定积分应用

16 年试题

10．椭圆曲线$\frac{x^2}{4}+y^2=1$围成的平面图形绕x轴旋转一周而成的旋转体体积$V=$ ________

解析:

$$V_x=\pi\int_{-2}^{2}y^2dx=\pi\int_{-2}^{2}(1-\frac{x^2}{4})dx=\frac{8}{3}\pi$$

15 年试题

求由曲线$y=x\cos 2x$和直线$y=0,x=0$及$\frac{\pi}{4}$围成的平面图形的面积。

解：所求面积：$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos 2xdx$

（2 分）

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}xd\sin 2x=\frac{1}{2}(x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx)$$

（4 分）

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}os2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

15 年试题

函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

（1）求曲线 $y=f(x)$ 上相应于 $0\le x\le 1$ 的弧段长度 S；

（2）求由曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=0$，$x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面图绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_x。（6 分）

15．解：（1）

$$S=\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

（3 分）

（2）$V_x=\pi\int_0^1\frac{4}{9}x^3dx=\frac{\pi}{9}x^4\Big|_0^1=\frac{\pi}{9}$

13 年试题

9．已知平面图形 $G=\left\{(x,y)\middle|x\ge 1,0\le y\le\frac{1}{x}\right\}$，将图形 G 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V=$__________。

$$V=\pi\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x})^2dx=-\frac{\pi}{x}\Big|_1^{+\infty}=\pi$$

13 年试题

20．已知$f(x)$是定义在区间$[0,+\infty)$上的非负可导函数，且曲线$y=f(x)$与直线$y=0$，$x=0$及$x=t(t\geq 0)$围成的曲边梯形的面积为$f(t)-t^2$。

（1）求函数$f(x)$；

（2）证明：当$x>0$时，$f(x)>x^2+\dfrac{x^3}{3}$。

20．（1）由题意知$\int_0^t f(x)dx=f(t)-t^2$，两边对t求导数得：$f(t)=f'(t)-2t$，且$f(0)=0$，

由$f'(x)-f(t)=2t$解得

$$f(t)=e^{\int dt}\left(\int 2te^{-\int dt}dt+C\right)=e^t\left(\int 2te^{-t}dt+C\right)$$

$$=e^t(-2te^{-t}-2e^{-t}+C)=-2t-2+Ce^t。$$

由$f(0)=-2+C=0$　得$C=2$，

所以$f(t)=-2t-2+2e^t=2(e^t-t-1)$，

故$f(x)=2(e^x-x-1)\ (x\geq 0)$；

（2）设$F(x)=f(x)-x^2-\dfrac{x^3}{3}\ (x\geq 0)$，

则$F'(x)=2(e^x-1)-2x-x^2$，

$$F''(x)=2e^x-2-2x=2(e^x-x-1)=f(x)>0\ \ (x>0)$$

，所以$F'(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增，因此，当$x>0$时，有$F'(x)>F'(0)=0$，由此可知$F(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增，故当$x>0$时，有

$F(x)>F(0)=0$，即$F(x)=f(x)-x^2-\dfrac{x^3}{3}>0$，

所以$f(x)>x^2+\dfrac{x^3}{3},(x>0)$。

11 年试题

19．过坐标原点作曲线$y=e^x$的切线l，切线l与曲线$y=e^x$及y轴围成的平面图形标记为G，求：（1）切线l的方程；（2）G 的面积；（3）G 绕x轴旋转而完成的旋转体体积。

19．解：（1）过原点作曲线$y=e^x$的切线l，设

切点为(x_0,e^{x_0})，

则有$\dfrac{e^{x_0}}{x_0}=e^{x_0}$，即$x_0=1$，

因此切点$(1,e)$，

故切线l的方程为$y-e=e(x-1)$，即$y=ex$。（4 分）

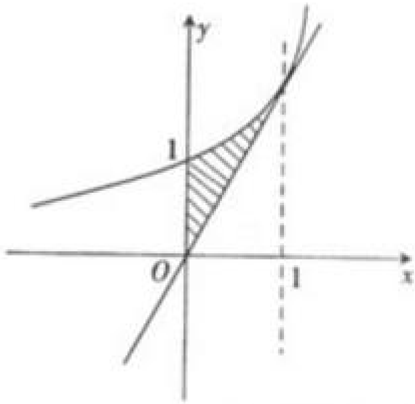
（2）如图，平面图形 G 的面积为

$$S=\int_0^1(e^x-ex)dx$$

（6 分）

$$=(e^x-\frac{ex^2}{x})\Big|_0^1=\frac{e}{2}-1$$

（8 分）



（3）G 绕x轴旋转而成的旋转体体积

$$V=\pi\int_0^1 e^{2x}dx-\pi\int_0^1 e^2x^2dx$$

（10 分）

$$=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^1-\frac{e^2\pi}{3}\Big|_0^1=\frac{e^{2\pi}}{6}x-\frac{\pi}{2}。$$

10 年试题

8. 由曲线$y=\dfrac{1}{x}$和直线$x=1,x=2$及$y=0$围成的平面图形绕x轴旋转一周所的旋转体体积 $V=$ ______

解析：$V=\pi\int_1^2(\frac{1}{x})^2dx=-\frac{\pi}{x}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}$

09 年试题

19．用 G 表示由曲线 $y=\ln x$ 及直线 $x+y=1$，$y=1$ 围成的平面图形。

（1）求 G 的面积；

（2）求 G 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积。

19．【解析】（1）$A=\int_0^1(e^y+y-1)dy$

$$=(e^y+\frac{1}{2}y^2-y)\Big|_0^1=e+\frac{1}{2}-1-1$$

$$=e-\frac{3}{2}.$$

（2）$V=\pi\int_0^1 e^{2y}dy-\pi\int_0^1(1-y)^2dy$

$$=\frac{\pi}{2}e^{2y}\Big|_0^1+\frac{\pi}{3}(1-y)^3\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}e^2-\frac{5\pi}{6}.$$

07 年试题

16. 设平面图形由曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=0$ 及 $x=2$ 围成，求该图形线 y 轴旋转所得的旋转体体积。

16. 【解析】如图 1 所示，所求旋转体的体积为

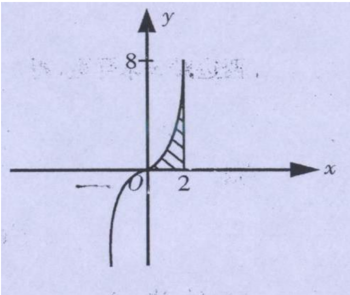


图 1

$$V_y=\pi\int_0^8 2^2dy-\pi\int_0^8 y^{\frac{2}{3}}dy$$

$$=32\pi-\frac{3\pi}{5}y^{\frac{5}{3}}\Big|_0^8=\frac{64}{5}\pi.$$

06 年试题

9. 曲线 $y=e^x$ 及直线 $x=0$，$x=1$ 和 $y=0$ 所围成平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体体积 V =______________。

04 年试题

8. 曲线 $y=\frac{1}{x},y=x,x=2$ 所围成的图形面积为 S，则 S=（　　）

（A）$\int_1^2 (\frac{1}{x} - x)dx$

（B）$\int_1^2 (x - \frac{1}{x})dx$

（C）$\int_1^2 (2 - \frac{1}{y})dx + \int_1^2 (2 - y)dx$

（D）$\int_1^2 (2 - \frac{1}{x})dx + \int_1^2 (2 - x)dx$