微分方程

16 年试题

20．已知定义在区间$[0,+\infty)$上的非负可导函数$f(x)$满足$f^2(x)=\int_0^x \frac{1+f^2(t)}{1+t^2}dt(x\geq 0)$

（1）判断函数$f(x)$是否存在极值,并说明理由；

（2）求$f(x)$

20.（1）对条件等式两边对x求导得

$$2f(x)f'(x)=\frac{1+f^2(x)}{1+x^2},$$

$$\because \frac{1+f^2(x)}{1+x^2}\neq 0,\therefore f'(x)\neq 0$$

即$f(x)$无驻点，故$f(x)$不存在极值

（2）令$f(x)=y$，则由（1）式得$2yy'=\frac{1+y^2}{1+x^2}$，

且$y|_{x=0}=0$，

即$\frac{2y}{1+y^2}dy=\frac{1}{1+x^2}dx$

即$\ln(1+y^2)=\arctan x+c$

由$y\big|_{x=0}=0\Rightarrow c=0$

故$1+y^2=e^{\arctan x}$，因此

$f(x)=y=(e^{\arctan x}-1)^{\frac{1}{2}}\ (x\geq 0)$

16 年试题

17．已知函数$y=e^{2x}$是微分方程$y''-2y'+ay=0$的一个特解,求常数a的值,并求该微分方程的通解

解：$\because y'=2e^{x},y''=4e^{2x}$

由题意知$4e^{2x}-4e^{2x}+ae^{2x}=0$，即

$ae^{2x}=0,a=0$

当$a=0$时微分方程为$y''-2y'=0$

其特征方程为$r^2-2r=0$ ，解得$r=0,r=2$

所以，微分方程的通解为$y=c_1+c_2e^{2x}$

15 年试题

17．求微分方程$y''+2y'+5y=0$满足初始条件

$y\Big|_{x=0}=2$，$y'\Big|_{x=0}=0$的特解。

17．解：微分方程的特征方程为$r^2+2r+5=0$，解得$r=-1\pm 2i$，

（2 分）

微分方程的通解为

$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

$y'=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

$+e^{-x}(-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x)$

$\therefore y\Big|_{x=0}=C_1=2, y'\Big|_{x=0}=-C_1+2C_2=0,$

解得$C_1=2,C_2=1$

故微分方程的特解为

$y=e^{-x}(2\cos 2x+\sin 2x)$

（6 分）

15 年试题

9．微分方程$y'-xy=0$满足初始条件$y\Big|_{x=0}=1$的特解为$y=$__________________。

14 年试题

8．若由参数方程$\begin{cases} x=\ln\cos t \\ y=a\sec t \end{cases}$所确定的函数$y=y(x)$是微分方程$\dfrac{dy}{dx}=y+e^{-x}$的解，则常数$a=$__________________。

14 年试题

18．求微分方程$(1+x^2)dy-(x-x\sin^2 y)dx=0$满足初始条件$y|_{x=0}=0$的特解。

18．解：将原方程变形为$\dfrac{dy}{\cos^2 y}=\dfrac{x}{1+x^2}dx$

两边积分得：$\displaystyle\int\frac{dy}{\cos^2 y}=\int\frac{x}{1+x^2}dx$

即$\tan y=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

又$\because x=0$时，$y=0$，$\therefore C=0$

故原方程的特解为$\tan y=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

13 年试题

18．求微分方程$y''-2y'+(1-k)y=0$

（其中常数$k\geq 0$）的通解。

18．由微分方程的特征方程$r^2-2r+1-k=0$解得

$$r_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1-k)}}{2}=1\pm\sqrt{k},$$

所以当$k>0$时，方程有两个不相等的实根$1+\sqrt{k}$和$1-\sqrt{k}$；

当$k=0$时，方程有唯一实根据 1。

故当$k>0$时，通解为$y=C_1e^{(1+\sqrt{k})x}+C_2e^{(1-\sqrt{k})x}$；

当$k=0$时，通解为$y=(C_1+C_2x)e^x$。

14 年试题

10．微积分方程$y''+y'-12y=0$的通解是$y=$_________________。

12 年试题

16．求微积分方程$y''-4y'+13y=0$满足初始条件$y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=8$的特解

16．解：由微分方程的特征方程$r^2-4r+13=0$

解得$r=2\pm 3i$ （2 分）

所以此微分方程的通解为

$y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$

（4 分）

因为

$y'=2e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$

$+e^{2x}(-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x)$

由$y\big|_{x=0}=C_1=1$及$y'\big|_{x=0}=2C_1+3C_2=8$

解得$C_1=1,C_2=2$，

故所求特解为$y=e^{2x}(\cos 3x+2\sin 3x)$

11 年试题

16．求微分方程$y''-2y'+10y=0$满足初始条件

$y\big|_{x=0}=0,y'\big|_{x=0}=3$的特解。

16．解：由微分方程的特征方程$r^2-2r+10=0$

解得$r=1\pm 3i$ （2 分）

所以此微分方程的通解为

$y=e^{x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$

（4 分）

$y' = C_2(e^x \sin 3x + 3e^x \cos 3x)$，

由 $y'\big|_{x=0} = 3$，得 $C_2 = 1$，

故所求特解为 $y = e^x \sin 3x$

11 年试题

20．若定义在区间 $(0,\pi)$ 内的可导函数 $y = f(x)$

满足 $xy' = (x\cot x - 1)y$ 且 $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi}$，

（1） 求函数 $y = f(x)$ 的表达式；（2）证明：函数 $y = f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内单调递减。

20．（1）解法一：$\dfrac{dy}{y} = (\cot x - \dfrac{1}{x})dx$，

$\therefore \int \dfrac{1}{y}dy = \int (\cot x - \dfrac{1}{x})dx$，

即 $\ln y = \ln\sin x - \ln x + C_1, y = \dfrac{C\sin x}{x}$

又 $y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2C}{\pi}, \therefore C = 1$

