二重积分

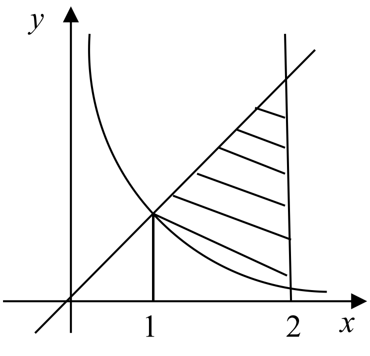
16 年试题

16．设平面区域D由曲线$xy=1$和直线$y=x$及$x=2$围成,计算$\iint\limits_D \frac{x}{y^2}d\sigma$

解：

$$\iint\limits_D \frac{x}{y^2}d\delta=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x}{y^2}dy=\int_1^2\left(-\frac{x}{y}\bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}\right)dx=\int_1^2\left(-1+x^2\right)dx$$

$$=(-x+\frac{x^3}{3})\bigg|_1^2=\frac{4}{3}$$



16 年试题

9．设平面区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，则

$$\iint_D (x^2+y^2)d\sigma = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

解析:

$$\iint_D (x^2+y^2)d\sigma = \iint_D r^2 r dr d\theta = \iint_D r^3 dr d\theta$$

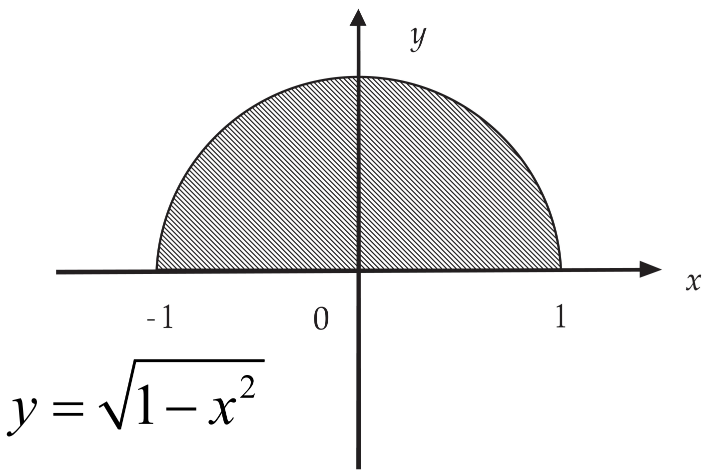
$$= \int_0^{2\pi}(\int_0^1 r^3 dr)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\theta = \frac{\pi}{2}$$

15 年试题

16．将二次积分 $I=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}dy$ 化为极坐标形式的二次积分，并计算 I 的值。

16．解：由给定的二次积分知，积分区域

$$D=\left\{(x,y)\middle|-1\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\},$$



（2 分）

如图：

$$\therefore I=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 e^{r^2}rdr$$

$$=\int_0^{\pi}\ (\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^1)d\theta=\int_0^{\pi}\ (\frac{1}{2}e-\frac{1}{2})d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}(e-1)$$

（6 分）

15 年试题

19. 设二元函数 $z=f(x,y)=x^y\ln x(x>0,x\neq 1)$，平面区域

$D=\left\{(x,y)\middle|2\leq x\leq e,-1\leq y\leq 1\right\}$。

（1）求全微分 dz；

（2）求 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

19. 解：（1）$\because$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x=x^{y-1}(1+y\ln x),\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln^2 x$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=x^{y-1}(1+y\ln x)dx+x^{y}\ln^{2}xdy$$

