Indução Matemática
Lista de Exercícios

- Prove as proposições abaixo usando Indução matemática:

1. $n^3 \leq 2^n$, para n inteiro, com $n \geq 10$.
2. $3^n > n^2$, para n inteiro positivo.
3. $5n + 5 < n^2$, para n inteiro, com $n \geq 6$.
4. $\prod_{i=2}^{n}(1 - \frac{1}{i^2}) = \frac{n+1}{2n}$, para n inteiro, com $n \geq 2$.
5. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$, para n inteiro, com $n \geq 1$.
6. $\sum_{i=1}^{n} 3 \times 2^{i-1} = 3(2^n - 1)$, para n inteiro, com $n \geq 1$.
7. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para n inteiro positivo.
8. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, para n inteiro positivo.
9. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$, para n inteiro, com $n \geq 1$.
10. $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$, para n inteiro, com $n \geq 1$.
11. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, para n inteiro, com $n \geq 1$.
12. $f_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$, onde f_k é o k-ésimo número de Fibonacci[1], para n inteiro, com $n \geq 1$.
13. f_{3n} é par, onde f_k é o k-ésimo número de Fibonacci[1], para n inteiro, com $n \geq 1$.
14. f_{4n} é divisível por 3, onde f_k é o k-ésimo número de Fibonacci[1], para n inteiro, com $n \geq 1$.
15. $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$, onde f_k é o k-ésimo número de Fibonacci[1], para n inteiro, com $n \geq 1$.
16. $f_n^2 = f_{n-1} \times f_{n+1} + (-1)^{n-1}$, onde f_k é o k-ésimo número de Fibonacci[1], para n inteiro, com $n \geq 2$.
17. $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$, onde f_k é o k-ésimo número de Fibonacci[1], para n inteiro, com $n \geq 1$.

[1] Dica: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ e $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$

18. $\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \times f_{n+1}$, onde f_k é o k-ésimo número de Fibonacci[1], para n inteiro, com $n \geq 2$.
19. $8^n - 3^n$ é divisível por 5, para n inteiro, com $n \geq 1$.
20. $9^n - 1$ é divisível por 8, para n inteiro, com $n \geq 1$.
21. 3^{2n-1} é divisível por 4, para n inteiro, com $n \geq 1$.
22. $8^n - 1$ é divisível por 7, para n inteiro, com $n \geq 1$.
23. $5^{2n-1} + 1$ é divisível por 6, para n inteiro, com $n \geq 1$.
24. $2^{2n} - 1$ é divisível por 3, para n inteiro positivo.
25. $x^n - y^n$ é divisível por $x - y$, para n inteiro positivo.
26. Deseja-se colocar um total de n centavos de selos numa carta. No entanto só se possui selos de 5 centavos e 12 centavos. Prove que qualquer valor de selos pode ser colocado numa carta desde que este valor seja maior ou igual a 44 centavos.
27. Prove que a expansão de $(1 + x + x^2)^n$ contem pelo menos um coeficiente par, para n inteiro, com $n \geq 2$.

- Algumas soluções:

5. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$, para n inteiro, com $n \geq 1$.

$$P(1) \quad : \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{1(1+1)} &= \tfrac{1}{(1+1)} \\ \tfrac{1}{2} &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$P(n+1) \quad : \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{i(i+1)} + \tfrac{1}{(n+1)((n+1)+1)} &= \tfrac{n+1}{((n+1)+1)} \\ \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{i(i+1)} + \tfrac{1}{(n+1)(n+2)} &= \tfrac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

como por P(n): $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

$$\tfrac{n}{n+1} + \tfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \tfrac{n+1}{n+2}$$

Colocando tudo sobre o mesmo denominador fica

$$\tfrac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \tfrac{n+1}{n+2}$$

Somando e subtraindo $n + 1$ no numerador fica

$$\begin{aligned} \tfrac{n(n+2)+1+(n+1)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} &= \tfrac{n+1}{n+2} \\ \tfrac{n(n+2)+(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} &= \tfrac{n+1}{n+2} \\ \tfrac{(n+1)(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} &= \tfrac{n+1}{n+2} \\ 1 - \tfrac{(n+1)}{(n+1)(n+2)} &= \tfrac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

$$P(n+1) \quad : \quad 1 - \frac{(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Simplificando $n+1$ fica

$$1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$$

Colocando tudo sobre o mesmo denominador fica

$$\frac{n+2-1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$$
$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$$