故所求函数为 $y = \dfrac{\sin x}{x}$。

（5 分）

解法二：$y'-(\cot x-\frac{1}{x})y=0,$

$$\therefore y=Ce^{\int(\cot x-\frac{1}{x})dx}=Ce^{\ln\sin x-\ln x}=\frac{C\sin x}{x}$$

（2 分）

又$\Theta y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{2C}{\pi}=\frac{2}{\pi},\therefore C=1$

故所求函数为$y=\frac{\sin x}{x}$

（5 分）

（2）证：

$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$,令$g(x)=x\cos x-\sin x$，

（6 分）

则$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$

当$x\in(0,\pi)$时,$g'(x)<0$,所以$g(x)$在$(0,\pi)$内单调递减，因此，当$x\in(0,\pi)$时,有$g(x)<g(0)=0$

（8 分）

由此可知，$x\in(0,\pi)$时,$y'=\frac{g(x)}{x^2}<0$

故函数$y=\dfrac{\sin x}{x}$在区间$(0,\pi)$内单调递减

11 年试题

8．已知函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且

$$y=\int_0^{2x} f(\frac{1}{2}t)dt-2\int(1+f(x))dx,$$

则$y'=$________。

10 年试题

9．微分方程$y''-5y'-14y=0$的通解是$y=$_____

10 年试题

16．求微积分方程$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=\sin x$的通解。

16．解：$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int \sin xe^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C)$

$$=e^{-\ln x}(\int \sin xe^{\ln x}dx+C)$$

$$=\frac{1}{x}(-x\cos x+\int \cos xdx+C)$$

$$=-\cos x+\frac{\sin x}{x}+\frac{C}{x}$$

09 年试题

18．求微分方程 $y''+y'-6y=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=-8$ 的特解。

18. 【解析】因为微分方程的特征方程为 $r^2+r-6=0$,

解得 $r_1=-3, r_2=2$.

$\therefore$ 微分方程的通解为 $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}$.

$\because y'=-3c_1e^{-3x}+2c_2e^{2x}$,

$\therefore$ 有 $y\big|_{x=0}=c_1+c_2=1$,

$y'\big|_{x=0}=-3c_1+2c_2=-8$,

解得 $c_1=2$，$c_2=-1$，

故特解为 $y=2e^{-3x}-e^{2x}$.

09 年试题

10． 已知函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=f(x)+1$，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$=__。

08 年试题

18. 求微分方程 $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=2$ 的特解。

18.【解析】 $y=e^{-\int \cos x dx}\left[C+\int e^{-\sin x}e^{\int \cos x dx}dx\right]$

$$=e^{-\sin x}\left[C+\int e^{-\sin x}e^{\sin x}\,dx\right]$$

$$=e^{-\sin x}\left[C+\int dx\right]=e^{-\sin x}(C+x),$$

由条件$y\big|_{x=0}=2$有$2=e^{-\sin 0}(C+0)=C$，

故满足初始条件$y\big|_{x=0}=2$的特解为

$y=e^{-\sin x}(2+x)$.

08 年试题

10. 微分方程$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{x}{1+x^2}=0$

的通解是________________。

07 年试题

9. 微分方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0$的通解是y=__________

07 年试题

19. 若函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且满足

$f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$，求$f(x)$。

19. 【解析】当$x=0$时，有

$$f(0)+2\int_0^0 f(t)dt=0^2\Rightarrow f(0)=0.$$

由题意知$f(x)$可导，

等式 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$ 两边对 x 求导数得：

$f'(x)+2f(x)=2x.$

记 $y=f(x)$，则有 $\begin{cases} y'+2y=2x \\ y\big|_{x=0} \end{cases}$ =0.

$$\therefore y=e^{-\int 2dx}\left(\int 2xe^{\int 2dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-2x}\left(\int 2xe^{2x}dx+C\right)$$

$$=e^{-2x}\left(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C\right)$$

$$=x-\frac{1}{2}+Ce^{-2x}$$

$$\because y\Big|_{x=0}=-\frac{1}{2}+C=0,\therefore C=\frac{1}{2}$$

故 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}.$

06 年试题

18． 求微分方程 $y'\tan x=y\ln y$ 满足初始条件 $y\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=e$ 的特解。

18.【解析】∵原方程可变形为：$\frac{dy}{y\ln y}=\cot x dx$，

$$\therefore \int \frac{dy}{y\ln y} = \int \cot x dx \Rightarrow \ln|\ln y| = \ln|\sin x| + c_1$$

（说明：没写绝对值不扣分）

化简得：$y = e^{c\sin x}$

将初始条件代入得：$e = e^{\frac{1}{2}c} \Rightarrow c = 2$

故所求的特解为$y = e^{2\sin x}$.

06 年试题

10．微分方程$4y'' - 4y' + 5y = 0$的通解是________________。

05 年试题

10. 微分方程$\frac{dx}{dy} + 2xy = 2xe^{-x^2}$的通解是______________。

05 年试题

19. 求微分方程$y'' + 4y' + 3y = 0$满足初始条件$y(0) = 2, y'(0) = 6$的特解。

19.【解析】方程$y'' + 4y' + 3y = 0$的特征方程为$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

解出$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$

可知方程的通解为 $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$

由上式可得 $y' = -3C_1 e^{-3x} - C_2 e^{-x}$

用初始条件$y(0) = 2, y'(0) = 6$代入上面两式得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ -3C_1 - C_2 = 6 \end{cases}$$

解出$C_1 = -4, C_2 = 6$

故所求的特解为$y = -4e^{-3x} + 6e^{-x}$