# 不定积分

## 2016 年试题

13．求不定积分$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

解：设$\sqrt{x}=t$ ，则$x=t^2,dx=2tdt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}2tdt=2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=2\arcsin t+C=2\arcsin \sqrt{x}+C$$

## 2016 年试题

4．设函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上可导，$C$为任意实数,则$\int \sin xf'(\cos x)dx=$

A．$\cos xf(\cos x)+C$　　B．$-\cos xf(\cos x)+C$

C．$f(\cos x)+C$　　D．$-f(\cos x)+C$

解析:

$$\int \sin x f'(\cos x)dx = -\int f'(\cos x)d\cos x$$

$$= -\int f'(u)du = -f(u) + C = -f(\cos x) + C$$

## 2015 年试题

**计算不定积分** $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}dx$。

**14．解：设** $\sqrt{x+2} = t$，**则** $x = t^2 - 2, dx = 2tdt,$

**（2 分）**

$$\therefore \quad \int \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}dx = \int \frac{t}{t^2+1} \bullet 2tdt$$

**（2 分）**

$$= \quad 2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int (1 - \frac{1}{1+t^2})dt$$

**（4 分）**

$$= 2(t - \arctan t) + C = 2(\sqrt{x+2} - \arctan\sqrt{x+2}) + C$$

**（6 分）**

## 2015 年试题

**设**$F(x)$**是**$f(x)$**的一个原函数，**$C$**为任意实数，则**$\int f(2x)dx=$

**A．**$F(x)+C$ **B．**$F(2x)+C$

**C．**$\frac{1}{2}F(2x)+C$ **D．**$2F(2x)+C$

解析：由 $F(x)$ **是** $f(x)$ **的一个原函数知** $\int f(x)dx=F(x)$,所以

$$\int f(2x)dx=\frac{1}{2}\int f(2x)d(2x)=\frac{1}{2}\int f(u)d(u)$$

$$=\frac{1}{2}F(u)+C=\frac{1}{2}F(2x)+C$$

## 2014 年试题

**计算不定积分**$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+3}}dx$

**解：**$\sqrt{x+3}=t$**令，则**$x=t^2-3, dx=2tdt$ **，**

$$\text{原式}=2\int \frac{1}{t^2-1}dt=\int (\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt$$

$$=\ln|t-1|-\ln|t+1|=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}\right|+C$$

## 2014 年试题

**已知**$\arctan x^2$**是函数**$f(x)$**的一个原函数，则下列结论中，不正确的是**

**A．** $f(x)=\frac{2x}{1+x^4}$

**B．当**$x\to 0$**时，**$f(x)$**和**$x$**是同阶无穷小量**

**C．** $\int_0^{+\infty} f(x)dx=\frac{\pi}{2}$

**D．** $\int f(2x)dx=\arctan 4x^2+C$

**解析：由** $\arctan x^2$ **是函数** $f(x)$ **的一个原函数，知**

$$f(x)=(\arctan x^2)'=\frac{1}{1+(x^2)^2}\times(x^2)'=\frac{2x}{1+x^4}$$

**或** $\int f(x)dx=\arctan x^2+C$

$$\int f(2x)dx=\frac{1}{2}\int f(2x)d(2x)=\frac{1}{2}\int f(u)d(u)$$

$$=\frac{1}{2}\arctan u^2+C=\frac{1}{2}\arctan 4x^2+C$$

## 2013 年试题

**计算不定积分** $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$。

**原式** $=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}d(\cos x)=-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}d(\cos x)$

