ g = 1_Y,\ \ g \circ f = 1_X$. 根据函子性质, 我们有

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = id : H_n(Y) \to H_n(Y);$$

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = id : H_n(X) \to H_n(X).$$

它们表明同态 f_*, g_* 互为逆同构. □

推论3.1指出了拓扑空间 X 的同调群的如下作用：要判定两个空间是否同胚$X \cong Y$? 可以从问题：

$$H_n(X) \cong H_n(Y)?, n = 0, 1, 2, 3, \cdots,$$

入手.换言之，同调群提供了判定空间是否同胚的代数尺度!

3.同调论的同伦公理

定义3.3. 已知两个链映射

$$f, g : C_* = \{C_n, \partial_n\} \to D_* = \{D_n, \partial'_n\}$$

如果存在一串同态 $T=\{T_n: C_n\to D_{n+1}|n\geq 0\}$,满足如下同态的等式:

$$\partial'_{n+1}\circ T_n + T_{n-1}\circ\partial_n = f_n - g_n : C_n \to D_n, n\geq 0,$$

则称链映射 f 与 g **链同伦**,记为 $f\simeq g$. 此处, T 称为从链映射 f 到链映射 g 的**一个链伦移**.

命题3.4. 如果 $f\simeq g$, 则 $f_*=g_*: H_n(C_*)\to H_n(D_*), \quad n\geq 0.$

证明. 设 T 是从 f 到 g 的一个**链伦移**. 对于任意 n 维闭链 $z\in Z_n(C_*)$, 有

$$f_n(z)-g_n(z)=\partial'\circ T(z)+T\circ\partial(z)=\partial'\circ T(z)\in B_n(D_*),$$

由命题2.1知

$$f_*[z]=[f_n(z)]=[g_n(z)]=g_*[z].$$

□

同伦是代数拓扑学中的一个核心概念. 这里,我们针对课程的需要,做必要的介绍.

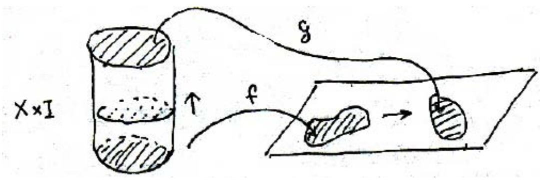
已知空间 X 以及单位区间 $I=[0,1]$. 乘积空间 $X\times I$ 称为**以 X 为底的柱体**,其中的子空间 $X\times t,\ \ t\in I$, 称为**高度为 t 的等值面**. 尤其是, 子空间 $X\times 0$ 和 $X\times 1$ 分别称为柱体 $X\times I$ 的**下底**与**上底**.

对于空间X中的一点 $x_0\in X$, 子空间 $x_0\times I\subset X\times I$ 称为**过该点 x_0 的直母线**.

定义3.4. 已知两个连续映射 $f,g: X\to Y$, 如果存在连续映射 $H: X\times I\to Y$,使得

$$H|X\times 0=f:X\to Y,\quad H|X\times 1=g:X\to Y,$$

则称映射f**同伦于**g; 此处,映射 H 称为从 f 到 g 的**一个伦移**,记为 $f\simeq g: X\to Y$,或 $f\simeq_H g$.



$f \simeq g : X \to Y$是指映射f 可在单位时间内, 连续形变为映射g

同调论的一个基本且深刻的性质是：

定理3.2. (**同伦不变性公理**)

如果 $f \simeq g : X \to Y$, 则 $f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y), \quad n \geq 0.$

定理的证明可以分解为两个初等结论。

初等几何关系： 欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 中的一个有序点列 $u_1, \cdots, u_{n+1} \subset \mathbb{R}^m$ 决定唯一一个仿射线性映射, 称为 $\mathbb{R}^m$ 中的一个**仿射** n **单形**

$$[u_1, \cdots, u_{n+1}] : \triangle_n \to \mathbb{R}^m,\ e_i \mapsto u_i$$

$$\sum_{1 \leq i \leq n+1} t_i \cdot e_i \mapsto \sum_{1 \leq i \leq n+1} t_i \cdot u_i.$$

它具有如下性质：

i) $[e_1, \cdots, e_{n+1}] = id : \Delta_n \to \Delta_n \subset \mathbb{R}^m$;

ii) $[u_1, \cdots, u_{n+1}] \circ \delta_n^i = [u_1, \cdots, u_{i-1}, \widehat{u_i}, u_{i+1}, \cdots, u_{n+1}]$,

从而有

$$(A) : \partial_n([u_1, \cdots, u_{n+1}]) = \sum_{1 \leq i \leq n+1} (-1)^i [u_1, \cdots, u_{i-1}, \widehat{u_i}, u_{i+1}, \cdots, u_{n+1}].$$

另一方面，令

$\widetilde{S}_k(\Delta_n) =$ 凸集 Δ_n 中仿射 k 单形所生成的交换群;

$\widetilde{S}_k(\Delta_n \times I) =$ 凸集 $\Delta_n \times I$ 中仿射 k 单形所生成的交换群群。

定义同态序列 $T_n : \widetilde{S}_n(\Delta_n) \to \widetilde{S}_{n+1}(\Delta_n \times I)$ 如下：

$$T_n([u_1, \cdots, u_{n+1}]) = \sum_{1 \leq i \leq n+1} (-1)^{i+1} [(u_1, 0), \cdots, (u_i, 0), (u_i, 1), \cdots, (u_{n+1}, 1)].$$

则由 (A) 式知, 在群 $\widetilde{S}_n(\Delta_n \times I)$ 中，下面的关系式成立：

$$\partial_{n+1} T_n([u_1, \cdots, u_{n+1}]) + T_{n-1} \partial_n([u_1, \cdots, u_{n+1}])$$

$$= [(u_1,0),\cdots,(u_{n+1},0)] - [(u_1,1),\cdots,(u_{n+1},1)]$$

尤其是，

引理1：则在群 $\widetilde{S}_n(\triangle_n\times I)$ 中，下述关系成立：

$$(B):\partial T([e_1,\cdots,e_{n+1}])+T\partial([e_1,\cdots,e_{n+1}])$$

$$=[(\mathrm{e}_1,0),\cdots,(e_{n+1},0)]-[(e_1,1),\cdots,(e_{n+1},1)].\square$$

定义映射 $l_t,:X\to X\times I,t=0,1$ 分别是空间 X 到柱底 $X\times 0$ 和柱顶 $X\times 1$ 的含入映射，即

$$l_t(x)=(x,t),x\in X,t=0,1.$$

作为引理1的应用，我们先来证明定理3.2的如下特殊情形。

引理2：$l_{0*}=l_{1*}:H_n(X)\to H_n(X\times I)$.

【证明】对于空间 X, 定义同态序列

$$T=\{T_n:S_n(X)\to S_{n+1}(X\times I)\}$$

如下：

1)对于空间 X 的每个 n 单形 $\sigma:\triangle_n\to X$, 令

$$T_n(\sigma):=(\sigma\times 1)_\#(T_n([e_1,\cdots,e_{n+1}]));$$

2) 作线性扩张，得同态 $T_n:S_n(X)\to S_{n+1}(X\times I)$.
则在连续映射 $\sigma\times 1:\triangle_n\times I\to X\times I$ 所诱导的链映射

$$(\sigma\times 1)_\#:S_n(\triangle_n\times I)\to S_n(X\times I)$$

之下, 群 $S_n(\triangle_n\times I)$ 中的关系(B), 被映为链群 $S_n(X\times I)$ 中的等式

$$\partial_{n+1}T_n(\sigma)+T_{n-1}\partial_n(\sigma)=l_{1\#}(\sigma)-l_{0\#}(\sigma).$$

它表明，同态序列 $T=\{T_n\}$ 是链映射 $l_{0\#}$ 和 $l_{1\#}$ 之间的一个链同伦. 根据命题2.4, 引理2 得证.$\square$

定理*3.2*的证明. 设 $H: X\times I\to Y$ 是从映射 f 到映射 g 的一个伦移. 定义映射

$$l_i,: X\to X\times I, i=0,1$$

分别是从空间 X 到柱底 $X\times 0$ 和柱顶 $X\times 1$ 的含入映射。则由 $f=H\circ l_0,\ \ g=H\circ l_1$ 以及诱导同态的函子性质知

$$f_*=H_*\circ l_{0*},\quad g_*=H_*\circ l_{1*}: H_n(X)\to H_n(Y).$$

其中，根据引理2，$l_{0*}=l_{1*}$. 据此得到 $f_*=g_*: H_n(X)\to H_n(Y),\quad n\geq 0.$

□

两个拓扑空间 X,Y 称为同伦等价的，记为 $X\simeq Y$，如果存在一对连续映射

$$X\underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y,$$

满足

$$f\circ g\simeq 1_Y,\ \ g\circ f\simeq 1_X.$$

此时，映射 f 称为**从空间 X 到 Y 的一个同伦等价**，映射 g 称为映射 f 的**同伦逆**.

定理3.3的一个直接推论是

推论3.2. 如果 $X\simeq Y$, 则 $H_n(X)\cong H_n(Y),\quad n\geq 0$

例3.1. 设 $t\in I$, 则含入映射 $X\times t\to X\times I$ 是同伦等价. 据此

$$H_n(X)\cong H_n(X\times I),\quad n\geq 0.$$

例3.2. 商空间 $X\times I/X\times 1$ 称为**以 X 为底的锥**，记为CX. 子空间 $X\times 1\subset X\times I$ 在商映射 $X\times I\to CX$ 下的像点，记为 $*$，称为锥 CX 的**顶点**. 由于含入映射 $*\to CX$ 是同伦等价，从而根据维数公理得:

$$H_0(CX)=\mathbb{Z};\quad H_n(CX)=0,\quad n\geq 1.$$

例3.3. n 维单位球体 $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq 1\}$ 的边界是 $n-1$ 维单位球面 $S^{n-1} = \partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| = 1\}$。从几何关系 $D^n \cong CS^{n-1}$ 得:

$$H_0(D^n) = \mathbb{Z}; \quad H_r(D^n) = 0, \quad r \geq 1.$$

复习题:

1.什么是链映射? 链映射如何诱导同调群的同态?

2.连续映射 $f: X \to Y$ 如何诱导同调群的同态?

3.为什么链同伦的链映射会诱导同调群的相同同态?

习题1: 求下列拓扑空间的同调群, 其中 Ω 是欧氏空间中的一个凸集:

$$X = pt,\ D^n,\ R^n,\ S^n - \{p\},\ \Omega$$

习题2:设 X, Y 是道路连通空间, $f: X \to Y$ 是连续映射.

证明诱导同态 $f_*: H_0(X) = \mathbb{Z} \to H_0(X) = \mathbb{Z}$ 是一个同构.

习题3:已知空间 X, Y. 连续映射 $f: X \to Y$ 称为**常值映射**, 如果存在 $c \in Y$ 使得 $f(X) = c$.

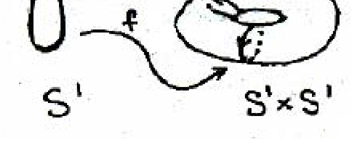
证明从X到球面S^n的非满映射必同伦于某个常值映射.

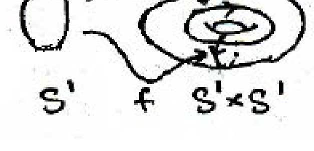
习题4: 设 X 道路连通, $x_1, x_2 \in X$. 考虑映射 $f, g: Y \to X \times Y$,

$$f(y) = (x_1, y), \quad g(y) = (x_2, y), \quad y \in Y.$$

证明 $f \simeq g$.

习题5: 判断从圆周 S^1 到环面 $S^1 \times S^1$ 的如下两对映射是否同伦?





习题6: 设子空间 $A \subset X$ 是 X 的收缩核，收缩映射是 $r : X \to A$.证明

1）含入映射 $i : A \to X$ 诱导单同态 $H_n(A) \to H_n(X)$, $n \geq 0$;

2）收缩映射 $r : X \to A$ 诱导满同态 $H_n(X) \to H_n(A)$, $n \geq 0$。

习题7: 设子空间 $A \subset X$ 是 X 的形变收缩核。证明含入映射 $i : A \to X$ 诱导同构 $H_n(A) \to H_n(X)$, $n \geq 0$;

§4 同调代数预备：正合序列

同调论的基本问题是：

1. 给定一个拓扑空间 X，计算它的各维同调群 $H_n(X), n > 0$；
2. 给定一个连续映射 $f : X \to Y$，决定它诱导同调群的同态

$$f_* : H_n(X) \to H_n(Y),\ n > 0.$$

为了有效解答这两个问题，代数学为同调论建立了一套特有的计算机制，称为“同调代数”。针对课程的需要，我们在本节对于相关内容，做一介绍。

1.正合序列:

定义4.1. 一个交换群的同态序列

$$\cdots \xrightarrow{h_{n+1}} G_n \xrightarrow{h_n} G_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} G_{n-2} \xrightarrow{h_{n-2}} \cdots$$

称为**正合序列**, 如果对于每个 n,

$$\mathrm{Im} h_{n+1} = \mathrm{Ker} h_n \subseteq G_n.$$

推论4.1. 正合序列是同调群平凡的链复形.