12. $f_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$, onde f_k é o k-ésimo número de Fibonacci

    Para $P(1) : f_1 = 1 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \implies 1 \geq \frac{2}{3}$ que é verdadeiro.
    Para $P(n+1)$:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &\geq \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n+1-2} \\ &= \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n-1} \\ &= \tfrac{3}{2} \times \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

Substituindo $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$ por f_n

$$\begin{aligned} f_{n+1} &\geq \tfrac{3}{2} f_n \\ f_n + f_{n-1} &\geq \tfrac{3}{2} f_n \\ 2f_n + 2f_{n-1} &\geq 3f_n \\ 2f_{n-1} &\geq f_n \\ 2f_{n-1} &\geq f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_{n-1} &\geq f_{n-2} \end{aligned}$$

O que obviamente é verdadeiro já que $f_{n-1} = f_{n-2} + f_{n-3}$

14. f_{4n} é divisível por 3, onde f_k é o k-ésimo número de Fibonacci[1], para n inteiro, com $n \geq 1$.

    A sequencia de Fibonacci é: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \ldots$.

$$P(1) \quad : \quad f_4 = 3 \quad \text{é divisível por 3}$$

$$\begin{aligned} P(n+1) \quad : \quad & f_{4(n+1)} = \\ & f_{4n+4} = \\ & f_{4n+3} + f_{4n+2} = \\ & f_{4n+2} + f_{4n+1} + f_{4n+2} = \\ & 2 \times f_{4n+2} + f_{4n+1} = \\ & 2 \times [f_{4n+1} + f_{4n}] + f_{4n+1} = \\ & 3 \times f_{4n+1} + 2 \times f_{4n} \qquad \text{que é divisível por 3} \end{aligned}$$

Pois por P(n): f_{4n} é divisível por 3, e f_{4n+1} está sendo multiplicado por 3
Logo o resultado é divisível por 3

23. $5^{2n-1} + 1$ é divisível por 6, para n inteiro, com $n \geq 1$.

$$
\begin{array}{lll}
P(1) & : & 5^1 + 1 = \\
 & & 6 \qquad \text{é divisível por 6} \\
P(n+1) & : & 5^{2(n+1)-1} + 1 \\
 & & 5^2 n + 1 + 1 \\
 & & 5^2 \times 5^{2n-1} + 1 \\
 & & 5^2 \times (5^{2n-1} + 1) - 24
\end{array}
$$

Como por P(n): $5^{2n-1} + 1$ é divisível por 6, podemos substituir por

$$5^2 \times 6 \times f(n) - 24$$

onde f(n) é um valor dependente de n que multiplicado por 6 dá $5^{2n-1} + 1$

$$5^2 \times 6 \times f(n) - 6 \times 4$$

$$6 \times (5^2 \times f(n) - 4) \qquad \text{que é divisível por 6}$$

Observação: É importante notar que isto só funciona se $5^2 \times f(n) - 4 > 0$, mas isto vale para todos os valores de n, já que $n \geq 1$.

25. $x^n - y^n$ é divisível por $x - y$, para n inteiro positivo.

$$
\begin{array}{lll}
P(1) & : & x^1 - y^1 \quad = \\
& & x - y \qquad \text{é divisível por } x - y
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
P(n+1) & : & x^{n+1} - y^{n+1} \qquad = \\
& & x.x^n - y.y^n \qquad =
\end{array}
$$

Aqui temos que tentar usar o P(n), mas como está não dá,
então precisamos colocar algum valor que permita gerar $x^n - y^n$
sem alterar a equação. Portanto vamos somar e subtrair o valor $(x - y)y^n$

$$
\begin{array}{ll}
x.x^n - y.y^n - (x - y)y^n + (x - y)y^n & = \\
x.x^n - y.y^n - x.y^n + y.y^n + (x - y)y^n & = \\
x.x^n - x.y^n + (x - y)y^n & = \\
x.(x^n - y^n) + (x - y)y^n & =
\end{array}
$$

Agora temos $x^n - y^n$ que é P(n) e portanto multiplo de $x - y$
portanto podemos substituir por $(x - y)f(n)$ onde f(n) é uma valor
dependente de n que multiplicado por $(x - y)$ dá $x.(x^n - y^n)$

$$
\begin{array}{ll}
(x - y)f(n) + (x - y)y^n & = \\
(x - y)(f(n) + y^n) & \text{que é divisível por } x - y
\end{array}
$$