吕言教育
LvYan Education

广东专插本

十年真题

高等数学

真题强化

广东第一本集10年真题的真题集，通过真题了解往年的命题趋势，预测考点，熟悉题型。

吕言教育专插本出品

目录

广东省 2009 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，每小题只有一个选项符合题目要求）

1、设 $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x<0\\ 1-x, & x\ge 0\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=$（　　）

A. -1　　B. 1　　C. 3　　D. ∞

2、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x}\sin x\right)=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. ∞

3、下列函数中，在点 $x=0$ 处连续但不可导的是（　　）

A. $y=|x|$　　B. $y=1$

C. $y=\ln x$　　D. $y=\dfrac{1}{x-1}$

4、积分 $\int\cos x f'(1-2\sin x)dx=$（　　）

A. $2f(1-2\sin x)+C$　　B. $\dfrac{1}{2}f(1-2\sin x)+C$

C. $-2f(1-2\sin x)+C$　　D. $-\dfrac{1}{2}f(1-2\sin x)+C$

5、改变二次积分 $I=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$ 的积分次序，则 $I=$（　　）

A. $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^0 f(x,y)dx$　　B. $\int_0^1 dy\int_1^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$　　D. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、若当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1-ax^2}-1\sim 2x^2$，则常数 $a=$__________

7、曲线 $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 的水平渐近线方程是__________

8、若曲线 $\begin{cases}x=kt-3t^2,\\ y=(1+2t)^2\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线斜率为 1，则常数 $k=$__________

9、已知二元函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=y^2dx+2xydy$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________

10、已知函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=f(x)+1$，$f(0)=0$，$f(x)=$____________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11、计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x e^{t^2}dt-\frac{1}{x^2}\right)$

12、设 $f(x)=\begin{cases} x(1+2x^2)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 用导数定义计算 $f'(0)$

13、已知函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=x\ln(1+x^2)$，求 $f''(1)$

14、计算不定积分 $\int\arctan\sqrt{x}dx$

15、计算定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{|x|+x^3}{1+x^2}dx$

16、设隐函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $x^y+z^3+xz=0$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$

17、计算二重积分 $\iint\limits_{D} \frac{(2\sqrt{x^2+y^2}-1)^3}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ ，其中积分区域 D：$1 \le x^2 + y^2 \le 4$

18、求微分方程 $y''+y'-6y=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=-8$ 的特解。

四、综合题（大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19、用G表示由曲线 $y=\ln x$ 及直线 $x+y=1, y=1$围成的平面图形。

（1）求G 的面积；

（2）求G 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积。

20、设函数 $f(x)=x^2+4x-4x\ln x-8$

（1）判断 $f(x)$ 在区间$(0,2)$ 上的图形的凹凸性，并说明理由；

（2）证明：当$0<x<2$ 时，有 $f(x)<0$

广东省 2010 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、选择题（本大题共 5 题，每小题 3 分，共 15 分，每小题只有一个选项符合题目要求）

1、设函数 $y=f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，则函数 $y=\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right]$在其定义域上是（　　）

A. 偶函数　　B. 奇函数　　C. 周期函数　　D. 有界函数

2、 $x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 0, & x\ge 0 \end{cases}$ 的（　　）

A. 连续点　　B. 第一类可去间断点

C. 第一类跳跃间断点　　D. 第二类间断点

3、当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中，与 x 等价的是（　）

A. $1-\cos x$　　B. $\sqrt{1+x^2}-1$

C. $\ln(1+x)+x^2$　　D. $e^{x^2}-1$

4、若函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$ 上连续，则下列结论中正确的是（　　）

A. 在区间(a,b) 内至少存在一点ξ，使得 $f(\ )=0$

B. 在区间(a,b) 内至少存在一点ξ，使得 $f'(\xi)=0$

C. 在区间(a,b) 内至少存在一点ξ，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

D. 在区间(a,b) 内至少存在一点ξ，使得$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

5、设 $f(x+y,xy)=x^2+y^2-xy$，则 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=$（　　）

A. $2y-x$　　B. -1　　C. $2x-y$　　D. -3

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、设 a,b 为常数，若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2}{x+1}+bx\right)=2$，则 $a+b=$ ______

7、圆 $x^2+y^2=x+y$ 在$(0,0)$ 点处的切线方程是 __________

8、由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 和直线 $x=1, x=2$ 及 $y=0$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所构成的几何体的体积 $V=$ ______________

9、微分方程 $y''-5y'-14y=0$ 的通解是 $y=$ ____________

10、设平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，则二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)^2\,d\sigma=$ ___________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11、计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$

12、设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{2}{x}+\sin 2x, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，用导数定义计算 $f'(0)$

13、已知点(1,1)是曲线 $y=ae^{\frac{1}{x}}+bx^2$ 的拐点，求常数 a, b 的值。

14、计算不定积分 $\int\dfrac{\cos x}{1-\cos x}dx$

15、计算定积分 $\int_{\ln 5}^{\ln 10}\sqrt{e^x-1}\,dx$

16、求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=\sin x$ 的通解。

17、已知隐函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $x^{z}-xy^{2}+z^{3}=1$ 所确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

18、计算二重积分 $\iint\limits_{D}2xy\,dxdy$ ，其中 D 是由抛物线 $y=x^{2}+1$ 和直线 $y=2x$ 及 $x=0$ 围成的区域。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19、求函数 $\varphi(x)=\int_{0}^{x}t(t-1)dt$ 的单调增减区间和极值。

20、已知 $(1+\dfrac{2}{x})^{x}$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的一个原函数，

（1）求 $f(x)$；（2）计算 $\int_{1}^{+\infty}f(2x)dx$

广东省 2011 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、选择题（本大题共 5 题，每小题 3 分，共 15 分，每小题只有一个选项符合题目要求）

1、下列极限运算中，正确的是（　　）

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}e^{x}=\infty$

C. $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=1$

2、若函数 $f(x)=\begin{cases}(1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ 2+x, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$（　　）

A. $-\ln 2$　　B. $\ln 2$　　C. 2　　D. e^2

3、已知 $f(x)$ 的二阶导数存在，且 $f(2)=1$，$f'(2)=0$，则 $x=2$ 是函数 $F(x)=(x-2)^2f(x)$ 的（　　）

A. 极小值点　　B. 最小值点　　C. 极大值点　　D. 最大值点

4、已知 $\int_1^2 xf(x)dx=2$，则 $\int_0^3 f(\sqrt{x+1})dx=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5、已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2x^2-y^2)}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$ 则 (t)（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{kx}{(2x+3)^4}$ 与 $\dfrac{1}{x^3}$ 是等价无穷小，则常数 $k=$__________

7、设 $f(x)=\begin{cases}x=t-t^3\\ y=2^t\end{cases}$ 则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=$________

8、已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $y=\int_0^{2x}f(\frac{1}{2}t)dt-2\int(1+f(x))dx$，则 $y'=$________

9、已知二元函数 $z=\dfrac{4x-3y}{y^2}(y\neq 0)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$ __________

10、设平面区域 D 由直线 $y=x, y=2x$ 及 $x=1$ 所围成，则二重积分 $\iint\limits_D x\,d\sigma=$ __________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11、计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x+1}{\sin x}\right)$

12、已知函数 $f(x)$ 的$n-1$阶导数 $f^{(n-1)}(x)=\ln(\sqrt{1+e^{-2x}}-e^{-x})$，求 $f^{(n)}(0)$。

13、求曲线 $y=x-\arctan kx(k<0)$ 的凹凸区间和拐点。

14、计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx\ (x>1)$

15、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1+x^2}, & x>0\\ x\cos x, & x\leq 0\end{cases}$ $f(x)=$计算定积分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{1}f(x)dx$

16、求微分方程 $y''+2y'+10y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=3$ 的特解。

17、已知二元函数 $z=(3x+y)^{2y}$，求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$

18、化二次积分 $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dy$ 为极坐标形式的二次积分，并求其值。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 题 10 分，第 20 题 12 分，共 22 分）

19、过坐标原点作曲线 $y=e^x$ 的切线 l，切线 l 与曲线 $y=e^x$ 及 y 轴围成的平面图形记为 G

求：（1）切线 l 的方程；

（2）G 的面积；

（3）G 绕 x 轴旋转所得旋转体体积。

20、若定义在区间 $(0,\pi)$ 内的可导函数 $y=f(x)$ 满足 $x\cdot y'=(x\cdot\cot x-1)\cdot y$ 且 $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$

（1）求函数 $y=f(x)$ 的表达式；

（2）证明：函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内单调递减。

广东省 2012 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，每小题只有一个选项符合题目要求）

1、已知三个数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$和$\{c_n\}$满足$a_n \le b_n \le c_n (n \in N^+)$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ (a,b 为常数，且 $a < c$)，则数列$\{b_n\}$必定（　　）

A．有界　　B．无界　　C．收敛　　D．发散

2、$x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}(1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ e^2+x, & x\ge 0\end{cases}$ 的（　　）

A．连续点　　B．可去间断点　　C．跳跃间断点　　D．第二类间断点

3、极限 $\lim\limits_{x\to\infty} 2x\sin\dfrac{3}{x}=$（　　）

A．0　　B．2　　C．3　　D．6

4、如果曲线 $y=ax-\dfrac{x^2}{x+1}$ 的水平渐近线存在，则常数 $a=$（　　）

A．2　　B．1　　C．0　　D．-1

5、设 $f(x,y)$ 为连续函数，将极坐标形式的二次积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$ 化为直角坐标形式，则 $I=$（　　）

A．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　B．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

C．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$　　D．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=3$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$__________

7、若 $f(x)=\int\dfrac{\tan x}{x}dx$，则 $f''(\pi)=$__________

8、若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则常数 $b=$__________

9、广义积分 $\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx=$__________

10、设函数 $f(\mu)$ 可微，且 $f'(0)=\frac{1}{2}$，则 $z=f(4x^{2}-y^{2})$ 在点(1,2)处的全微分 $dz\big|_{(1,2)}=$__________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11、计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

12、设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln(\sqrt{3+t^{2}}+t)\\ y=\sqrt{3+t^{2}}\end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$ (结果要化为最简形式)。

13、确定函数 $f(x)=(x-1)e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}$ 的单调区间和极值。

14、求不定积分 $\int\ln(1+x^{2})dx$

15、设 $f(x)=\begin{cases}x^{3}e^{x^{4}}+1, & -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}\\ \frac{1}{x}, & x>\frac{1}{2}\end{cases}$，利用定积分的换元法求定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx$

16、求微积分方程 $y''-4y'+13y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$， $y'|_{x=0}=8$ 的特解。

17、已知二元函数 $z=x(2y+1)^{x}$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$

18、计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sqrt{y^2-x}\,d\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=\sqrt{x}$ 及直线 $y=1,x=0$ 围成的闭区域。

四、综合题（大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19、已知C经过点 $M(1,0)$，且曲线C上任意点 $P(x,y)(x\neq 0)$ 处的切线斜率与直线OP（O为坐标原点）的斜率之差等于 ax（常数 $a>0$）

