

向量與向量空間

沈威宇

2024 年 12 月 27 日

目錄

第一章 向量與向量空間	1
第一節 向量與向量空間相關定義	1
一、 向量空間 (Vector Space) /線性空間 (Linear Space	1
(一) 公理	1
(二) 例子	1
二、 模長 (Norm)	1
(一) 定義	2
(二) 歐幾里得模長	2
(三) 曼哈頓模長	2
(四) 無窮範數	2
三、 線性獨立 (Linear independence)	2
四、 笛卡爾坐標系	2
五、 內積定義	2
六、 正射影	3
七、 零向量	3
八、 投影 (Projection)	3
(一) 冪等性	3
(二) 線性性	3
第二節 向量與向量空間公式定理	3
一、 超平面法向量	3
二、 超平面到點最短向量	3
三、 平行超平面間最短向量	4
四、 兩超平面夾角與分角面	4
五、 超平行體體積	4
六、 分點公式	5

七、 向量決定向量空間	5
八、 多點決定超平面	5
九、 點與超平面關係	5
十、 超平面間的關係	5
十一、 流形表達式	5
十二、 三垂線定理	6
十三、 超平面投影體積	7
十四、 超三角錐體積	7
十五、 過一點超三角錐體積	7
十六、 平行	8
十七、 垂直	9
第三節 二維空間公式定理	9
一、 二點分點公式	9
二、 平面上二點分點公式擴展圖形	9
第四節 三維空間相關定義與公式定理	9
一、 三維右手與左手笛卡爾坐標系	9
二、 三維右手笛卡爾坐標系的卦限	9
三、 三維向量外積定義	9
(一) 三維向量外積性質	10
(二) 三重積	10
四、 兩面角	10
五、 兩面式與平面系	10
六、 點到直線	10
七、 兩歪斜線	11
八、 點對平面之投影點	11

第一章 向量與向量空間

第一節 向量與向量空間相關定義

一、 向量空間 (Vector Space) / 線性空間 (Linear Space)

線性代數中的基本概念之一。它是一個由向量組成的集合，這些向量可以進行加法運算和數量乘法運算，且滿足一定的公理。

(一) 公理

一個集合 V 是一個向量空間，如果它滿足以下條件：

1. 加法封閉性：對於任意 $u, v \in V$ ，有 $u + v \in V$ 。
2. 加法交換律：對於任意 $u, v \in V$ ，有 $u + v = v + u$ 。
3. 加法結合律：對於任意 $u, v, w \in V$ ，有 $(u + v) + w = u + (v + w)$ 。
4. 零向量存在：存在一個零向量 $0 \in V$ ，使得對於任意 $v \in V$ ，有 $v + 0 = v$ 。
5. 加法逆元存在：對於任意 $v \in V$ ，存在一個向量 $-v \in V$ ，使得 $v + (-v) = 0$ 。
6. 數量乘法封閉性：對於任意 $v \in V$ 和標量 $c \in \mathbb{R}$ (或 \mathbb{C})，有 $c \cdot v \in V$ 。
7. 數量乘法分配律：對於任意 $c, d \in \mathbb{R}$ 和 $v \in V$ ，有 $(c + d) \cdot v = c \cdot v + d \cdot v$ 。
8. 向量乘法分配律：對於任意 $c \in \mathbb{R}$ 和 $u, v \in V$ ，有 $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v$ 。
9. 數量乘法結合律：對於任意 $c, d \in \mathbb{R}$ 和 $v \in V$ ，有 $(cd) \cdot v = c \cdot (d \cdot v)$ 。
10. 數量乘法單位元存在：對於任意 $v \in V$ ，有 $1 \cdot v = v$ ，其中 1 是純量域的乘法單位元。

(二) 例子

1. 歐幾里得空間：例如 \mathbb{R}^n ，即所有 n 維實數向量的集合。
2. 多項式空間：例如所有次數不超過 n 的多項式的集合。
3. 矩陣空間：例如所有 $m \times n$ 矩陣的集合。
4. 函數空間：例如所有從實數域到實數域的連續函數的集合。

二、 模長 (Norm)