$=-\int\frac{1}{\cos^2 x}d(\cos x)+\int d(\cos x)$

$=\frac{1}{\cos x}+\cos x+C$。

## 2013 年试题

**若函数$f(x)$和$F(x)$满足$F'(x)=f(x)(x\in R)$，则下列等式成立的是　　　（　　）**

A．$\int \frac{1}{x}F(2\ln x+1)dx=2f(2\ln x+1)+C$

B．$\int \frac{1}{x}F(2\ln x+1)dx=\frac{1}{2}f(2\ln x+1)+C$

C．$\int \frac{1}{x}f(2\ln x+1)dx=2F(2\ln x+1)+C$

D．$\int \frac{1}{x}f(2\ln x+1)dx=\frac{1}{2}F(2\ln x+1)+C$

解析：由$F'(x)=f(x)$知，$\int f(x)dx=F(x)+C$

$$\int \frac{1}{x}f(2\ln x+1)dx=\frac{1}{2}\int f(2\ln x+1)d2\ln x$$

$$=\frac{1}{2}\int f(2\ln x+1)d(2\ln x+1)=\frac{1}{2}\int f(u)du$$

$$=\frac{1}{2}F(u)+C=\frac{1}{2}F(2\ln x+1)+C$$

## 2012 年试题

**求不定积分** $\int \ln(1+x^2)dx$

**14．解：** $\int \ln(1+x^2)dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}dx$

**（3 分）**

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int (1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C$$

**（6 分）**

## 2011 年试题

**计算不定积分** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx \quad (x>1)$。

**解一：**

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{1}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}d(1-\frac{1}{x^2})$$

**（2分）**

$=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

**（6分）**

**解二：令**$x=\sec t$**，则**$dx=\sec t\tan tdt(0<t<\frac{\pi}{2})$**，**

$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{1}{\sec^2 t\tan t}\sec t\tan t$

**（3分）**

$=\int\frac{1}{\sec t}dt=\int\cos tdt=\sin t+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

**（6分）**

## 2010年试题

**计算不定积分**$\int\frac{\cos x}{1-\cos x}dx$。

**解一：原式**

$$=\int \frac{\cos x(1+\cos x)}{\sin^2 x}dx=\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx+\int \cot^2 x dx$$

$$=\int \frac{1}{\sin^2 x}d\sin x+\int (\csc^2 x-1)dx$$

$$=-\frac{1}{\sin x}-\cot x-x+C$$

**解二：原式**$=\int \dfrac{1-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}dx$

$$=\frac{1}{2}\int \csc^2\frac{x}{2}dx-\int dx=\int \csc^2\frac{x}{2}d(\frac{x}{2})-\int dx$$

$$=-\cot\frac{x}{2}-x+C$$

## 2009 年试题

**计算不定积分**$\int \arctan\sqrt{x}dx$。

**14. 【解析】设**$\sqrt{x}=t,x=t^2$, 则

**原式=**$\int \arctan t dt^2 = t^2 \arctan t - \int t^2 \frac{1}{1+t^2} dt$

$= t^2 \arctan t - \int (1-\frac{1}{1+t^2}) dt = t^2 \arctan t - t + \arctan t + C$

$= x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + C$

## 2009 年试题

**积分**$\int \cos x f'(1-2\sin x) dx =$

**A．**$2f(1-2\sin x)+C$

**B.**$\frac{1}{2}f(1-2\sin x)+C$

**C.**$-2f(1-2\sin x)+C$

**D.**$-\frac{1}{2}f(1-2\sin x)+C$

解析:

$$\int \cos x f'(1-2\sin x)dx = \int f'(1-2\sin x)d\sin x$$

$$= -\frac{1}{2}\int f'(1-2\sin x)d(1-2\sin x)$$

$$= -\frac{1}{2}\int f'(u)du = -\frac{1}{2}f(u)+C$$

$$= -\frac{1}{2}f(1-2\sin x)+C$$

## 2008 年试题

**下列函数中，所以不是$e^{2x}-e^{-2x}$的原函数的是**

**A.** $\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}$ **B.** $\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}$

**C.** $\frac{1}{2}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$ **D.** $\frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)$