(1)求曲线C的方程；

(2)试确定 a 的值，使曲线C与直线 $y=ax$ 围成的平面图形的面积等于 $\dfrac{8}{3}$

20、若当 $x\to 0$，函数 $f(x)=\int_0^x 2^{t^3-3t+a}dt$ 与 x 是等价无穷小量；

(1)求常数 a 的值；

(2)证明：$\dfrac{1}{2}\leq f(2)\leq 8$

广东省 2013 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，每小题只有一个选项符合题目要求）

1、当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中，与 x 不等价的无穷小量是（　　）

A. $\ln(x+1)$　　B. $\arcsin x$　　C. $1-\cos x$　　D. $\sqrt{1+2x}-1$

2、曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$（　　）

A. 只有水平渐近线　　B. 只有铅垂渐近线

C. 既有水平渐近线也有铅锤渐近线　　D. 无渐近线

3、下列函数中，在区间[-1,1]上满足罗尔（Rolle）定理条件的是（　　）

A. $y=x^{\frac{2}{3}}$　　B. $y=|x|$　　C. $y=x^{\frac{4}{3}}$　　D. $y=x^{\frac{5}{3}}$

4、设函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$, 则下列结论正确的是（　　）

A. $f(0)$是$f(x)$的极小值，$f(\frac{\pi}{2})$是$f(x)$的极大值　　B. $f(0)$是$f(x)$的极大值，$f(\frac{\pi}{2})$是$f(x)$的极小值

C. $f(0)$和$f(\frac{\pi}{2})$都是$f(x)$的极小值　　D. $f(0)$和$f(\frac{\pi}{2})$都是$f(x)$的极大值

5、若函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足 $F'(x)=f(x)(x\in R)$, 则下列等式成立的是（　）

A. －（ 갠▯ ◌）　　（ 갠▯ ◌）◌

B. －（ 갠▯ ◌）　　－（ 갠▯ ◌）◌

C. －（ 갠▯ ◌）　　（ 갠▯ ◌）◌

D. $\int\frac{1}{x}f(2\ln x+1)dx=\frac{1}{2}F(2\ln x+1)+C$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、要使函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}$ 在 $x=1$ 处连续，应补充定义 $f(1)=$______

7、曲线 $\begin{cases}x=3^t\\ y=\tan t\end{cases}$，在$t=0$ 相应的点处的切线方程是 $y=$______

8、函数 $f(x)=\begin{cases} x(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 0, & x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左导数 $f'_-(0)=$ ___________

9、已知平面图形 $G=\{(x,y)\,|\,x\geq 1, 0\leq y\leq \frac{1}{x}\}$, 将图形 G 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V=$ _______

10、设 D 为圆环域：$1\leq x^2+y^2\leq 4$，则二重积分 $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=$ ___________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11、计算 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin(e^{\frac{1}{x}}-1)$

12、已知函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数，且 厂 厂 求常数 a 和 b 的值，使

$$\lim_{x\to 0}\frac{af(x)+bf(2x)-f(0)}{x}=0$$

13、求由方程 $xy\ln y+y=e^{2x}$ 所确定的隐函数在 $x=0$ 处的导数 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$

14、求曲线 ln $\sqrt{\quad t}$ 厂的凹、凸区间及其拐点坐标

15、计算不定积分 $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$

16、计算定积分 $\int_0^2 \frac{x}{(x+2)\sqrt{x+1}}dx$

17、求二元函数 $z=\int_0^{xy} e^{-t^2}dt$ 的全微分 dz 及二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

18、求微分方程 $y''-2y'+(1-k)y=0$ （其中常数 $k\geq 0$ ）的通解。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19、交换二次积分 $I=\int_0^1 dx\int_{e^x}^{e}\frac{(2x+1)(2y+1)}{\ln y+1}dy$ 的积分次序，并求 I 的值。

20、已知 $f(x)$ 是定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的非负可导函数，且曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0,x=0$ 及 $x=t(t\geq 0)$ 围成的曲边梯形的面积为 $f(t)-t^2$

(1) 求函数 $f(x)$

(2) 证明：当 $x>0$ 时，$f(x)>x^2+\frac{x^3}{3}$

广东省 2014 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，每小题只有一个选项符合题目要求）

1、设函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ 2+3x, & x>0, \end{cases}$ 则下列结论正确的是（　　）

A. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$　　C. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=3$　　D. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在

2、函数 $y=\dfrac{x}{x+2\sin x}$ 的图形的水平渐近线是（　　）

A. $y=0$　　B. $y=\dfrac{1}{3}$　　C. $y=\dfrac{1}{2}$　　D. $y=1$

3、曲线 $y=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2+1$ 的凸区间是（　　）

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-1,0)$　　C. $(0,1)$　　D. $(1,+\infty)$

4、已知 $\arctan x^2$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则下列结论中，不正确．．．的是（　　）

A. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^4}$

B. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 和 x 是同阶无穷小量

C. $\int_0^{+\infty} f(x)dx=\dfrac{\pi}{2}$

D. $\int f(2x)dx=\arctan 4x^2+C$

5、交换二次积分 $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy$ 的积分次序，则 $I=$（　　）

A. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

B. $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$

C. $\int^1 \int_{y^2}^1 f(x,y)dx$

D. $\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+3n+1}}{n}=$__________

7、$f(x)=x^2+2x-1$ 在区间 $[0,2]$ 上应用拉格朗日中值定理时，满足定理要求的 $\xi=$_________

8、若由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\cos t \\ y=a\sec t \end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=y+e^{-x}$ 的解，则常数 $a=$______

9、设二元函数 $z=\ln(xy)$ ，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________

10、微积分方程 $y''+y'-12y=0$ 的通解是 $y=$________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{e^{-x}-1}\right)$

12、设 $y=x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$ ，求 $y''\big|_{x=0}$

13、求函数 $f(x)=\log_4(4^x+1)-\dfrac{1}{2}x-\log_4 2$ 的单调区间和极值。

14、计算不定积分 $\int\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x+3}}dx$

15、设函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

（1）求曲线 $y=f(x)$ 上相应于 $0\le x\le 1$ 的弧段长度 S；

（2）求由曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=0, x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面图绕 x 轴旋转而成的旋转体积 V_x

16、已知三元函数 $f(u,v,w)$ 具有连续偏导数，且 $f_v-f_w\neq 0$，若二元函数 $z=z(x,y)$ 是由三元方程 $f(x-y,y-z,z-x)=0$ 所确定的隐函数，计算 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$

17、计算二重积分 $\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma$，其中积分区域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\ge 1,|x|\le 2,|y|\le 2\right\}$

18、求微分方程 $(1+x^2)dy-(x-x\sin^2 y)dx=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=0$ 的特解。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19、已知函数 $f(x)=\begin{cases}(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}}\sin 3x+1, & x\neq 0 \\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续。

（1）求常数 a 的值；

（2）求曲线 $y=f(x)$ 在点$(0,a)$ 处的切线方程。

20、设函数 $f(x)=\int_{\ln x}^{2}e^{t^2}dt$

（1）求 $f'(e^2)$；

（2）计算定积分$\int_{1}^{e^2}\frac{1}{x}f(x)dx$

广东省 2015 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，每小题只有一个选项符合题目要求）

1、若当 $x \to 0$ 时，$kx+2x^2+3x^3$ 与 x 是等价无穷小，则常数 $k=$（　　）

A.0　　B. 1　　C.2　　D.3

2、已知函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=1$，则下列结论正确的是（　　）

A. x_0 为 $f(x)$ 的极小值点　　B. x_0 为 $f(x)$ 的极大值点

C. x_0 不是 $f(x)$ 的极值点　　D. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

3、设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，C 为任意实数，则 $\int f(2x)dx=$（　　）

A. $F(x)+C$　　B. $F(2x)+C$　　C. $\frac{1}{2}F(2x)+C$　　D. $2F(2x)+C$

4、若函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+kx$ 区间 $[0,1]$ 上满足罗尔（Rolle）定理的条件，则常数 $k=$（　　）

A. -1　　B. 0　　C.1　　D.2

5、下列级数中，收敛的是（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{n^2}\right]$

二、填空题（本大题 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、曲线 $y=\left(1-\frac{5}{x}\right)^x$ 的水平渐进线为 $y=$______

7、设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\tan t \\ y=t^3+2t \end{cases}$，所确定，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$______

8、广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^6}dx=$______

9、微分方程 $y'-xy=0$ 满足初始条件　　　　的特解为 $y=$______

10、设函数 $f(x)=\log_2 x\,(x>0)$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$______

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11、已知函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2(x-1)}{x-1}, & x<1, \\ a, & x=1, \\ x+b, & x>1, \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，求常数a 和b 的值。

12、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}$

13、设 $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$，求 $y''|_{x=0}$

14、计算不定积分 $\int\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+3}dx$

15、求由曲线 $y=x\cos 2x$ 和直线 $y=0$，$x=0$ 及 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 围成的平面图形的面积。

16、将二次积分 $I=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}e^{x^2+y^2}dy$ 化为极坐标形式的二次积分，并计算 I 的值。

17、求微分方程 $y''+2y'+5y=0$满足初始条件$y|_{x=0}=2,y'|_{x=0}=0$ 的特解。

18、判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n+1}$ 的收敛性。

四、综合题（大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19、设二元函数 $z=f(x,y)\ x^y\ln x\,(x>0,x\neq1)$，平面区域 $D=\{(x,y)2\leq x\leq e,-1\leq y\leq 1\}$

（1）求全微分 dz；

（2）求 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

20、已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的单调递减的可导函数，且 $f(1)=2$，函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt-x^2-1$

（1）判别曲线 $y=F(x)$ 在 R 上的凹凸性，并说明理由；

（2）证明：方程 $F(x)=0$ 在区间$(0,1)$ 内有且仅有一个实根。

广东省 2016 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，每小题只有一个选项符合题目要求）

1、若函数 $f(x)=\begin{cases}3x+a，x\geqslant 1\\ x+1，x<1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，则常数 $a=$（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2、已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=6$，则 $f'(x_0)=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C.3　　D. 6

3、若点 $(1，2)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则常数 a 与 b 的值应分别为（　　）

A. -1 和 3　　B. 3 和 -1　　C. -2 和 6　　D. 6 和 -2

4、设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上可导，C 为任意实数，则 $\int\sin xf'(\cos x)dx=$（　　）

A. $\cos xf(\cos x)+C$　　B. $-\cos xf(\cos x)+C$　　C. $f(\cos x)+C$　　D. $-f(\cos x)+C$

5、已知常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和 $S_n=\dfrac{n}{n+1}(n\in N^*)$，则下列常数项级数中，发散的是（　　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2u_n$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+\dfrac{1}{n})$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[u_n-(\dfrac{3}{5})^n]$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{3}{x}=$______

7、设 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$，则 $dy|_{x=0}=$______

8、设二元函数 $z=x\ln y$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$______

9、设平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则 $\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma=$______

10、椭圆曲线 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V=$________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\sin x}{x^3})$

12、求曲线 $3x^2+y+e^{xy}=2$ 在点$(0，1)$处的切线方程

13、求不定积分$\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

14、计算定积分 $\int_0^1 x2^x dx$

15、设 $z=u^v$，而$u=2x+y$　$v=x$，求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$ 和 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$

16、设平面区域 D 由曲线 $xy=1$ 和直线 $y=x$ 及 $x=2$ 围成，计算二重积分 $\iint_D\frac{x}{y^2}d\sigma$

17、已知函数 $y=e^{2x}$ 是微分方程 $y''-2y'+ay=0$ 的一个特解，求常数 a 的值，并求该微分方程的通解

18、已知函数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足, $u_{n+1}=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n u_n(n\in N^*)$,且 $u_1=1$，判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19、设函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$，证明：