模長是一種用來測量向量大小或長度的函數，可以視作向量空間中的長度或距離概念的推廣。

(一) 定義

給定一個向量空間 V ，模長是一個映射 $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ ，它將向量映射到一個非負實數，滿足以下三個條件：

1. 非負性：對於所有 $\mathbf{v} \in V$ ，模長 $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ ，且當且僅當 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 時， $\|\mathbf{v}\| = 0$ 。
2. 齊次性（均勻性）：對於任意的向量 $\mathbf{v} \in V$ 和純量 $\alpha \in \mathbb{R}$ （或 $\alpha \in \mathbb{C}$ ），有 $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$ 。
3. 三角不等式：對於任意的向量 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ，有 $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ 。

(二) 歐幾里得模長

ℓ_2 範數，是最常見的模長定義，對應於向量的歐幾里得距離。

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

(三) 曼哈頓模長

ℓ_1 範數

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|$$

(四) 無窮範數

ℓ_∞ 範數

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\}$$

三、 線性獨立 (Linear independence)

對於一組向量 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，如果方程式：

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$$

僅在所有係數 c_1, c_2, \dots, c_n 都為零時成立，那麼這組向量就是線性獨立的。

四、 笛卡爾坐標系

笛卡兒坐標系 (Système de coordonnées cartésiennes, Cartesian coordinate system)，又稱直角坐標系，是一種正交坐標系，由 k 條相互垂直、相交於原點的數線構成 k 維笛卡爾坐標系。

五、 內積定義

向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 、 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\mathbf{a} \text{ 與 } \mathbf{b} \text{ 之夾角})$$

六、 正射影

非零向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} ， \mathbf{a} 在 \mathbf{b} 方向上的正射影 \mathbf{c} ：

$$\mathbf{c} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \right) \mathbf{b}$$

七、 零向量

V 是一個向量空間， $\mathbf{0} \in V$ ， $\forall v \in V$ ： $v + \mathbf{0} = v$ ：

$$\forall v \in V : v \parallel \mathbf{0}$$

八、 投影 (Projection)

在線性代數中，投影指將一個向量映射到某個子空間上的操作。設 V 是一個向量空間， U 是 V 的一個子空間，則對於任意的向量 $\mathbf{v} \in V$ ，其在 U 上的投影是一個在 U 中的向量 \mathbf{u} ，滿足：

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$$

其中 $\mathbf{u} \in U$ ， \mathbf{w} 是垂直於 U 的向量（即 \mathbf{w} 在 U 的正交補空間內）。

對任意的 \mathbf{v} 和投影運算 P ，有：

(一) 冪等性

$$P(P(\mathbf{v})) = P(\mathbf{v})$$

(二) 線性性

$$P(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = P(\mathbf{v}) + P(\mathbf{w})$$

且

$$P(c\mathbf{v}) = cP(\mathbf{v})$$

，其中 c 是一個純量。

第二節 向量與向量空間公式定理

一、 超平面法向量

向量空間 \mathbb{R}^n 中一 $(n-1)$ 維超平面 E ： $\vec{n} \cdot \mathbf{x} + c = 0$ ($|\vec{n}| \neq 0$) 之法向量為 \vec{n} 的任意非零實數倍。

二、 超平面到點最短向量

向量空間 \mathbb{R}^n 中一 $(n-1)$ 維超平面 E ： $\vec{n} \cdot \mathbf{x} + c = 0$ ($|\vec{n}| \neq 0$) 與一點 \mathbf{P} ， E 距離 \mathbf{P} 最短的點為 \mathbf{Q} ，則：

$$\overrightarrow{\mathbf{QP}} = \frac{\vec{n} \cdot \mathbf{P} + c}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

Proof.

令 $\overrightarrow{QP} = t\vec{n}$:

$$\vec{n} \cdot (\mathbf{P} - t\vec{n}) + c = 0$$

$$\vec{n} \cdot \mathbf{P} - t|\vec{n}|^2 + c = 0$$

$$t = \frac{\vec{n} \cdot \mathbf{P} + c}{|\vec{n}|^2}$$

□

三、 平行超平面間最短向量

向量空間 \mathbb{R}^n 中兩 $(n-1)$ 維超平面 $E : \vec{n} \cdot \mathbf{x} + c = 0$ 與 $F : \vec{n} \cdot \mathbf{x} + d = 0$ ($|\vec{n}| \neq 0$) , \mathbf{P} 與 \mathbf{Q} 分別在 E 、 F 上且 $\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{n}$, 則 :

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{d-c}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

Proof.

