一、函数、极限和连续

1. 映射的概念

①原像和像：

若f为集合 X 到集合 Y 的映射，集合 X 中的元素为x，集合 Y 中的元素为y。其中，元素 y 称为元素x（在映射f下）的像;元素x称为元素y（在映射f下）的一个原像。

②满射：X 和 Y 中的元素必须用完；对应关系f：一对一或多对一。

③单射：X 和 Y 中的元素是否用完不作要求；对应关系f：一对一。

④双射/一一映射：X 和 Y 中的元素必须用完；对应关系f：一对一。

2. 无穷小的比较

①无穷小 + 无穷小=无穷小②无穷小 - 无穷小=无穷小

③无穷小 × 无穷小=无穷小④无穷小 × 有界函数=无穷小

⑤无穷小与无穷大的关系：无穷小=$\frac{1}{无穷大}$

⑥设$f(x)$与$g(x)$是同一变化过程中的无穷小量，

若$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=0$,则称$f(x)$比$g(x)$ 高阶无穷小

若$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$,则称$f(x)$比$g(x)$ 低阶无穷小

若$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=k(k\neq 0)$,则称$f(x)$与$g(x)$是同阶无穷小

若$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=1$,则称$f(x)$与$g(x)$是等阶无穷小，记作$f(x)\sim g(x)$

3. 等价无穷小公式

当x为无穷小量时，(x表示的是一个整体)

① $sinx\sim x$② $arcsinx\sim x$ ③ $tanx\sim x$ ④ $arctanx\sim x$

⑤ $\ln(1+x)\sim x$ ⑥ $e^x-1\sim x$ ⑦ $a^x-1\sim x\ln a$

⑧ $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ ⑨$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$

4. 两个重要极限公式

①$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

②$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

5. 在某一点处极限存在的条件

一般地，对于分段函数，在某一点x_0处极限存在的条件：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$

6. 在某一点处连续的条件

一般地，对于分段函数，在某一点x_0连续的条件：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$

7. 间断点的类型

间断点类型

- 第一类间断点（左、右极限都存在）
  - 可去间断点（左极限 = 右极限 ≠ 该点处函数值）
  - 跳跃间断点（左极限 ≠ 右极限）
- 第二类间断点（左、右极限至少有一个不存在）

8. 极限存在、连续的关系

在某一点处连续⇒ 极限存在；在某一点处极限存在 ⇏连续。

9. 零点存在定理

阐述零点存在定理：若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b) < 0$，则在(a,b)上至少存在一点$\xi(a < \xi < b)$，使得$f(\xi) = 0$。即$f(x) = 0$在(a,b)上至少存在一个零点。

二、一元函数微分学

1. 导数的定义式

写出$f(x)$在x_0处的导数定义式：$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$或$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

2. 在某一点处导数存在的条件

写出$f(x)$在x_0处的左导数定义式：$f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

写出$f(x)$在x_0处的右导数定义式：$f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

写出$f(x)$在x_0处的导数存在的条件：$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

3. 基本初等函数求导公式

① $C' = 0$ ② $(x^n)' = nx^{n-1}$

③ $(a^x)' = a^x lna$ ④ $(e^x)' = e^x$

⑤ $(\log_a x)' = \frac{1}{xlna}$ ⑥ $(ln\, x)' = \frac{1}{x}$

⑦ $(sinx)' = cosx$ ⑧ $(cosx)' = -sinx$

⑨ $(tanx)' = sec^2 x$ ⑩ $(cotx)' = -csc^2 x$

⑪ $(secx)' = secxtanx$ ⑫ $(cscx)' = -cscxcotx$

⑬ $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ⑭ $(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

⑮ $(arctanx)' = \frac{1}{1+x^2}$ ⑯ $(arccotx)' = -\frac{1}{1+x^2}$