五、常微分方程

1. 可分离变量的常微分方程

① 题型 $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)\Longrightarrow \int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx.$

2. 一阶线性微分方程

① $y'+P(x)y=Q(x)\begin{cases}Q(x)=0\ \text{齐次方程}\\Q(x)\neq 0\ \text{非齐次方程}\end{cases}$

当$Q(x)=0$时， **用可分离变量的做法**

当$Q(x)\neq 0$时，通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$.

3. 二阶常系数齐次线性微分方程

公众号：专插本高等数学

$y''+py'+qy=0$ p,q为常数

1) 写出特征方程$r^2+pr+q=0$

2) 依据根的情况不同，写出通解.

若r为实解，当$r_1\neq r_2$，则通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

当$r_1=r_2=r$时，则通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{rx}$

若r为复数解，$r_1=\alpha+\beta i,r_2=\alpha+\beta i$

则通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1cos\beta x+C_2sin\beta x)$

六、常数项级数

1. 级数的概念

① 级数：给定一个常数列$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，则$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$称为无穷级数，简称常数项级数，记为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，即：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \boldsymbol{u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots}$$

其中第n项u_n称为级数的一般项，或通项

如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots$

② 部分和$S_n = \boldsymbol{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}$.

③ 级数收敛或发散的定义：

若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$极限存在，即$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A$，则 **$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛**

若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$极限不存在，则 **$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散**

公众号：专插本高等数学

④ 级数的和= **部分和的极限**，即 A

2. 三个特殊的级数敛散性

① 等比级数$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \begin{cases} 当 |q| < 1 时，收敛 \\ 当 |q| \geq 1 时，发散 \end{cases}$

② P 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P} \begin{cases} 当 P > 1 时，收敛 \\ 当 P \leq 1 时，发散 \end{cases}$

③ 调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ **发散**

3. 级数的性质

① 数乘性质： **若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛， 则$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$收敛**

若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散， 则$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$发散.

② 加减：a) 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则 **$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$收敛**;

b)若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散，则 $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)}$**发散**.

③ 添加或减少有限项 不影响级数敛散性.

④ 若$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$收敛，则 $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0}$.

⑤ 若$\lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0$，则 $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} U_n}$**发散**.

4. 级数敛散性的判定

① 比较审敛法（针对正项级数）

两$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} V_n$满足：

1） $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = L$，则有

$$\begin{cases} 0 < L < \infty: \text{两级数同敛散} \\ L = 0: \text{若} \sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n \text{ 收敛，} \sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n \text{ 收敛} \\ L = \infty: \text{若} \sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n \text{ 发散，} \sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n \text{ 发散} \end{cases}$$

公众号：专插本高等数学

2） 也有：$\lim\limits_{n\to\infty} U_n < \lim\limits_{n\to\infty} V_n$：$\begin{cases} \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} U_n \text{ 发散，则 则} \sum_{n=1}^{\infty} V_n \text{ 发散} \\ \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} V_n \text{ 收敛，则 则} \sum_{n=1}^{\infty} U_n \text{ 收敛} \end{cases}$

② 比值审敛法（针对正项级数，尤其是含有$n!$, n^2, 2^n等）

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \text{，若} \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = q \Rightarrow \begin{cases} q < 1: \text{该级数收敛} \\ q > 1 (\text{或 } q = +\infty): \text{ 该级数发散} \\ q = 1: \text{无法判断敛散性} \end{cases}$$