推论4.2. 在一个正合序列中，如果某个同态 h_n 是零同态，则 1) h_{n+1} 必为满同态; 2) h_{n-1} 必为单同态.

推论4.3. 在一个正合序列中，如果某群 G_n 平凡: $G_n = 0$, 则 h_{n+2} 必为满同态; h_{n-1} 必为单同态.

推论4.4. 任一交换群的同态 $f : A \to B$，可以嵌入到一个四项正合列中:

$$0 \to \mathrm{Ker} f \xrightarrow{\text{含入}} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\text{商}} B/\mathrm{Im} f \to 0$$

2.短正合列及可分裂性条件

定义4.2. 形如 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 的正合序列，也称为**短正合列**.

推论4.5. 在一个短正合列 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 中，

1) f 是单同态;

2) g 是满同态，且诱导群同构 $B/f(A) \to C$.

noindent

推论4.6. 已知两个交换群群 A, C。则有短正合列

$$0 \to A \xrightarrow{f} A \oplus C \xrightarrow{g} C \to 0$$

. 其中 f 是到第一个直和项的含入，g 是到第二个直和项的投影。

下面的例子表明，正合序列可看作“群和同态的方程”.

例4.1. 下面的例子表明，正合序列可看作“群和同态的方程”.

i) 已知短正合列 $0 \to A \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \to 0$. 求

$$A =?, \quad f, g =?$$

答： $g(n) = n \ mod \ 2, \quad n \in \mathbb{Z}$ 。从而

$$\mathrm{Ker} g = 2\mathbb{Z} = \mathrm{Im} f;$$

$$A = \mathbb{Z}; \quad f(n) = \pm 2n, \quad n \in A = \mathbb{Z}.$$

ii) 已知短正合列 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \to 0$. 求

$$B =?, \ f, g =?$$

答： $B = \mathbb{Z}$ 或 $B = Z \oplus Z_2$.

命题4.1. 在一个短正合列 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 中, 下列条件等价

1) 存在一个同态 $r : C \to B$ ，使得 $g \circ r = id : C \to C;$

2) 存在一个同态 $h : B \to A$ ，使得 $h \circ f = id : A \to A;$

3) 存在一个群同构 $F : B \to A \oplus C$ ，满足同态交换图表：

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F\downarrow\cong"] & C \arrow[r] & 0 \\ & & A \oplus C \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

其中底部同态分别是到第一个直和项的含入，以及到第二个直和项的投影：

$$A \to A \oplus C, a \to (a, 0); \quad A \oplus C \to C, (a, c) \to c.$$

证明. 采取循环证法。

$1) \Rightarrow 2)$：利用已知同态 $r : C \to B$ $(g \circ r = id : C \to C)$，定义集合间对应 $h : B \to A$ 为

$$h(b) = f^{-1}(b - r \circ g(b)).$$

则 h 定义合理, 且是一个群同态. 进一步，$h \circ f(a) = f^{-1}(f(a) - 0) = a$ 表明：

$$h \circ f = id : A \to A.$$

$2) \Rightarrow 3)$ ：利用已知同态 h 和 g , 定义同态 $F : B \to A \oplus C$ 为

$$F(b) := (h(b), g(b)).$$

如果 $F(b) = (h(b), g(b)) = (0, 0)$, 则 $b = 0$, 从而 F 是单同态；由 $F(f(a) + r(b)) = (a, b)$ 可知, F 是满同态。总之，F 是群同构。

$3) \Rightarrow 1)$：利用同构 F, 定义同态 $r : C \to B$ 为

$$r(c) = F^{-1}(0, c).$$

则 r 满足 $g \circ r = id : C \to C$。 □

推论4.7. 在一个短正合列 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 中，如果 C 有限生成的自由 $Abel$ 群，则 $B \cong A \oplus C$.

证明. 设 $c_1,\ldots,c_k\in C$ 是有限生成的自由 Abel 群 C 的一个加法基底。由于g 是满同态，存在元素 $b_1,\ldots,b_k\in B$ ，使得

$$g(b_i)=c_i,\ 1\le i\le k.$$

进一步，由于每个 $c_i\in C$ 生成群 C 的一个无限阶子群，元素 $b_i\in B$ 生成群 B 的一个无限阶子群。据此，对应

$$r(c_i)=b_i,\ 1\le i\le k$$

可扩张为唯一一个群同态 $r:C\to B$, 它满足

$$g\circ r=id:C\to C.$$

□

3.同调代数基本定理

定义4.3. 已知三个链复形 $A_*=\{A_n,\partial_A\},\ B_*=\{B_n,\partial_B\},\ C_*=\{C_n,\partial_C\}$; 以及链映射 $f=\{f_n\}:A_*\to B_*,\ g=\{g_n\}:B_*\to C_*$. 如果对于每个 $n\ge 0$, 同态序列

$$0\to A_n\xrightarrow{f_n}B_n\xrightarrow{g_n}C_n\to 0$$

是交换群的一个短正合列序列，则称 $0\to A_*\xrightarrow{f}B_*\xrightarrow{g}C_*\to 0$ 是**链复形的短正合序列列**。

图示：

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d] & B_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-2} \arrow[r, "f_{n-2}"] \arrow[d] & B_{n-2} \arrow[r, "g_{n-2}"] \arrow[d] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

其中:

1)垂直序列为链复形;

2)水平序列为 Abel 群的短正合列.

引理4.1. 已知链复形的短正合列 $0 \to A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \to 0$. 对于每个 n, 定义集合间的对应

$$\triangle_n : H_n(C_*) = \frac{Z_n(C_*)}{B_n(C_*)} \to H_{n-1}(A_*) = \frac{Z_{n-1}(A_*)}{B_{n-1}(A_*)}$$

为

$$\triangle_n[z] = [f_{n-1}^{-1} \circ \partial_B \circ g_n^{-1}(z)], \quad z \in Z_n(C)$$

则 $\triangle_n$ 定义合理, 且是一个群同态.

证明. 需要证明下述三个断言，其中前两个涉及映射 $\triangle_n[z]$ 定义的合理性, 第三个说明 $\triangle_n$ 是一个群同态。

1) 对于 $z \in Z_n(C)$ 有

$$f_{n-1}^{-1} \circ \partial_B \circ g_n^{-1}(z) \subseteq Z_{n-1}(A_*).$$

2) 对于 $a_1, a_2 \in f_{n-1}^{-1} \circ \partial_B \circ g_n^{-1}(z) \subseteq Z_{n-1}(A_*)$, 有

$$a_1 - a_2 \in B_{n-1}(A_*).$$

从而集合 $f_{n-1}^{-1} \circ \partial_B \circ g_n^{-1}(z)$ 中的元素决定了同调群 $H_{n-1}(A_*)$ 中的唯一元素。

3) $\triangle_n[z_1 + z_2] = \triangle_n[z_1] + \triangle_n[z_2]$.

断言1: 对于任一 $a \in f_{n-1}^{-1} \circ \partial_B \circ g_n^{-1}(z)$, 有 $a \in Z_{n-1}(A_*)$.

因为 f 是链映射, 有

$$f_{n-2}(\partial_A a) = \partial_B f_{n-1}(a) = 0,$$

其中第二个等式来自于

$$f_{n-1}(a) \in \partial_B g_n^{-1}(z) \subseteq B_{n-1}(B_*).$$

从 f_{n-2} 是单同态的性质知 $\partial_A a = 0$, 即 $a \in Z_{n-1}(A_*)$。

断言2: 对于任意 $a_1, a_2 \in f_{n-1}^{-1} \circ \partial_B \circ g_n^{-1}(z), \quad a_1 - a_2 \in B_{n-1}(A_*)$

取 $b_1, b_2 \in g_n^{-1}(z)$ ，使得 $\partial_B b_i = f_{n-1}(a_i)$. 因为

$$g_n(b_1 - b_2) = z - z = 0,$$

由序列 $0 \to A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \to 0$ 的正合性知, 存在 $a \in A_n$, 使得

$$f_n(a) = b_1 - b_2.$$

最后由

$$\begin{aligned} f_{n-1}(a_1 - a_2) &= \partial_B(b_1 - b_2) \quad (b_i\text{的取法}) \\ &= \partial_B f_n(a) \qquad\quad (a\text{的取法}) \qquad , \\ &= f_{n-1}(\partial_A(a)) \quad (f\text{是链映射}), \end{aligned}$$

以及同态 f_{n-1} 的单性得 $a_1 - a_2 = \partial_A(a) \in B_{n-1}(A_*)$。

断言3: 对于 $a_i \in f_{n-1}^{-1} \circ \partial_B \circ g_n^{-1}(z_i)$ ，其中 $z_i \in Z_n(C_*), i = 1, 2$，有

$$a_1 + a_2 \in f_{n-1}^{-1} \circ \partial_B \circ g_n^{-1}(z_1 + z_2).$$

从而得

$$\triangle_n[z_1 + z_2] = [a_1 + a_2] = [a_1] + [a_2] = \triangle_n[z_1] + \triangle_n[z_2].$$

$\square$

定义4.4. 上述引理中所建立的同调群之间的同态 $\triangle_n : H_n(C_*) \to H_{n-1}(A_*), n \geq 1$, 称为**连接同态**.

已知一个链复形短正合列

$$0 \to A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \to 0.$$

对每个 n，链映射$f : A \to B, \;\; g : B \to C$ 诱导同调群同态

$$H_n(A_*) \xrightarrow{f_*} H_n(B_*) \xrightarrow{g_*} H_n(C_*).$$

连接同态 $\triangle_n$ 的基本作用是将这些"短同态序列"串连起来，产生一个交换群的"长同态序列"

$$\cdots \xrightarrow{g_*} H_{n+1}(C_*) \xrightarrow{\triangle_{n+1}} H_n(A_*) \xrightarrow{f_*} H_n(B_*) \xrightarrow{g_*} H_n(C_*) \xrightarrow{\triangle_n} H_{n-1}(A_*) \xrightarrow{f_*} \cdots.$$

定理4.1. (**同调代数基本定理**) 链复形的短正合列

$$0 \to A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \to 0$$

所产生的同调群的同态序列：

$$\cdots \xrightarrow{g_*} H_{n+1}(C_*) \xrightarrow{\triangle_{n+1}} H_n(A_*) \xrightarrow{f_*} H_n(B_*) \xrightarrow{g_*} H_n(C_*) \xrightarrow{\triangle_n} H_{n-1}(A_*) \xrightarrow{f_*} \cdots.$$

是一个正合序列。

进一步，链复形的短正合列的交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_* \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B_* \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C_* \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_* \arrow[r, "f'"] & B'_* \arrow[r, "g'"] & C'_* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

诱导了同调群的长正合梯：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "g_*"] & H_{n+1}(C_*) \arrow[r, "\triangle_{n+1}"] \arrow[d, "\gamma_*"'] & H_n(A_*) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_*"'] & H_n(B_*) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\beta_*"'] & H_n(C_*) \arrow[r, "\triangle_n"] \arrow[d, "\gamma_*"'] & H_{n-1}(A_*) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_*"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "g'_*"] & H_{n+1}(C'_*) \arrow[r, "\triangle'_{n+1}"] & H_n(A'_*) \arrow[r, "f'_*"] & H_n(B'_*) \arrow[r, "g'_*"] & H_n(C'_*) \arrow[r, "\triangle'_n"] & H_{n-1}(A') \arrow[r, "f'_*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

证明：需要证明下述三个关系:

i) $\mathrm{Im}\triangle_n = \mathrm{Ker} f_* \subseteq H_{n-1}(A_*)$.

ii) $\mathrm{Im} f_* = \mathrm{Ker} g_* \subseteq H_n(B_*)$.

iii) $\mathrm{Im} g_* = \mathrm{Ker}\triangle_n \subseteq H_n(C_*)$.