令 $\overrightarrow{PQ} = t\vec{n}$:

$$\vec{n} \cdot (\mathbf{P} + t\vec{n}) + d = 0$$

$$d + t|\vec{n}|^2 - c = 0$$

$$t = \frac{d-c}{|\vec{n}|^2}$$

□

四、 兩超平面夾角與分角面

向量空間 \mathbb{R}^n 中兩 $(n-1)$ 維超平面 $E : \vec{m} \cdot \mathbf{x} + c = 0$ 與 $F : \vec{n} \cdot \mathbf{x} + d = 0$ ($|\vec{m}||\vec{n}| \neq 0$) , $\vec{m} \times \vec{n} \neq \vec{0}$, 則 :

1. E 、 F 夾角之餘弦值為 :

$$\pm \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|}$$

2. E 、 F 的分角面為 :

$$\frac{\vec{m} \cdot \mathbf{x} + c}{|\vec{m}|^2} \pm \frac{\vec{n} \cdot \mathbf{x} + d}{|\vec{n}|^2} = 0$$

若 $\frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} \neq 0$, 則 \pm 取與 $\vec{m} \cdot \vec{n}$ 同號者為銳角角平分超平面 , 與 $\vec{m} \cdot \vec{n}$ 異號者為鈍角角平分超平面。

五、 超平行體體積

$$\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^n, O = O_n : \left| \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \right|$$

=Volume of the n -dimensional shape spanned by the vectors $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$

六、分點公式

\forall points $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ not in the same \mathbb{R}^{n-2} space

$$\wedge (\forall 1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N} : c_i \in \mathbb{R}, c_i > 0) \wedge \sum_{i=1}^n c_i = 1 :$$

$$K = \sum_{i=1}^n c_i A_i$$

$$\Leftrightarrow \text{volume}(KA_2A_3 \dots A_n) : \text{volume}(A_1KA_3 \dots A_n) : \text{volume}(A_1A_2K \dots A_n) :$$

$$\dots : \text{volume}(A_1 A_2 \dots A_{n-1} K) = c_1 : c_2 : \dots : c_n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{KA_i} = 0$$

七、 向量決定向量空間

\mathbb{R}^k 中，線性獨立的 k 個實向量可以線性組合為 \mathbb{R}^k 中的任意向量。

八、多點決定超平面

不共 $k-1$ 點和 $k+1$ 點可以決定一個 k 維圖形，即其凸包，與一個 k 維超平面，即其仿射包。

九、點與超平面關係

n 維空間中，點 \mathbf{P} 與 $n-1$ 維超平面 $E: \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - c = 0$ ， \mathbf{P} 與 E 的關係有：

- P 在 E 上： $\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} - c = 0$ 。
- P 在 E 的 \mathbf{a} 方向半空間： $\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} - c > 0$ 。
- P 在 E 的 $-\mathbf{a}$ 方向半空間： $\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} - c < 0$ 。

十、超平面間的关系

$n, k, m \in \mathbb{Z}$ 兩個 k 維超平面在 \mathbb{R}^n 空間中的關係有：

- 完全重合 ($\Rightarrow n \geq k \geq 0$)
- 平行 ($\Rightarrow n - 1 \geq k \geq 0$)
- 正交相交 ($\Rightarrow n - 1 \geq k \geq 1$)
- 非正交相交 ($\Rightarrow n - 2 \geq k \geq m + 2 \geq 2$)
- 歪斜：不平行也不相交。($\Rightarrow n - 2 \geq k \geq 1$)

十一、流形表達式

- $n-1$ 維流形一般式： n 維空間中，一個 $n-1$ 維流形可以表示成：

$f(\mathbf{x}) = 0$, where $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, f 為光滑函數

- $n - 1$ 維超平面一般式： n 維空間中，一個 $n - 1$ 維超平面可以表示成：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + c = 0, \text{ where } \mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \text{ 為自變項}, c \in \mathbb{R}$$