。

$$（2）\iint\limits_{D}f(x,y)d\theta=\int_{2}^{e}dx\int_{-1}^{1}x^{y}\ln xdy$$

$$=\int_{2}^{e}(x^{y}\Big|_{-1}^{1})dx$$

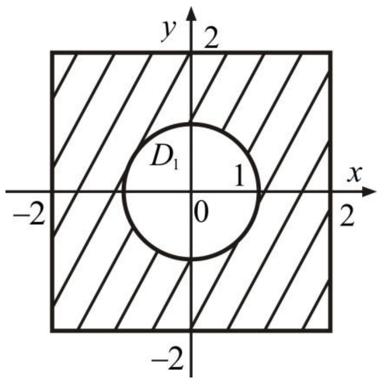
（10 分）

$$=\int_{2}^{e}(x-\frac{1}{x})dx=(\frac{1}{2}x^{2}-\ln x)\Big|_{2}^{e}=\frac{1}{2}e^{2}+\ln 2-3。$$

14 年试题

17．计算二重积分$\iint\limits_{D}(x^{2}+y^{2})d\sigma$，其中积分区域$D=\left\{(x,y)\,|\,x^{2}+y^{2}\ge 1,|\,x\,|\le 2,|\,y\,|\le 2\right\}$

17. 解：D如图：



记圆域$x^{2}+y^{2}\le 1$为D_{1}，

$$原式=\iint\limits_{D+D_{1}}(x^{2}+y^{2})d\sigma-\iint\limits_{D_{1}}(x^{2}+y^{2})d\sigma$$

（2 分）

$$=\int_{-2}^{2}dx\int_{-2}^{2}(x^2+y^2)dy-\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{1}r^3dr$$

（4 分）

$$=\int_{-2}^{2}(4x^2+\frac{16}{3})dx-\frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{1}r^3dr$$

$$=\int_{-2}^{2}(4x^2+\frac{16}{3})dx-\frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi}d\theta=\frac{128}{3}-\frac{\pi}{2}$$

（6 分）

14 年试题

5. 交换二次积分 $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy$ 的积分次序，则 $I=$

A. $I=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

B. $I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$

C. $I=\int_0^1 dy\int_{y^2}^1 f(x,y)dx$

D. $I=\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx$

13 年试题

10．设 D 为圆环域：$1\le x^2+y^2\le 4$，则二重积分$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$=______________ 。

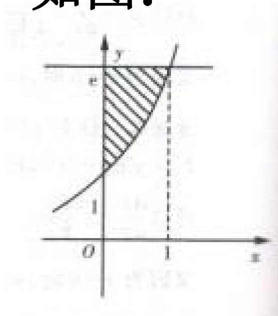
13 年试题

19．交换二次积分

$$I=\int_0^1 dx\int_{e^x}^{e}\frac{(2x+1)(2y+1)}{\ln y+1}dy$$的积分次序，并求I的值。

19．由题设条件知，积分区域

$D=\left\{(x,\ y)\middle|0\le x\le 1,\ \ e^x\le y\le e\right\}$，如图：



第 19 题图

交换积分次序得

$$I=\int_1^e dy\int_0^{\ln y}\frac{(2x+1)(2y+1)}{\ln y}dx$$

$$=\int_1^e\left[\frac{(x^2+x)(2y+1)}{\ln y+1}\Bigg|_0^{\ln y}\right]dy=\int_1^e(2y+1)\ln ydy$$

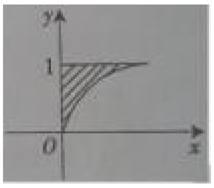
$$=\int_1^e\ln yd(y^2+y)=(y^2+y)\ln y\Big|_1^e-\int_1^e(y^2+y)\frac{1}{y}dy$$

$$=(e^2+e)-(\frac{y2}{2}+y)\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}+\frac{3}{2}。$$

12 年试题

18．计算二重积分$\iint\limits_D\sqrt{y^2-x}d\sigma$，其中 D 是由曲线$y=\sqrt{x}$及直线$y=1$，$x=0$围成的闭区域

18．解：积分区域 D 如图：



$$\iint\limits_D\sqrt{y^2-x}d\sigma=\int_0^1dy\int_0^{y^2}\sqrt{y^2-x}dx$$

（3 分）

$$=\int_0^1\left[-\frac{2}{3}(y^2-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{y^2}\right]dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1y^3dy=\frac{1}{6}$$