关系式 $\mathrm{Im}\triangle_n = \mathrm{Ker} f_* \subseteq H_{n-1}(A_*)$ **的证明：**

a) $\mathrm{Im}\triangle_n \subseteq \mathrm{Ker} f_*$: 对于 $z \in Z_n(C_*)$ 有

$$f_*\triangle_n[z] = f_*[f_{n-1}^{-1} \circ \partial_B \circ g_n^{-1}(z)] = [\partial_B \circ g_n^{-1}(z)] = 0.$$

b) $\mathrm{Im}\triangle_n \supseteq \mathrm{Ker} f_*$: 设 $a \in Z_{n-1}(A_*)$ 满足 $f_*[a] = [f_{n-1}(a)] = 0$, 则存在 $b \in B_n$ 使得 $f_{n-1}(a) = \partial_B(b)$。令 $z = g_n(b) \in C_n$,则有

$$\partial_C(z) = g_{n-1}(f_{n-1}(a)) = 0.$$

它们表明：

$$z \in Z_n(C_*), \quad [a] = \triangle_n[z] \in \mathrm{Im}\triangle_n.$$

关系式 $\mathrm{Im} f_* = \mathrm{Ker} g_* \subseteq H_n(B_*)$ 的证明:

a) $\mathrm{Im} f_* \subseteq \mathrm{Ker} g_*$： 对于 $a \in Z_n(A_*)$，由序列

$$0 \to A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \to 0$$

的正合性知 $g_* \circ f_*[a] = [g_n \circ f_n(a)] = 0.$

b) $\mathrm{Im} f_* \supseteq \mathrm{Ker} g_*$： 对于 $[b] \in \mathrm{Ker} g_*, b_n(B_*)$, 有：

$$g_n(b) = \partial_C(c), c \in C_{n+1}.$$

任取 $b' \in g_{n+1}^{-1}(c)$，则有：

$b - \partial_B(b') \in Z_n(B_*)$; $[b] = [b - \partial_B(b')]$; 且 $g_n(b - \partial_B(b')) = 0.$

最后一个等式表明，存在 $a \in A_n$， 使得 $f_n(a) = b - \partial_B(b')$. 它表明

$$a \in Z_n(A_*); \quad f_*[a] = [b - \partial_B(b')] = [b].$$

关系式 $\mathrm{Im} g_* = \mathrm{Ker}\triangle_n \subseteq H_n(C_*)$ 的证明

a) 对于任一 $b \in Z_n(B_*)$ 有

$$\Delta_n \circ g_*[b] = [f_{n-1}^{-1}\partial_B g_n^{-1} g_n(b)] = 0$$

其中最后一个等式来自于集合 $f_{n-1}^{-1}\partial_B g_n^{-1} g_n(b)$ 中包含了零元 $\partial_B(b)$。它表明 $\mathrm{Im} g_* \subseteq \mathrm{Ker}\triangle_n$.

b) 反之，设 $\Delta_n[c] = 0, c \in Z_n(C_*)$. 则存在 $a \in A_n$ 使得 $\partial_A(a) \in f_{n-1}^{-1}\partial_B g_n^{-1}(c)$。 两边用 f_{n-1} 作用得到

$$f_{n-1}(\partial_A(a)) = \partial_B(f_n(a)) \in \partial_B g_n^{-1}(c)$$

它表明，存在 $b \in g_n^{-1}(c)$ 使得 $\partial_B(f_n(a)) = \partial_B(b)$。 令 $z = b - f_n(a) \in B_n$, 则得到

$$\partial_B(z) = 0, \quad g_n(z) = c \text{ 从而 } g_*[z]) = [c].$$

关系式 $\mathrm{Im}g_* \supseteq \mathrm{Ker}\triangle_n$ 得证。

复习题:

1.什么是 Abel 群的正合序列?

2.什么是短正合列?

3.什么是链复形的短正合列?

4.什么是链复形短正合列决定的同调长正合列?

5.复述链复形短正合列决定的同调长正合列中连接同态的定义.

习题1:已知短正合序列

$$0 \to A \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_p \to 0$$

其中 $p =$ 素数, 求群 $A =?$, 以及同态 $f =?, g =?$.

习题2:已知短正合序列

$$0 \to \mathbb{Z}_{p^m} \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_{p^n} \to 0$$

其中 $p =$ 素数, 求群 $A =?$, 以及同态 $f =?, g =?$.

习题3:已知有限生成 Abel 群的短正合序列

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

其中 C 自由(即 $C = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$). 证明 $B \cong A \oplus C$.

习题4:(5-引理),已知 Abel 群同态的交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\
{\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow & & {\scriptstyle f_5}\downarrow \\
B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5
\end{array}$$

其中水平序列为正合列, 证明

1)如果 f_2, f_4 满且 f_5 单,则 f_3 满;

2)如果 f_2, f_4 单且 f_1 满,则 f_3 单;

3)如果 f_2, f_4 是同构, 且 f_5 单, f_1 满,则 f_3 是同构.

习题5: 证明在定理4.1的证明中所陈述的关系式iii)。

§5 空间偶的同调群

在§3 中，我们如下途径，对于拓扑空间建立了同调理论：

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{空间} & & \text{链复形} & & \text{同调群} \\
X & \xrightarrow{\text{联系到}} & S_*(X) & \xrightarrow{\text{联系到}} & H_n(X), n \geq 0 \\
\text{映射} & & \text{链映射} & & \text{同调群的同态} \\
X \xrightarrow{f} Y & \longrightarrow & S_*(X) \xrightarrow{f_\#} S_*(Y) & \longrightarrow & H_n(X) \xrightarrow{f_*} H_n(Y)
\end{array}
$$

本节将把上述途径，推广到空间偶的情形.

1.空间偶的范畴

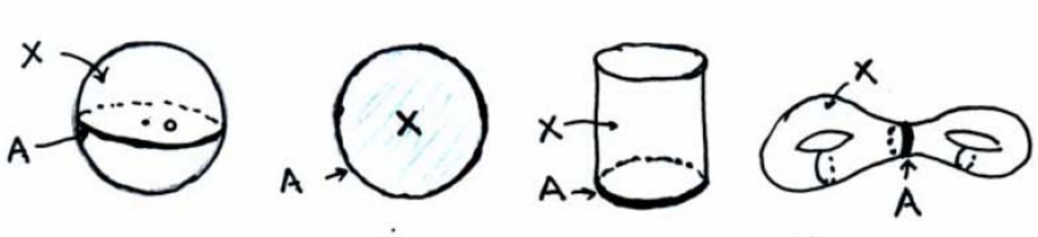
要了解一个空间 X 的几何结构或同调性质，可从如下角度入手

1）找出空间 X 中一个熟知的子空间 $A \subset X$,

2) 描述空间 X 与子空间 A 的差异。

这一考虑导致了空间偶的范畴，以及空间偶的同调理论。

定义5.1. 如果 $A \subseteq X$ 是一个子空间，则空间对 (X, A) 称为一个**空间偶**.



空间偶 (X, A) 的例子

定义5.2. 已知两个空间偶 (X, A) 与 (Y, B)，以及连续映射 $f: X \to Y$。如果 $f(A) \subseteq B$, 则称 f 是**从空间偶** (X, A) **到空间偶** (Y, B) **的连续映射**，记为

$$f : (X, A) \to (Y, B).$$

已知两个空间偶间的连续映射 $f, g : (X, A) \to (Y, B)$。它们称为**同伦地**, 记为

$$f \simeq g : (X, A) \to (Y, B),$$

如果存在空间偶的连续映射 $H:(X\times I,A\times I)\to(Y,B)$, 满足

$$H(x,0)=f(x);\qquad H(x,1)=g(x),\quad x\in X.$$

注5.1. 单个空间 X 可视为空间偶 $(X,\emptyset)$. 据此,有空间偶的含入映射

$$j:(X,\emptyset)\to(X,A).$$

2.空间偶的同调群

对于一个空间偶 (X,A), 含入映射 $i:A\to X$ 诱导链复形的单同态

A的链复形　X的链复形

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_n(A) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\partial_A"'] & S_n(X) \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, "\partial_X"'] & S_n(X,A) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{n-1}(A) \arrow[r, "i_{n-1}"] & S_{n-1}(X) \arrow[r, "j_{n-1}"] & S_{n-1}(X,A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中

1) $i_n:S_n(A)\to S_n(X)$ 表示含入映射 $i:A\to X$ 所诱导的链映射;

2) $S_n(X,A):=S_n(X)/S_n(A)$ 是Abel 群 $S_n(X)$ 关于它的子群 $S_n(A)$ 的商群;

3) $j_n:S_n(X)\to S_n(X,A)$ 是显然的商同态.

由于 $\partial_X|S_n(A)=\partial_A$, 同态 ∂_X 可下放为商群间唯一一个同态，记为

$$\partial_{(X,A)}:S_n(X,A)\to S_{n-1}(X,A).$$

引理5.1. 已知如上.

1) 对于任一空间偶 (X,A), 交换群的同态序列

$$S_*(X,A)=\{S_n(X,A);\partial_{(X,A)}|n\geq 0\}$$

是一个链复形;

2) 商同态序列 $j_\#=\{j_n:S_n(X)\to S_n(X,A)\}$ 是链映射;

3) 链映射的序列

$$0\to S_*(A)\xrightarrow{i_\#}S_*(X)\xrightarrow{j_\#}S_*(X,A)\to 0$$

是一个链复形短正合列。

证明. 1) 由于 $\partial_{(X,A)}$ 是边缘同态 ∂_X 的下放同态，且 $\partial_X \circ \partial_X = 0$，得到 $\partial_{(X,A)} \circ \partial_{(X,A)} = 0$.

2) 根据 $\partial_{(X,A)}$ 的定义，有

$$\partial_{(X,A)} \circ j_n = j_{n-1} \circ \partial_{(X,A)}$$

它表明商同态序列 $j_\# = \{j_n : S_n(X) \to S_n(X,A)\}$ 是一个链映射.

3) 设 $h : G \to H$ 是 Abel 群单同态，则同态序列

$$0 \to G \xrightarrow{h} H \to H/G \to 0$$

是一个短正合序列.

$\square$

对于一个空间偶的连续映射 $f : (X,A) \to (Y,B)$，考虑同态下放问题

$$\begin{array}{ccc}
S_n(A) & & S_n(B) \\
\downarrow i & & \downarrow i \\
S_n(X) & \xrightarrow{f_n} & S_n(Y) \\
\downarrow & & \downarrow \\
S_n(X,A) & \xrightarrow{?} & S_n(Y,B)
\end{array}$$

由于 $f_n|S_n(A) = (f|A)_n : S_n(A) \to S_n(B)$，它有唯一一解

$$f_n : S_n(X,A) \to S_n(Y,B), \quad n \geq 0,$$

并且是一个是链映射。

引理5.2. 空间偶的连续映射 $f : (X,A) \to (Y,B)$ 诱导链映射

$$f_\# = f_n : S_*(X,A) \to S_*(Y,B)$$

具有如下性质：

1) 如果 $f = 1 : (X,A) \to (X,A)$ 是空间偶的恒同映射*,* 则 $f_\# = id : S_*(X,A) \to S_*(X,A)$ 是恒同链映射*;*

2) 如果 $f : (X,A) \to (Y,B)$，$g : (Y,B) \to (Z,D)$ 是两个空间偶的连续映射，则

$$(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\# : S_*(X,A) \to S_*(Z,D);$$

3) 满足链复形的短正合梯:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & S_*(A) & \xrightarrow{i_\#} & S_*(X) & \xrightarrow{j_\#} & S_*(X,A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f|A)_\#} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_\#} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_\#} & & \\
0 & \longrightarrow & S_*(B) & \xrightarrow{i_\#} & S_*(Y) & \xrightarrow{j_\#} & S_*(Y,B) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

证明. □

定义5.3. 链复形 $S_*(X,A)=\{S_n(X,A);\partial_{(X,A)}|n\geq 0\}$ 称为**空间偶** (X,A) **的链复形**，令

$$Z_n(X,A)=Z_n(S_*(X,A)),\quad B_n(X,A)=B_n(S_*(X,A)),$$

它们分别称为空间偶 (X,A) 的 n **维闭链群**和 n **维边缘链群**. 它所决定的同调群，记为

$$H_n(X,A)=:Z_n(X,A)/B_n(X,A)$$

称为**空间偶** (X,A) **的第** n **维同调群.**

命题5.1. 对于商同态 $j_n:S_n(X)\to S_n(X,A)$， 以及 $z\in S_n(X)$，下述结论成立:

1) $j_n(z)\in Z_n(X,A)\Longleftrightarrow \partial_{(X,A)}z\in S_{n-1}(A)$;

2) $j_n(z)\in B_n(X,A)\Longleftrightarrow \exists z'\in S_{n+1}(X)$ 使得 $\partial_{(X,A)}z'=z+\beta,\quad \beta\in S_n(A)$.

定义5.4. 设 $f_\#=\{f_n:S_n(X,A)\to S_n(Y,B)\}$ 是空间偶的连续映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 所诱导的链映射，它决定的同调群的同态，记为

$$f_*:H_n(X,A)\to H_n(Y,B),\quad n\geq 0$$

称为 f **诱导的同调群的同态**.

定理5.1. 空间偶的同调群以及空间偶的连续映射的诱导同态有如下性质:

1) **维数公理***:* 单点空间 $X=pt$ 的同调群是

$$H_n(pt)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & \text{如果} n=0;\\ 0, & \text{如果} n>0.\end{cases}$$

2) **函子公理:** 空间偶的恒同映射 $f=id:(X,A)\to(X,A)$ 的诱导同态是恒同同构:

$$f_*=id:H_n(X,A)\to H_n(X,A);$$

对于两个空间偶的映射 $f:(X,A)\to(Y,B),\ g:(Y,B)\to(Z,C)$, 它们的复合映射所诱导同态是诱导同态的复合:

$$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*:H_n(X,A)\to H_n(Z,C).$$

3) **同伦不变性公理:** 同伦的映射 $f\simeq g:(X,A)\to(Y,B)$ 诱导同调群的相同同态:

$$f_*=g_*:H_n(X,A)\to H_n(Y,B);$$

4)**正合性公理:** 对于一个空间偶 (X,A) 下列同调群同态序列是正合序列:

$$\cdots\xrightarrow{j_*}H_{n+1}(X,A)\xrightarrow{\triangle_n}H_n(A)\xrightarrow{i_*}H_n(X)\xrightarrow{j_*}H_n(X,A)\xrightarrow{\triangle_n}H_{n-1}(A)\xrightarrow{i_*}\cdots,$$

其中$i:A\to X,\ j:(X,\emptyset)\to(X,A)$ 是含入映射。

空间偶连续映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 诱导同调群的正合梯:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "j_*"] & H_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\triangle_n"] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(f|A)_*"'] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(X,A) \arrow[r, "\triangle_n"] \arrow[d, "f_*"'] & H_{n-1}(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(f|A)_*"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "j_*"] & H_{n+1}(Y,B) \arrow[r, "\triangle_n"] & H_n(B) \arrow[r, "i_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\triangle_n"] & H_{n-1}(B) \arrow[r, "i_*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

证明. 性质 1), 2) 平凡.

