中值定理

15 年试题

若函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}+kx$数在区间$[0,1]$上满足罗尔（Rolle）定理的条件，则常数$k=$

A. -1　B. 0

C. 1　D. 2

解：若函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}+kx$数在区间$[0,1]$上满足罗尔（Rolle）定理的条件，则$f(1)=f(0)$，即$k=1$

14 年试题

7. $f(x)=x^2+2x-1$在区间$[0,2]$上应用拉格朗日（Langrange）中值定理时，满足定理要求的$\xi=$ ________。

解：$f'(x)=2x+2$，$f'(\xi)=2\xi+2$

由拉格朗日（Langrange）中值定理结论

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

得$2\xi+2=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{7-(-1)}{2}$,

解得$\xi=1$

13 年试题

下列函数中，在区间$[-1,1]$上满足罗尔（Rolle）定理条件的是　　　　　　（　）

A. $y=x^{\frac{2}{3}}$　　　B. $y=|x|$

C. $y=x^{\frac{4}{3}}$　　　D. $y=x^{\frac{5}{3}}$

解:函数$y=x^{\frac{4}{3}}$在区间$[-1,1]$连续

$y=x^{\frac{4}{3}}$的导数$y'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$,在$(-1,1)$ 可导

且$f(-1)=f(1)$

满足罗尔（Rolle）定理条件

05 年试题

下列函数中，在闭区间[-1，1]上满足罗尔中值定理条件的是

A. $f(x)=|x|$　　　B. $f(x)=x^{-2}$

C. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$　　　D. $f(x)=x^3$

渐近线

15 年试题

曲线$y=(1-\frac{5}{x})^x$的水平渐进线为

$y=$______________。

14 年试题

2．函数$y=\frac{x}{x+2\sin x}$的图形的水平渐近线是

A．$y=0$　　B．$y=\frac{1}{3}$

C．$y=\frac{1}{2}$　　D．$y=1$

13 年试题

2．曲线$y=\frac{x^2}{x^2-1}$　　（　）

A．只有水平渐近线

B．只有铅垂渐进线

C．既有水平渐近线也有铅垂渐近线

D．无渐近线

12 年试题

如果曲线$y=ax-\dfrac{x^2}{x+1}$的水平渐近线存在，

则常数$a=$（ ）

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. -1

09 年试题

曲线 $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 的水平渐近线方程是＿＿＿＿＿＿＿。

07 年试题

设函数$y=\dfrac{1-e^{-x^2}}{1+e^{-x^2}}$，则其函数图像的水平渐近线方程是＿＿＿＿＿＿＿。

06 年试题

若直线$y=4$是曲线$y=\dfrac{ax+3}{2x-1}$的水平渐近线，则a=＿＿＿＿＿＿＿。

单调区间、极值

15 年试题

2． 已知函数$f(x)$在x_0处有二阶导数，且

$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=1$，则下列结论正确的是

A. x_0为$f(x)$的极小值点

B. x_0为$f(x)$的极大值点

C. x_0为$f(x)$的极值点

D. $(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

解:因为 $f'(x_0)=0, f''(x_0)=1>0,$

所以x_0为$f(x)$的极小值点

14 年试题

求函数$f(x)=\log_4(4^x+1)-\dfrac{1}{2}x-\log_4 2$的单调区间和极值。

13. 解：$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{4^x\ln 4}{(4^x+1)\ln 4}-\frac{1}{2}=\frac{4^x-1}{2(4^x+1)}$$

令$f'(x)=0$，解得$x=0$

当$x<0$时，$f'(x)<0$, 当$x>0$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在区间$(-\infty,0)$递减，在$(0,+\infty)$内递增；

$f(0)=0$是$f(x)$的极小值

13 年试题

设函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$，则下列结论正确的是

A． $f(0)$是$f(x)$的极小值， $f(\frac{\pi}{2})$是$f(x)$的极大值

B． $f(0)$是$f(x)$的极大值， $f(\frac{\pi}{2})$是$f(x)$的极小值

C． $f(0)$和$f(\frac{\pi}{2})$都是$f(x)$的极小值

D． $f(0)$和$f(\frac{\pi}{2})$都是$f(x)$的极大值

解：$f'(x)=x\cos x \quad f''(x)=\cos x-x\sin x$

$f'(0)=0, f''(0)=1>0$ ，

所以，$f(0)$是$f(x)$的极小值，

$f'(\frac{\pi}{2})=0, f''(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}<0$ ，

所以， $f(\frac{\pi}{2})$是$f(x)$的极大值

12 年试题

13． 确定函数 $f(x)=(x-1)e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}$ 的单调区间

和极值

（6 分）

13．解：函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}+(x-1)e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\frac{x(1+x)}{1+x^2}e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x},$$

（2 分）

令$f'(x)=0$，解得$x=0,x=-1$

因为在区间$(-\infty,-1)$内，$f'(x)>0$；在区间$(-1,0)$内，$f'(x)<0$；

在区间$(0,+\infty)$内，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$的递增区间是$(-\infty,-1)$及$(0,+\infty)$，递减区间是$(-1,0)$　　（4 分）

$f(x)$的极大值是$f(-1)=-2$，$f(x)$的极小值$f(0)=-e^{\frac{\pi}{4}}$　　（6 分）

11 年试题

已知$f(x)$的二阶导数存在，且$f(2)=1$，则$x=2$是函数$F(x)=(x-2)^2f(x)$的

A．极小值点　　B．最小值点

C．极大值点　　　　　　D．最大值点

解：$F'(x)=2(x-2)f(x)+(x-2)^2f'(x)$

$$F''(x)=2f(x)+4(x-2)f'(x)+(x-2)^2f''(x)$$

$F'(2)=0,\quad F''(2)=2f(2)=2\times1=2>0$

$x=2$是函数$F(x)=(x-2)^2f(x)$的极小值点

08 年试题

求函数$f(x)=3-x-\dfrac{4}{(x+2)^2}$在区间[-1，2]上的最大值及最小值。

12.【解析】由题意，知

$f(-1)=0,f(0)=2,f(2)=\dfrac{3}{4},$

令$f'(x)=0$，即$(x+2)^3=8$，解得驻点 x=0，

又$f(-1)=0,f(0)=2,f(2)=\dfrac{3}{4},$ 所以 $f(x)$在区间[-1，2]上最大值$M=2$及最小值$m=0$.