12 年试题

5．设$f(x,y)$为连续函数，将极坐标形式的二次积分$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$化为直角

坐标形式，则$I=$ （ ）

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dx$

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_x^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

11 年试题

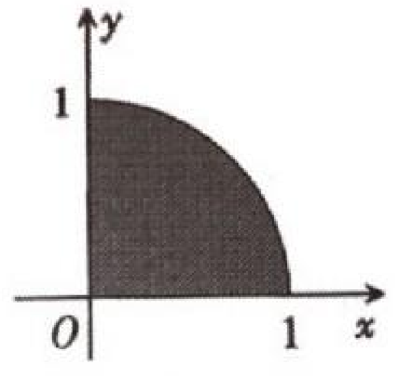
10．设平面区域 D 由直线$y=x,y=2x$及$x=1$围成，则二重积分$\iint\limits_D xd\sigma$=________。

11 年试题

18．化二次积分$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{1+x^2+y^2}dy$为极坐标形式的二次积分，并求其值。

18．解：由给定的二次积分知，积分域，如图，

$$D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le\sqrt{1-x^2},0\le x\le 1\right\}$$



（2 分）

所以

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{1+x^2+y^2}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr$$

（4 分）

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{4}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\ln 2$$

10 年试题

18．计算二重积分$\iint\limits_D 2xydxdy$，其中D是由抛物线$y=x^2+1$和直线$y=2x$及$x=0$围成的区域。

18．解：积分区域 D 如图：（略）

解方程组$\begin{cases}y=x^2+1,\\ y=2x\end{cases}$可求得切点为

（1，2）

$$\iint_D 2xydxdy = \int_0^1 dx\int_{2x}^{x^2+1} 2xydy$$

$$= \int_0^1 xy^2 \Big|_{2x}^{x^2+1} dx = \int_0^1 x(x^4+1-2x^2)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-1)^2 dx^2 = \frac{1}{6}(x^2-1)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

10 年试题

10．设平面区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$，则二重积分$\iint\limits_D (x^2+y^2)^2 d\sigma =$______。

09 年试题

5. 改变二次积分$I=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$的积分次序，则$I=$ （ ）

A. $I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^0 f(x,y)dx$

B. $I=\int_0^1 dy\int_1^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

C. $I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)dx$

D. $I=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

09 年试题

17. 计算二重积分$\iint\limits_D \dfrac{(2\sqrt{x^2+y^2}-1)^3}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中积分区域 D：$1\le x^2+y^2\le 4$

17. 【解析】设$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，

则原式 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2(2r-1)^3dr=2\pi\int_1^2(2r-1)^3dr$

$=\dfrac{\pi}{4}(2r-1)^4\Big|_1^2=\dfrac{81\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}=20\pi.$

08 年试题

17. 计算二重积分$\iint\limits_D ye^{xy}dxdy$，其中 D 是由 y 轴、直线 $y=1$，$y=2$ 及曲线 $xy=2$ 所围成的平面区域。

17. 【解析】$\iint\limits_D ye^{xy}dxdy=\int_1^2 dy\int_0^{\frac{2}{y}} ye^{xy}dx$

$$=\int_1^2 [e^{xy}]_0^{\frac{2}{y}} dy$$

$$=\int_1^2 (e^2-1)dy = e^2-1$$

07 年试题

18. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy$，其中积分区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 8, y\ge 0\right\}$。