3) 令 $l_i:(X,A)\to(X\times I,A\times I),\quad i=0,1,$ 分别为至下底和上底的含入. 它们诱导链复形的短正合梯:

$$\begin{tikzcd}
S_n(A) \arrow[r, "i_\#"] \arrow[d, "(l_i|A)_\#"'] & S_n(X) \arrow[r, "j_\#"] \arrow[d, "l_i\#"'] & S_n(X,A) \arrow[d, "l_i\#"'] \\
S_n(A\times I) \arrow[r, "i_\#"] & S_n(X\times I) \arrow[r, "j_\#"] & S_n(X\times I,A\times I)
\end{tikzcd}$$

并且存在如下链伦移(参见定理3.3的证明)：

$$T_A = \{T_n : S_n(A) \to S_{n+1}(A \times I)\}, \quad (l_0|A)_\# \simeq_{T_A} (l_1|A)_\#;$$

$$T_X = \{T_n : S_n(X) \to S_{n+1}(X \times I)\}, \;\; l_{0\#} \simeq_{T_X} l_{1\#}.$$

由于 $T_X|S_*(A) = T_A$，链伦移 T_X 可以下放为唯一一个商同态(定理1.1)

$$\begin{array}{ccccc} S_n(A) & \xrightarrow{i_\#} & S_n(X) & \xrightarrow{j_\#} & S_n(X,A) \\ {\scriptstyle T_A}\downarrow & & {\scriptstyle T_X}\downarrow & & {\scriptstyle T_{(X,A)}}\downarrow \\ S_{n+1}(A \times I) & \xrightarrow{i_\#} & S_{n+1}(X \times I) & \xrightarrow{j_\#} & S_{n+1}(X \times I, A \times I) \end{array}$$

它亦是空间偶链复形的链映射之间的链伦移：

$$l_{0\#} \simeq_{T_{(X,A)}} l_{1\#} : S_*(X,A) \to S_*(X \times I, A \times I).$$

根据命题3.4，性质 3) 得证.

4)根据同调代数基本定理（定理4.1），链复形短正合列

$$0 \to S_*(A) \xrightarrow{i_\#} S_*(X) \xrightarrow{j_\#} S_*(X,A) \to 0$$

诱导了同调群长正合列(定理4.1).

正合梯来自于引理5.1，以及定理4.1. □

注5.2. 空间偶 (X,A) 的同调正合列截止于

$$\cdots \xrightarrow{\triangle_n} H_0(A) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X,A) \to 0.$$

*3.*空间偶同调正合列的应用

空间偶 (X,A) 的同调群代数地测量“子空间 A 与整个空间 X 的几何差别”. 例如, 根据定义, 我们有,

推论5.1. $H_n(X,\emptyset) = H_n(X); \quad H_n(X,X) = 0.$

证明. 第一个同构来自于 $S_n(X,\emptyset) = S_n(X)$. 第二个同构来自于 $S_n(X,X) = 0$. □

进一步, 空间偶 (X, A) 的同调正合列表述了三组群

$$H_n(A), \quad H_n(X), \quad H_n(X, A), \quad n \geq 0,$$

之间的关系. 本段关注如下两种情形:

定义5.5. 子空间 $A \subset X$ 称为 X 的**收缩核**, 如果存在连续映射 $r : X \to A$, 使得 $r|A = id : A \to A$. 此时称 r 是从 X 到 A 的一个**收缩映射**.

进一步, 子空间 A 称为 X 的**形变收缩核**, 如果 $r \circ r \simeq id : X \to X$, 此处, $i : A \to X$ 是自然含入映射.

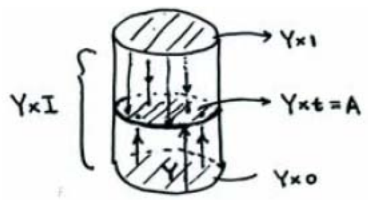
例5.1. 设 $(X, A) = (Y \times I, Y \times t_0)$, $t_0 \in I$, 则

1) 子空间 $Y \times t_0$ 是 $Y \times I$ 的收缩核, 收缩映射是

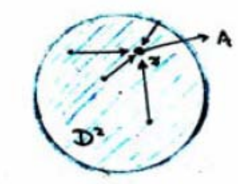
$$r(y, s) = (y, t_0), \quad (y, s) \in Y \times I;$$

2) $Y \times t_0$ 是 $Y \times I$ 的形变收缩核: 所需伦移是

$$H : (Y \times I) \times I \to Y \times I, \; H((y, s), t) = (y, ts + (1 - t)t_0).$$



例1



例 2

例5.2. 设 $(X, A) = (D^n, x_0)$, $x_0 \in D^n$, 则

1) 点 x_0 是 D^n 的收缩核: 收缩映射为到点 x_0 的常值映射;

2) 点 x_0 是 D^n 的形变收缩核: 所需伦移是

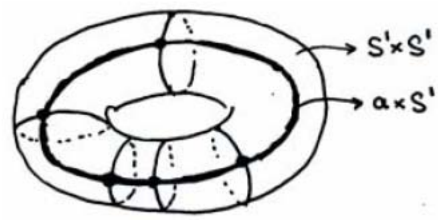
$$H : D^n \times I \to D^n, \quad H(y, t) = tx_0 + (1 - t)y.$$

例5.3. 已知两空间 Y, Z, 以及 Y 中一点 $a \in Y$, 考虑 $(X, A) = (Y \times Z, a \times Z)$. 则

1) 子空间 $a \times Z \subset Y \times Z$ 是收缩核，收缩映射是“到第二个因子的投影”

$$r : Y \times Z \to a \times Z, \quad r(y, z) = (a, z), \quad (y, z) \in Y \times Z.$$

*2)*一般说来，子空间 $a \times Z \subset Y \times Z$ 不是形变收缩核（待证）.



图示：当 $Y = Z = S^1$ 时,收缩映射 r 将每一经圆映为它与固定纬圆 $a \times S^1$ 的交点.

命题5.2. 已知一个空间偶 (X, A),

1) 如果 $A \subseteq X$ 是收缩核，则 $H_n(X) = H_n(A) \oplus H_n(X, A)$;

2) 如果 $A \subseteq X$ 是形变收缩核，则 $H_n(X, A) = 0$.

证明. 1) 设 $r : X \to A$ 为一个收缩映射，由于 $r \circ i = id : A \to A$, 空间偶 (X, A) 的同调正合列

$$\cdots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\triangle_n} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\triangle_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{j_*} \cdots$$

断裂为短正合列

$$0 \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \to 0$$

其中，收缩映射 r 的诱导同态满足 $r_* \circ i_* = id : H_n(A) \to H_n(A)$。根据命题4.1, 结论 1) 得证.

2) 如果 $A \subseteq X$ 是形变收缩核，则 $i : A \to X$ 是同伦等价，从而

$$i_* : H_n(A) \to H_n(X)$$

是同构，正合性断言 $H_n(X, A) = 0$. □

习题1: 设 X 道路连通, $x \in X$, $j : (X, \emptyset) \to (X, x)$ 是含入映射. 证明

1) $H_0(X, x) = 0$;

2) $r \geq 1$ 时, $j_* : H_r(X) \to H_r(X, x)$ 是同构.

【提示】$x \in X$ 是一个收缩核。

习题2: 设 X, Y 道路连通, 且 $f : X \to Y$ 是常值映射. 证明同态 $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ 当 $n = 0$ 时同构; 当 $n \geq 1$ 时为零同态。

习题3: 设 $n \geq 2$. 证明在空间偶 (D^n, S^{n-1}) 的同调正合列中, 连接同态

$$\Delta_k : H_k(D^n, S^{n-1}) \to H_{k-1}(S^{n-1}), k \geq 2$$

是一个同构。

习题4: 如果 $A \subset X = X_1 \coprod X_2$, 其中 X_i 道路连通. 则

$$H_n(X, A) = H_n(X_1, A_1) \oplus H_n(X_2, A_2),$$

其中 $A_i = X_i \cap A$.

习题5: 对于闭区间 $D^1 = [-1, 1]$, 令 $A = \{\pm 1\}$ 。证明

i) $H_k(D^1, \{\pm 1\}) = \begin{cases} Z, k = 1 \\ 0, k \geq 2 \end{cases}$.

ii) 设 ω 是群 $H_1(D^1, \{\pm 1\}) = Z$ 的一个生成元, 则连接同态

$$\triangle_1 : H_1(D^1, \{\pm 1\}) \to H_0(\{\pm 1\}) = Z \oplus Z$$

满足 $\triangle_1(\omega) = (1, -1)$.

iii) 令 $g : (D^1, \{\pm 1\}) \to (D^1, \{\pm 1\})$ 为 $g(t) = -t$. 则 $g_*(\omega) = -\omega$.

习题6: 如果 X 道路连通且 $A \neq \emptyset$, 则 $H_0(X, A) = 0$.

习题7: 证明 $H_0(X, A) = 0$ 的充分必要条件是, A 与 X 的每个道路连通分支相交。

习题8: 对于子空间序列 $B \subseteq A \subseteq X$, 有三个空间偶及含入映射

$$i:(A,B)\to(X,B),\ \ j:(X,B)\to(X,A).$$

证明它们诱导链复形的短正合列**:**

$$0\to S_*(A,B)\xrightarrow{i_\#}S_*(X,B)\xrightarrow{j_\#}S_*(X,A)\to 0$$

进而诱导同调群长正合列:

$$\cdots\xrightarrow{j_*}H_{n+1}(X,A)\xrightarrow{\triangle_n}H_n(A,B)\xrightarrow{i_*}H_n(X,B)\xrightarrow{j_*}H_n(X,A)\xrightarrow{\triangle_n}H_{n-1}(A,B)\xrightarrow{i_*}\cdots,$$

它称为**空间三元组** (X,A,B) **的同调正合列**.

§6 切除公理及应用

*1.*切除公理

定理6.1. ***(切除公理)*** 已知空间偶 (X, A). 以及子空间 $U \subseteq A$. 如果 $\overline{U} \subseteq \mathring{A}$, 则含入映射 $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ 诱导同构

$$H_n(X \setminus U, A \setminus U) \cong H_n(X, A), \quad n \geq 0,$$

其中 $\mathring{A} = \{x \in A |\ x在X中有一个开邻域U_x \subseteq X, 满足U_x \subseteq A\}$.

切除公理得证明需要两项准备。第一个是同调代数中的“**5-引理**”

引理6.1. *(5-引理)*, 已知交换群同态的交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\
{\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow & & {\scriptstyle f_5}\downarrow \\
B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5
\end{array}$$

其中水平序列是正合序列。如果 f_1, f_2, f_4, f_5 均是同构, 则 f_3 也是同构。

证明. **断言1** f_3 是单同态: 设 $f_3(a) = 0$, $a \in A_3$. 则存在 $a_2 \in A_2$, 使得 $\alpha_2(a_2) = a$. 进一步, 由于 $\beta_2 \circ f_2(a_2) = f(a) = 0$, 存在 $b_1 \in B_1$, 使得 $\beta_1(b_1) = f_2(a_2)$. 由于 f_1 是同构, 存在 $a_1 \in A_1$, 使得 $\alpha_1(a_1) = a_2$. 总之得 $a = \alpha_2 \circ \alpha_1(a_1) = 0$.

断言2 f_3 是满同态: 对于任一 $b \in B_3$ 存在 $a_4 \in A_4$, 使得 $f_4(a_4) = \beta_3(b)$. 进一步, 存在 $a_3 \in A_3$ 使得 $\alpha_3(a_3) = a_4$. 据此, 存在 $b_2 \in B_2$ 使得 $\alpha_2(b_2) = b - f(a_3)$. 取 $a_2 \in A_2$ 使得 $f_2(a_2) = b_2$ 最后, 令 $a := \alpha_2(a_2) - a_3$, 则得 $f_3(a) = b$. □

已知拓扑空间 X, 以及它的一个复盖 $\mu = \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, 满足性质

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathring{U}_\lambda.$$

X 的一个 n 维奇异单形 $\sigma:\triangle_n\to X$ 称为 $\mu-$**小的**, 如果存在 $\lambda\in\Lambda$, 使得 $\sigma(\triangle_n)\subset U_\lambda$. 对于一个 $\mu-$ 小的 n 维奇异单形，则它的每个面 $\sigma\circ\delta_n^i:\triangle_{n-1}\to X$ 也是一个 $\mu-$ 小的 $n-1$ 维奇异单形. 据此，设

$$S_n^\mu(X)=\{\sum_{\sigma:\triangle_n\to X\ \text{是}\mu-\text{小的}} a_\sigma\cdot\sigma|\ a_\sigma\in\mathbb{Z}, a_\sigma\neq 0\text{有限}\},$$

则有

1) $S_n^\mu(X)$ 是 $S_n(X)$ 的一个子群，从而有一个含入同态

$$l_n:S_n^\mu(X)\to S_n(X);$$

2) X 的链复形的边缘同态 $\partial:S_n(X)\to S_{n-1}(X)$ 将子群 $S_n^\mu(X)$ 映入子群 $S_{n-1}^\mu(X)$，即

$$\partial^\mu=:\partial|S_n^\mu(X):S_n^\mu(X)\to S_{n-1}^\mu(X).$$

于是我们获是一个新的链复形 $S_*^\mu(X)=\{S_n^\mu(X),\partial^\mu|n\geq 0\}.$，称为空间$X$ **的** $\mu-$ **小的链复形**，以及一个链映射 $l=\{l_n:S_n^\mu(X)\to S_n(X)\}$.

