级数

(2016 年试题)

18．已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$u_{n+1} = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n u_n (n \in N^*)$,且 $u_1 = 1$,判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性。

解:由题意知，该级数为正项级数，用比值审敛法判断

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n = \frac{e}{3} < 1 \ \therefore \text{ 该级数收敛}$$

(2016 年试题)

5．已知常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n = \frac{n}{n+1}(n \in N^*)$,则下列常数项级数下列级数中，发散的是

A． $\sum_{n=1}^{\infty} 2u_n$　　B． $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$

C． $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + \frac{1}{n})$　　D． $\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n - (\frac{3}{5})^n\right]$

解析: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是调和级数,发散

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+\frac{1}{n})$ 发散

(2015 年试题)

5．下列级数中，收敛的是

A．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$　　B．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$

C．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$　　D．$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\frac{3}{4})^n+\frac{1}{n^2}\right]$

解: 因为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 也发散

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$

因为 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1\neq 0$,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$ 发散

对 $p-$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $p=\frac{1}{2}<1$,所以 $p-$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\frac{3}{4})^n+\frac{1}{n^2}\right]$,

等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{4})^n$，$q=\frac{3}{4}<1$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{4})^n$收敛

$p-$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，$p=2>1$，所以$p-$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\frac{3}{4})^n+\frac{1}{n^2}\right]$也收敛

(2015 年试题)

判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n+1}$的收敛性

18．解法一：显然$\frac{n^2}{3^n+1}<\frac{n^2}{3^n}$，

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^n+1}\cdot\frac{3^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3n^2}=\frac{1}{3}<1,$$

则由比值审敛法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$收敛， **（3 分）**

$\therefore$由比较审敛法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n+1}$收敛。 （6 分）

解法二：

$\because$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}+1}\cdot\frac{3^n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{1}{3^n}}{3+\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{3}<1,$$

（3分）

∴由比较审敛法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n+1}$收敛。