18. 【解析】如图 2 所示

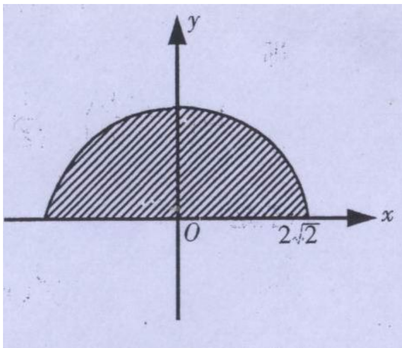


图 2

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdty$$

$$=\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}d(1+r^2)$$

$$= \pi\sqrt{1+r^2}\Big|_0^{2\sqrt{2}}$$

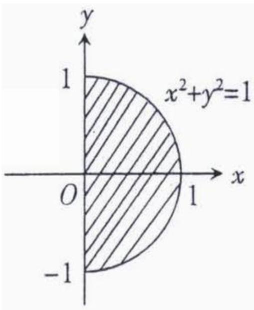
$$= 2\pi$$

06 年试题

16．求二重积分 $\iint\limits_D xy^2 d\sigma$，其中积分区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$。

16.【解析】

方法一：D=$\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$如右图所示：



$$\iint\limits_D xy^2 d\sigma = \iint\limits_D xy^2 dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\right)dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-y^2)y^2dy=\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}.$$

方法二：D=$\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leq 1,x\geq 0\right\}$如右图所示

$$\iint\limits_{D}xy^2d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{1}r^4\cos\theta dr$$

$$=\frac{1}{5}\gamma^5\Big|_{0}^{1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r^4\cos\theta\sin^2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{15}$$

05 年试题

18. 计算二重积分 $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)dxdy$，其中积分区域

$$D=\left\{\ (x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4\ \right\}\ 。$$

18.【解析】采用极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=\sin\theta$，则

$$\iint\limits_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 2r\ln r dx$$

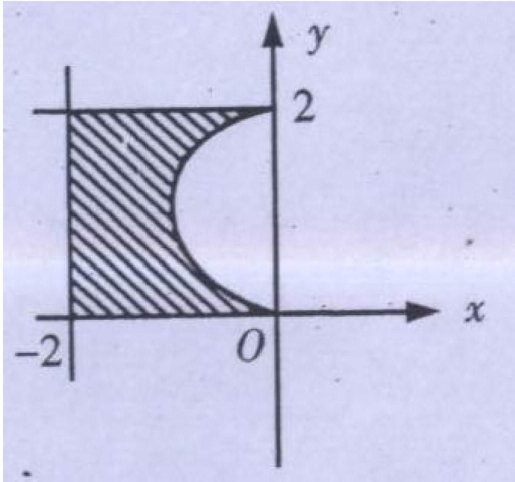
$$=2\pi\left(r^2\ln r\Big|_1^2-\frac{r^2}{2}\Big|_1^2\right)=\pi\left(8\ln 2-3\right)$$

04 年试题

16． 计算二重积分 $\iint\limits_D ydxdy$，共中 D 是由直线

$x=-2$， $y=0, y=2$ 以及曲线

$x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域。

16.【解析】

$$\iint\limits_D ydxdy=\int_0^2 dy\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} ydx$$

$$=\int_0^2 y(2-\sqrt{2y-y^2})dy$$

$$=\int_0^2 2ydy-\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}dy$$

$$=4-\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}dy$$

下面计算$\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}dy$

令$y=1+\sin\theta$，则当

$$\left.\begin{aligned} &y=0\text{时},\theta=-\frac{\pi}{2},\\ &y=2\text{时},\theta=\frac{\pi}{2}, \end{aligned}\right\}\Rightarrow -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

于是

$$\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}dy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta}d(1+\sin\theta)$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\cos^2\theta d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta+0$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \iint_D ydxdy=4-\frac{\pi}{2}$$

04 年试题

10． $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$ 变换积分分次序后有

I=（　　）

（A） $\int_{x^2}^{x} dx\int_0^1 f(x,y)dy$

（B） $\int_0^1 dx\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

（C）$\int_{0}^{1} dx \int_{y^2}^{y} f(x,y) dx$

（D）$\int_{y}^{\sqrt{y}} dx \int_{0}^{1} f(x,y) dx$