引理6.2. 存在一个链映射 $\kappa:S_*(X)\to S_*^\mu(X)$ 满足

$$\kappa\circ l=id:S_*^\mu(X)\to S_*^\mu(X);\quad l\circ\kappa\simeq id:S_*(X)\to S_*(X).$$

据此, 链映射 l 诱导同调群的同构 $H_n(S_*^\mu(X))\cong H_n(X),\quad n\geq 0.$

证明. 见本节末尾。 □

切除公理证明. 根据已知,

1) $\mu=\{X\setminus U,A\}$ 是空间 X 的一个复盖, 满足 $X=(X\setminus\overline{U})\cup\overset{\circ}{A}$

2) $\mu|A=\{A\setminus U,A\}$ 是子空间 A 的一个复盖, 满足 $A=(A\setminus\overline{U})\cup\overset{\circ}{A}$

从而有链复形短正合列的交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_n^{\mu|A}(A) \arrow[r] \arrow[d, "l_n|A"'] & S_n^\mu(X) \arrow[r] \arrow[d, "l_n"'] & S_n^\mu(X)/S_n^{\mu|A}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{l_n}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_n(A) \arrow[r] & S_n(X) \arrow[r] & S_n(X,A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 $l_n, l_n|A$ 是自然含入, $\overline{l_n}$ 是同态 l_n 的下放. 由于

$$S_n^{\mu}(X) = S_n(X \setminus U) + S_n(A);$$
$$S_n^{\mu|A}(A) = S_n(A \setminus U) + S_n(A).$$

(注意, 上述分解非直积分解), 故有

$$S_n^{\mu}(X)/S_n^{\mu|A}(A) = S_n(X \setminus U)/S_n(A \setminus U) = S_n(X \setminus U, A \setminus U).$$

并且 $\overline{l_n}$ 恰是含入映射 $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ 所诱导的链映射.

至此, 上述链复形短正合梯所诱导同调群长正合梯是

$$\begin{tikzcd}
\cdots H_n(S_*^{\mu|A}(A)) \arrow[r] \arrow[d, "(l|A)_*"'] & H_n(S_*^{\mu}(X)) \arrow[r] \arrow[d, "l_*"'] & H_n(X \setminus U, A \setminus U) \arrow[r] \arrow[d, "l_*"'] & H_{n-1}(S_*^{\mu|A}(A)) \arrow[r] \arrow[d, "(l|A)_*"'] & H_{n-1}(S_*^{\mu}(X)) \cdots \arrow[d, "l_*"'] \\
\cdots H_n(A) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X, A) \arrow[r] & H_{n-1}(A) \arrow[r] & H_{n-1}(X) \cdots
\end{tikzcd}$$

根据定理6.1，同态 $(l|A)_*$, l_* 均是群同构。根据5-引理, l_* 是群同构。 □

2. Steenrod-Eilenberg 同调公理

塞缪尔·艾伦伯格*((Samuel Eilenberg))* 和桑德斯·麦克莱恩*(Saunders MacLane)* 于*1942-45* 年在对同调群的研究中, 引入了**范畴**、**函子** 的概念. 目前已经发展为研究数学的不同领域之间所具有的保持结构的联系的理论。

定义：一个范畴 C 由三个要素构成：

1) 一个元素称为**对象**的集合 $Ob(C)$;

2) 对于每两个对象 $X, Y \in Ob(C)$，指定了一个集合 $Mor(X, Y)$,其中的元素称为从 X 到 Y 的一个**态射**; 并存在一个单位元 $1_X \in Mor(X, X)$;

3) 对于每三个对象 $X, Y, Z \in Ob(C)$，存在一个复合法则 $Mor(X, Y) \times Mor(Y, Z) \to Mor(X, Z)$, 满足关系

$$f \circ 1 = 1 \circ f = f, \ (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

两个范畴 C, C' 之间的一个**函子**是一个对应 $F : C \mapsto C'$, 满足

i 对于每个$X \in Ob(C)$, $F(X) \in Ob(C')$;

ii) 对于每个$f \in Mor(X, Y)$, $F(f) \in Mor(F(X), F(Y))$;

iii) $F(1_X) = 1_{F(X)}, X \in Ob(C)$; $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

【例*1*. 拓扑范畴 Top】

对象：$Ob(Top) :=$ 全体空间偶 (X, A) 的集合

态射：$Mor((X, A), (Y, B) :=$ 空间偶 (X, A), (Y, B) 之间的全体连续映射 $f : (X, A) \to (Y, B)$ 的集合.

【例*2*. 交换群范畴 Grp】

对象：$Ob(Grp) :=$ 全体交换群 G 的集合

态射： $Mor(G, H) :=$ 交换群 G, H 之间的全体同态 $h : G \to H$ 的集合.

***Steenrod-Elienberg* 同调公理：** 同调论是从拓扑范畴到交换群范畴的一个函子 $H : Top \Rightarrow Grp$:

空间偶 $(X, A) \Rightarrow$ 同调群 $H_n(X, A)$, $n \geq 0$;

连续映射 $f : (X, A) \to (Y, B) \Rightarrow$ 诱导同态 $f_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.

它具有下述性质：

公理6.1. *(***维数公理***)*: 如果 $X = pt$ 是单点空间，则

$$H_n(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & 如果 n = 0; \\ 0, & 如果 n > 0. \end{cases}$$

公理6.2. *(***函子公理***)*: 连续映射的诱导同态具有下述性质:

1) 如果 $f = id : (X, A) \to (X, A)$, 则

$$f_* = id : H_n(X, A) \to H_n(X, A);$$

2) 对于 $f : (X, A) \to (Y, B), \quad g : (Y, B) \to (Z, C)$,

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_n(X, A) \to H_n(Z, C).$$

公理6.3. *(同伦不变性公理): 如果 $f \simeq g : (X,A) \to (Y,B)$, 则*

$$f_* = g_* : H_n(X,A) \to H_n(Y,B).$$

公理6.4. *(正合性公理): 对于空间偶 (X,A), 有同调群的正合序列*

$$\cdots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\triangle_n} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\triangle_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots,$$

其中 $i : A \to X$, $\quad j : (X,\emptyset) \to (X,A)$ 是自然含入映射.

进而, 空间偶的连续映射 $f : (X,A) \to (Y,B)$ 诱导同调群的正合梯

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "j_*"] & H_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\triangle_n"] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(f|A)_*"'] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(X,A) \arrow[r, "\triangle_n"] \arrow[d, "f_*"'] & H_{n-1}(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(f|A)_*"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "j_*"] & H_{n+1}(Y,B) \arrow[r, "\triangle_n"] & H_n(B) \arrow[r, "i_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\triangle_n"] & H_{n-1}(B) \arrow[r, "i_*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

公理6.5. *(切除公理): 已知空间偶 (X,A). 如果 $U \subseteq A$ 是一个子空间, 满足 $\overline{U} \subseteq \mathring{A}$, 则含入映射 $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ 诱导各维同调群的同构*

$$H_n(X \setminus U, A \setminus U) \cong H_n(X,A), \quad n \geq 0.$$

公理6.6. *(唯一性公理): 如果 $F : Top \Rightarrow Grp$ 是从拓扑范畴到交换群范畴的另一个函子, 满足公理 $6.1-6.5$, 则 $F = H$.*

注6.1. *1). 切除定理事实上等价于M-V正合序列.*

2). 根据唯一性公理, 公理 $6.1-6.5$ 构成同调论的完整理论基础.

3). 公理性质 $6.1-6.5$ 是同调论计算和应用的说明书.

*3.*切除定理的常用形式

为简单起见, 我们假设所有拓扑空间 X 均为道路连通的紧致 T_2 空间, 从而也是 T_4 空间; $A \subseteq X$ 是一个闭子空间.

定义6.1. 空间 X 的闭子空间 $A \subset X$ 称为 X 的一个**强形变收缩核**, 如果存在同伦 $H : X \times I \to X$, 满足以下条件**:**

i) $H(x,0) = x, \quad x \in X;$

ii) $H(a,t)=a,\quad (a,t)\in A\times I;$

iii) $H(x,1)\in A,\quad x\in X.$

空间 X 的闭子空间 $A\subset X$ 称为 X 的一个**绝对邻域收缩核**，如果 A 在 X 中有一个开邻域 $A\subset U\subset X$, 它以 A 为强形变收缩核。

例6.1. 在一个柱空间 $X\times I$ 中，下底 $X\times 0\subset X\times I$ 是一个强形变收缩核.

在一个映射柱空间 $M_f=A\cup_f X\times I$ 中，子空间 $A\subset M_f$ 是一个强形变收缩核.

对于下述两个空间偶

$$(X,A)=(D^n,S^{n-1}),\ (A\cup_f D^n,A)$$

子空间 $A\subset X$ 均是 X 的**绝对邻域收缩核**

引理6.3. 设 $A\subset X$ 是空间 X 的一个**强形变收缩核**, 考虑粘合映射 $\pi:(X,A)\to(X/A,y),\ y=\pi(A)$. 则点 y 是商空间的 X/A 的强形变收缩核。尤其是**:**

$$H_n(X,A)=0,\quad H_n(X/A,y)=0,\ \forall n\geq 0.$$

证明. 设 $H:X\times I\to X$ 是相应的同伦。考虑映射的下放问题**:**

$$\begin{array}{ccc} X\times I & \xrightarrow{H} & X \\ \pi\times id\downarrow & & \downarrow\pi \\ X/A\times I & \xrightarrow{\overline{H}} & X/A \end{array}$$

由于 $H(A\times I)\subset A$, 存在集合间的映射 $\overline{H}:X/A\times I\to X/A$, 满足上面的交换图表。下证 $\overline{H}$ 连续。对于一个闭子集 $C\subset X/A$, 有

$$\overline{H}^{-1}(C)=\pi\times id((\pi\circ H)^{-1}(C)),$$

其中, 由于 $\pi\circ H$ 连续，$(\pi\circ H)^{-1}(C)\subset X\times I$ 是闭子空间，从而紧致。上式表明 $\overline{H}^{-1}(C)\subset X/A\times I$ 紧致，从而闭。 $\square$

定理6.2. *(切除定理的常用形式)* 如果 A 是 X 的一个绝对领域收缩核，则粘合映射 $\pi:(X,A)\to(X/A,y),\ y=\pi(A)$ 诱导同调群的同构

$$\pi_*: H_n(X,A)\cong H_n(X/A,y), n\geq 0.$$

证明. 设 $U\subset X$ 是 A 在 X 中的开领域，以为 A 强形变收缩核。因为 X 是 T_4 空间，存在 A 在 X 中的开领域 V，满足：

$$A\subset V\subset \overline{V}\subseteq U\subset X.$$

据此，粘合映射 $\pi:(X,A)\to(X/A,y)$ 限制为一个空间偶的恒同映射：

$$\pi=1:(X-V,U-V)\to(X/A-V/A,U/A-V/A).$$

根据函子公理，我们有如下诱导同态的交换图表：

$$\begin{array}{ccc}
H_n(X-V,U-V) & \overset{\pi_*\cong}{\to} & H_n(X/A-V/A,U/A-V/A) \\
j_{1*}\downarrow\cong & & j_{2*}\downarrow\cong \\
H_n(X,U) & \overset{\pi_*}{\to} & H_n(X/A,U/A) \\
i_{1*}\uparrow\cong & & i_{2*}\uparrow\cong \\
H_n(X,A) & \overset{\pi_*}{\to} & H_n(X/A,y)
\end{array}$$

其中

i) j_{1*} 和 j_{2*} 是切除同构；

ii) 同构 i_{1*} 和 i_{2*} 分别来自于空间偶映射所诱导的同调正合梯，以及5-引理。

由图表的交换性知，同态 π_* 是一个同构。 □

命题*1*: 圆周的同调群是：

$$H_n(S^1)=\begin{cases}\mathbf{Z}, n=0,1\\ 0, n\neq 0,1.\end{cases}$$

证明. 由空间偶 $(D^1,\partial D^1)$ 的同调正合列、维数公理以及同伦公理得

$$H_n(D^1,\partial D^1)=\begin{cases}\mathbf{Z}, n=1\\ 0, n\neq 1.\end{cases}$$

由于子空间 $\partial D^1\subset D^1$ 是绝对邻域收缩核，并且有 $D^1/\partial D^1=S^1$,根据切除定理的常用形式知

$$H_n(S^1,*)=\begin{cases}\mathbf{Z}, n=1\\ 0, n\neq 1.\end{cases}$$

证明由空间偶 $(S^1,*)$ 的同调正合列以及维数公理完成. □

命题2: n 维球面的同调群是:

$$H_k(S^n)=\begin{cases}\mathbf{Z}, k=0,n\\ 0, k\neq 0,n.\end{cases}$$

【证明】根据命题1，不妨设 $k>0,\ n\geq 2$. 由空间偶 $(D^n,\partial D^n)$ 的同调正合列、维数公理以及同伦公理得同构:

$$\Delta_k: H_k(D^n,S^{n-1})\cong H_{k-1}(S^{n-1}).$$

由于子空间 $S^{n-1}\subset D^n$ 是绝对邻域收缩核，并且有 $D^n/S^{n-1}=S^n$,根据切除定理的常用形式知

$$H_k(D^n,S^{n-1})\cong H_k(S^n,*)\cong H_k(S^n),\ k>0$$

其中第二个同构来自于空间偶 $(S^n,*)$ 的同调正合列、以及维数公理. 总之得

$$H_{k-1}(S^{n-1})\cong H_k(S^n),\ k>0,\ n\geq 2.$$

证明由命题1以及归纳法完成。□

4.相对同胚定理及应用

定义6.2. 一个空间偶的连续映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 称为一个**相对同胚**，如果 f 限制为子空间之间的一个同胚 $X-A\to Y-B$.

