单调区间、极值

15 年试题

2． 已知函数 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=1$，则下列结论正确的是

A． x_0为$f(x)$的极小值点

B． x_0为$f(x)$的极大值点

C． x_0为$f(x)$的极值点

D． $(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

解:因为 $f'(x_0)=0, f''(x_0)=1>0,$

所以x_0为$f(x)$的极小值点

14 年试题

求函数 $f(x)=\log_4(4^x+1)-\dfrac{1}{2}x-\log_4 2$ 的单调区间和极值。

13．解：$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{4^x\ln 4}{(4^x+1)\ln 4}-\frac{1}{2}=\frac{4^x-1}{2(4^x+1)}$$

令 $f'(x)=0$，解得$x=0$

当$x<0$时，$f'(x)<0$, 当$x>0$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在区间$(-\infty,0)$递减，在$(0,+\infty)$内递增；

$f(0)=0$是$f(x)$的极小值

13 年试题

设函数$f(x)=x\sin x+\cos x$，则下列结论正确的是

A. $f(0)$是$f(x)$的极小值，$f(\frac{\pi}{2})$是$f(x)$的极大值

B. $f(0)$是$f(x)$的极大值，$f(\frac{\pi}{2})$是$f(x)$的极小值

C. $f(0)$和$f(\frac{\pi}{2})$都是$f(x)$的极小值

D. $f(0)$和$f(\frac{\pi}{2})$都是$f(x)$的极大值

解：$f'(x)=x\cos x \quad f''(x)=\cos x-x\sin x$

$f'(0)=0, f''(0)=1>0$ ，

所以，$f(0)$是$f(x)$的极小值，

$f'(\frac{\pi}{2})=0, f''(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}<0$ ，

所以，$f(\frac{\pi}{2})$是$f(x)$的极大值

12 年试题

13．确定函数$f(x)=(x-1)e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}$的单调区间和极值

（6 分）

13．解：函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}+(x-1)e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$
$$=\frac{x(1+x)}{1+x^2}e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}\quad,$$

（2 分）

令$f'(x)=0$，解得$x=0,x=-1$

因为在区间$(-\infty,-1)$内，$f'(x)>0$；在区间$(-1,0)$内，$f'(x)<0$；

在区间$(0,+\infty)$内，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$的递增区间是$(-\infty,-1)$及$(0,+\infty)$，递减区间是$(-1,0)$　　（4 分）

$f(x)$的极大值是$f(-1)=-2$，$f(x)$的极小

值 $f(0)=-e^{\frac{\pi}{4}}$　　　　　　（6 分）

11 年试题

已知 $f(x)$ 的二阶导数存在，且 $f(2)=1$，则 $x=2$ 是函数 $F(x)=(x-2)^2 f(x)$ 的

A．极小值点　　　　　　　B．最小值点

C．极大值点　　　　　　　D．最大值点

解：$F'(x)=2(x-2)f(x)+(x-2)^2 f'(x)$

$$F''(x)=2f(x)+4(x-2)f'(x)+(x-2)^2 f''(x)$$

$F'(2)=0,\quad F''(2)=2f(2)=2\times1=2>0$

$x=2$ 是函数 $F(x)=(x-2)^2 f(x)$ 的极小值点

2008 年试题

求函数 $f(x)=3-x-\dfrac{4}{(x+2)^2}$ 在区间[-1，2]上的最大值及最小值。

12.【解析】由题意，知

$$f(-1)=0, f(0)=2, f(2)=\frac{3}{4},$$

令$f'(x)=0$，即$(x+2)^3=8$，解得驻点 x=0，

又$f(-1)=0, f(0)=2, f(2)=\frac{3}{4}$，所以 $f(x)$在区间[-1，2]上最大值$M=2$及最小值$m=0$.

2005 年试题

21. 设$f(x)=xe^{-\frac{1}{2}x^2}$，

（1）求$f(x)$的单调区间及极值；

（2）求$f(x)$的闭区间[0，2]上的最大值和最小值。

21．【解析】$f(x)=xe^{-\frac{1}{2}x^2}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=(1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$令$f'(x)=0$，解出驻点（即稳定点）$x_1=-1, x_2=1$

列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	（-1，1）	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

