无穷小比较

2015 年试题

1．若当$x \to 0$时，$kx-2x^2+3x^3$与x是等价无穷小，则常数$k=$

A．0　　B．1

C．2　　D．3

解析：

$$\lim_{x\to 0}\frac{kx-2x^2+3x^3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(k-2x+3x^2)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(k-2x+3x^2)=k$$

$k=1$

2013 年试题

当$x \to 0$时，下列无穷小量中，与x不等价的无穷小量是　　（　）

A．$\ln(x+1)$　　B．$\arcsin x$

B．$1-\cos x$　　D．$\sqrt{1+2x}-1$

2011 年试题

若当$x \to \infty$时，$\dfrac{kx}{(2x+3)^4}$与$\dfrac{1}{x^3}$是等价无穷小，则常数$k=$________。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{kx}{(2x+3)^4}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{kx^4}{(2x+3)^4}=k\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{(2x+3)^4}=\frac{k}{2^4}=\frac{k}{16}$$

$$\frac{k}{16}=1, k=16$$

2010 年试题

当$x \to 0$时，下列无穷小量中，与x等价的是

A. $1-\cos x$　　B. $\sqrt{1+x^2}-1$

C. $\ln(1+x)+x^2$　　D. $e^{x^2}-1$

解析:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\sin x=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}2xe^{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+x^2}{x}=\lim_{x\to 0}(\frac{\ln(1+x)}{x}+x)$$

$$=\lim_{x\to 0}[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}+x]=\ln e+0=1$$

2009 年试题

若当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1-ax^2}-1\sim 2x^2$，则常数 $a=$ ______________。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-ax^2}-1}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-ax^2}-1)(\sqrt{1-ax^2}+1)}{2x^2(\sqrt{1-ax^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-ax^2}{2x^2(\sqrt{1-ax^2}+1)}=-\frac{a}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-ax^2}+1}=-\frac{a}{4}$$

$$-\frac{a}{4}=1, a=-4$$

连续性

2016 年试题

1 .若函数 $f(x)=\begin{cases}3x+a, x\geq 1\\ x+1, x<1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，

则常数 $a=$

A．-1 B．0 C．1 D．2

解析：

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3x+a)=3+a$$

由函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，得

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，即$2=3+a, a=-1$

2015 年试题

11． 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2(x-1)}{x-1}, x<1 \\ a, x=1 \\ x+b, x>1 \end{cases}$ 在点 $x=1$处连续，求常数a和b的值。

11．解：

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 2(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)}\times 2=2$，（3 分）

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+b)=1+b$，

$f(1)=a$，（4 分）

$\therefore$当$a=1+b=2$，即$a=2, b=1$时，$f(x)$在$x=1$处连续。

19． 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}}\sin 3x+1, x\neq 0\\ a, \quad x=0\end{cases}$$ 在 $x=0$

处连续.

（1）求常数a的值；

（2）求曲线$y=f(x)$在点$(0,a)$处的切线方程。

19．解：（1）

$$\because \lim_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+3x^2)^{\frac{1}{3x^2}}\right]^3=e^3$$

（2 分）

$\therefore$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[(1+3x^2)^{x^{\frac{1}{2}}}\sin 3x+1\right]=e^3\times 0+1=1$$

又$\because$ $f(0)=a,$ 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续知 $a=1$

（4 分）

（2）

$\because$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+3\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}}\sin 3\Delta x+1-1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(1+3\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}\frac{\sin 3\Delta x}{3\Delta x}3} = 3e$$

（4 分）

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,a)$ 即 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=3e^3x+1$

2013 年试题

6．要使函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}$ 在 $x=1$ 处连续，应补充定义 $f(1)$=________________ 。

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

使函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}$ 在 $x=1$ 处连续，

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$,应补充定义 $f(1)=\dfrac{1}{2}$

2012 年试题

2．若函数是$f(x)=\begin{cases}(1+ax)^{\frac{1}{x}}, x>0 \\ 2+x, \quad x\le 0\end{cases}$在$x=0$处连续，则常数$a=$

A．$-\ln 2$ A．$\ln 2$

C．2 D．e^2

解析：

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2+x)=2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^a$$

函数是$f(x)$在$x=0$处连续，则$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 一定存在，则$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,即$e^a=2, a=\ln 2$

2007 年试题

7. 设$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$， 要使$f(x)$在$x=3$处连续，应补充定义$f(3)$=____________。

2006 年试题

2．设函数$f(x)$在点x_0处连续，且$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=4$，

则 $f(x_0)$= （ ）

A. -4　　B. 0　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. 4

解析： 由 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=4$ 得 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 所以

$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

2003 年试题

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$ 试判断函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

2001 年试题

设 $f(x)=\begin{cases}(1+kx)^{\frac{m}{x}}, x\neq 0\\ a, \quad x=0\end{cases}$ （k,m 为常数），

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$

间断点

2012 年试题

2. 是函数 $f(x)=\begin{cases}(1-2x)^{\frac{1}{x}},x<0\\ e^2+x,x\geq 0\end{cases}$，的（ ）

A. 连续点　　B. 可去间断点

C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=e^{-2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^2+x)=e^2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

函数在$x=0$左右极限存在, 但不相等, 是跳跃间断点

2010 年试题

2. $x=0$是函数$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}},x<0\\ 0,\ \ x\geq 0\end{cases}$的

A. 连续点　　B. 第一类可去间断点

C．第一类跳跃间断点　D．第二类间断点

解析:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 0=0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

所以$x=0$是函数$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, x<0 \\ 0,\ \ x\geq 0 \end{cases}$的连续点