例6.2. n 维胞腔的特征映射：$(D^n,S^{n-1})\to(A\cup_f D^n,A)$ 是相对同胚;

对于一个闭子空间 $A\subset X$,商映射 $\pi:(X,A)\to(X/A,*)$ 是相对同胚, 其中 $*=\pi(A)\in X/A$. 尤其是，下述商映射均是相对同胚：

$$\pi:(D^n,S^{n-1})\to(S^n,*)$$

$$\pi:(A\cup_f D^n,A)\to(S^n,*)$$

$$p_X:(X\vee Y,Y)\to(X,*).$$

定理6.3.（相对同胚定理） 如果 $A\subset X$, $B\subset Y$ 均是绝对领域收缩核，并且 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 是一个相对同胚。则 f 诱导同调群的同构

$$f_*:H_n(X,A)\cong H_n(Y,B),n\geq 0$$

证明. 考虑粘合映射诱导的交换图表：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi' \\ X/A & \xrightarrow{\overline{f}} & Y/B \end{array}$$

其中 $\overline{f}$ 是一个连续双射。因为 X/A 和 Y/B 是紧致 Haussdorff 空间，$\overline{f}$ 是一个同胚。定理证明由下图完成：

$$\begin{array}{ccc} H_n(X,A) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y,B) \\ \pi_*\downarrow\cong & & \pi'_*\downarrow\cong \\ H_n(X/A,x) & \xrightarrow{\overline{f}_*\cong} & H_n(Y/B,y) \end{array}$$

其中的垂直同构来自来自定理 6.2. $\square$

命题 *3.* 对于一个连续映射 $f:S^{n-1}\to A$，有

$$H_k(A \cup_f D^n, A) = \begin{cases} \mathbf{Z}, k = n \\ 0, k \neq n. \end{cases}$$

证明： 商映射 $\pi : A \coprod D^n \to A \cup_f D^n$ 在子空间 D^n 上的限制是一个相对同胚

$$\pi : (D^n, S^{n-1}) \to (A \cup_f D^n, A).$$

其中 $A \subset A \cup_f D^n$, 以及 $S^{n-1} \subset D^n$ 均是绝对邻域收缩核。□

已知两个带基点的空间 (X, x_0) 和 (Y, y_0)，它们的一点并空间是

$$X \vee Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid x = x_0 \ or \ y = y_0\}.$$

据此有连续映射的交换图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "i_X"] & & X \\ & X \vee Y \arrow[ur, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\ Y \arrow[ur, "i_Y"'] & & Y \end{tikzcd}$$

其中：

1）$i_X(x) = (x, y_0)$, $i_Y(y) = (x_0, y)$, 是含入映射；

2）$p_X(x, y_0) = x$, $p_Y(x_0, y) = y$, 是自然投影

需要强调的是：

3）p_X 和 p_Y 是收缩映射；

4）p_X 和 p_Y 也是相对同胚；

$$p_X : (X \vee Y, Y) \to (X, x_0); \quad p_Y : (X \vee Y, X) \to (Y, y_0)$$

命题 *4.* 如果空间 X, Y 道路连通，则当 $n > 0$ 时，映射 p_X 和 p_Y 诱导同构：

$$H_n(X \vee Y) \cong H_n(X) \oplus H_n(Y), \quad a \to ((p_{X*}(a), p_{Y*}(a)).$$

证明 在空间偶 $(X\vee Y, X)$ 的同调正合列中

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\Delta_{n+1}"] & H_n(X) \arrow[r, "i_{X*}"] & H_n(X\vee Y) \arrow[r, "j_{X*}"] \arrow[l, dashed, bend left, "p_{X*}"] & H_n(X\vee Y, X) \arrow[r, "\Delta_n"] \arrow[d, "\cong"', "p_{Y*}"] & \cdots \\
 & & & H_n(Y, y_0) &
\end{tikzcd}$$

同态 p_{X*} 是 i_{X*} 的逆同态，从而该正合序列可分裂为：

$$H_n(X\vee Y) = H_n(X) \oplus H_n(X\vee Y, X)$$

进一步，根据根据相对同胚定理，我们有同构：

$$p_{Y*}: H_n(X\vee Y, X) \to H_n(Y, y_0) = H_n(Y).$$

其中第二个同构来自于空间偶 (Y, y_0) 的同调正合列，以及维数公理。命题得证。□

*5.*附录：引理*6.2*的证明

证明的基本想法是, 利用“重心重分”的几何手段，将空间 X 的每个奇异单形“切小”为 $\mu-$ 小的奇异链.

(1) 对于欧式空间中的一个凸集 $C\subset\mathbb{R}^m$，令 $A_*(C)$ 为链复形 $S_*(C)$ 中全体线性奇异单形生成的子链复形. 对于点 $b\in C$，定义同态

$$b: A_q(C)\to A_{q+1}(C) \quad 为 \quad b[c_0,\cdots,c_q] = [b, c_0,\cdots,c_q],$$

并作线性扩张. 它称为以点 b 为顶的锥映射.

归纳地定义**重分链映射** $Sd: A_*(C)\to A_*(C)$ ，及链同伦 $T: A_*(C)\to A_*(C)$ 如下，

对于 0 维链, 规定 $Sd = id$，$T=0$.

对 q 维线性奇异单形 $\sigma = [c_0,\cdots,c_q]$，重心是 $b_\sigma = \sum\limits_{0\le j\le q}\dfrac{1}{q+1}c_j$，则置

$$Sd_q\sigma = b_\sigma(Sd_{q-1}(\partial\sigma));$$

$$T_q\sigma = b_\sigma(Sd_q\sigma - \sigma - T_{q-1}\partial\sigma).$$

计算表明

$$\partial Sd = Sd\partial; \quad \partial T + T\partial = Sd - id$$

. (2) 对于拓扑空间 X， 定义**重分链映射** $Sd : S_*(X) \to S_*(X)$ 及链同伦 $T : S_*(X) \to S_*(X)$. 如下，

对 q 维奇异单形 $\sigma : \triangle_q \to X$, 规定

$$Sd_q\sigma = \sigma_{\#}Sd[e_0, \cdots, e_q];$$

则也有

$$\partial Sd = Sd\partial; \quad \partial T + T\partial = Sd - id$$

. (3) 根据重心重分的几何性质, 一个单形经过足够多次重心重分之后, 得到的小单形可以任意地小, 由于 μ 是 X 的覆盖, 满足 $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathring{U}_\lambda$, 对每个奇异单形 $\sigma : \triangle_q \to X$, 一定存在最小整数 $m(\sigma) \geq 0$, 使得 $Sd^{m(\sigma)}\sigma$ 是 $\mu-$ 小的链.

直观的想法是规定链映射

$$\kappa(\sigma) = Sd^{m(\sigma)}\sigma,$$

并将相应的从 id 到 $l \circ \kappa$ 的链同伦取为

$$T\sigma = T(id + Sd + \cdots + Sd^{m(\sigma)-1})\sigma.$$

但是由于 $m(\sigma)$ 随 σ 变化, 这样规定的 κ 不是一个链映射，我们需要作如下修正.

(4) 以 $\sigma^{(j)}$ 记 σ 的第 j 个面， $0 \leq j \leq q$, 则显然 $m(\sigma) \geq m(\sigma^{(j)})$.

定义链映射 $\kappa : S_*(X) \to S_*^\mu(X)$ 及链同伦 $T : S_*(X) \to S_*(X)$ 为

$$\kappa_q\sigma = Sd^{m(\sigma)}\sigma - \sum_{0\leq j\leq q}(-1)^jT(Sd^{m(\sigma^{(j)})} + \cdots + Sd^{m(\sigma)-1})\sigma^{(j)};$$

$$T_q\sigma = T(id + Sd + \cdots + Sd^{m(\sigma)-1})\sigma.$$

则不难验证

$$\partial\kappa = \kappa\partial;$$

$$\kappa \circ l = id;$$

$$\partial T + T\partial = l \circ \kappa - id.$$

它们表明，κ 与 T 是所求的链映射及链同伦.

习题1: 已知空间 X 的开覆盖 $X = A\bigcup B$ 。则有奇异链复形的短正合序列：

$$0 \to S_n(A \cap B) \xrightarrow{f} S_n(A) \oplus S_n(B) \xrightarrow{g} S_n^{\mu}(X) \longrightarrow 0,$$

其中 $S_n^{\mu}(X)$ 是空间 X 关于开覆盖 $X = A\bigcup B$ 的 μ 小的链复形，其中的链映射 f, g 分别是

$$f(a) = i_1(a) \oplus i_2(a); \quad g(x, y) = j_1(x) - j_2(y).$$

它所诱导的同调群长正合序列称为"*Mayer-Viectoris* 正合序列":

$$\cdots \xrightarrow{\triangle_{n+1}} H_{n+1}(X) \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{f_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(X) \xrightarrow{\triangle_n} \cdots$$

习题2: 令 $X = S_1^n \vee \cdots \vee S_k^n$ 是 k 个 n 维球面的一点并空间，并令 $I_i : S^n \to X$ 是到第 i 个球面的含入映射，$\omega_n \in H_n(S^n)$ 是一个生成元。则同调群

$$H_n(X_k) = Z \oplus \cdots \oplus Z$$

是以 $I_{1*}(\omega_n), \cdots, I_{k*}(\omega_n)$ 为基底的自由交换群。

【提示】令 $p_i : X \to S_i^n$ 是到第 i 个球面的收缩映射 $p_i|S_i^n = 1$，$(p_i(S_j^n = *), i \neq j$. 则有

$$I_i \circ p_i = 1;\ I_i \circ p_j = *, i \neq j.$$

证明由命题4，性质1）完成。

习题3: 在 n 维球面中取个互不相交的闭球体 $B = D_1^n \sqcup \cdots \sqcup D_k^n \subset S^n$. 并令 $A = S^n - B^o$. 证明商映射

$$\pi_k : S^n \to S^n/A = S_1^n \vee \cdots \vee S_k^n$$

的诱导同态满足关系

$$\pi_{k*}(\omega_n) = I_{1*}(\omega_n) \oplus \cdots \oplus I_{k*}(\omega_n)).$$

【提示】: 当 $k=1$ 时, $\pi_1:(S^n,A)\to(S^n,*)$ 是相对同胚, 证明由定理6.4完成.

