

## 洛必达法则

### 2016 年试题

11 . 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3})$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3}) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

### 2015 年试题

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$ 。

$$\text{解法二：} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2}$$

( 3 分 )

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{3(1+x^2)} = -\frac{1}{3}$$

## 2014 年试题

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{e^{-x} - 1} \right)$

**11 . 解：原式**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{e^{-x} - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{x(e^{-x} - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1 - xe^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{-2e^{-x} + xe^{-x}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

## 2013 年试题

**已知函数  $f(x)$  具有连续的一阶导数，且**

**$f(0) \cdot f'(0) \neq 0$ ，求常数  $a$  和  $b$  的值，使**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{af(x) + bf(2x) - f(0)}{x} = 0。$$

**由题意知：**

公众号：高数专题复习

$$af'(0) + bf(0) - f(0) = 0, af'(0) + 2bf'(0) = 0 ,$$

**因为**

$$f(0) \cdot f'(0) \neq 0, \text{即} f(0) \neq 0, \text{即} f'(0) \neq 0 ,$$

**由此解得**  $a = 2, b = -1$ 。

## 2013 年试题

**计算**  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ 。

**原式=**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(e^{\frac{1}{x}} - 1) \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \cos(e^{\frac{1}{x}} - 1) e^{\frac{1}{x}} = 1 \end{aligned}$$

## 2012 年试题

公众号：高数专题复习

**计算**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1+x} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

**解：原式**  $+ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-\ln(1+x)}{\ln x}},$

**( 2 分 )**

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(1+x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}}$$

**( 4 分 )**

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{1+x}$$

$$= -1 ,$$

$$\therefore \text{原式} = e^{-1}$$

## 2011 年试题

**计算**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{x+1}{\sin x} \right)。$

**解：原式**

公众号：高数专题复习

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x(x+1)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 2x - 1}{\sin x + x \cos x}$$

**( 3 分 )**

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 2}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 2}{2 \cos x - x \sin x} = -1$$

**( 6 分 )**

## 2010 年试题

**11 . 计算**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2} .$

**11 . 解：原式**  $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{-4(\pi - 2x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\csc^2 x}{8} = -\frac{1}{8}$$

## 2008 年试题

**极限**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - e^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}。$

**计算**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}。$

**11. 【解析】** 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x \sec^2 x}{\sin x} = 2. \end{aligned}$$

## 2007 年试题

**11. 求极限**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right)$  **的值。**

**11. 【解析】 应用洛必塔法则，**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

## 2005 年试题

极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 2004 年试题

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x^3 + 5x} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x-2) + (x+2)}{\sin^3 x}$

11. 【解析】原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x-2) + e^x + 1}{3x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{6x}$$

$$= \frac{1}{6}$$

## 2002 年试题

若  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{\sin(x^2 - 1)} = 3$

求  $a, b$  的值