（1）当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小量;

（2）当 $x>0$ 时，$f(x)>0$

20、已知定义在区间 $[0,+\infty)$ 上的非负可导函数 $f(x)$ 满足 $f^2(x)=\int_0^x\frac{1+f^2(t)}{1+t^2}dt(x\geq 0)$

（1）判断函数 $f(x)$ 是否存在极值，并说明理由;

（2）求 $f(x)$

广东省 2017 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，每小题只有一个选项符合题目要求）

1、下列极限等式不正确的是（　　）

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n}=0$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}}=1$

C. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=0$　　D. $\lim\limits_{n\to0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

2、若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=4$，则常数 $a=$（　　）

A. $\ln 2$　　B. $2\ln 2$

C. 1　　D. 4

3、设 $F(x)$ 是可导函数 $f(x)$ 的一个原函数，C 为任意常数，则下列等式不正确的是（　　）

A. $\int f'(x)dx=f(x)+C$　　B. $\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$

C. $\int f(x)dx=F(x)+C$　　D. $\int F(x)dx=f(x)+C$

4、已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上连续，且 $\int_0^2 xf(x)dx=4$，则 $\int_0^4 f(\sqrt{x})dx=$（　　）

A. 2　　B. 4

C. 6　　D. 8

5、将二次积分 $I=\int_{1}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2+y^2)dy$ 化为极坐标形式的二次积分，则 $I=$（　　）

A. $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^1 rf(r^2)dr$　　B. $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r^2)dr$

B. $\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 rf(r^2)dr$　　D. $\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 f(r^2)dr$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、已知当 $x\to0$ 时，$f(x)\sim 2x$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{f(x)}=$____________

7、若常数 $p>1$，则广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx=$____________

8、设二元函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=\dfrac{-y}{x^2}dx+\dfrac{1}{x}dy$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ____________

9、微分方程 $y''-9y=0$ 的通解为 $y=$ _____________

10、级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的和为_____________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11、求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{1-\cos x}$

12、设 $y=x^{x^2}(x>0)$，求 y'

13、设函数 $f(x)=\int_1^x\sqrt{(t-1)^2+1}\,dx$，求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点。

14、求不定积分 $\int x\cos(x+2)dx$

15、已知 $(x-y)^3+z+\tan z=0$，计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$

16、求二重积分 $\iint\limits_D e^{x^3}d\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的有界闭区域。

17、若曲线经过点$(0,1)$，且该曲线上任一点(x,y)处的切线斜率为 $2y+e^x$，求这条曲线的方程。

18、判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{4^n}{n!}\right)$ 的敛散性。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19、设函数 $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}}$

（1）求曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线方程；

（2）求由曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=0$， $=1$ 及 $y=0$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积V。

20、已知函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$

（1）证明：当 $x>0$ 时，恒有 $f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}$；

（2）试问方程 $f(x)=x$ 在区间$(0,+\infty)$内有几个实根？

广东省 2018 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，每小题只有一个选项符合题目要求）

1、$\lim\limits_{x\to 0}(3x\sin\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x})=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 4

2、设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=-1, f'(1)=0, f''(0)=-1, f''(1)=3$，则下列结论正确的是（　　）

A. 点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　B. 点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. 点 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　D. 点 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

3、已知 $\int f(x)dx=x^2+C$，其中 C 为任意常数，则 $\int f(x^2)dx=$（　　）

A. x^5+C　　B. x^4+C　　C. $\frac{1}{2}x^4+C$　　D. $\frac{2}{3}x^3+C$

4、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}=$（　　）

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

5、已知 $D=\left\{(x,y)\middle|4\le x^2+y^2\le 9\right\}$，则 $\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=$（　　）

A. 2π　　B. 10π　　C. $2\pi\ln\frac{3}{2}$　　D. $4\pi\ln\frac{3}{2}$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、已知 $\begin{cases}x=\log_3 t\\ y=3^t\end{cases}$，则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=1}=$ __________

7、$\int_{2}^{2}(|x|+\sin x)dx=$ __________

8、$\int_0^{+\infty}e^{1-2x}dx=$ __________

9、二元函数 $z=x^{y+1}$ 当 $x=e, y=0$ 时的全微分 $dz\Big|_{\substack{x=e\\y=0}}=$ __________

10、微分方程 $x^2dy=ydx$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$ __________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11、确定常数 a,b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+a}{x^2+1}, & x<0,\\ b, & x=0,\\ \left(1-\dfrac{2}{1+x}\right)^{x}, & x>0,\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续。

12、求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$

13、求由方程 $\left(1+y^2\right)\arctan y=xe^x$ 所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$

14、已知 $\ln(1+x^2)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int xf'(x)dx$

15、求由曲线 $y=1+\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ 和直线 $y=0,x=0$ 及 $x=1$ 所围成的平面图形的面积 A。

16、已知二元函数 $z=\dfrac{xy}{1+y^2}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

17、求 $\iint\limits_D \sqrt{1-\dfrac{x}{y}}\,d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x$ 和 $y=1,y=2$ 及 $x=0$ 所围成的闭区域。

18、判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{|\sin n|+2^n}$ 的收敛性。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19、已知函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)-4f(x)=0$，且曲线 $y=f(x)$ 在点(0,0)处的切线与直线 $y=2x+1$平行。

（1）求 $f(x)$；

（2）求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间与拐点。

20、已知函数 $f(x)=\int_0^x \cos t^2 dt$

（1）求 $f'(0)$；

（2）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

（3）证明：当 $x>0$ 时，$f(x)>x-\dfrac{(1+\lambda)x^3}{3\lambda}$，其中常数$\lambda>0$

广东省 2019 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，每小题只有一个选项符合题目要求）

1、函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2+x-2}$ 的间断点是

A. $x=-2$ 和 $x=0$　　B. $x=-2$ 和 $x=1$

C. $x=-1$ 和 $x=2$　　D. $x=0$ 和 $x=1$

2、设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, x<0 \\ 2, x=0 \\ \cos x, x>0 \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

A. 等于 1　　B.等于 2

C. 等于 1 或 2　　D.不存在

3、已知 $\int f(x)dx=\tan x+C$，$\int g(x)dx=2^x+C$，C 为任意常数，则下列等式正确的是

A. $\int[f(x)+g(x)]dx=2^x\tan x+C$　　B. $\int\dfrac{f(x)}{g(x)}dx=2^{-x}\tan x+C$

C. $\int f[g(x)]dx=\tan(2^x)+C$　　D. $\int[f(x)+g(x)]dx=\tan x+2^x+C$

4、下列级数收敛的是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n}}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3^n}-\dfrac{1}{n^3}\right)$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{1}{n}\right]$

5、已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$ 在点 $x=-1$ 处取得极大值，则常数 a，b 应满足条件

A. $a-b=0$，$b<0$　　B. $a-b=0$，$b>0$

C. $a+b=0$，$b<0$　　D. $a+b=0$，$b>0$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、曲线 $\begin{cases} x=t^3+3t \\ y=\arctan t \end{cases}$，则 $t=0$ 的对应点处切线方程为 y＝__________

7、微分方程 $ydx+xdy=0$ 满足初始条件 y　　　的特解为 $y=$__________

8、若二元函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=e^x\sin ydx+e^x\cos ydy$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________

9、设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le x,0\le x\le 1\}$，则 $\iint\limits_D xdxdy=$ ________________

10、已知 $\int_1^t f(x)dx=t\sin\dfrac{\pi}{t}(t>1)$，则 $\int_1^{+\infty}f(x)dx=$ ________________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11、求$\lim$ ________ 睘

12、设 $y=\dfrac{x^x}{2x+1}(x>0)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

13、求不定积分 $\int\dfrac{2+x}{1+x^2}dx$

14、计算定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x\sqrt{2x+1}dx$

15、设 $x-z=e^{xyz}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

16、计算二重积分$\iint_D \ln(x^2+y^2)d\sigma$，其中平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

17、已知函数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$满足$0\le a_n\le b_n$，且 [illegible]，判定级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的收敛性。

18、设函数 $f(x)$ 满足$\frac{df(x)}{de^{-x}}=x$，求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19、已知连续函数$\varphi(x)$ 满足$\varphi(x)=1+x+\int_0^x t\varphi(t)dt+x\int_x^0\varphi(t)dt$

（1）求$\varphi(x)$；

（2）求由曲线 $y=\varphi(x)$ 和 $x=0, x=\frac{\pi}{2}$ 及 $y=0$ 围成的图形绕 x 轴旋转所得立体的体积。

20、设函数 $f(x)=x\ln(1+x)-(1+x)\ln x$

（1）证明： $f(x)$ 在区间$(0,+\infty)$内单调减少；

（2）比较数值 2018^{2019} 与2019^{2018}的大小，并说明理由。

广东省 2009 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学•参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. A　　2. C　　3. A　　4. D　　5. C

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6. -4　　7. $y=0$　　8. 4　　9. $2y$　　10. e^x-1

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2xe^{x^2}}{6x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}}{3}=\dfrac{1}{3}$

12. 解：$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta x(1+2\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}(1+2\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}[(1+2\Delta x^2)^{\frac{1}{2\Delta x^2}}]^2=e^2$

13. 解：$\because\ f''(x)=\ln(1+x^2)+\dfrac{2x^2}{1+x^2}$，

$f'''(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{4x(1+x^2)-4x^3}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$

$\therefore f'''(1)=2$

14. 解：设 $\sqrt{x}=t, x=t^2$，则 原式$=\int\arctan t\,dt^2=t^2\arctan t-\int t^2\dfrac{1}{1+t^2}dt$

$=t^2\arctan t-\int(1-\dfrac{1}{1+t^2})dt=t^2\arctan t-t+\arctan t+C$

$=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C$.

15. 解：$\because\ \dfrac{x^3}{1+x^2}$ 为奇函数，$\therefore\ \int_{-1}^{1}\dfrac{x^3}{1+x^2}dx=0$

而 $\dfrac{|x|}{1+x^2}$ 为偶函数，$\therefore\ \int_{-1}^{1}\dfrac{|x|}{1+x^2}dx=2\int_0^1\dfrac{|x|}{1+x^2}dx=2\int_0^1\dfrac{x}{1+x^2}dx$

$=\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}d(1+x^2)=\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\ln 2$

故原式 $=\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{1+x^2}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{1+x^2}dx=\ln 2$

16. 解：设 $F(x,y,z)=x^y+z^3+xz$，则

$F'_x=yx^{y-1}+z$，$F'_y=x^y\ln x$，$F'_z=3z^2+x$.

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{yx^{y-1}+z}{3z^2+x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{x^y\ln x}{3z^2+x}$.

17. 解：设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，

则原式 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2(2r-1)^3dr=2\pi\int_1^2(2r-1)^3dr$

$=\frac{\pi}{4}(2r-1)^4\Big|_1^2=\frac{81\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=20\pi$

18. 解：因为微分方程的特征方程为 $r^2+r-6=0$，解得 $r_1=-3,r_2=2$

$\therefore$ 微分方程的通解为 $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}$

$\because y'=-3c_1e^{-3x}+2c_2e^{2x}$，$\therefore$ 有 $y|_{x=0}=c_1+c_2=1$，

$y'|_{x=0}=-3c_1+2c_2=-8$，解得 $c_1=2$，$c_2=-1$，

故特解为 $y=2e^{-3x}-e^{2x}$

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19. 解：（1）$A=\int_0^1(e^y+y-1)dy=(e^y+\frac{1}{2}y^2-y)\Big|_0^1=e+\frac{1}{2}-1-1=e-\frac{3}{2}$.

