遮迴

沈威宇

2025 年 2 月 4 日

目錄

第一節　遞迴（Recurrence）

一、　定義

- 數列：一些數依序拍成一列，形如 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$，記作 $< a_n >$ 或 $\{a_n\}$，其中 a_n 可以是代號 a_n 或其表達式如 n^2、$2n$。
- 有限數列：項數有限的數列。
- 無窮數列：項數無限的數列。
- 等差數列（算術數列）：$< a_1 + (n-1)d >$，其中 d 為常數，稱公差。
- 等差中項：a, b, c 呈等差數列，則 b 稱 a, c 的等差中項，即 $b = \dfrac{a+c}{2}$。
- 等比數列（幾何數列）：$< a_1 \cdot r^{n-1} >$，其中 r 為非零常數。
- 等比中項：a, b, c 呈等比數列，則 b 稱 a, c 的等比中項，即 $b = \pm\sqrt{ac}$。
- 遞迴關係：遞迴數列中一項與其前數項的關係。
- 遞迴數列：給定某些項（稱初始值）與遞迴關係使可以求出此數列的任意項的數列。
- 遞迴（定義）式：將遞迴數列的初始值與遞迴關係寫出。
- 級數：將一數列的有限或無窮個連續的項依序相加起來。一數列的前 n 項之和記作 S_n。
- 等差級數：等差數列的級數。
- 等比級數：等比數列的級數。
- 常係數線性遞迴數列：形如 $< a_n >$: $a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot a_{n-i} + f(n)$ （$n > k, c_i$為常數） 的數列稱 k 階常係數線性遞迴數列。若初使條件：$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ 及 $f(n)$ 已知，則 $< a_n >$ 即被唯一確定。對於 $f(n) = 0$，稱 k 階常係數線性齊次遞迴數列，否則，稱 k 階常係數線性非齊次遞迴數列。

二、　特徵方程式

定義：對一個給定 k 階常係數線性遞迴數列：

$$< a_n >: a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot a_{n-i} + f(n) \quad (n > k, c_i\text{為常數})$$

，其特徵方程式為 $x^k - \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot x^{k-i} = 0$，特證方程式的根稱其特徵根。

- 若一個給定 k 階常係數線性齊次遞迴數列 $< a_n >$ 有 a 相異特徵根 $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_a$，其中第 i 個根（$1 \le i \le a$）為 m_i 重根，則 $< a_n >$ 之一般式為：

$$a_n = \sum_{i=1}^{a} \left(\sum_{j=1}^{m_i} \left(A_{i,j} \cdot n^{j-1} \right) \cdot {q_i}^n \right), (A_{i,j}\text{為常數})$$

- 若給定一個 k 階常係數線性非齊次遞迴數列：

$$< a_n >：a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot a_{n-i} + f(n) \quad (n > k, c_i\text{為常數})$$

則令：

$$a_n = a'_n + a''_n$$

$< a'_n >$為 k 階常係數線性齊次遞迴數列。

$< a''_n >$為 k 階常係數線性非齊次遞迴數列，一次項同 $< a'_n >$，$f(n)$ 項同 $< a_n >$。

$$a''_n = g(n) \quad (\deg(g(n)) \leq \deg(f(n)))$$

解出 k 階常係數線性非齊次遞迴數列 $< a'_n >$ 與 $g(n)$ ，即可解出 $< a_n >$。

三、 生成函數

(一) 生成函數（generating function）

- 有限數列 $< a_n >_{n=0}^{m}$：$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ 之生成函數為 $f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$。
- 無窮數列 $< a_n >_{n=0}^{\infty}$：$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 之生成函數為 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$。
- 數列唯一確定若且唯若生成函數唯一確定。

(二) 指數生成函數（exponential generating function）

- 有限數列 $< a_n >_{n=0}^{m}$：$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ 之指數生成函數為 $f^{(e)}(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n x^n}{n!}$。
- 無窮數列 $< a_n >_{n=0}^{\infty}$：$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 之指數生成函數為 $f^{(e)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$。
- 數列唯一確定若且唯若指數生成函數唯一確定。

(三) 自遞迴式解生成函數的方法

對一個給定 k 階常係數線性遞迴數列 $< a_n >$：$a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot a_{n-i} + f(n), (n > k, c_i\text{為常數})$，$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ 已知，則假設一 a_0 使 $a_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i a_i = 0$，以 $f(x) - \sum_{i=1}^{k-1} c_i x^i f(x)$ 解 $f(x)$。

