导数的定义

2016 年试题

2．已知函数$f(x)$满足

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=6,\text{则} f'(x_0)=$$

A．1　　B．2　　C．3　　D　．6

解析: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)=6$

2015 年试题

设函数$f(x)=\log_2 x(x>0)$，则

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$=____________________ 。

解析:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-f'(x)=-(\log_2 x)'=-\frac{1}{x\ln 2}$$

2013 年试题

8．函数 $f(x)=\begin{cases} x(1-x)^{\frac{1}{x}}, x<0 \\ 0, \quad x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左导数 $f'_{-}(0)=$ ______________

解析：

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{x(1-x)^{\frac{1}{x}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$$

2012 年试题

设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=3$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$________________。

解析：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=-2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[x_0+(-2\Delta x)]-f(x_0)}{-2\Delta x}$$

$$=-2f'(x_0)=-2\times 3=-6$$

2010 年试题

设函数 $f(x)\begin{cases} x^2\sin\dfrac{2}{x}+\sin 2x, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$，用导数定义计算 $f'(0)$。

12．解：

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\sin\dfrac{2}{\Delta x}+\sin 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x\sin\frac{2}{\Delta x}+\frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x})=0+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin 2\Delta x}{2\Delta x}=2$$

2009 年试题

12．设 $f(x)=\begin{cases} x(1+2x^2)^{\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0, \qquad x=0 \end{cases}$ 用导数定义计算 $f'(0)$

12．【解析】$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$，

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(1+2\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(1+2\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[(1+2\Delta x^2)^{\frac{1}{2\Delta x^2}}]^2=e^2.$$

05 年试题

3. 设 $f(x)=\cos x$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=$（ ）

A. $-\sin x$　B. $\cos x$　C. $-\sin a$　D. $\sin x$

2002 年试题

设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导, a 和 b 的取值应是

A. $a=2,b=1$　　B. $a=1,b=2$

C. $a=2,b=-1$　　D. $a=-1,b=2$

可导与连续的关系

2009 年试题

下列函数中，在点 $x=0$ 处连续但不可导的是

A. $y=|x|$　　B. $y=1$

C. $y=\ln x$　　D. $y=\dfrac{1}{x-1}$

解析：对函数 $y=|x|$

2008 年试题

函数在点x_0处连续是在该点处可导的

A.必要非充分条件　　B. 充分非必要条件

C.充分必要条件　　D. 既非充分也非必要条件

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$f(0) = 0$

即$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

所以函数 $y = |x|$在点$x = 0$处连续

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0} = 1$$

$f'_-(0) \neq f'_+(0)$

所以函数 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 不可导

2006 年试题

函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}+1$ 在 $x=0$ 处 （　　）

A. 无定义　　B. 不连续
C. 可导　　D. 连续但不可导

初等函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}+1$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，

所以函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}+1$ 在 $x=0$ 处也连续

$$f'(x)=(\sqrt[3]{x}+1)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

函数 $f'(x)=\dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ 在 $x=0$ 处无意义，所以函数

$f(x)=\sqrt[3]{x}+1$ 在 $x=0$ 处不可