当 $k>1$ 时，有关系 $\pi_1=p_i\circ\pi_k,\ 1\le i\le k.$

习题4: 证明对折映射 $\mu: X_k=S_1^n\vee\cdots\vee S_k^n\to S^n,\ \ \mu\mid S_i^n=1_{S^n}$, 的诱导同态

$$\mu_*: H_n(X_k)=Z\oplus\cdots\oplus Z\to H_n(S^n)=Z$$

满足 $\mu_*(a_1,\cdots,a_k)=(a_1+\cdots+a_k)\cdot\omega_n$. 尤其是:

$$\mu_*(I_{1*}(\omega_n)\oplus\cdots\oplus I_{k*}(\omega_n))=k\cdot\omega_n.$$

【提示】根据定义 $\mu\circ I_i=1:S^n\to S^n$, 再利用 μ_* 是群同态的性质。

§7 球面的同调性质及应用

同调论的基本问题是:

1. 给定一个空间 X ，决定它的各维同调群 $H_n(X)=?, n>0$ ；
2. 给定一个连续映射 $f:X\to Y$ ，决定它诱导同调群的同态

$$f_*:H_n(X)\to H_n(Y)?, n>0.$$

本节对于 X 是 n 维球面的情形，解答上述问题，并给出在几何和分析学中的应用。具体安排如下

1. 球面 S^n 映射的度数
2. 应用: *Brouwer* 不动点定理；球面向量场问题；
3. *Brouwer* 映射度定理

*1.*球面 S^n 的映射度

球面 S^n 的 n 维同调群 $H_n(S^n)=Z$ 有两个生成元，如果其中之一记为 ω_n ，另一个则是 $-\omega_n$. 每一个生成元称为球面 S^n 的一个**定向**。

定义: 对于一个连续映射 $f:S^n\to S^n$, 存在唯一一个整数 $k\in Z$, 使得诱导同态 $f_*:H_n(S^n)\to H_n(S^n)$ 满足

$$f_*(\omega_n)=k\cdot\omega_n.$$

其中的整数 k 称为 f **的映射度**，记为 $deg(f):=k.$

考虑 n 维闭球体 D^n 的线性自同胚 $\tau_n:D^n\to D^n$

$$\tau_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(-x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

并令 $g_{n-1}=\tau_n|S^{n-1}:S^{n-1}\to S^{n-1}.$

定理*7.1.* $deg(g_n)=-1.$

【证明】考虑空间偶的映射 $\pi:(D^n,S^n)\to(S^n,*)$, 其中 $*=(0,\cdots,0,-1)$ 是南极点:

$$\pi(x)=\begin{cases}(2x,\sqrt{1-4\left|x\right|^2}), & |x|\le\frac{1}{2};\\ 4(1-|x|)x,-\sqrt{1-16(1-|x|)^2\left|x\right|^2}, & \frac{1}{2}\le|x|\le1.\end{cases}$$

则 π 是相对同胚,且满足交换图表

$$\begin{array}{ccc} (D^n,S^{n-1}) & \xrightarrow{\tau_n} & (D^n,S^{n-1}) \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ (S^n,*) & \xrightarrow{g_n} & (S^n,*) \end{array}$$

下面对于 n 用归纳法，证明 $g_{n*}(\omega_n)=-\omega_n$.

当 $n=1$ 时，根据函子公理，上图诱导群同态的交换图表：

$$\begin{array}{ccc} H_1(D^1,S^0) & \xrightarrow{\tau_{1*}\cong} & H_1(D^1,S^0) \\ \pi_*\downarrow\cong & & \pi_*\downarrow\cong \\ H_1(S^1,*) & \xrightarrow{g_{1*}} & H_1(S^1,*) \\ \| & & \| \\ H_1(S^1) & \xrightarrow{g_{1*}} & H_1(S^1) \end{array}$$

其中 $\tau_{1*}=\times(-1)$, (第5节习题4)，从而 $g_{1*}(\omega_1)=-\omega_1$ 得证。

下设 $n=2(\geq 2)$. 视 τ_n 为空间偶的映射 $(D^n,S^{n-1})\to(D^n,S^{n-1})$. 则在它所诱导的正合梯中有同构:

$$\begin{array}{ccc} H_n(D^n,S^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_n\cong} & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ \tau_{n*}\downarrow\cong & & g_{n-1*}\downarrow\cong \\ H_n(D^n,S^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_n} & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

其中由归纳假设知 $g_{n-1*}(\omega_{n-1})=-\omega_{n-1}$, 从而 $\tau_{n*}=\times(-1)$,. 一般情形的证明下图完成:

$$\begin{array}{ccc} H_n(D^n,S^{n-1}) & \xrightarrow{\tau_{n*}\cong} & H_n(D^n,S^{n-1}) \\ \pi_*\downarrow\cong & & \pi_*\downarrow\cong \\ H_n(S^n,*) & \xrightarrow{g_{n*}} & H_n(S^n,*) \\ \| & & \| \\ H_n(S^n) & \xrightarrow{g_{n*}} & H_n(S^n) \end{array}$$

.$\square$

一个正交矩阵 $A \in O(n+1)$ 决定了球面的一个自同胚

$$f_A : S^n \to S^n, \quad f_A(x) = Ax.$$

定理 *7.2.* 球面自映射的度数具有如下性质：

1）对于 $A \in O(n+1)$, 有 $deg(f_A) = |A| \in \pm 1$;

2) 如果 $f \simeq g : S^n \to S^n$ ，则 $deg(f) = deg(g)$;

3) 对于 $f, g : S^n \to S^n$, 有 $deg(g \circ f) = deg(g) \cdot deg(f)$.

【证明】性质*2*）和*3*）显然。下面仅证明断言*1*）。

正交群 $O(n+1)$ 有两个道路连通分支 $O(n+1) = O^+(n+1) \sqcup O^-(n+1)$, 它们分别满足

$$I_{n+1} \in O^+(n+1), \quad (-1) \oplus I_n \in O^-(n+1).$$

如果 $A \in O^+(n+1)$, 令 $A(t) \in O^+(n+1)$, 是从 I_{n+1} 到 A 的一条道路，并考虑同伦

$$H : S^n \times I \to S^n, \quad H(x,t) = A(t)x.$$

它满足 $f_A \simeq_H 1 : S^n \to S^n$, 从而由同伦公理和函子公理知 $deg(f_A) = |A| = 1$.

类似地，如果 $A \in O^-(n+1)$, 令 $A(t) \in O^-(n+1)$, 是从 $(-1) \oplus I_n$ 到 A 的一条道路, 则得同伦 $f_A \simeq_H g_n : S^n \to S^n$. 再由同伦公理、函子公理以及定理*1*得知

$$deg(f_A) = deg(g_n) = -1 = |A|.\square$$

*7.2.*球面的映射度的应用

命题 *7.3.*（ ***Brouwer*** **不动点定理**） 对于任一连续映射 $f : D^n \to D^n$, 方程 $f(x) = x,\ x \in D^n$ 必有一解。

【证明】用反证法, 设对于任意 $x \in D^n$, 都有 $f(x) \neq x$. 则可定义收缩映射 $r_f : D^n \to S^{n-1}$ 如下:

$$r_f(x) = \text{ 半射线 } \overrightarrow{f(x)x} \text{ 与边界 } S^{n-1} = \partial D^n \text{ 的唯一交点 }.$$

设 $i : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ 为自然含入. 则 r_f 满足 $r_f \circ i = 1 : S^{n-1} \to S^{n-1}$. 据此, $deg(r_f \circ i) = 1$. 这与 $H_n(D^n) = 0$ 相矛盾. □

球面 S^n 上的一个非 0 切向量场是指一个连续映射 $\tau : S^n \to R^{n+1} - 0$, 它满足 $\tau(x) \cdot x = 0, x \in S^n$.

命题7.4. 球面 S^n 上存在非 0 切向量场场的充要条件是 $n =$ 奇数.

【证明:】 设τ 是 S^n 上的一个非 0 切向量场. 对于每点 $x \in S^n$, $\tau(x)$, 指出了从 x 到其对径点 $-x$的一条半园弧. 据此可构造同伦

$$H : S^n \times I \to S^n, \ H(x, t) = \cos \pi t \cdot x + \sin \pi t \cdot \tau(x) / \parallel \tau(x) \parallel .$$

它表明$id \simeq -id : S^n \to S^n$, 从而$1 = \deg(id) = \deg(-id) = (-1)^{n+1}$. 因此 n 是奇数。

反之, 设 $n = 2k - 1$是奇数, 考虑映射

$$\tau : S^n \to R^{n+1} - 0, \ \tau(x_1, x_2, \cdots, x_{2k-1}, x_{2k}) = (-x_2, x_1, \cdots, -x_{2k}, x_{2k-1}).$$

它满足 $\tau(x) \cdot x = 0, x \in S^n$. 从而是 S^n 上的一个非 0 切向量场. □

定理7.5. 对于任一整数 $k \in Z$,存在一个连续映射 $f : S^n \to S^n$, 满足 $\deg(f) = k$.

【证明】. 取定一个生成元 $\omega \in H_n(S^n)$。 构造性证明由三部分完成。

第一步: $k = 1$: 取一个开园盘 $D \subset S^n$, 则 $A = S^n - D \subset S^n$ 是一个绝对邻域收缩核. 粘合映射 $f_1 : S^n \to S^n/A = S^n$ 可视为空间偶的复合映射:

$$f_1 = \pi \circ j : (S^n, \emptyset) \to (S^n, A) \to (S^n/A, *).$$

由于

1) $j_*: H_n(S^n, \emptyset) \to H_n(S^n, A)$ 是同构*(*(S^n, A) 的同调正合列*);*

2) $\pi_*: H_n(S^n, A) \to H_n(S^n, *)$ 是同构*(*相对同胚定理*),*

从而$f_{1*}(\omega) = \omega$. 它表明 $\deg(f_1) = 1$.

第二步*:* $k > 1$ 取 k 个互不相交的开园盘 $D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_k \subset S^n$ 并置 $A = S^n - (D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_k)$. 考虑粘合映射

$$\pi: S^n \to S^n/A = \vee_{1\leq j\leq k} S^n.$$

设 $p_j: \vee_{1\leq j\leq k} S^n \to S^n$ 是到第 j 个球面的收缩映射，则有 $f_1 = p \circ \pi: S^n \to S^n$. 它表明，诱导同态

$$\pi_*: H_n(S^n) \to H_n(S^n) \oplus \cdots \oplus H_n(S^n)$$

满足 $\pi_*(\omega_n) = (\omega_n, \cdots, \omega_n)$. 最后，令 $\mu: \vee_{1\leq j\leq k} S^n \to S^n$ 为对迭映射，并置 $f_k := \mu \circ \pi: S^n \to S^n$. 则由第*6*节习题*4*知， $f_{k*}(\omega_n) = k \cdot \omega_n$. 它表明 $\deg(f_k) = k$.

第三步： $k < 0$ 此时，令 $f_k = g_n \circ f_{-k}$. 其中的映射 g_n 见定理*1.* 则由定理*2*性质*3)*知 $\deg(f_k) = k$. □

7.3.Brouwer 映射度定理

定义 设 $f: S^n \to S^n$ 是一个光滑映射。一点 $b \in S^n$ 称为 f 的**正则值**，如果对于该点的每个原像 $x \in f^{-1}(b)$， 切映射 $Tf_x: T_xS^n \to T_bS^n$ 是线性同构。 □

关于球面间的光滑映射，有如下两个基本事实：

事实*1:* 如果映射 $f: S^n \to S^n$ 光滑，则 f 的全体正则值是 S^n 中的稠密开集*;*

事实*2:* 如果 $b \in S^n$ 是 f 的一个正则值，则 $f^{-1}(b)$ 是一个有限集*.*

定理*7.6.*（*Brouwer* 映射度定理）*:* 对于一个可微映射 $f: S^n \to S^n$ 以及它的一个正则值 $b \in S^n$，令

$$B(f,b) := \sum_{x\in f^{-1}(b)} signT_x f.$$

则 $B(f,b) = \deg(f)$.

推论7.7: 如果 $f \simeq g$ 且 b' 是 g 的一个正则值，则 $B(f,b) = B(g,b')$. □

【补注】定理7.6是非线性分析中一个基本定理，它的要点在于:

1) 子集合 $f^{-1}(b)$ 恰为方程 $f(x) = b$ 的全部解的集合;

2) 设 M, N 是两个同维数可定向闭流形。则Brouwer 映射度定理对于光滑映射 $f : M \to N$ 也成立。 □

【定理7.6的证明】 设 $f^{-1}(b) = \{x_1, \cdots, x_m\}$. 由于 $Tf_{x_i} : T_{x_i}S^n \to T_bS^n$ 是线性同构，根据反函数定理，存在点 $b \in S^n$ 的闭球体邻域 $D^n \subset S^n$ 使得

1) $f^{-1}(D^n_b) = D^n_{x_1} \sqcup \cdots \sqcup D^n_{x_m}$;

2) $f_i := f \mid D^n_{x_i} : D^n_{x_i} \to D^n_b, 1 \le i \le m$ 均是同胚。

根据性质 2)，映射 f_i 可以下放为一个同胚 $g_i : S^n_i \to S^n$，满足映射的交换图表:

$$\begin{array}{ccc} D_{x_i} & \overset{f_i}{\underset{\cong}{\to}} & D_b \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^n_i = \frac{D_{x_i}}{\partial D_{x_i}} & \overset{g_i}{\underset{\cong}{\to}} & S^n = \frac{D_b}{\partial D_b} \end{array}$$ ，以及关系式 $g_{i*}(\omega_n) = sign(T_{x_i}f) \cdot \omega_n$

令 $A = S^n - \sqcup_{1\le m} Int(D^n_{x_i})$, $B = S^n - Int(D^n_b)$. 根据性质1），映射 f 可看成一个空间偶的映射，满足交换图表

$$\begin{array}{ccc} (S^n, A) & \overset{f}{\underset{\cong}{\to}} & (S^n, B) \\ \pi_A \downarrow & & \pi_B \downarrow \\ S^n/A = \bigvee_{1\le i\le m} S^n_i & \overset{g=\vee g_i}{\underset{\cong}{\to}} & S^n = S^n/B \end{array}$$

根据图表的交换性（函子公理）知:

$$\deg(f) = \deg(\pi_B \circ f) = \deg(g \circ \pi_A) = B(f, b).$$

$\square$

习题*1:* 定义 $f: S^1 \to \bigvee_{1\le i\le n}(S^1_{a_i} \vee S^1_{b_i})$, $f = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$. 求

$$f_*(\omega) \in H_1(\bigvee_{1\le i\le n}(S^1_{a_i} \vee S^1_{b_i})) = H_1(S^1_{a_1}) \oplus H_1(S^1_{b_1}) \oplus \cdots \oplus H_1(S^1_{a_n}) \oplus H_1(S^1_{b_n}).$$