(四) 自生成函數解一般式的方法

對一個給定生成函數 $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$，將其因式分解為 $c \cdot (g_1(x))^{d_1} \cdot (g_2(x))^{d_2} \cdot (g_3(x))^{d_3} \cdot \ldots \cdot (g_m(x))^{d_m}$，其中 c、d_i、m 為常數，所有 $g_i(x)$ 均不相同且最高次項係數皆為 1，接著假設 $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i \circ g_i(x)}{(g_i(x))^{d_i}}$，其中 $\deg(A_i(x)) = d_i - 1$，最後解出所有 $A_i(x)$ 即可得出一般式。

(五) 使用遞迴關係構造模型時常用公式

$$|x| < 1：(1+x)^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-s}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{s+n-1}{n} x^n$$

$$x \neq 1：\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$x \neq 1：\sum_{i=0}^{n} i x^i = \frac{x(1-(n+1)x^n + nx^{n+1})}{(1-x)^2}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{（懸鍊線）}$$

四、 使用遞迴關係構造模型舉隅

(一) 費波那契數列（Successione di Fibonacci）

遞迴式：

$$\begin{cases} a_0 & = 0 \\ a_1 & = 1 \\ a_n & = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{（當 } n > 1\text{）} \end{cases}$$

一般式：

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

以假設等比數列法自遞迴式解一般式：

$$
\begin{aligned}
\text{令 } a_n - \alpha a_{n-1} &= \beta(a_{n-1} - \alpha a_{n-2}) \\
a_n &= (\alpha + \beta)a_{n-1} - \alpha\beta a_{n-2} \\
&= a_{n-1} + a_{n-2}
\end{aligned}
$$

α, β 恰為方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ 的解，此方程式即特徵方程式。

令 $\alpha > \beta$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

令 $< b_n >$:

$b_n = a_n - \alpha a_{n-1}$ （b_1 不存在）

$$b_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

令 $< c_n >$:

$c_n = a_n - \beta a_{n-1}$ （c_1 不存在）

$$c_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow a_n - \alpha a_{n-1} &= \beta(a_{n-1} - \alpha a_{n-2}) \\
&= \beta^{n-1} \quad ① \\
a_n - \beta a_{n-1} &= \alpha(a_{n-1} - \beta a_{n-2}) \\
&= \alpha^{n-1} \quad ②
\end{aligned}
$$

$① \cdot \beta - ② \cdot \alpha$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow a_n &= \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n
\end{aligned}
$$

以特徵方程式自遞迴式解一般式：

特徵方程式：$x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = k_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + k_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$ （k_1、k_2 為常數）

將初始條件代入

$$a_0 = k_1 + k_2$$
$$= 0$$
$$a_1 = k_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + k_2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
$$= 1$$
$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

以生成函數自遞迴式解一般式：

令生成函數為 $f(x)$。

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

$$x \cdot f(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \ldots$$

$$x^2 \cdot f(x) = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + a_3x^5 + \ldots$$

$$\Rightarrow f(x) - a_0 - a_1x = (x \cdot f(x) - a_0x) + x^2 \cdot f(x)$$

將 $a_0 = 0$代入

$$\Rightarrow f(x) - x = x \cdot f(x) + x^2 \cdot f(x)$$

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 + x - 1}$$

設：$f(x) = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{x-\beta}$ （A、α、B、β 為常數）

且$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 + x - 1$

令 $\alpha > \beta$

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$A = -\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{5}}\beta$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\alpha}{x-\alpha} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\beta}{x-\beta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{\beta}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty}(\frac{x}{\alpha})^i - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty}(\frac{x}{\beta})^i$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

(二) 方程式的解生成函數通式

設：

$$
\begin{aligned}
&a_n = \left|\{B_j\}\right| \\
&\forall i \in \{i \mid 1 \le i \le r \wedge i \in \mathbb{N}\}：x_i \in D_i \wedge D_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \wedge c_i \in \mathbb{N} \\
&B_j = \left\{ X \,\middle|\, \sum_{i=1}^{r} c_i x_i = n \right\} \\
&X = \left\{ x_i \mid i \in \{i \mid 1 \le i \le r \wedge i \in \mathbb{N}\} \right\} \\
&r \in \mathbb{N} \\
&n \in \mathbb{N} \cup \{0\}
\end{aligned}
$$

生成函數：

$$\prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{\frac{j}{c_i} \in D_i} x^j \right)$$

(三) 河內塔（Tower of Hanoi）

有三根桿子 A、B、C，A 桿上有 n 個 $(n > 0)$ 穿孔圓盤，盤的尺寸由下到上依次變小。$< a_n >$ 為按每次只能移動一個圓盤且大盤不能疊在小盤上的規則將所有圓盤移至 C 桿之方法數。