（2）$V=\pi\int_0^1e^{2y}dy-\pi\int_0^1(1-y)^2dy=\frac{\pi}{2}e^{2y}\Big|_0^1+\frac{\pi}{3}(1-y)^3\Big|_0^1=\frac{\pi e^2}{2}-\frac{5\pi}{6}$.

20. 解：（1）$\because f'(x)=2x+4-4\ln x-4=2x-4\ln x$ $f''(x)=2-\frac{4}{x}$

当 0＜x＜2 时，$f''(x)<0$，所以 $f(x)$ 在（0，2）上的图形是凸的。

（2）$\because$ 当 0＜x＜2 时，$f''(x)<0$，$\therefore f'(x)$ 在（0，2]上单调减少，由此知：

当 0＜x＜2 时，有 $f'(x)>f'(2)=4-4\ln 2>0$

故 $f(x)$ 在区间（0，2]上单调增加.

因此当 0＜x＜2 时，有 $f(x)<f(2)=4+8-8\ln 2-8=4-8\ln 2=4-4\ln 4<0$

广东省 2010 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学•参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. B　　2. A　　3. C　　4. D　　5. D

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 0　　7. $x+y=0$　　8. $\dfrac{\pi}{2}$　　9. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{7x}$　　10. $\dfrac{\pi}{3}$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11.解：原式= $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cot x}{-4(\pi-2x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\csc^2 x}{8}=-\dfrac{1}{8}$

12.解： $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^2\sin\frac{2}{\Delta x}+\sin 2\Delta x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\sin\frac{2}{\Delta x}+\frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x}\right)=0+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x}=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin 2\Delta x}{2\Delta x}=2$$

13.解：由题意知 $ae+b=1$ ……………………………………………………①

又因为 $y'=-\dfrac{a}{x^2}e^{\frac{1}{x}}+2bx$， $y''=\dfrac{2a}{x^3}e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{a}{x^4}e^{\frac{1}{x}}+2b$

所以，由题意知 $2ae+ae+2b=3ae+2b=0$ ………………②

由①和②解得 $a=-\dfrac{2}{e}, b=3$

14.解一：原式= $\displaystyle\int\frac{\cos x(1+\cos x)dx}{\sin^2 x}=\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx+\int\cot^2 x dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}d\sin x+\int(\csc^2 x-1)dx$

$$=-\frac{1}{\sin x}-\cot x-x+C$$

解二：原式= $\displaystyle\int\frac{1-\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int\csc^2\frac{x}{2}dx-\int dx=\int\csc^2\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)-\int dx=-\cot\frac{x}{2}-x+C$

15.解：令 $\sqrt{e^x-1}=t$，则 $x=\ln(1+t^2)$， $dx=\dfrac{2t}{1+t^2}dt$

所以 $\displaystyle\int_{\ln 5}^{\ln 10}\sqrt{e^x-1}dx=\int_2^3\frac{2t^2}{1+t^2}dt=2\int_2^3 dt-2\int_2^3\frac{dt}{1+t^2}=2-2(\arctan 3-\arctan 2)$

16.解： $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\sin xe^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$

$$= e^{-\ln x}\left(\int \sin x e^{\ln x}dx + C\right) = \frac{1}{x}\left(-x\cos x + \int \cos x dx + C\right) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}$$

17.解：设 $F(x, y, z) = x^z - xy^2 + z^3 - 1$，则

$$F'_x = zx^{z-1} - y^2,\ F'_y = -2xy,\ F'_z = x^z \ln x + 3z^2$$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = \dfrac{y^2 - zx^{z-1}}{x^z \ln x + 3z^2}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = \dfrac{2xy}{x^z \ln x + 3z^2}$

18.解：积分区域 D 如图（图略）。解方程组 $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 2x, \end{cases}$，可求得交点为（1，2）

$$\iint_D 2xy\,dxdy = \int_0^1 dx\int_{2x}^{x^2+1} 2xy\,dy = \int_0^1 xy^2\Big|_{2x}^{x^2+1} dx = \int_0^1 x(x^4 + 1 - 2x^2)dx$$

$$= \int_0^1 xy^2\Big|_{2x}^{x^2+1} dx = \int_0^1 x(x^2 + 1 - 2x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - 1)^2 dx^2 = \frac{1}{6}(x^2 - 1)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19.解：$\varphi(x) = \int_0^x t(t-1)dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导，$\varphi'(x) = x(x-1)$

令 $\varphi'(x) = x(x-1) = 0$，得驻点 $x_1 = 0, x_2 = 1$

列表

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$\varphi'(x)$	+	0	−	0	+
$\varphi(x)$	单调增	极大值	单调减	极小值	单调增

极大值 $\varphi(0) = 0$，极小值 $\varphi(1) = \int_0^1 x(x-1)dx = -\dfrac{1}{6}$

20.解：(1) $f(x) = \left[\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x\right]' = \left[e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right]'$

$$= e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}\left[\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x}\right)\right] = \left(x + \frac{2}{x}\right)^x\left[\ln\left(x + \frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}\right]$$

$$(2)\int_1^{+\infty} f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} f(2x)d(2x)\ \underline{\underline{(令\ t = 2x)}}\ \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{t}\right)^t\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{2}{t}\right)^t - 2 = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{2}{t}\right)^{\frac{t}{2}} - 2 = \frac{1}{2}e^2 - 2$$

广东省 2011 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学•参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

1. C　　2. B　　3. A　　4. D　　5. A

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6. 16　　7. $\ln 2$　　8. -2　　9. 0　　10. $\frac{1}{3}$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{x+1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x^2-x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-2x-1}{\sin x+x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x-2}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2}{2}=-1.$

12 解：

$$f^{(n)}(x)=(\ln(\sqrt{1+e^{-2x}}-e^{-x}))'=\frac{1}{(\sqrt{1+e^{-2x}}-e^{-x})}(\sqrt{1+e^{-2x}}-e^{-x})'=\frac{1}{(\sqrt{1+e^{-2x}}-e^{-x})}\left(\frac{-e^{-2x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}}+e^{-x}\right)$$

$$=\frac{e^{-x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}}$$

将 $x=0$ 代入上式中，可得：$f^{(n)}(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

13 函数 $f(x)=x-\arctan kx$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$；$f'(x)=1-\frac{k}{1+k^2x^2}$, $f''(x)=\frac{2k^3x}{(1+k^2x^2)^2}$

令 $f''(x)=0$，解得 $x=0$，列表讨论如下(k<0):

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	+	0	-
y	凹	拐点	凸

在区间$(-\infty,0)$ 内，$f''(x)>0$；在区间$(0,+\infty)$ 内，$f''(x)<0$；所以该曲线的凸区间是$(0,+\infty)$，凹区间是$(-\infty,0)$，拐点是(0,0)

14. 解法一：$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{1}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}d(1-\frac{1}{x^2})$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$$

解法二：令 $x=\sec t$，则 $dx=\sec t\tan t dt(0<t<\frac{\pi}{2})$，

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{1}{\sec^2 t\tan t}\sec t\tan t dt$$

$$=\int\frac{1}{\sec t}dt=\int\cos t dt=\sin t+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$$

15 解：$\because \int_{-\pi}^{0}x\cos dx=\int_{-\pi}^{0}xd\sin x=x\sin x\Big|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\sin xdx=\cos x\Big|_{-\pi}^{0}=2$

$$\therefore \int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\int_0^1(1-\frac{1}{1+x^2})dx=[x-\arctan x]\Big|_0^1=1-\frac{\pi}{4}$$

16 由微分方程的特征方程 $r^2-2r+10$；解得 $r=1\pm 3i$

$\therefore$微分方程的通解为：$y=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$

$\therefore$由 $y\big|_{x=0}=0$ 得$C_1=0$，$\therefore$ $y=C_2e^x\sin 3x$

$y'=C_2(e^x\sin 3x+3e^x\cos 3x)$，$y'\big|_{x=0}=3$，得$C_2=1$

故特解为：$y=e^x\sin 3x$

17 解法一：设$u=3x+y$，$v=2y$，则 $z=u^v$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z\partial u}{\partial u\partial x}+\frac{\partial z\partial v}{\partial v\partial x}=vu^{v-1}\cdot 3+u^v\ln u\cdot 0$$

$$=3vu^{v-1}=6y(3x+y)^{2y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z\partial u}{\partial u\partial y}+\frac{\partial z\partial v}{\partial v\partial y}=vu^{v-1}\cdot 1+u^v\ln u\cdot 2=vu^{v-1}+2u^v\ln u$$

$$=2y(3x+y)^{2y-1}+2(3x+y)^{2y}\ln(3x+y)$$

$$=(3x+y)^{2y}\left[\frac{2y}{3x+y}+2\ln(3x+y)\right]$$

解法二：$\because \ln z=2y\ln(3x+y)$，设 $F(x,y,z)=2y\ln(3x+y)-\ln z$，

则 $F_x'(x,y,z)=\frac{6y}{3x+y},F_y'(x,y,z)=2y\ln(3x+y)-\frac{2y}{3x+y},F_z'(x,y,z)=-\frac{1}{z}$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}=\frac{6y}{3x+y}(3x+y)^{2y}=6y(3x+y)^{2y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}=z\left[2\ln(3x+y)+\frac{2y}{3x+y}\right]=(3x+y)^{2y}\left[2\ln(3x+y)+\frac{2y}{3x+y}\right]$$

18 解：由给定的二次积分可知，积分区域是在第一象限的四分之一圆，

积分区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le\sqrt{1-x^2},0\le x\le 1\}$，如图：

如图：$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{1+x^2+y^2}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{4}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\ln 2$$

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19.（1）设切点的坐标为(x_0,y_0)，则 $y_0=e^{x_0}$，$y'=e^x$，

$\therefore$切线l的方程为：$y-y_0=e^{x_0}(x-x_0)$，即 $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$，又因该切线经过原点，

故 $0-e^{x_0}=e^{x_0}(0-x_0)$，解之得 $x_0=1$，

$\therefore$切点为$(1,e)$，故切线方程为 $y=ex$；

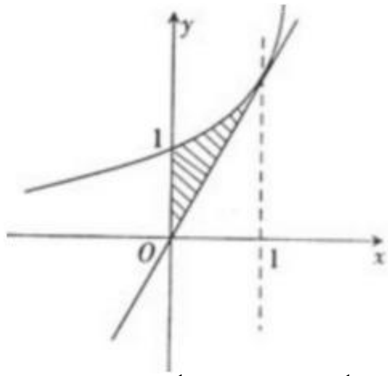
解法②：过原点作曲线 $y=e^x$ 的 2 切线l，设切点为(x_0,e^{x_0})，

