求导

06 年试题

设函数 $y=\sin^2(\frac{1}{x})-2^x$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解:

$$\because \left[\sin^2(\frac{1}{x})\right]'=2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})$$

$$=-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}$$

$\because (2^x)'=2^x\ln 2$，

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\left[\sin^2(\frac{1}{x})-2^x\right]'$$

$$=\left[\sin^2(\frac{1}{x})\right]'-(2^x)'$$

$$=-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}-2^x\ln 2$$

05 年试题

已知$y=\arctan\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$，求$y'$

解：
$$y'=\left((\arctan\sqrt{x^2-1}\right)'-\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\right)'$$

$$=\frac{1}{1+x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1}\right)'-\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}-\left(\sqrt{x^2-1}\right)'\ln x}{x^2-1}$$

$$=\frac{2x}{2x^2\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}+\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\ln x}{x^2-1}$$

$$=\frac{x\ln x}{\left(x^2-1\right)^{3/2}}$$

04 年试题

若$y=e^x(\sin x-\cos x)$，则$\dfrac{dy}{dx}=$____________。

高阶导数

15 年试题

设$y=\ln\frac{e^x}{e^x+1}$，求$y''\Big|_{x=0}$

解：$\because y=x-\ln(e^x+1),$

$$\therefore y'=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1},$$

$$y''=\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$$，

故$y''\Big|_{x=0}=-\frac{1}{4}$

14 年试题

设$y=x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$，求$y''|_{x=0}$

12．解： $y' = \arcsin x + \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$，

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y''_{|x=0} = 3$$

11 年试题

已知函数 $f(x)$ **的** $n-1$ **阶导数** $f^{(n-1)}(x) = \ln(\sqrt{1+e^{-2x}} - e^{-x})$，**求** $f^{(n)}(0)$。

解：

$$f^{(n)}(x) = (\ln(\sqrt{1+e^{-2x}} - e^{-x}))'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}} - e^{-x}}(\sqrt{1+e^{-2x}} - e^{-x})'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}} - e^{-x}}\left(\frac{-e^{-2x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}} + e^{-x}\right) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}}$$，

（5 分）

$\therefore f^{(n)}(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

（6 分）

09 年试题

已知函数 $f(x)$ **的导数** $f'(x)=x\ln(1+x^2)$ **，求** $f'''(1)$。

【 解 析 】 $\because f''(x)=\ln(1+x^2)+\dfrac{2x^2}{1+x^2}$ ，

$$f'''(x)=\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x(1+x^2)-4x^3}{(1+x^2)^2}=\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\therefore f'''(1)=2.$$

07 年试题

设 $y=\cos^2 x+\ln\sqrt{1+x^2}$ **，求二阶导数** y''。

【解析】

$$y'=-2\cos x\sin x+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}=-\sin 2x+\frac{x}{1+x^2}.$$

$$\therefore y''=-2\cos 2x+\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

05 年试题

8.设函数 $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$ **，**

则 $f''(1)$ **=________________**

隐函数求导法

16 年试题

12．求曲线$3x^2+y+e^{xy}=2$在点$(0,1)$处的切线方程

12.解：等式两边对x求导得：

$$6x+\frac{dy}{dx}+e^{xy}(y+x\frac{dy}{dx})=0$$

$$\frac{dy}{dx}(1+xe^{xy})=-6x-ye^{xy}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-6x-ye^{xy}}{1+xe^{xy}},\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-1$$

故曲线在点$(0,1)$处切线方程为$y-1=-(x-0)$，

即$y=-x+1$

13 年试题

求由方程$xy\ln y+y=e^{2x}$所确定的隐函数在$x=0$处的导数$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$。

方法一

等式两边对x求导数得：

$(y+xy')\ln y+xy'+y'=2e^{2x}$，

即$y'(1+x+x\ln y)=2e^{2x}-y\ln y$，

所以$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2e^{2x} - y\ln ny}{1 + x + x\ln y}$。

又因为$x = 0$**时，**$y = 1$**，故**$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 2$。

方法二

设$F(x) = xy\ln y + y - e^{2x}$**，则**

$F'_x = y\ln y - 2e^{2x}$**，**$F'_y = x\ln y + x + 1$**，**

所以

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y\ln y - 2e^{2x}}{x\ln y + x + 1} = \frac{2e^{2x} - y\ln y}{x\ln y + x + 1}。$$

又因为$x = 0$**时，**$y = 1$**，故**$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 2$

07 年试题

设函数$y = y(x)$**由方程**

$\arcsin x \cdot \ln y - e^{2x} + y^3 = 0$**确定，求**$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$。

【解析】将$x=0$代入方程

$\arcsin x\cdot\ln y-e^{2x}+y^3=0$**得：**

$(y|_{x=0})^3=1\Rightarrow y|_{x=0}=1$

方程$\arcsin x\cdot\ln y-e^{2x}+y^3=0$**两边对**$x$**求导数得：**

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\ln y+\frac{\arcsin x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}-2e^{2x}+3y^2\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

将$x=0,y|_{x=0}=1$**代入上式得：**

$$-2+3\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}=\frac{2}{3}$$

06 年试题

函数$y=y(x)$**是由方程**$e^y=\sqrt{x^2+y^2}$**所确定的隐函数，求**$\frac{dy}{dx}$**在点（1，0）处的值**

【解析】方法一：将方程$e^y=\sqrt{x^2+y^2}$**两边对**x

求导数得 $e^{y}y'=\dfrac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$，

则 $y'(e^{y}\sqrt{x^{2}+y^{2}}-y)=x$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=y'=\frac{x}{e^{y}\sqrt{x^{2}+y^{2}}-y}=\frac{x}{e^{2y}-y}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{y=0\\x=1}}=1$$