遞迴式：

$$\begin{cases} a_1 & = 1 \\ a_n & = 2a_{n-1} + 1 \quad （當\ n > 1） \end{cases}$$

一般式：

$$\begin{cases} a_1 & = 1 \\ a_n & = 2^{n-1} - 1 \quad （當\ n > 1） \end{cases}$$

以觀察法及數學歸納法自遞迴式解一般式：

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_n &= 2a_{n-1} + 1 \\
&= 2(2a_{n-2} + 1) + 1 \\
&= 2^2 a_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2a_{n-3} + 1) + 2 + 1 \\
&= 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&\vdots \\
&= 2^{n-1} a_1 + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \\
&= 2^{n-1} - 1
\end{aligned}
$$

欲證以上一般式：

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 2^{2-1} - 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

設 $n = k$ 時成立，則 $n = k + 1$ 時：

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2(2^{k-1} - 1) + 1 \\
&= 2^k - 1 \quad \text{亦成立。}
\end{aligned}
$$

由數學歸納法，得證。

五、　題目節選

(一)　二階常係數線性非齊次遞迴數列一

題目：

$$
\text{已知遞迴式：}\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_n &= 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{當 } n > 1) \end{cases}
$$

以特徵方程式自遞迴式解一般式：

$$
\text{令：}\begin{cases} a_n = a'_n + a''_n \\ a'_n = 2 \cdot a'_{n-1} \Rightarrow a'_n = k \cdot 2^{n-1} \quad (k \text{ 為常數}) \\ a''_n = 2 \cdot a''_{n-1} + 1 = c \quad (c \text{ 為常數}) \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
& c = 2c + 1 \\
\Rightarrow\ & c = -1 \\
\Rightarrow\ & a_n = k \cdot 2^{n-1} - 1
\end{aligned}
$$

將初始條件代入

$$
\begin{aligned}
a_1 &= k \cdot 2^{1-1} - 1 \\
&= 1 \\
\Rightarrow\ & k = 2 \\
\Rightarrow\ & a_n = 2^n - 1
\end{aligned}
$$

答：$a_n = 2^n - 1$

(二) 二階常係數線性非齊次遞迴數列二

題目：

$$\text{已知遞迴式：}\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_n &= 2a_{n-1} + 2n \quad \text{（當 } n > 1\text{）} \end{cases}$$

以特徵方程式自遞迴式解一般式：

$$\text{令：}\begin{cases} a_n = a'_n + a''_n \\ a'_n = 2 \cdot a'_{n-1} \Rightarrow a'_n = k \cdot 2^{n-1} \quad \text{（}k\text{ 為常數）} \\ a''_n = 2 \cdot a''_{n-1} + n = cn + d \quad \text{（}c\text{、}d\text{ 為常數）} \end{cases}$$

$$cn + d = 2(c(n-1) + d) + n$$
$$\Rightarrow c = -1$$
$$d = -2$$
$$\Rightarrow a_n = k \cdot 2^{n-1} - n - 2$$

將初始條件代入

$$a_1 = k \cdot 2^{1-1} - 1 - 2$$
$$= 1$$
$$\Rightarrow k = 4$$
$$\Rightarrow a_n = 2^{n+1} - n - 2$$

答：$a_n = 2^{n+1} - n - 2$

(三) 二階常係數線性非齊次遞迴數列三

題目：

一運動會，共 n 天，共發出獎牌 m 枚，$\forall(i \in \mathbb{N} \wedge i < n)$：第 i 日發出的獎牌數為 i 加上剩下獎牌數的 $\frac{1}{7}$。已知第 n 日發出 n 枚獎牌，求 n、m？

過程：

令第 i 天末剩餘 a_i 枚獎牌。得遞迴關係式：

$$\begin{cases} a_0 = m \\ a_i = a_{i-1} - i - \dfrac{a_{i-1} - i}{7} = \dfrac{6}{7} \cdot (a_{i-1} - i) \quad \text{（當 } i > 0\text{）} \end{cases}$$

$$\text{令：}\begin{cases} a_i = a'_i + a''_i \\ a'_i = \dfrac{6}{7} \cdot a'_{i-1} \\ a''_i = ci + d \quad \text{（}c\text{、}d\text{ 為常數）} \end{cases}$$