则有 $\frac{e^{x_0}}{x_0}=e^{x_0}$，即 $x_0=1$，因此切点为$(1,e)$

故切线l的方程为 $y-e=e(x-1)$，即 $y=ex$。

（2）如下图，平面图形 G 的面积 S 为

$$S=\int_0^1\left(e^x-ex\right)dx=\left(e^x-\frac{1}{2}ex^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-1;$$



（3）G 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V 为：$V=\pi\int_0^1(e^x)^2dx-\pi\int_0^1(ex)^2dx=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^1-\frac{\pi}{3}e^2x^3\Big|_0^1=\frac{\pi e^2}{6}-\frac{\pi}{2}$

20.解：（1）解法一：由 $xy'=(x\cot x-1)y$ 可得 $\frac{1}{y}y'=\cot x-\frac{1}{x}$，

两边积分得 $\ln y=\ln\sin x-\ln x+C_1$，化简得 $y=C\frac{\sin x}{x}$,

又∵ $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=C\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$，解得 $C=1$，∴函数 $y=f(x)$ 的表达式为 $y=\frac{\sin x}{x}$；

解法二：$y'-(\cot x-\frac{1}{x})y=0$，

$\therefore y=Ce^{\int(\cot x-\frac{1}{x})dx}=Ce^{\ln\sin x-\ln x}=\frac{C\sin x}{x}$

又∵ $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=C\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$，解得 $C=1$，∴函数 $y=f(x)$ 的表达式为 $y=\frac{\sin x}{x}$。

（3）证：$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，设 $g(x)=x\cos x-\sin x$，

则 $g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x,$

∵$\sin x$ 在区间$(0,\pi)$ 内恒大于 0，故 $g'(x)<0$，

∴ $g(x)$ 在区间$(0,\pi)$ 内单调减；

又∵ $g(0)=0\cos 0-\sin 0=0$，

∴ $g(x)$ 在区间$(0,\pi)$ 内恒小于0，

故 $y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ 在区间 $(0,\pi)$ 内恒为负，

所以函数 $y=f(x)$ 在区间$(0,\pi)$ 内单调递减。

广东省 2012 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学•参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．A　　2．C　　3．D　　4．B　　5．C

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6．-6　　7．$\frac{1}{\pi}$　　8．3　　9．$\ln 2$　　10．$4dx-2dy$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．解：原式=$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-\ln(1+x)}{\ln x}}$　　（2 分）

$$\because \lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln(1+x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{1+x}=-1$$　　（2 分）

$\therefore$原式 $=e^{-1}$　　（2 分）

12．解：$\because \frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{3+t^2}+t}\left(\frac{1}{\sqrt{3+t^2}}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{3+t^2}}$

$\frac{dy}{dt}=\frac{t}{\sqrt{3+t^2}}$.　　（3 分）

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=t$（结果没有化简扣 2 分）　　（3 分）

13．解：函数 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}+(x-1)e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}\bullet\frac{1}{1+x^2}$$

$$=e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}\bullet\frac{x(x+1)}{1+x^2}\ ,$$　　（2 分）

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0, x=-1$

$\because$在区间$(-\infty,-1)$ 内，$f'(x)>0$；在区间$(-1,0)$ 内，$f'(x)<0$；

在区间$(0,+\infty)$ 内，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 的递增区间是$(-\infty,-1)$ 及$(0,+\infty)$，递减区间是$(-1,0)$ （2 分）

$f(x)$ 的极大值是 $f(-1)=-2$, $f(x)$ 的极小值 $f(0)=-e^{\frac{\pi}{4}}$ （2 分）

14．解：$\int \ln(1+x^2)dx = x\ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx$ （2 分）

$$= x\ln(1+x^2)-2\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$= x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$$ （4 分）

15．解：$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx \overset{x-1=t}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt$ （2 分）

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^3e^{x^4+1}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x^2}dx$$ （2 分）

$$=0-\frac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=1$$ （2 分）

16．解：由微分方程的特征方程 $r^2-4r+13=0$ 解得 $r=2\pm 3i$， （2 分）

所以此微分方程的通解为

$y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$ （2 分）

因为 $y'=2e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+e^{2x}(-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x)$，

由 $y\big|_{x=0}=C_1=1$及$y'\big|_{x=0}=2C_1+3C_2=8$ 解得 $C_1=1, C_2=2$，

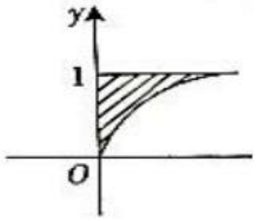
故所求特解为 $y=e^{2x}(\cos 3x+2\sin 3x)$ （2 分）

17．解：$\because \frac{\partial z}{\partial y}=2x^2(2y+1)^{x-1}$ （2 分）

$\therefore \frac{\partial^2 x}{\partial y\partial x}=4x(2y+1)^{x-1}+2x^2(2y+1)^{x-1}\ln(2y+1)$ （2 分）

故 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=4+2\ln 3$ （2 分）

18．解：积分区域 D 如图：



$$\iint\sqrt{y^2-x}\,d\sigma=\int_0^1 dy\int_0^{y^2}\sqrt{y^2-x}\,dx$$ （3 分）

$$=\int_0^1\left[-\frac{2}{3}(y^2-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{y^2}\right]dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 y^3dy=\frac{1}{6}$$ （3 分）

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19．解：(1)设曲线 C 的方程为 y，由题意知

$y'-\dfrac{y}{x}=ax$ ，且 $y|_{x=1}=0$ （2 分）

由 $y'-\dfrac{y}{x}=ax$ 得

$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}(\int axe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C)=e^{\ln x}(\int axe^{-\ln x}dx+C)$ （2 分）

$=x(\int adx+C)=x(ax+C)$,,

$\because\ y|_{x=1}=a+C=0$，解得 $C=-a$

故曲线 C 的方程为 $y=ax^2-ax=ax(x-1)$ （2 分）

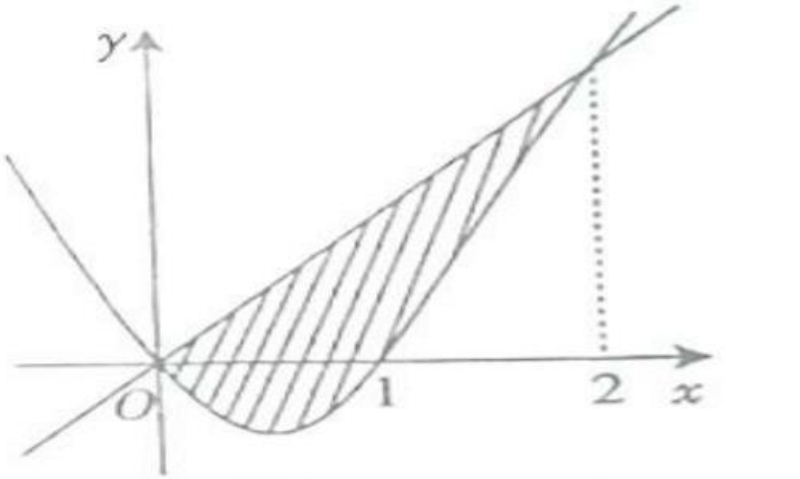
(2)如图，

由 $ax^2-ax=ax$ 解得 $x=0,x=2$ （4 分）

由题意知 $\int_0^2(ax-ax^2+ax)dx=\dfrac{8}{3}$

即 $(ax^2-\dfrac{a}{3}x^3)\Big|_0^2=4a-\dfrac{8a}{3}=\dfrac{8}{3}$

解得 $a=2$ （2 分）



20．(1)解：由题意知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x 2^{t^3-3t+a}dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2^{x^3-3x+a}=2^a=1$，（4 分）

$\therefore a=0$

(2)证：$f(2)=\int_0^2 2^{t^3-3t}dt=\int_0^2 2^{x^3-3x}dx$，

设 $g(x)=2^{x^3-3x}$，则 $g'(x)=2^{x^3-3x}(3x^2-3)\ln 2$（2 分）

令 $g'(x)=0$，在区间(0，2)内解得 $x=1$

$\because g(0)=1,g(1)=\dfrac{1}{4},g(2)=4$，

$\therefore$ $g(x)$ 在区间[0，2]上的最大值为 4，最小值为 $\dfrac{1}{4}$（2 分）

由定积分的估值定理可得 $\dfrac{1}{2}\le\int_0^2 e^{x^3-3x}dx\le 8$

所以有 $\dfrac{1}{2}\le f(2)\le 8$（2 分）

广东省 2013 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学•参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. C　　2. B　　3. C　　4. A　　5. D

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. $\frac{1}{2}$　　7. $\frac{1}{\ln 3}(x-1)$　　8. e^{-1}　　9. π　　10. 2π

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos(e^{\frac{1}{x}}-1)e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\cos(e^{\frac{1}{x}}-1)e^{\frac{1}{x}}=1$

12. 解：由题意知： $af(0)+bf(0)-f(0)=0, af'(0)+2bf'(0)=0$

$\because$ $f(0)f'(0)\neq 0$ 即 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0,$

$\therefore a+b-1=0, a+2b=0,$

由此解得　$a=2, b=-1.$

13. 解：方法一　等式两边对 x 求导数得：$(y+xy')\ln y+xy'+y'=2e^{2x}$

即 $y'(1+x+x\ln y)=2e^{2x}-y\ln y$，

$\therefore y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2e^{2x}-y\ln y}{1+x+x\ln y}$

又$\because$ $x=0$ 时，$y=1,$ 故$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=2.$

方法二 设 $F(x)=xy\ln y+y-e^{2x}$，则

$F'_x=y\ln y-2e^{2x}$，$F'_y=x\ln y+x+1$，

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{F'_x}{F'_y}=-\dfrac{y\ln y-2e^{2x}}{x\ln y+x+1}=\dfrac{2e^{2x}-y\ln y}{x\ln y+x+1}$

又$\because$ $x=0$ 时，$y=1,$ 故$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=2$

14. 解：函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}},\quad y''=\frac{-x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$$

令 $y''=0$ 解得 $x=0$，

当 $x<0$ 时 $y''>0$，当 $x>0$ 时 $y''<0$。

故曲线的凹区间为$(-\infty,0)$; 故曲线的凸区间为$(0,+\infty)$;

曲线的拐点为$(0,\ln 2)$

15. 解：原式

$$=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}d(\cos x)=-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}d(\cos x)$$

$$=-\int\frac{1}{\cos^2 x}d(\cos x)+\int d(\cos x)=\frac{1}{\cos x}+\cos x+C$$

16. 解：令，$\sqrt{x+1}=t$, 则 $x=t^2-1,\ dx=2tdt$,

原式 $=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^2-1}{(t^2+1)t}\cdot 2tdt=2\int_1^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=2(t-2drc\tan t)\Big|_1^{\sqrt{3}}=2(\sqrt{3}-1)-\frac{\pi}{3}$

17. 解：因为$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{-x^2y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{-x^2y^2}$, 所以 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=ye^{-x^2y^2}dx+xe^{-x^2y^2}dy$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{-x^2y^2}+ye^{-x^2y^2}(-2x^2y)=e^{-x^2y^2}(1-2x^2y^2)$$

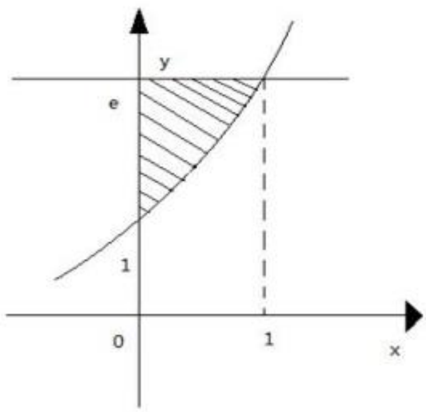
18. 解：由微分方程的特征方程 $r^2-2r+1-k=0$ 解得 $r_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1-k)}}{2}=1\pm\sqrt{k}$,

所以当 $k>0$ 时，方程有两个不相等的实根$1+\sqrt{k}$和$1-\sqrt{k}$；

当 $k=0$ 时，方程有唯一实根 1

故当$k>0$时，通解为$y=C_1e^{(1+\sqrt{k})x}+C_2e^{(1-\sqrt{k})x}$;

当$k=0$时，通解为$y=(C_1+C_2x)e^x$.



