切线方程

证明题

16 年试题

19．设函数$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$,证明:

（1）当$x\to 0$时,$f(x)$是比x 高阶的无穷小量;

（2）当$x>0$时，$f(x)>0$

证明：（1）

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1+x}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{1+x}-1+x)=0$$

所以当$x\to 0$时，$f(x)$是比x高阶的无穷小量

(2)当$x \geq 0$时，

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1+(1+x)(x-1)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$$

，且等号仅在$x=0$处成立，所以$f(x)$在区间

$(0,+\infty)$单调递增

10 年试题

7．圆$x^2+y^2=x+y$在$(0,0)$点处的切线方程是______。

08 年试题

7. 曲线$y=x\ln x$在点（1，0）处的切线方程是__________。

08 年试题

证明：对$x>0$，$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>1+\dfrac{x^2}{2}$。

证明：$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>1+\dfrac{x^2}{2}$等价于$e^x+e^{-x}>2+x^2$.

令$f(x)=e^x+e^{-x}-2-x^2$，

$$f'(x)=e^x-e^{-x}-2x$$

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2=(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})^2>0,$$

于是$f'(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加，从而$f'(x)>f'(0)=0$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加，故$f(x)>f(0)=0$，即$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>1+\dfrac{x^2}{2}$.

07 年试题

设函数$f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，

（1）求$f'(x)$；

（2）证明：当 x>时，$f(x)$单调增

【解析】（1）$f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^x$两边取对数得

$$\ln f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x}),$$两边对 x 求导数得

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x},$$

则$f'(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]$.

（2）（证法一）当 x>0 时，

记$g(x)=\ln x$，在$\left[1,1+\dfrac{1}{x}\right]$上应用拉格朗日中值

定理得

$$g\left(1+\frac{1}{x}\right)-g(1)=g'(\xi)\cdot\frac{1}{x},\left(\quad 1<\xi<1+\frac{1}{x}\right)$$

即$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\xi}\cdot\frac{1}{x}>$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{1+x}\Rightarrow\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}>0,$$

于是$f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]>0$，

故当$x>0$时，$f(x)$单调增加.

（证法二）当$x>0$时，记$\phi(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$，

则$\phi'(x)=\frac{-1}{x(1+x)}+\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{-1}{x(1+x)^2}<0$，

所以$\phi(x)$在（0，$+\infty$）内单调下降.

又$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1+\frac{1}{x}\right]=0$

$\therefore$当$x>0$时，$\phi(x)>0$，于是

$$f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\phi(x)>0,$$

故当$x>0$时，$f(x)$单调增加.

05 年试题

证明：当$\mathrm{t}>0$时，$\dfrac{1}{1+t}<\ln(1+\dfrac{1}{t})<\dfrac{1}{t}$。

【证明】设$f(x)=\ln$,则$f'(x)=\dfrac{1}{x},x\in[t,t+1]$

由拉格朗日中值定理知，存在一点$\varsigma\in(t,t+1)$，使

$f(1+t)-f(t)=f'(\varsigma)$，即 $\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{\varsigma}$,

又因 $\dfrac{1}{1+t}<\dfrac{1}{\varsigma}<\dfrac{1}{t}$，故$\dfrac{1}{1+t}<\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)<\dfrac{1}{t}$

03 年试题

试证明：当$x>1$时，$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$。