- $n - 1$ 維超平面截距式： n 維空間中，一個 $n - 1$ 維超平面 $E: \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 1$ ，for i in $\text{range}(n)$ ：，令 a_i 為 \mathbf{a} 平行於第 i 方向單位向量 e_i 分量，且 for i in $\text{range}(n): a_i \neq 0, b_i = \frac{1}{a_i}$ ，則 E 與第 i 坐標軸的交點為 $b_i e_i$ ，且該等交點與原點形成的超三角錐體積為 $\frac{\prod_{i=1}^n b_i}{n!}$ 。
- $\leq n - 1$ 維流形參數式： n 維空間中，一個 $m (m \leq n)$ 維流形可以表示成：

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \text{ where } \mathbf{f}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{f} \text{ 為光滑函數}$$

- 直線參數式： n 維空間中，一條直線可表示成：

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}, \text{ where } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

- 直線比例式： n 維空間中，一條方向向量不與任何坐標軸垂直的直線可表示成：

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \dots = \frac{x_n - p_n}{v_n}$$

- 超平面隱式方程： n 維空間中，一個 $m (m \leq n - 2)$ 維超平面可表示成：

$$\text{for } j \text{ in } \text{range}(n - m) : \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{x} + c_j = 0, \text{ where } \mathbf{a}_j, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \text{ 為自變項}, c_j \in \mathbb{R}, \{\text{for } j \text{ in } \text{range}(n - m) : \mathbf{a}_j\} \text{ 之}$$

十二、 三垂線定理

Provided that point B, C , and line L on plane E . If two of the following three statements are true, then the rest one must be true.

$$\overline{AB} \perp E \quad (1)$$

$$\overline{BC} \perp L \text{ at } C \quad (2)$$

$$\overline{AC} \perp L \text{ at } C \quad (3)$$

Proof.

Proof of $(1) \wedge (2) \implies (3)$:

Assume that $\overline{AB} \perp E$ and $\overline{BC} \perp L$ at C .

1. Since $\overline{AB} \perp E$, the line segment \overline{AB} is perpendicular to the plane E , meaning AB is parallel to the normal vector \mathbf{n}_E of the plane E .
2. Since $\overline{BC} \perp L$ at C , the line segment \overline{BC} is perpendicular to the line L at point C .
3. The key observation is that L lies within plane E . Therefore, the normal vector \mathbf{n}_E is perpendicular to any vector lying on L .
4. Given $\overline{BC} \perp L$, the direction of \overline{BC} must be along \mathbf{n}_E , meaning it is perpendicular to the plane E . This implies that any line perpendicular to L at C must also be perpendicular to any other line in E that is perpendicular to L at C .
5. Since \overline{AB} is already perpendicular to E (and hence to any line in E), \overline{AC} must also be perpendicular to L at C .

Thus, $\overline{AC} \perp L$ at C , so $(1) \wedge (2) \implies (3)$.

Proof of $(2) \wedge (3) \implies (1)$:

Assume that $\overline{BC} \perp L$ at C and $\overline{AC} \perp L$ at C .

1. Since both \overline{BC} and \overline{AC} are perpendicular to L at C , the vectors **BC** and **AC** are both perpendicular to L . Therefore, **BC** and **AC** lie in a plane that is perpendicular to L at C .
2. Since L lies in E , the plane that **BC** and **AC** lie in is perpendicular to E because **BC** and **AC** are perpendicular to a line that lies in E .
3. Therefore, the line \overline{AB} , which must be within the same perpendicular plane as **BC** and **AC**, is also perpendicular to E .

Thus, $\overline{AB} \perp E$, so $(2) \wedge (3) \implies (1)$.

Proof of $(1) \wedge (3) \implies (2)$:

Assume that $\overline{AB} \perp E$ and $\overline{AC} \perp L$ at C .

