

## 三、一元函数的积分学

### 1. 定积分

①  $f(x)$  (当  $f(x) > 0$ ) 在  $[a, b]$  上连续, 则  $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$  所围成的阴影部分的面积:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

### 2. 定积分的性质

$$\textcircled{1} \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$\textcircled{2} \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

$$\textcircled{3} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (\text{区间可加性})$$

$$\textcircled{4} \int_a^a f(x) dx = 0.$$

### 3. 广义积分 (反常积分)

$$\textcircled{1} \int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a);$$

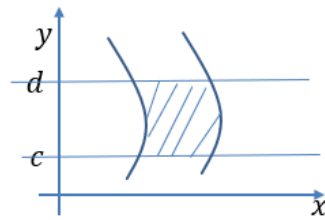
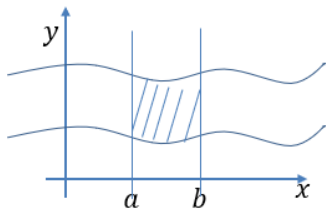
### 4. 变限积分

$$\textcircled{1} \left[ \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt \right]' = f(u(x)) u'(x) - f(v(x)) v'(x).$$

$$\textcircled{2} \left[ \int_a^{u(x)} f(t) dt \right]' = f(u(x)) u'(x).$$

### 5. 定积分的应用

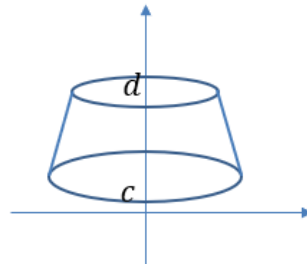
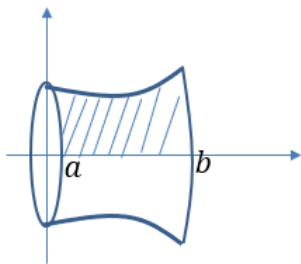
$$\textcircled{1} \text{ 面积公式: } (1) S = \int_a^b (\text{上曲线} - \text{下曲线}) dx; (2) S = \int_c^d (\text{右曲线} - \text{左曲线}) dy.$$



## ② 旋转体体积公式：

平面图形绕x轴旋转得到旋转体体积  $V_x = \int_a^b \pi f^2(x) dx$ ;

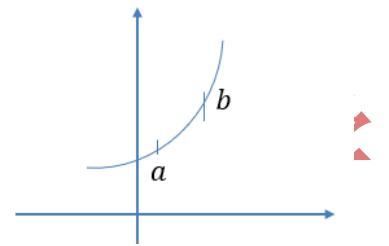
平面图形绕y轴旋转得到旋转体体积  $V_y = \int_c^d \pi x^2 dy$ .



## ③ 弧长公式：

$y = f(x)$ , 弧长  $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  弧长  $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$   $\alpha \leq t \leq \beta$



## 6. 定积分在物理学中的应用

① 恒力 F 做功：  $W = FS$ ;

② 侧压力：如果有一面积为 A 的薄板水平放置在液体深为 h 的地方

压强：  $P = \frac{F}{S} = \frac{\rho A \cdot h \cdot g}{A} = \rho gh$  (压强只与水深有关) ;

压力：  $F = PS = \rho ghA$ .