$f(x)$	下降	极小	上升	极大	下降

可知极小值 $f(-1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$

极大值 $f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$

（2）因 $f(x)$ 在 $[0，2]$ 上连续，由（1）知 $f(x)$ 在（0，2）内可导，且在（0，2），内只有一个驻点 $x=1$（极大值点），因 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{\sqrt{6}}, f\left(2\right)=\frac{2}{e^2}$，且

$$f(0)=0<f(2)=\frac{2}{e^2}<f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

故 $f(x)=xe^{\frac{1}{2}x^2}$ 在闭区间 $[0，2]$ 上的最大值为 $f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$，最小值为 $f(0)=0$

凹凸性与拐点

16 年试题

3．若点 $(1,2)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点,则常数

a与b的值应分别为

A．-1和3　　B． 3和-1

C．-2和6　　D．6和-2

解析:

$$f'(x)=(ax^3+bx^2)'=3ax^2+2bx$$
$$f''(x)=(3ax^2+2bx)'=6ax+2b$$
$$f''(1)=6a+2b=0$$

又$f(1)=a+b=2$

解方程组$\begin{cases}6a+2b=0\\ a+b=2\end{cases}$ 得$\begin{cases}a=-1\\ b=3\end{cases}$

14 年试题

曲线$y=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2+1$的凸区间是

A．$(-\infty,1)$　　B．$(-1,0)$

C．$(0,1)$　　D．$(1,+\infty)$

解：$y'=\dfrac{1}{x}+x,\qquad y''=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

在区间$(0,1)$，$y''<0$，曲线$y=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2+1$凸

13 年试题

求曲线$y=\ln(\sqrt{x^2+4}+x)$的凹、凸区间及其拐点坐标。

解:函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}},$$

$$y''=\frac{-x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}。$$

令$y''=0$，解得$x=0$，

当$x<0$时$y''>0$；当$x>0$时$y''<0$。

故曲线的凹区间为$(-\infty,0)$；曲线的凸区间为$(0,+\infty)$；

曲线的拐点为$(0,\ln 2)$。

12 年试题

8．若曲线$y=x^3+ax^2+bx+1$有拐点$(-1,0)$，则

常数$b=$________________。

解：$f'(x)=3x^2+2ax+b,\quad f''(x)=6x+2a$

曲线$y=x^3+ax^2+bx+1$有拐点$(-1,0)$

所以，$f(-1)=0,\quad f''(-1)=0,$

即$a+b=0,-6+2a=0$，解得:$a=3,b=-3$

11 年试题

13. 求曲线$y=x-\arctan kx(k<0)$的凹凸区间和拐点。

13．解：函数的定义域为

$(-\infty,+\infty),\ y'=1-\dfrac{k}{1+k^2x^2},\ y''=\dfrac{2k^3x}{(1+k^2x^2)^2}$

令$y''=0$,解得$x=0$，

在区间$(-\infty,0)$内，$y''>0$；在区间$(0,+\infty)$内，$y''<0$，

所以该曲线的凸区间是$(0,+\infty)$，凹区间是$(-\infty,0)$；

拐点是$(0,0)$。

10 年试题

已知点（1，1）是曲线$y=ae^{\frac{1}{x}}+bx^2$的拐点，求常数a,b的值。

13．解：由题意知$ae+b=1$　　①

又因为

$$y'=-\frac{a}{x^2}e^{\frac{1}{x}}+2bx,y''=\frac{2a}{x^3}e^{\frac{1}{x}}+\frac{a}{x^4}e^{\frac{1}{x}}+2b$$

所以，由题意知

$2ae+ae+2b=3ae+2b=0$　　②

由①和②解得$a=-\dfrac{2}{e},b=3$

09 年试题

设函数$f(x)=x^2+4x-4x\ln x-8$。

（1)判断$f(x)$在区间$(0,2)$上的图形的凹凸性，并说明理由；

（2）证明：当$0<x<2$，有$f(x)<0$。

20. 【解析】(1）

$\because f'(x)=2x+4-4\ln x-4=2x-4\ln x$，$f''(x)=2-\dfrac{4}{x}$，

当$0<x<2$时，$f''(x)<0$，

所以$f(x)$在（0，2）上的图形是凸的。

（2）$\because$当$0<x<2$时，$f''(x)<0$，

$\therefore f'(x)$在$(0,2)$上单调减少，

由此知：当$0<x<2$时，有

$f'(x)>f'(2)=4-4\ln 2>0$,

故$f(x)$在区间$(0,2)$上单调增加.

因此当$0<x<2$时，有

$$f(x)<f(2)=4+8-8\ln 2-8=4-8\ln 2=4-4\ln 4<0.$$