1. Since $\overline{AB} \perp E$, the line segment \overline{AB} is perpendicular to the plane E .
2. Since $\overline{AC} \perp L$ at C , the line segment \overline{AC} is perpendicular to the line L at C .
3. As L lies in E , and \overline{AB} is perpendicular to E , the direction of \overline{AB} corresponds to the normal vector \mathbf{n}_E of the plane E .
4. Now, since \overline{AC} is perpendicular to L at C , and both \overline{AB} and L lie in the same plane E , the vector **BC** must also be perpendicular to L at C .

Thus, $\overline{BC} \perp L$ at C , so $(1) \wedge (3) \implies (2)$. □

十三、 超平面投影體積

兩 k 維超平面 L 、 M 夾角 θ ， L 上一個 k 維圖形在 M 上的投影體積為原本體積的 $|\cos \theta|$ 倍。

十四、 超三角錐體積

\mathbb{R}^d 中，原點與 d 個點形成一個體積 V 的超三角錐，該 d 個點形成的 $d \times d$ 矩陣為 M ：

$$V = \frac{1}{d!} |\det(M)|$$

十五、 過一點超三角錐體積

\mathbb{R}^d 中，第 i 維單位向量為 e_i 。過 $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^d p_i e_i$ 之超平面 $E : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 1$ 與所有坐標軸圍成的超三角錐體積為 V ，其中 $\forall 1 \leq i \leq n : p_i \neq 0$ 。

當 E 通過 $\frac{p_i}{d} e_i (1 \leq i \leq n)$ 時， V 有最小值 $\frac{d^d \prod_{i=1}^d p_i}{d!}$ 。

Proof. 令 E 與各軸的交點為 $c_1 e_1, c_2 e_2, \dots, c_d e_d$ 。

$$V = \frac{\prod_{i=1}^d c_i}{d!}$$

$$\forall 1 \leq i \leq n : c_i \mathbf{n} \cdot e_i - 1 = 0$$

即：

$$c_i = \frac{1}{n_i}$$

其中 n_i 是 \mathbf{n} 在第 i 個維度的分量。

故：

$$V = \frac{1}{d! \prod_{i=1}^d n_i}$$

欲求函數：

$$V = \frac{1}{d! \prod_{i=1}^d n_i}$$

在限制條件：

$$\sum_{i=1}^d n_i p_i = 0$$

下的最小值。

利用拉格朗日乘數法，令存在拉格朗日乘數 λ ，使得：

$$\mathcal{L}(n_1, n_2, \dots, n_d, \lambda) = \frac{1}{d! \prod_{i=1}^d n_i} + \lambda \sum_{i=1}^d n_i p_i$$

求 \mathcal{L} 對每個 n_j 的偏導數並令其為零：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_j} = -\frac{1}{d! \prod_{i=1}^d n_i n_j} + \lambda p_j = 0$$

整理得到：

$$\lambda p_j = \frac{1}{d! \prod_{i=1}^d n_i n_j}$$

令

$$p_j n_j = \frac{1}{d! \lambda \prod_{i=1}^d n_i} \quad \forall j$$

令常數 C ，使得：

$$p_j n_j = C \quad \forall j$$

$$\sum_{i=1}^d n_i p_i = C d = 1$$

$$C = \frac{1}{d}$$

因此：

$$n_j = \frac{1}{d p_j}$$

$$c_j = d p_j$$

$$V = \frac{1}{d! \prod_{i=1}^d n_i} = \frac{1}{d!} \cdot \left(\prod_{i=1}^d d p_i \right) = \frac{d^d \prod_{i=1}^d p_i}{d!}$$

□

十六、 平行

今有超平面 E 、 F ，集合 A 、 B 分別為 E 、 F 上的所有直線的非零方向向量：

$$(E \parallel F) \iff (A \subset B \vee B \subset A)$$

十七、 垂直

今有超平面 $E、F$ ，集合 $A、B$ 分別為 $E、F$ 上的所有直線的非零方向向量，法向量集合 $C = \{\mathbf{m} \mid |\forall \mathbf{a} \in A : \mathbf{m} \cdot \mathbf{a} = 0 \wedge \mathbf{m} \neq 0\}$ 、 $D = \{\mathbf{n} \mid |\forall \mathbf{b} \in B : \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0 \wedge \mathbf{n} \neq 0\}$ ：

$$(E \perp F) \iff (\forall \mathbf{m} \in C \perp \forall \mathbf{n} \in D)$$

第三節 二維空間公式定理

一、 二點分點公式

$$m, n \in \mathbb{R}, mn > 0 : K \text{ on } \overline{AB}, \overline{AK} : \overline{KB} = m : n \iff \vec{K} = \frac{n}{m+n} \vec{A} + \frac{m}{m+n} \vec{B}$$