第19题图

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19. 由题设条件知，积分区域

$D=\{(x,y)|0\le x\le 1, e^{x}\le y\le e\}$，如图

交换积分次序得

$$I=\int_1^e dy\int_0^{\ln y}\frac{(2x+1)(2y+1)}{\ln y+1}dx=\int_1^e\left[\frac{(x^2+1)(2y+1)}{\ln y+1}\Bigg|_0^{\ln y}\right]dy=\int_1^e(2y+1)\ln y\,dy=\int_1^e\ln y\,d(y^2+y)$$

$$=(y^2+y)\ln y\Big|_1^e-\int_1^e(y^2+y)\frac{1}{y}dy=(e^2+e)-\left(\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}+\frac{3}{2}$$

20. 解：（1）由题意知 $\int_0^t f(x)dx=f(t)-t^2$，两边对 t 求导数得：$f(t)=f'(t)-2t$，

且 $f(0)=0$，由 $f'(x)-f(t)=2t$ 解得

$$f(t)=e^{\int dt}\left(\int 2te^{-\int dt}dt+C\right)=e^{t}\left(\int 2te^{-t}dt+C\right)=e^{t}\left(-2\int tde^{-t}+C\right)=e^{t}\left(-2te^{-t}+2\int e^{-t}dt+C\right)$$

$$=e^{t}(-2te^{-t}-2e^{-t}+C)=-2t-2+Ce^{t}.$$

由 $f(0)=-2+C=0$，得 $C=2$，

所以 $f(t)=-2t-2+2e^{t}=2(e^{t}-t-1)$，

故 $f(x)=2(e^{x}-x-1),(x\ge 0)$

（2）设 Fx

则 $F'(x)=2(e^{x}-1)-2x-x^2$，

$F''(x)=2e^{x}-2-2x=2(e^{x}-x-1)=f(x)>0,(x>0)$，

所以 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$; 内单调递增，因此，当 $x>0$ 时，有 $F'(x)>F'(0)=0$，

由此可知 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$; 内单调递增，

故当 $x>0$ 时，有 $F(x)>F(0)=0$，即 Fx

所以

广东省 2014 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学•参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. B　　2. D　　3. C　　4. D　　5. A

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 2　　7. 1　　8. $-\frac{1}{2}$　　9. 0　　10. $C_1e^{-4x}+C_2e^{3x}$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x}-1+x}{x(e^{-x}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-e^{-x}+1}{e^{-x}-1-xe^{-x}}$　　（3 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x}}{-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}}=-\frac{1}{2}$　　（3 分）

12. 解：$y'=\arcsin x+\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$　　（3 分）

$y''=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$　　（2 分）

$\therefore y''\big|_{x=0}=3$　　（1 分）

13. 解：$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$

$f'(x)=\frac{4^x\ln4}{(4^x+1)\ln4}-\frac{1}{2}=\frac{4^x-1}{2(4^x+1)}$　　（3 分）

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，　　（3 分）

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 内递减，在 $(0,+\infty)$ 内递增；$f(0)=0$ 是 $f(x)$ 的极小值。

14. 解：令 $\sqrt{3+x}=t$，则 $x=t^2-3,\ dx=2tdt,$　　（2 分）

原式 $=2\int\frac{1}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=\ln|t-1|-\ln|t+1|+C=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{3+x}-1}{\sqrt{3+x}+1}\right|+C$　　（4 分）

15. 解：$\int_0^1 \sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ （3 分）

（2）$V_x = \pi\int_0^1 \frac{4}{9}x^3 dx = \frac{\pi}{9}x^4\Big|_0^1 = \frac{\pi}{9}$ （3 分）

16. 解：设 $F(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x) = f(u,v,w)$,

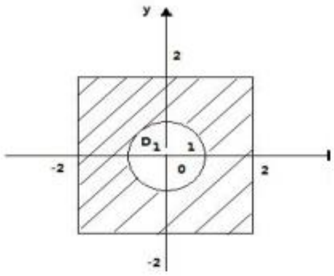
其中$u = x-y,\ v = y-z,\ w = z-x$,

则$F_x = f_u - f_w,\ F_y = -f_u + f_v,\ F_z = -f_v + f_w$ （2 分）

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{f_u - f_w}{f_v - f_w},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{-f_u + f_v}{f_v - f_w}$

故$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f_u - f_w - f_u + f_v}{f_v - f_w} = 1$ （4 分）

17. D 如图：



记圆域 $x^2 + y^2 \le 1$ 为 D_1，

原式$= \iint_{D+D_1}(x^2+y^2)d\sigma - \iint_{D_1}(x^2+y^2)d\sigma$ （2 分）

$= \int_{-2}^2 dx\int_{-2}^2 (x^2+y^2)dy - \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r^3 dr$ （2 分）

$= \int_{-2}^2 (4x^2 + \frac{16}{3})dx - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{128}{3} - \frac{\pi}{2}$ （2 分）

18. 解：将原方程变形为$\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{x}{1+x^2}dx.$ （2 分）

两边积分得：$\int\frac{dy}{\cos^2 y} = \int\frac{x}{1+x^2}dx,$

即$\tan y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ （5 分）

又$\because$ $x = 0$时， $y = 0, \therefore C = 0.$

故原方程的特解为$\tan y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ （6 分）

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19. 解：（1）根据题意得，$\because \lim\limits_{x\to0}(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+3x^2)^{\frac{1}{3x^2}}\right]^3=e^3$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}[(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}}\sin 3x+1]=\lim\limits_{x\to0}(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\sin 3x+1=e^3\times0+1=1$

又$\because f(0)=a$，由函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续知 $a=1$　　（4 分）

（2）$\because \lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(1+3\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}}\sin 3\Delta x+1-1}{\Delta x}$　　（3 分）

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}(1+3\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}}\cdot\dfrac{\sin 3\Delta x}{3\Delta x}\cdot3=3e,$

$\therefore f'(0)=3e^3.$

故曲线 $y=f(x)$ 在点$(0,a)$即$(0,1)$处的切线方程为 $y=3e^3x+1$　　（3 分）

20. 解：（1）$\because f'(x)=-e^{\ln^2 x}\bullet\frac{1}{x}$，$\therefore f'(e^2)=-e^{\ln^2 e^2}\frac{1}{e^2}=-e^2$　　（5 分）

（2）解一：$\int_1^{e^2}\frac{1}{x}f(x)dx=\int_1^{e^2}f(x)d\ln x=f(x)\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\ln xf'(x)dx$

$=\int_1^{e^2}\ln x\cdot e^{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}dx$　　（4 分）

$=\frac{1}{2}\int_1^{e^2}e^{\ln^2 x}d\ln^2 x=\frac{1}{2}e^{\ln^2 x}\Big|_1^{e^2}=\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(e^4-1)$　　（3 分）

解二：$\int_1^{e^2}\frac{1}{x}f(x)dx=\int_1^{e^2}(\frac{1}{x}\int_{\ln x}^2e^{y^2}dy)dx=\int_1^{e^2}dx\int_{\ln x}^2\frac{1}{x}e^{y^2}dy$　　（7 分）

$=\int_0^2dy\int_1^{e^y}\frac{1}{x}e^{y^2}dx$　　（3 分）

$=\int_0^2(\ln xe^{y^2}\Big|_1^{e^y})dy$

$=\int_0^2ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}(e^4-1)$　　（2 分）

广东省 2015 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学•参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. B　　2. A　　3. C　　4. C　　5. D

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6. e^{-5}　　7. 2　　8. $\frac{1}{5}$　　9. $e^{\frac{1}{2}x^2}$　　10. $-\frac{1}{x\ln 2}$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11.解：$\because \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sin 2(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sin 2(x-1)}{x-1}\cdot 2=2$　　（3 分）

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x+b)=1+b$，

$f(1)=a$，　　（4 分）

∴当 $a=1+b=2$，即 $a=2$，$b=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续。　　（6 分）

12.解法一：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}$　　（3 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{6x}=-\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{3}$　　（6 分）

解法二：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{-1}{1+x^2}-1}{3x^2}$　　（3 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{3(1+x^2)}=-\frac{1}{3}$　　（6 分）

13.解：$\because\ y=x-\ln(e^x+1)$

$\therefore\ y'=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$　　（3 分）

$y''=\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}$

故 $y''\big|_{x=0}=-\frac{1}{4}$　　（6 分）

14.解：设 $\sqrt{x+2}=t$，则 $x=t^2-2$，$dx=2tdt$　　（2 分）

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}dx = \int \frac{t}{t^2+1}\cdot 2tdt$$ （2 分）

$$= 2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$ （4 分）

$$= 2(t-\arctan t)+C = 2(\sqrt{x+2}-\arctan\sqrt{x+2})+C$$ （6 分）

15.解：所求面积：

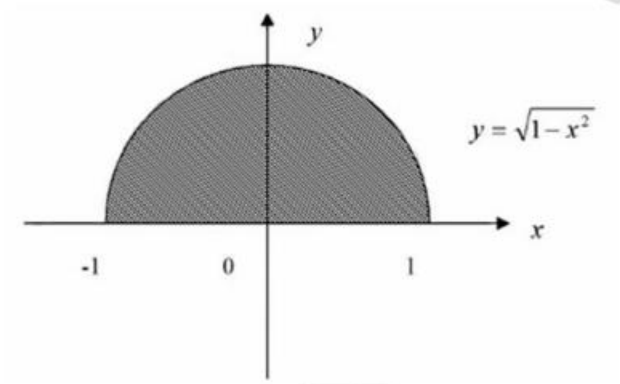
$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx$$ （2 分）

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} xd\sin 2x = \frac{1}{2}\left(x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx\right)$$ （4 分）

$$= \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$ （6 分）

16.解：由给定的二次积分知，积分区域 $D=\left\{(x,y)\middle| -1\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$，

如图：



（2 分）

$$\therefore I = \int_0^{\pi} d\theta\int_0^1 e^{r^2}\cdot rdr$$ （2 分）

$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^1\right)d\theta = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}\right)d\theta = \frac{\pi}{2}(e-1)$$ （6 分）

17.解：微分方程的特征方程为 $r^2+2r+5=0$，

解得 $r=-1\pm 2i$ （2 分）

微分方程的通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$ （4 分）

$$\because y'=-e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+e^{-x}(-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x)$$