$\square$

习题*2:* 定义 $f: S^1 \to \bigvee_{1\le i\le n} S^1_{a_i}$, $f = a_1^2 \cdots a_n^2$. 求

$$f_*(\omega) \in H_1(\bigvee_{1\le i\le n} S^1_{a_i}) = H_1(S^1_{a_1}) \oplus \cdots \oplus H_1(S^1_{a_n}).$$

$\square$

习题*3:* 视 S^1 为复平面 C 中的单位圆周，定义映射 $f: S^1 \to S^1$, $f(z) = z^k$. 求 $\deg(f) = ?$. $\square$

习题*4:* 对于任意 k 个整数 $a_1, \cdots, a_k$ ，存在一个连续映射 $f: S^n \to S^n \vee \cdots \vee S^n$，使得诱导同态 f_* 满足：

$$f_*(\omega_n) = a_1 \cdot \omega_n \oplus \cdots \oplus a_k \cdot \omega_n$$

. $\square$

§8　胞腔复形及其同调群

已知拓扑空间 A 以及一个连续映射 $f:\bigsqcup_{1\le i\le k} S_i^{n-1}\to A$, 其中 S_i^{n-1} 均为 $n-1$ 维球面。考虑粘合映射

$$\pi: A\bigsqcup_{1\le i\le k} D_i^n \to A\cup_f(D_1^n\cup\cdots\cup D_k^n):=(A\bigsqcup_{1\le i\le k} D^n))/\sim$$

其中的等价关系是 $x\in S_i^{n-1}\sim f(x)\in A$. 粘合空间 $A\cup_f(D_1^n\cup\cdots\cup D_k^n)$ 称为用 f 在 A 上粘贴了 k 个 n 维胞腔所得空间.

定义： 一个拓扑空间 X 称为一个 m 维胞腔复形，如果它有一串闭子空间

$$X_0\subseteq X_1\subseteq X_2\subseteq\cdots\subseteq X_m,$$

满足以下条件

1) $X_0=x_1,\cdots,x_t$（孤立点集）*;*

2）对于每一 $1\le k\le m$, 或有 $X_k=X_{k-1}$, 或存在一个连续映射

$$f_k:\bigsqcup_{1\le i\le r_k} S_i^{k-1}\to X_{k-1},$$

使得 $X_k=X_{k-1}\cup_{f_k}(D_1^k\cup\cdots\cup D_{r_k}^k)$. 其中，子空间 X_k 称为 X 的 k **维骨架**. □

在第三章中，我們將應用$Morse$理论证明，所有的微分流形，都是胞腔复形。本节的主要内容是：

8.1. 胞腔复形同调群的递归公式*;*

8.2. 胞腔复形同调群计算*(*例*)*;

8.3. 胞腔复形的庞加莱多项式与欧拉示性数

8.1. 胞腔复形同调群的递归公式

先看一个简单情形。对于一个连续映射 $f:S^{n-1}\to A$, 令 $X=A\cup_f D^n$, $\omega_{n-1}\in H_{n-1}(S^{n-1})=Z$ 为一个生成元.

定理*8.1.* 原空间 A 及商空间 $A\cup_f D^n$) 的同调群满足如下关系：

1）$H_r(A\cup_f D^n)=H_r(A), r\neq n-1,n;$

2) 对于 $r=n-1,n$, 有如下5-项正合列, 其中 $\Delta_n(1)=f_*(\omega_{n-1})$:

$$0\to H_n(A)\to H_n(A\cup_f D^n)\to\mathbb{Z}\overset{\Delta_n}{\to}H_{n-1}(A)\to H_{n-1}(A\cup_f D^n)\to 0.$$

【证明】令 F 为粘合映射 $\pi:A\sqcup D^n\to A\cup_f D^n$ 在球体 D^n 上的限制,则有

1) $F\mid\partial D^n=f:S^{n-1}\to A$;

2) F 是一个空间偶之间的同胚 $F:(D^n,S^{n-1})\to(A\cup_f D^n,A)$;

3) 作为空间偶的映射, F 诱导了同调群的正合梯（正合公理）

$$\begin{array}{ccccccc} & & H_n(D^n,S^{n-1})=\mathbb{Z} & \underset{\cong}{\overset{\Delta_n}{\to}} & H_{n-1}(S^{n-1}) & & \\ & & F_*\downarrow\cong & & f_*\downarrow & & \\ \cdots\to & H_n(A\cup_f D^n) & \to & H_n(A\cup_f D^n,A) & \overset{\Delta_n}{\to} & H_{n-1}(A) & \to & H_{n-1}(A\cup_f D^n) \end{array}$$

在空间偶 $(A\cup_f D^n,A)$ 的正合列中，代入

$$H_r(A\cup_f D^n,A)=\begin{cases}\mathbb{Z},\ r=n\\ 0,r\neq n\end{cases},$$

该正合列分裂为:

$$0\to H_r(A)\to H_r(A\cup_f D^n)\to 0, r\neq n-1,n.$$

$$0\to H_n(A)\to H_n(A\cup_f D^n)\to\mathbb{Z}\overset{\Delta_n}{\to}H_{n-1}(A)\to H_{n-1}(A\cup_f D^n)\to 0,$$

其中 $\Delta_n(1)=f_*(\omega_{n-1})$. 证毕. □

推论*1.* 粘合空间 $A\cup_f D^n$ 的同调群仅依赖于原空间 A 的同调群以及元素 $f_*(\omega_{n-1})\in H_{n-1}(A)$ 的阶数，具体结果如下:

r	$H_r(A\cup_f D^n)$
$r\neq n-1,n$	$H_r(A)$
$r=n-1$	$H_{n-1}(A)/\{f_*(\omega_{n-1})\}$
$r=n,\lvert f_*(\omega_{n-1})\rvert=\infty$	$H_n(A)$
$r=n,\lvert f_*(\omega_{n-1})\rvert<\infty$	$H_n(A)\oplus\mathbb{Z}$

【证明】 用 $\{f_*(\omega_{n-1})\}$ 表示元素 $f_*(\omega_{n-1}) \in H_{n-1}(A)$ 所生成的子群，则定理*7.1*中的*5*-项正合列可以分解为：

$$0 \to H_n(A) \to H_n(A \cup_f D^n) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\Delta_n} \{f_*(\omega_{n-1})\} \to 0$$

$$0 \to H_{n-1}(A)/\{f_*(\omega_{n-1})\} \to H_{n-1}(A \cup_f D^n) \to 0$$

□

推论*2*. 如果 X 是一个 m 胞腔复形，则 $H_n(X) = 0, n > m.$

【证明】利用定理*8.1*，对 m 作归纳法。 □

8.2. 胞腔复形同调群（例）

本节，我们应用定理*8.1*得到的正合序列

$$0 \to H_n(A) \to H_n(A \cup_f D^n) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(A \cup_f D^n) \to 0,$$

来计算一些基础空间的同调群。

例*1*: 视 S^1 为复平面 C 中的单位圆周，定义映射 $f_k: S^1 \to S^1,\ f(z) = z^k$，并令 $X = S^1 \cup_k D^2$. 由于 $f_k(\omega_1) = k \cdot \omega_1$，上面的正合序列是：

$$0 \to H_2(X) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot k} Z \to H_1(X) \to 0.$$

据此可求得 X 的各维同调群。 □

例*2*: 定义$f: S^1 \to \bigvee_{1\leq i\leq n}(S^1_{a_i} \vee S^1_{b_i}),\ f = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$. 则$n \cdot T^2 = \bigvee_{1\leq i\leq n}(S^1_{a_i} \vee S^1_{b_i}) \cup_f D^2$. 由于$f_*(\omega_1) = 0$，上面的正合序列是：

$$0 \to H_2(n \cdot T^2) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} Z \oplus \cdots \oplus Z \to H_1(n \cdot T^2) \to 0,$$

据此可求得闭曲面 $n \cdot T^2$ 的各维同调群如下。 □ .

例*3*: 定义$f: S^1 \to \bigvee_{1\leq i\leq n} S^1_{a_i},\ f = a_1^2 \cdots a_n^2$. 则 $n \cdot RP^2 = (\bigvee_{1\leq i\leq n} S^1_{a_i}) \cup_f D^2$. 由于 $f_*(\omega_1) = 2\omega_1 \oplus \cdots \oplus 2\omega_1$，上面的正合序列是：

$$0 \to H_2(n \cdot RP^2) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\Delta_n} Z \oplus \cdots \oplus Z \to H_1(n \cdot RP^2) \to 0.$$

据此可求得闭曲面 $n \cdot RP^2$ 的各维同调群的各维同调群如下。

M	$H_0(M)$	$H_1(M)$	$H_2(M)$	$H_n(M), \quad n \geq 3$
S^2	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
$n \cdot T^2$	$\mathbb{Z}$	$\bigoplus_{2n} \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0
$n \cdot \mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}$	$\bigoplus_{n-1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$	0	0

□

例4: 设 G 是一个有限生成交换群，$n \geq 1$ 是一个整数。存在一个胞腔复形 $M(G,n)$, 称为 (n,G) 型***Moor*空间**, 满足*:*

$$H_r(M(G,n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, r = 0; \\ G, r = n; \\ 0, \ r \neq 0, n \end{cases}$$

【证明】对于一个有限循环群 $G = \mathbb{Z}_k$, 令 $M(\mathbb{Z}_k, n) := S^n \cup_{f_k} D^{n+1}$, 其中 $\deg f_k = k$.

在一般情形下，任意一个有限生成交换群同构于 $G = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \bigoplus_{1 \leq i \leq t} \mathbb{Z}_{k_i}$, 我们令

$$M(G,n) = S^n \vee \cdots \vee S^n \bigvee_{1 \leq i \leq t} M(\mathbb{Z}_{k_i}, n).$$

□

8.3. 胞腔复形的庞加莱多项式与欧拉示性数

定义：对于一个拓扑空间 X 它的第 r 个**贝蒂数**是整数

$$b_r(X) = \dim(H_r(X) \otimes R) = rank(H_r(X)).$$

进一步，它的**庞加莱多项式**和**欧拉示性数**依次是**:**

$$P_t(X) := \sum_{0 \leq r} b_r(X) \cdot t^r, \ \chi(X) := P_{-1}(X) = \sum_{0 \leq r} (-1)^r b_r(X).$$

□

定义：对于一个 m 维胞腔复形 X，它的 ***Morse* 多项式**是**:**

$$M_t(X) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot t + \cdots + \alpha_m \cdot t^m$$

其中 $a_k = X$ 中 k 维胞腔的个数. □

引理*1*. 对于一个 m 维胞腔复形 X, 我们有

1) $P_{-1}(X) = M_{-1}(X)$.

2) $P_t(X) \leq M_t(X)$.

【证明】设 X 是一个 0 维胞腔复形，引理显然成立。基于归纳法，设引理对于胞腔复形 A 成立，只需证明引理对于粘合空间 $X = A \cup_f D^n$ 成立。首先, 根据 *Morse* 多项式的定义知:

(8.1) $M_t(X) = M_t(A) + t^n$.

其次，由推论*1*知

$$\text{(8.2)}\ P_t(X) = \begin{cases} P_t(A) - t^{n-1} \ \textit{if} \ |f_*(\omega_{n-1})| = \infty \\ P_t(A) + t^n \ \textit{if} \ |f_*(\omega_{n-1})| < \infty. \end{cases}$$

总之得:

$$P_{-1}(X) = P_{-1}(A) + (-1)^n = M_{-1}(A) + (-1)^n = M_{-1}(X)$$

$$P_t(X) \leq P_t(A) + t^n \leq M_t(A) + t^n = M_t(X).$$

□

定理*8.2*. 设 X 是一个胞腔复形. 存在一个正整系数多项式 $Q(t)$ ，使得

$$M_t(X) - P_t(X) = (1 + t)Q(t).$$

尤其是,

$$\chi(X) = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^m a_m, m = \dim X.$$

【证明】 根据引理*1*，$M_t(X) - P_t(X)$ 是一个正整系数多项式，它能被 $1 + t$ 整除。 □

习题*1*（欧拉定理）：设 $M \subset R^3$ 是一个凸多面体的边界，令

$$(a_0, a_1, a_3) = (\text{顶点的个数,棱的条数, 面的张数}),$$

则有 $2 = a_0 - a_1 + a_3$.

【提示】 由于 $M \cong S^2$, 故 $\chi(M) = 2$. 另一方面，M 具有一个自带的胞腔分解，使得 $a_i = M$ 中 i 维胞腔的个数。 □

习题2 用曲线将闭曲面 M 剖分为互不重迭的曲面多边形，令

$$(a_0, a_1, a_3) = (\text{顶点的个数,棱的条数, 曲面多边形的张数}),$$

则有 $\chi(M) = a_0 - a_1 + a_3$. □

§9　附录A：拓扑空间的同伦群、模 p 同调、上同调

§10　附录B：定向流形的基本类