05 年试题

21. 设$f(x)=xe^{-\frac{1}{2}x^2}$，

（1）求$f(x)$的单调区间及极值；

（2）求$f(x)$的闭区间[0，2]上的最大值和最小值。

21．【解析】$f(x)=xe^{-\frac{1}{2}x^2}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=(1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$

令$f'(x)=0$，解出驻点（即稳定点）$x_1=-1,x_2=1$

列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	（-1，1）	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	下降	极小	上升	极大	下降

可知极小值$f(-1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$

极大值$f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$

（2）因$f(x)$在[0，2]上连续，由（1）知$f(x)$在（0，2）内可导，且在（0，2），内只有一个驻点$x=1$（极大值点），因

$$f(0)=0, f(1)=\frac{1}{\sqrt{6}}, f\left(2\right)=\frac{2}{e^{2}}，且$$

$$f(0)=0<f(2)=\frac{2}{e^{2}}<f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

故 $f(x)=xe^{\frac{1}{2}x^{2}}$ 在闭区间[0，2]上的最大值为 $f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$，最小值为 $f(0)=0$

凹凸性

14 年试题

曲线 $y=\ln x+\frac{1}{2}x^{2}+1$ 的凸区间是

A．$(-\infty,1)$　　B．$(-1,0)$

C．$(0,1)$　　D．$(1,+\infty)$

解：$y'=\frac{1}{x}+x,\quad y''=\frac{x^{2}-1}{x^{2}}$

在区间 $(0,1)$，$y''<0$，曲线 $y=\ln x+\frac{1}{2}x^{2}+1$ 凸

13 年试题

求曲线 $y=\ln(\sqrt{x^{2}+4}+x)$ 的凹、凸区间及其拐

点坐标。

解:函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+x}(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+1)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}},$$

$$y''=\frac{-x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}。$$

令$y''=0$，解得$x=0$，

当$x<0$时$y''>0$；当$x>0$时$y''<0$。

故曲线的凹区间为$(-\infty,0)$；曲线的凸区间为$(0,+\infty)$；

曲线的拐点为$(0,\ln 2)$。

12 年试题

8．若曲线$y=x^3+ax^2+bx+1$有拐点$(-1,0)$，则常数$b=$________________。

解：$f'(x)=3x^2+2ax+b,\quad f''(x)=6x+2a$

曲线$y=x^3+ax^2+bx+1$有拐点$(-1,0)$

所以，$f(-1)=0,\quad f''(-1)=0,$

即$a+b=0,-6+2a=0$，解得:$a=3,b=-3$

11 年试题

13. 求曲线 $y = x - \arctan kx (k < 0)$ 的凹凸区间和拐点。

13．解：函数的定义域为

$$(-\infty,+\infty),\ y' = 1 - \frac{k}{1+k^2x^2},\ y'' = \frac{2k^3x}{(1+k^2x^2)^2}$$

令 $y'' = 0$,解得 $x = 0$，

在区间 $(-\infty,0)$ 内， $y'' > 0$；在区间 $(0,+\infty)$ 内，$y'' < 0$，

所以该曲线的凸区间是 $(0,+\infty)$，凹区间是 $(-\infty,0)$；

拐点是 $(0,0)$。

10 年试题

已知点（1，1）是曲线 $y = ae^{\frac{1}{x}} + bx^2$ 的拐点，求常数 a,b 的值。

13．解：由题意知 $ae + b = 1$　　①

又因为

$$y' = -\frac{a}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + 2bx, y'' = \frac{2a}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{a}{x^4}e^{\frac{1}{x}} + 2b$$

所以，由题意知

$2ae+ae+2b=3ae+2b=0$ ②

由①和②解得$a=-\dfrac{2}{e},b=3$

09 年试题

设函数$f(x)=x^2+4x-4x\ln x-8$。

（1）判断$f(x)$在区间$(0,2)$上的图形的凹凸性，并说明理由；

（2）证明：当$0<x<2$，有$f(x)<0$。

20. 【解析】（1）

$\because f'(x)=2x+4-4\ln x-4=2x-4\ln x$，$f''(x)=2-\dfrac{4}{x}$,

当$0<x<2$时，$f''(x)<0$，

所以$f(x)$在（0，2）上的图形是凸的。

（2）$\because$当$0<x<2$时，$f''(x)<0$，

$\therefore f'(x)$在$(0,2)$上单调减少，

由此知：

当$0<x<2$时，有

$f'(x)>f'(2)=4-4\ln 2>0,$

故$f(x)$在区间$(0,2)$上单调增加.

因此当$0<x<2$时，有

$$f(x) < f(2) = 4 + 8 - 8\ln 2 - 8 = 4 - 8\ln 2 = 4 - 4\ln 4 < 0.$$