$\therefore y|_{x=0}=C_1=2, y'|_{x=0}=-C_1+2C_2=0$，解得 $C_1=2$，$C_2=1$

故微分方程的特解为 $y=e^{-x}(2\cos 2x+\sin 2x)$ （6 分）

18.解法一：显然 $\frac{n^2}{3^n+1}<\frac{n^2}{3^n}$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\Big/\frac{n^2}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3n^2}=\frac{1}{3}<1$$

则由比值审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ 收敛，（3 分）

∴由比值审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n+1}$ 收敛。（6 分）

解法二：$\because \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}+1}\Big/\frac{n^2}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{3^n+1}{3^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{1}{3^n}}{3+\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{3}<1$（3 分）

∴由比值审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n+1}$ 收敛。（6 分）

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19.解：（1）$\because \frac{\partial z}{\partial x}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x=x^{y-1}(1+y\ln x),\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln^2 x$（4 分）

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=x^{y-1}(1+y\ln x)dx+x^y\ln^2 x\,dy$$（6 分）

（2）$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_2^e dx\int_{-1}^{1}x^y\ln x\,dy$（8 分）

$$=\int_2^e\left(x^y\Big|_{-1}^{1}\right)dx$$（10 分）

$$=\int_2^e\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\ln x\right)\Big|_2^e=\frac{1}{2}e^2+\ln 2-3$$（12 分）

20. （1）解：$\because F'(x)=f(x)-2x,\ F''(x)=f'(x)-2$，且由题意知 $f'(x)\le 0(x\in R)$

$\therefore F''(x)<0(x\in r)$

故曲线 $y=F(x)$ 在 R 上是凸的。（4 分）

（2）证：显然 $F(x)$ 在 R 上连续，且 $F(0)=-1<0$

$$F(1)=\int_0^1 f(t)dt-2>\int_0^1 2dt-2=0$$

∴方程 $F(x)=0$ 在区间 $(0，1)$ 内至少有一个实根。（7 分）

由 $F''(x)<0$ 知 $F'(x)$ 在 R 上单调递减，

$\therefore x<1$时，有 $F'(x)>F'(1)=f(1)-2=0$

由此知 $F(x)$ 在$(0，1)$ 内单调递增。

因此方程 $F(x)=0$ 在$(0，1)$ 内至多只有一个实根，

故方程 $F(x)=0$ 在区间$(0，1)$ 内有且仅有一个实根。（10 分）

广东省 2016 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学•参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. A　　2. B　　3. A　　4. D　　5. C

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6. 3　　7. dx　　8. $\frac{1}{y}$　　9. $\frac{\pi}{2}$　　10. $\frac{8\pi}{3}$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11.解：$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$

12.解：等式两边对 x 求导得：$6x+\frac{dy}{dx}+e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$，

即 $\frac{dy}{dx}(1+xe^{xy})=-6x-ye^{xy}$，

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-6x-ye^{xy}}{1+xe^{xy}}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-1$

故曲线在点$(0，1)$处的切线方程为 $y-1=-(x-0)$，即 $y=-x+1$

13.解：设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，

$\therefore \int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}2tdt$，

$=2\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\arcsin t+c$

$=2\arcsin\sqrt{x}+c.$

14.解：$\int_0^1 x2^x dx=\frac{1}{\ln2}\int_0^1 xd2^x$

$=\frac{1}{\ln2}\left(x2^x\Big|_0^1-\int_0^1 2^x dx\right)$

$=\frac{1}{\ln2}\left(2-\frac{2^x}{\ln2}\Big|_0^1\right)=\frac{1}{\ln2}\left(2-\frac{1}{\ln2}\right)$

15.解：$\because \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z\partial u}{\partial u\partial x}+\frac{\partial z\partial v}{\partial v\partial x}=2vu^{v-1}+u^{v}\ln u$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z\partial u}{\partial u\partial y}+\frac{\partial z\partial v}{\partial v\partial y}=vu^{v-1}$$

又$\because$当 $x=1$，$y=0$时，$u=2$，$v=1$，

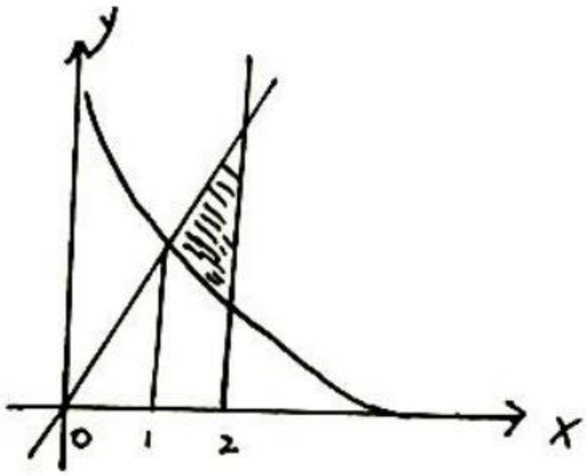
$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=2+2\ln 2，\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=1$$

16.解：积分区域 D 如图所示，

$$\iint_D \frac{x}{y^2}d\sigma=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x}{y^2}dy$$

$$=\int_1^2\left(-\frac{x}{y}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}\right)dx=\int_1^2(-1+x^2)dx$$

$$=\left(-x+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2=\frac{4}{3}$$



17.解：$\because$ $y'=2e^{2x}$，$y'=4e^{2x}$，

由题意知：$4e^{2x}-4e^{2x}+ae^{2x}=0$，即 $ae^{2x}=0$

$\therefore a=0$

当 $a=0$时，微分方程为$y''-2y'=0$，其特征方程为

$r^2-2r=0$，解得$r=0$及 $r=2$，

所以，微分方程的通解为$y=c_1+c_2e^{2x}$

18.解：由题意知，该级数为正项级数，用比值审敛法判定

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}，$$

$\therefore$由 $\frac{e}{3}<1$ 可知，该级数收敛。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19.证明：（1）∵ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1+x}{1}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{1+x}-1+x\right)=0$，

∴当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小量。

（2）∵当 $x\geqslant0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{1+(1+x)(x-1)}{1+x}=\dfrac{x^2}{1+x}\geqslant0$，且等号仅在 $x=0$ 处成立，

$\therefore f(x)$ 在区间$[0，+\infty)$ 内单调递增，

故当 $x>0$ 时，有 $f(x)>f(0)=0$

20.（1）条件等式两边对 x 求导得

$2f(x)f'(x)=\dfrac{1+f^2(x)}{1+x^2}$，　$(x\geqslant0)$ …………①

因为 $\dfrac{1+f^2(x)}{1+x^2}\neq0$，所以 $f'(x)\neq0$，即 $f(x)$ 无驻点，故 $f(x)$ 不存在极值。

（注：只要能合理说明 $f(x)$ 是单调递增的，由此得到 $f(x)$ 无极值的结论也对，例如：

$f(x)\geq0$，且 $\dfrac{1+f^2(x)}{1+x^2}>0$，由①知，$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 单调递增，故 $f(x)$ 不存在极值。）

（2）令 $f(x)=y$，则由①式得

$2yy'=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$，且 $y|_{x=0}=0$，

即 $\dfrac{2ydy}{1+y^2}=\dfrac{1}{1+x^2}dx$，

$\int\dfrac{2y}{1+y^2}dy=\int\dfrac{1}{1+x^2}dx$，

即$\ln(1+y^2)=\arctan x+C$，

由 $y|_{x=0}=0\Rightarrow C=0$，

故$1+y^2=e^{\arctan x}$，因此 $f(x)=y=(e^{\arctan x}-1)^{\frac{1}{2}}(x\geq0)$

广东省 2017 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学•参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. C　　2. B　　3. D　　4. D　　5. A

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6. 3　　7. $\dfrac{1}{p-1}$　　8. $-\dfrac{1}{x^2}$　　9. $C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}$　　10. 1

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3e^{3x}-3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\cdot3e^{3x}}{1}=9$

或者 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3e^{3x}-3x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9e^{3x}}{\cos x}=9$

12. 解：$\because\ y=e^{x^2\ln x}$

$\therefore\ y'=e^{x^2\ln x}(x^2\ln x)'$

$=x^{x^2}(2x\ln x+x)=x^{x^2+1}(2\ln x+1)$

13. 解：$f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

$f'(x)=\sqrt{(x-1)+1}$，$f''(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}$，

令 $f''(x)=0$，解得 $x=1$，

当 $x<1$时，$f''(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f''(x)>0$

$\therefore$曲线的凹区间为$(1,+\infty)$，凸区间为$(-\infty,1)$，拐点为$(1,0)$。

14. 解：$\int x\cos(x+2)dx = \int x d\sin(x+2) = x\sin(x+2) - \int \sin(x+2)dx$

$$= x\sin(x+2) - \int \sin(x+2)d(x+2)$$

$$= x\sin(x+2) + \cos(x+2) + C$$

15. 解：设 $F(x,y,z) = (x-y)^3 + z + \tan z$，则

$F_x = 3(x-y)^2$， $F_y = -3(x-y)^2$， $F_z = 1+\sec^2 z$，

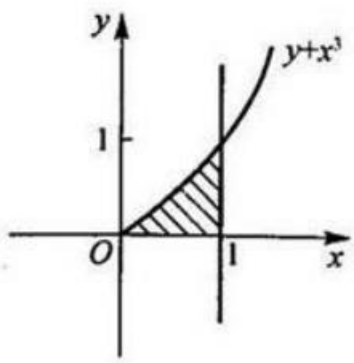
$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3(x-y)^2}{1+\sec^2 z}，\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{3(x-y)^2}{1+\sec^2 z}$$

因此，$\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-3(x-y)^2 + 3(x-y)^2}{1+\sec^2 z} = 0$

16. 解：积分区域如右图所示，

由被积函数的特点选择先 y 后x 的积分，即

$D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$，则



$$\iint_D e^{x^3} d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} e^{x^3} dy$$

$$= \int_0^1 \left(y e^{x^3} \Big|_0^{x^2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{x^3} dx^3 = \frac{1}{3} e^{x^3} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}(e-1)$$

17、设曲线方程为$y = y(x)$，由题意可知，

$y' = 2y + e^x$，且$y\big|_{x=0} = 1$

$\because\ y' - 2y = e^x$，

$$\therefore\ y=e^{\int 2dx}\left(\int e^{x}e^{-\int 2dx}dx+C\right)$$

$$=e^{2x}\left(\int e^{-x}dx+C\right)$$

$$=e^{2x}(-e^{-x}+C)=-e^{x}+Ce^{2x}$$

又∵ $y\big|_{x=0}=-1+C=1, C=2$，

∴曲线方程为$y=-e^{x}+2e^{2x}$

18. 由题$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{4^n}{n!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$，体积为

其中$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$为 p 的级数，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛；

对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$，

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{x\to\infty}\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{4^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{n+1}=0<1$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$收敛；

故由级数的基本性质可知原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{4^n}{n!}\right)$收敛。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19.（1）$\because \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1,$$

∴曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线方程为 $y=1$及 $y=-1$

（2）当$0\le x\le 1$时，$f(x)>0$，故所求旋转体体积为

$$V=\pi\int_0^1\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_0^1\frac{1+2x+x^2}{1+x^2}dx=\int_0^1\pi\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\pi\left[x+\ln(1+x^2)\right]_0^1=\pi(1+\ln 2)$$

20. (1) 设$F(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})=\arctan\frac{1}{x}+\arctan x$

