二、一元函数的微分学

1. 导数的四则运算法则

① $[f(x) \pm g(x)]' = \boldsymbol{f'(x) \pm g'(x)}$

② $[f(x)g(x)]' = \boldsymbol{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$

③ $[Cf(x)]' = \boldsymbol{Cf'(x)}$

④ $[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \boldsymbol{\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$

2. 复合函数求导公式

$\{f[u(x)]\}' = \boldsymbol{f'[u(x)]u'(x)}$

3. 指数型求导公式

当$y = u(x)^{v(x)}$时，求$y' = [\boldsymbol{e^{v(x)\ln u(x)}}]'$

4. 参数方程求导公式

设y与x的函数关系由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$确定，则

参数方程一阶导 $\frac{dy}{dx} = \boldsymbol{\frac{dy(t)/dt}{dx(t)/dt}}$

参数方程二阶导 $\frac{d^2y}{dx^2} = \boldsymbol{\frac{d(dy/dx)/dt}{dx(t)/dt}}$

5. 隐函数求导公式

解法一，构造多元函数$f(x,y)$，则$\frac{dy}{dx} = \boldsymbol{-\frac{f_x}{f_y}}$

解法二，把x看成自变量，y是x的函数。

6. 微分公式

$dy = \boldsymbol{f'(x)dx}$

7. 在点和过点问题的切线方程和法线方程

对于函数$\mathrm{y} = \mathrm{x}^2 + 1$,在点(1,2)处的切线方程为： $\boldsymbol{y = 2x}$

对于函数$\mathrm{y} = \mathrm{x}^2 + 1$,在点(1,2)处的法线方程为： $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}$

对于函数$\mathrm{y} = \mathrm{x}^2 + 1$,过点(0,1)处的切线方程为： $\boldsymbol{y = 1}$

对于函数$\mathrm{y} = \mathrm{x}^2 + 1$,过点(0,1)处的法线方程为： $\boldsymbol{x = 0}$

8. 连续、可导、可微的关系

可微$\Leftrightarrow$可导$\Rightarrow$连续，如函数$y = |x|$在$x = 0$处不可导但连续

9. 罗尔定理

若函数$y = f(x)$满足：

条件：① $\boldsymbol{f(x)}$在$\boldsymbol{[a,b]}$上连续 ② $\boldsymbol{f(x)}$在$\boldsymbol{(a,b)}$上可导 ③ $\boldsymbol{f(a) = f(b)}$

结论:则 $\boldsymbol{f(x)}$在$\boldsymbol{(a,b)}$上至少存在一点$\boldsymbol{\xi\ (a < \xi < b)}$使得$\boldsymbol{f'(\xi) = 0}$。

10. 拉格朗日中值定理

若函数$y = f(x)$满足：

条件：① $\boldsymbol{f(x)}$在$\boldsymbol{[a,b]}$上连续 ② $\boldsymbol{f(x)}$在$\boldsymbol{(a,b)}$上可导

结论:则$\boldsymbol{f(x)}$在$\boldsymbol{(a,b)}$上至少存在一点$\boldsymbol{\xi\ (a < \xi < b)}$使得$\boldsymbol{f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

11. 洛必达法则的变形

使用洛必达法，需满足 $\boldsymbol{\frac{0}{0}}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$

12. 渐近线

水平渐近线：

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$,水平渐近线为： $\boldsymbol{y = A}$

这里的∞需要分 $+\infty$ 和 $-\infty$。同时，数列极限的水平渐近线 n 默认仅趋向于$+\infty$；函数极限的水平渐近线x则是趋向于$+\infty$ 和 $-\infty$.

铅直渐近线：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$,铅直渐近线为： $\boldsymbol{x = x_0}$

例 1. 函数$f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$的水平渐近线为：$\boldsymbol{y = 1}$**或** $\boldsymbol{y = -1}$

例 2. 函数$f(x) = \frac{2^x}{x-1}$的铅直渐近线为：$\boldsymbol{x = 1}$

13. 极值与导数的关系

如果x_0是函数$f(x)$的极值点，则$f'(x_0)=0$或$f'(x_0)$不存在.

（若存在一阶导）一阶导与极值点的关系：

当$x = x_0$时, $f'(x_0) = 0$

若$x > x_0, f'(x) > 0$；$x < x_0, f'(x) < 0$，则$x = x_0$是$f(x)$的极小值点

若$x > x_0, f'(x) < 0$；$x < x_0, f'(x) > 0$，则$x = x_0$是$f(x)$的极大值点

（若存在二阶段）二阶导与极值点的关系：

当$x = x_0$时, $f'(x_0) = 0$

若$f''(x_0) > 0$，则$x = x_0$是$f(x)$的极小值点

若$f''(x_0) < 0$，则$x = x_0$是$f(x)$的极大值点