二、 平面上二點分點公式擴展圖形

$$\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}, x, y \in \mathbb{R} : \begin{cases} P \text{ on } \overleftrightarrow{AB} \iff x + y = 1 \\ x + y = 1 \wedge xy \geq 0 \iff P \text{ on } \overline{AB} \\ x + y < 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0 \iff P \text{ in } \triangle OAB \\ x + y > 1 \vee x < 0 \vee y < 0 \iff P \text{ outside of } \triangle OAB \end{cases}$$

第四節 三維空間相關定義與公式定理

一、 三維右手與左手笛卡爾坐標系

- 右手座標系：滿足右手法則，即假設用右手握住一個三維右手座標系，其中大拇指、食指和中指分別指向 $x、y、z$ 軸的正方向。較常用。
- 左手座標系：滿足左手法則，即假設用左手握住一個三維左手座標系，其中大拇指、食指和中指分別指向 $x、y、z$ 軸的正方向。

二、 三維右手笛卡爾坐標系的卦限

I(+, +, +)、II(-, +, +)、III(-, -, +)、IV(+, -, +)、V(+, +, -)、VI(-, +, -)、VII(-, -, -)、VIII(+, -, -)

三、 三維向量外積定義

三維向量 $\mathbf{a}、\mathbf{b}$ ：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

(一) 三維向量外積性質

三維向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} ：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta_{\mathbf{ab}}$$

(二) 三重積

$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^3 : A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^3, O = (0, 0, 0) : |A \cdot (B \times C)|$$

=Volume of the parallelepiped spanned by the vectors \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC}

四、 兩面角

由共用邊界直線的兩半平面圍成的夾角稱兩面角，該共用邊界直線稱此兩面角的稜。

五、 兩面式與平面系

- 兩面式：直線的兩面式表示為兩個平面方程同時成立。
- 平面系：一直線的平面系指通過該直線的所有平面之集合，可表示為該直線的兩面式中的兩平面方程的線性組合。

六、 點到直線

點 $P(p, q, r)$ 到直線 $L : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ 的距離為 $d(P, L)$ ， P 在 L 上的投影點為 Q ，

$\vec{v} = (a, b, c)$ ：

1. 用 $\overrightarrow{PQ} \cdot (a, b, c) = 0$ 求 Q 。

2. $d(P, L) = \min \left(\sqrt{(p - (x_0 + at))^2 + (q - (y_0 + bt))^2 + (r - (z_0 + ct))^2} \right)$ ，將 $d(P, L) = \sqrt{(p - (x_0 + at))^2 + (q - (y_0 + bt))^2 + (r - (z_0 + ct))^2}$ 時的 t 代回 L 得 Q 。

3. L 上任一點 A ， $d(P, L) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$ ， $Q = A + \left(\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2} \right) \vec{v}$ 。

七、 兩歪斜線

兩直線 $L : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ 與 $M : \begin{cases} x = x_1 + dk \\ y = y_0 + ek \\ z = z_0 + fk \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ 互相歪斜，公垂線交 L 於 P 、交

M 於 Q ， $d(L, M) = \overline{PQ}$ ， $\vec{u} = (a, b, c)$ ， $\vec{v} = (d, e, f)$ ：

1. 解 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$ 得 P 、 Q 。
2. 令平行平面 E 包含 L 、平面 F 包含 M ，該二平面之法向量 $\vec{n} \parallel (\vec{u} \times \vec{v})$ ，以 L 上一點求平面 E ，求 M 上任一點與 E 距離。

八、 點對平面之投影點

令平面外一點 P 對平面 $\vec{n} \cdot (x, y, z) + d = 0$ 投影點 H ：

$$\overrightarrow{PH} = \left(\frac{\overrightarrow{PH} \cdot \vec{n}}{(\vec{n})^2} \right) \vec{n}$$