则 $F'(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}(-\frac{1}{x^2})+\frac{1}{1+x^2}=0\ (x>0)$,

$\therefore$当 $x>0$ 时, $F(x)=C$,

又$\because$ $F(1)=\arctan 1+\arctan 1=\frac{\pi}{2}$

$\therefore$当 $x>0$ 时, $F(x)=\frac{\pi}{2}$

即$f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}$

(2) 设$G(x)=f(x)-x=\arctan\frac{1}{x}-x\ (x>0)$,

则$G(x)$在区间$(0,+\infty)$内连续。

$\because G'(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}(-\frac{1}{x^2})-1=-\frac{1}{1+x^2}-1<0$

$\therefore$ $G(x)$ 在区间$(0,+\infty)$内单调递减,

由此可知,方程$G(x)=0$ 即 $f(x)=x$ 在区间$(0,+\infty)$内至多只有一个实根。

$\because \lim\limits_{x\to0^+}G(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\arctan\frac{1}{x}-x)=\frac{\pi}{2}$,

(或$G(\frac{1}{\sqrt3})=\arctan\sqrt3-\frac{1}{\sqrt3}=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{\sqrt3}>0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan\frac{1}{x}-x)=-\infty$,

(或$G(1)=\arctan1-1=\frac{\pi-1}{4}<0$)

$\therefore$方程$G(x)=0$ 在区间$(0,+\infty)$内至少有一个实根。

综上所述,方程$G(x)=0$ 即 $f(x)=x$ 在区间$(0,+\infty)$内有且仅有一个实根。

广东省 2018 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学•参考答案

广东省 2018 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学 · 参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. B　　2. C　　3. D　　4. C　　5. A

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. $3\ln^2 3$　　7. 4　　8. $\frac{e}{2}$　　9. $\mathrm{d}x + e\mathrm{d}y$　　10. $e^{1-\frac{1}{x}}$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 解：$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x+a}{x^2+1}=a$

$$\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}}=e^0=1$$

$\because f(x)$在$x=0$ 处连续，$\therefore a=b=1$

12. 解：$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2x(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}$

13. 解：令$f(x,y)=(1+y^2)\arctan y-xe^x$

$\therefore f_x(x,y)=-x-xe^x$，$f_y(x,y)=2y\arctan y+1$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=\frac{e^x+xe^x}{2y\arctan y+1}$

14. 解：$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$ …… ①

$\because$ $\ln(1+x^2)$是函数$f(x)$的一个原函数

$\therefore$ $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

$\therefore$ ① $=x\cdot\frac{2x}{1+x^2}-\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{2x^2}{1+x^2}-\ln(1+x^2)+C$

15. 解：$\mathrm{A}=\int_0^1\left(1+\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)\mathrm{d}x\xRightarrow{令\sqrt{x}=t}\int_0^1\left(2t+\frac{2t^2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^1(2t+2)\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$=3-2\cdot(\arctan t)_0^1=3-2\cdot\frac{\pi}{4}=3-\frac{\pi}{2}$$

16. 解：$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(1+y^2)-xy\cdot 2y}{(1+y^2)^2}=\frac{x-xy^2}{(1+y^2)^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$

17. 解：$\iint_D\sqrt{1-\frac{x}{y}}\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^y\sqrt{1-\frac{x}{y}}\mathrm{d}x$

$=\int_1^2[\left(-\frac{2}{3}y\left(1-\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}}\right)_0^y]\mathrm{d}y$

$=\int_1^2\frac{2}{3}y\mathrm{d}y$

$=\frac{1}{3}y^2|_1^2$

$=1$

18. 解：$\because\ \frac{n}{|\sin n|+2^n}<\frac{n}{2^n}$，令$u_n=\frac{n}{2^n}$

$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$

由比值判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛，因此由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{|\sin n|+2^n}$收敛

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19. 解：（1）把$f''(x)-4f(x)=0$化为$y''-4y=0$

其特征方程为$r^2-4=0$，解得$r_{1,2}=\pm 2$

$\therefore y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

由题意：$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=2$

$\therefore\begin{cases}C_1+C_2=0\\2C_1-2C_2=2\end{cases}$解得$\begin{cases}C_1=\frac{1}{2}\\C_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$ $\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}$

（2）$f'(x)=e^{2x}+e^{-2x}$ ，$f''(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}$

令$f''(x)=0$，解得$x=0$

当$x<0$时，$y''<0$　　　当$x>0$时，$y''>0$

故$f(x)$的凸区间为$(-\infty,0)$，凹区间为$(0,+\infty)$，拐点为$(0,0)$

20. 解：（1）由题得$f'(x)=\cos x^2$，$\therefore f'(0)=1$

（2）$f(-x)=\int_0^{-x}\cos t^2\,dt \xRightarrow{令t=-u} \int_0^{x}\cos u^2\,d(-u)=-\int_0^{x}\cos u^2\,d(u)=-f(x)$

故$f(x)$为奇函数

（3）令$g(x)=f(x)-x+\frac{1+\lambda}{3\lambda}x^3$（$\lambda>0$，$x>0$）

$\therefore\ g'(x)=\cos x^2-1+\frac{1+\lambda}{\lambda}x^2$

$g''(x)=-2x\sin x^2+\frac{2(1+\lambda)}{\lambda}x\ =2x(\frac{1+\lambda}{\lambda}-\sin x^2)$

$\because\ \lambda>0$，$0\le\sin x^2\le1$　　$\therefore\ \frac{1+\lambda}{\lambda}-\sin x^2>0$

当$x>0$时，$g''(x)>0$　　$\therefore$ $g'(x)$是单调递增的

又$\because\ g'(0)=0$　　$\therefore\ g'(x)>0$

$\therefore$ $g(x)$是单调递增，且$g(0)=0$

$\therefore\ x>0$时，$f(x)-x+\frac{1+\lambda}{3\lambda}x^3>0$（$\lambda>0$）

得证。

广东省 2019 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学•参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. B　　2. A　　3. D　　4. C　　5. B

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. $\frac{1}{3x}$　　7. $\frac{2}{x}$　　8. $e^{x}\cos y$　　9. $\frac{1}{3}$　　10. π

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11.解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-\cos x}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+\sin x}{2}=\frac{1}{2}$$

12.解：$\because y=\frac{x^{x}}{2x+1}$

$$\therefore \ln y = x\ln x-\ln(2x+1)$$

$$\therefore \frac{y'}{y}=\ln x+1-\frac{2}{2x+1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(\ln x+1-\frac{2}{2x+1})\bullet\frac{x^{x}}{2x+1}$$

13.解：

$$\int\frac{2+x}{1+x^{2}}dx$$

$$=2\int\frac{1}{1+x^{2}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^{2}}d(1+x^{2})$$

$$=2\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^{2})+C$$

14.解：令 $\sqrt{2x+1}=t,\ x=\frac{1}{2}t^{2}-\frac{1}{2},\ dx=tdt$

原式 $=\int_{0}^{t}t(\frac{1}{2}t^{2}-\frac{1}{2})\bullet tdt$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(t^{4}-t^{2})dt$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{5}{}^{5}(\frac{1}{3}t^{3}-|_{0}^{1}=-\frac{1}{15}$$

15.设 $f(x,y,z)=x-z-e^{xyz}$

$\therefore\ f_x(x,y,z)=1-ye^{xyz}$

$f_y(x,y,z)=-xze^{xyz}$

$f_z(x,y,z)=-1-xye^{xyz}$

$$\therefore\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-yze^{xyz}}{1+xye^{xyz}},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xze^{xyz}}{1+xye^{xyz}}$$

16.解：由题意得 $1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\pi$

$$\therefore 原式=\int_0^{2x}d\int_1^2 2\ln r\bullet rdr$$

$$=\int_0^{2x}(4\ln 2-\frac{3}{2})d\theta$$

$$=(4\ln 2-\frac{3}{2})\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\pi(8\ln 2-3)$$

17 解：由题意得 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n+1)^4}{3n^4+2n-1}$

$$\therefore\lim_{x\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)^4}{3n^4+2n-1}=\frac{1}{3}<1$$

由比值判别法可知 $\sum_{n=t}^{\infty}{}_n$ 收敛；

$\because 0<a_x<b_x$，由比较判别法得 $\sum_{n=t}^{\infty}{}_n$ 也收敛。

18．解：$\because\ \frac{df(x)}{de^{-x}}=x$

$\therefore\ df(x)=x\bullet de^{-x}$

$\therefore\ f'(x)=-xe^{-x}$

$\therefore\ f'(x)=e^{-x}(x-1)$

$\therefore f(x)$ 的凹区间为$(1,\infty)$，凸区间为$(-\infty,1)$

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19 解：

（1）由题意得$\varphi'(x)=1+x\varphi(x)+\int_x^0\varphi(t)dt-x\varphi(x)=1+\int_x^0\varphi(t)dt$

$\therefore\varphi''(x)=-\varphi(x)\quad\therefore\varphi''(x)+\varphi(x)=0$

$\because y''+1=0$，$\therefore\alpha=0$，$\beta=1$

$\because\varphi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$，$\varphi'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x$

$\therefore\varphi(0)=1,\varphi'(0)=1$，$\therefore C_1=1,C_2=1$

$\therefore\varphi(x)=\cos x+\sin x$

（2）由题意得

$$V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+\sin x)^2dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin 2x)dx$$

$$=\pi\left(x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\pi$$

20. 解：

（1）证明：

$\because f(x)=x\ln(1+x)-(1+x)\ln x$

$\therefore f'(x)=\ln(1+x)-\ln x+\frac{x}{1+x}-\frac{1+x}{x}=\ln(1+x)-\ln x-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}\right)$

证明$\ln(1+x)-\ln x-(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x})<0$ 即可

即证$\ln(1+x)-\ln x<\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x}\right)$

令 $g(x)=\ln x$，$\because g(x)$ 在$(0,+\infty)$ 上连续可导，由拉格朗日中值定理得

$\ln(1+x)-\ln x=\frac{\ln(1+x)-\ln x}{1+x-x}=g'(\xi)=\frac{1}{\xi}$，且$(x<\xi<1+x)$

$\because\ x < \xi < 1 + x$

$\therefore 0 < \frac{1}{1+x} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$

$\therefore \ln(1+x) - \ln x < \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x}\right)$成立

$\therefore\quad f'(x) = \ln(1+x) - \ln x - \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x}\right) < 0$

$\therefore\ f(x)$ 在$(0,\infty)$ 上单调递减。

（2） $2018^{2019} < 2019^{2018}$

证明：设 $a = 2019, b = 2018$

$\therefore\ 2019^{2018} = a^{b}, 2018^{2019} = b^{a}$

比较 a^{b}和b^{a}大小即可

假设$b^{a} > a^{b}$，$\therefore\ a\ln b > b\ln a$

$\therefore$只需要证明 $\frac{\ln b}{b} > \frac{\ln a}{a}$

设$g(x) = \frac{\ln x}{x}, g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$\because\ a > b > e$，$\therefore 1 - \ln x < 0$，$\therefore\ g'(x) < 0$

$\therefore\ g(x)$ 在$(0,\infty)$ 单调递减，$\therefore\ g(b) > g(a)$

即 $\frac{\ln b}{b} > \frac{\ln a}{a}$ 成立

$\therefore b^{a} > a^{b}$，即 $2018^{2019} < 2019^{2018}$