05 年试题

设函数 $y=y(x)$ **是由方程** $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}$

所确定的隐函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

【解析】解法一：设

$F(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}-\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ **，则**

$$F'_x(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$=-\frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$F'_y(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x-y}{x^2+y^2}$$

故 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$

$=\frac{x+y}{x-y}$ **（x≠y）**

方法二：方程 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ **可写为**

$$\arctan\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

视 $y=y(x)$ **，上式两边对** x **求导得**

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$$，

即$\frac{xy'-y}{x^2+y^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}$，

所以$y'(x-y)=x+y$**，推出** $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{x+y}{x-y}$

（x≠y）

04 年试题

求由方程$x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$所确定的隐函数y

的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$。

12.【解析】把 y 看成 x 的函数并对和方程关于 x

求导，得

$$1-y'(x)+\frac{1}{2}\cos y\cdot y'(x)=0\Rightarrow y'(x)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos y}$$

再一次求导，得

$$-y''(x)+\frac{1}{2}\cos y\cdot y''(x)-\frac{1}{2}\sin y\cdot(y'(x))^2=0\Rightarrow$$

$$y''(x)=-\frac{1}{2}\frac{\sin y\cdot(y'(x))^2}{1-\frac{1}{2}\cos y}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\sin y}{(1-\frac{1}{2}\cos y)^3}=\frac{x-y}{(1-\frac{1}{2}\cos y)^3}$$

03 年试题

1.已知$\ln(x+y)=x^3y+\sin x$**，求**$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$**。**

对数求导法

09 年试题

设函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ **，**

（1）求 $f'(x)$ **；**

（2）证明：当 x > 时， $f(x)$ **单调增加。**

【解析】（1） $f(x)=(1+\frac{1}{x})^{x}$ **两边取对数得**

$\ln f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x}),$

两边对 x 求导数得

$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x},$

则 $f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]$**.**

（2）（证法一）当 x > 0 时，

记 $g(x)=\ln x$ **，在** $\left[1,1+\frac{1}{x}\right]$ **上应用拉格朗日中值定理得**

$$g\left(1+\frac{1}{x}\right)-g(1)=g'(\xi)\cdot\frac{1}{x},\left(\ 1<\xi<1+\frac{1}{x}\right)$$

即$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\xi}\cdot\frac{1}{x}>$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{1+x}\Rightarrow\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}>0,$$

于是$f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]>0$，

故当$x>0$时，$f(x)$单调增加.

（证法二）当$x>0$时，记

$$\phi(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x},$$

则$\phi'(x)=\frac{-1}{x(1+x)}+\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{-1}{x(1+x)^2}<0$，

所以$\phi(x)$在（0，$+\infty$）内单调下降.

又$\because\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1+\frac{1}{x}\right]=0$

$\therefore$**当**$x>0$**时，**$\phi(x)>0$**，于是**

$$f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\phi(x)>0,$$

故当$x>0$**时，**$f(x)$**单调增加.**

参数方程求导法

15 年试题

考试真题

设函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases} x=\tan t \\ y=t^3+2t \end{cases}$所确定，

则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$________________。

解: $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+2}{\sec^2 t}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=2$$

13 年试题

曲线$\begin{cases} x=3^t \\ y=\tan t \end{cases}$在$t=0$相应的点处的切线方程是

$y=$________________

解:当$t=0$时,$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$,

即$t=0$相应的点坐标为$(1,0)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sec^2 t}{3^t\ln 3}, \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{1}{\ln 3}$$

所以在$t=0$相应的点处的切线方程是

$$y-0=\frac{1}{\ln 3}(x-1),\text{即}\ \ y=\frac{x-1}{\ln 3}$$

12 年试题

设函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases} x=\ln(\sqrt{3+t^2}+t) \\ y=\sqrt{3+t^2} \end{cases}$所确定，求$\dfrac{dy}{dx}$（结果要化为最简形式）

解：$\because \dfrac{dx}{dt}\dfrac{1}{\sqrt{3+t^2}+t}(\dfrac{t}{\sqrt{3+t^2}}+1)=\dfrac{1}{\sqrt{3+t^2}}$；

$$\frac{dy}{dt}=\frac{t}{\sqrt{3+t^2}}$$

（3 分）

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=t$$（结果没有化简扣 2 分）

（6 分）

11 年试题

设$\begin{cases} x=t-t^3 \\ y=2^t \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$________

09 年试题

若曲线$\begin{cases} x = kt - 3t^2, \\ y = (1+2t)^2 \end{cases}$在 t=0 处的切线斜率为 1，则常数 k=__________。

08 年试题

设参数方程$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = t - e^{-t} \end{cases}$确定函数$y = y(x)$，计算$\dfrac{dy}{dx}$。

【解析】$\because \dfrac{dx}{dt} = 2e^{2t}, \dfrac{dy}{dt} = 1 + e^{-t}$，

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1+e^{-t}}{2e^{2t}}.$$

06 年试题

由参数方程$\begin{cases} x = 2\sin t + 1, \\ y = e^{-t} \end{cases}$所确定的曲线在$t = 0$相应点处的切线方程是__________。

微分试题

16 年试题

7．设$y=\dfrac{x}{1+x^2}$,则$dy\big|_{x=0}=$________________

解析:

$$y'=(\frac{x}{1+x^2})'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},y'(0)=1$$

$$dy=y'dx$$

$$dy\big|_{x=0}=y'(0)dx=dx$$