**解析:** $[\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}]' = e^{2x}-e^{-2x}$

$$[\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}]' = e^{2x}-e^{-2x}$$

$$[\frac{1}{2}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)]' = e^{2x}-e^{-2x}$$

$$[\frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)]'=e^{2x}+e^{-2x}$$

**所以不是$e^{2x}-e^{-2x}$的原函数的是**

$$\frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)$$

## 2008 年试题

**求不定积分**$\int\frac{\sin x+\sin^2 x}{1+\cos x}dx$。

**【解析】**

$$\int\frac{\sin x+\sin^2 x}{1+\cos x}dx=\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx+\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx$$

$$=-\int\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}+\int\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx$$

$$=-\ln(1+\cos x)+\int(1-\cos x)dx$$

$$=-\ln(1+\cos x)+x-\sin x+C.$$

## 2007 年试题

**计算不定积分**$\int\left[2^x-\frac{1}{(3x+2)^3}+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right]dx$**。**

**【解析】原式**

$$=\int 2^x dx-\int\frac{1}{(3x+2)^3}dx+\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{6(3x+2)^2}+\mathrm{arcsi}\ \frac{x}{2}$$

**（说明：正确计算)**

$\int 2^x dx$、$\int\frac{1}{(3x+2)^3}dx$和$\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$各得2分

## 2007 年试题

**设**$F(x)$**是**$f(x)$**在（0，**$+\infty$**）内的一个原函数，下列等式不成立的**

**A.** $\int\frac{f(\ln x)}{x}dx=F(\ln x)+C$

**B.** $\int\cos x f(\sin x)dx=F(\sin x)+C$

**C.** $\int 2xf(x^2+1)dx=F(x^2+1)+C$

D. $\int 2^x f(2^x)dx = F(2^x) + C$

## 2006 年试题

**计算不定积分** $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$。

**【解析】方法一：**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x}} d\sqrt{x}$$

$$= 2\arcsin\sqrt{x} + c$$

**方法二：**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} d(x-\frac{1}{2})$$

$$= \arcsin(2x-1) + c$$

**方法三：设** $\sqrt{x} = t$**，则** $x = t^2$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} 2tdt$$

$$=2\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\arcsin t+c$$

$$=2\arcsin\sqrt{x}+c$$

## 2005 年试题

**设$f(x)$是在（$-\infty,+\infty$）上的连续函数，**

**且**$\int f(x)dx=e^{x^2}+C$**，则**$\int\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=$**（　　）**

**A.** $-2e^{x^2}$　　**B.** $2e^{x}+C$

**C.** $-\frac{1}{2}e^{x^2}+C$　　**D.** $\frac{1}{2}e^{x}+C$

解析：

$$\int\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=2\int f(\sqrt{x})d\sqrt{x}=2\int f(u)du=2e^{u^2}+C$$

$$=2e^{x}+C$$

## 2005 年试题

**计算不定积分** $\int(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x}+3^x+\frac{1}{\sin^2 x})dx$

**【解析】**

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x}+3^x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-\ln|x|+\frac{3^x}{\ln 3}-\cot x+c$$

## 2004 年试题

**若** $I=\int\frac{1}{3+2x}dx$, 则 $I=$ **(　　　)**

**(A)** $\frac{1}{2}\ln|3+2x|+C$　　**(B)** $\frac{1}{2}\ln(3+2x)+C$

**(C)** $\ln|3+2x|+C$　　**(D)** $\ln(3+2x)+C$

$$I=\int\frac{1}{3+2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{3+2x}d(2x+3)$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$$

## 2003 年试题

**设 $f(x)$ 的一个原函数为 $xe^{-x}$，则 $f(x)$ ＿＿＿。**

**解析：** 由 $f(x)$ **的一个原函数为** $xe^{-x}$ 知，

$$f(x)=(xe^{-x})'=e^{-x}-xe^{-x}$$

## 2003 年试题

$\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$。

**3.【解析】 原式** $=-\int\frac{1}{\cos^2 x}d\cos x=\frac{1}{\cos x}+C$

**（C 为任意常数）**