將初始條件代入

$$a_0 = m$$
$$a_1 = \frac{6}{7} \cdot (m - 1)$$
$$a_2 = \frac{36m - 120}{49}$$

$$\text{解得：}\begin{cases} a'_0 = m - 36 \\ c = -6 \\ d = 36 \end{cases}$$

$$\text{故：} a_i = (m-36)\cdot(\frac{6}{7})^i - 6i + 36$$

將$a_{n-1} = n$代入：

$$n = (m-36)\cdot(\frac{6}{7})^{n-1} - 6(n-1) + 36$$

$$(n-6)\cdot 7^n = (\frac{m}{6} - 6)\cdot 6^n$$

$$m = 6((n-6)\cdot(\frac{6}{7})^n + 6)$$

$$\because \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \quad (n-6)\cdot(\frac{6}{7})^n > -6$$

$$(n-6)\cdot(\frac{6}{7})^n \in \mathbb{N}$$

$$6^{n-1} \mid (n-6)$$

$$\because \quad n > 0$$

$$\therefore \quad 6^{n-1} \in \mathbb{N}$$

$$\frac{d}{dn}(n-6) = 1$$

$$\frac{d}{dn}(6^{n-1}) = \ln(6)\cdot 6^{n-1}$$

當 $0 < n \le 6$，一一代入，得僅有 $n = 6$、$m = 36$ 為一解，其餘不合。

當 $n > 6$：

$$(n-6) > 6^{n-1}$$

$$\frac{d}{dn}(n-6) \ge \frac{d}{dn}(6^{n-1})$$

當 $n = 7$，$6^{n-1} = 36$，不合，故 $n \ge 6$ 均不合。

答：$n = 6$；$m = 36$

(四)　生成函數一

題目：

設 a_n 為方程式 $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = n$ 的非負整數解數，求其生成函數。

過程：

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots)$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

答：

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

(五)　生成函數二

題目：

設 a_n 為紅球、黃球、綠球、藍球共 n 個中，紅球有偶數個、黃球有奇數個、綠球至多 4 個且藍球至少 1 個的方法數，求其生成函數。

過程：

$$(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)(x+x^3+x^5+x^7+)(1+x+x^2+x^3+x^4)(x+x^2+x^3+x^4+\ldots)$$
$$=\frac{x^2(1-x^5)}{(1-x^2)^2(1-x)^2}$$

答：

$$\frac{x^2(1-x^5)}{(1-x^2)^2(1-x)^2}$$

(六)　生成函數解一般式一

題目：

已知 $<a_n>$ 之生成函數 $f(x)=\dfrac{2x^2}{1-2x)^2(1+x)}$，求 $<a_n>$ 之一般式。

過程：

$$\text{設 } f(x)=\frac{A(1-2x)+B}{(1-2x)^2}+\frac{C}{1+x}\quad（A、B、C \text{ 為常數}）$$
$$\text{將 } x=-1、x=\frac{1}{2}、x=0\text{分別代入：}$$
$$\Rightarrow A=-\frac{5}{9}$$
$$B=\frac{1}{3}$$
$$C=\frac{2}{9}$$
$$f(x)=\frac{-\frac{5}{9}}{1-2x}+\frac{\frac{1}{3}}{(1-2x)^2}+\frac{\frac{2}{9}}{1+x}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{9}\cdot 2^k+\frac{1}{3}(k+1)2^k+\frac{2}{9}(-1)^k\right)x^k$$
$$\Rightarrow a_n=\left(\frac{n}{3}-\frac{2}{9}\right)2^n+\frac{2}{9}(-1)^n$$

答：

$$a_n=\left(\frac{n}{3}-\frac{2}{9}\right)2^n+\frac{2}{9}(-1)^n$$

(七)　指數生成函數一

題目：

今有三個 a、二個 b、一個 c，任選 3、2、1 個排列之方法數各為若干？

過程：

$$\text{指數生成函數} f^{(e)}(x) = (1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!})(1+\frac{x}{1!})$$
$$= 1 + 3\cdot\frac{x}{1!} + 8\cdot\frac{x^2}{2!} + 19\cdot\frac{x^3}{3!}$$

答：19, 8, 3

(八)　指數生成函數二

題目：
設 $a_n = \left|\left\{k \,\middle|\, k \text{ 為 } n \text{ 位正整數且滿足每位皆為奇數且 } 3\text{、}5 \text{ 皆出現偶數次}\right\}\right|$，求其一般式。
過程：

$$\begin{aligned}
\text{指數生成函數} f^{(e)}(x) &= \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)^2 \cdot \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)^3 \\
&= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 \cdot e^{3x} \\
&= \frac{e^{5x}+2e^{3x}+e^x}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 5^n \cdot \frac{x^n}{n!} + 2\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n+2\cdot 3^n+1}{4} \cdot \frac{x^n}{n!} \\
\therefore\quad a_n &= \frac{5^n+2\cdot 3^n+1}{4}
\end{aligned}$$

答：

$$\frac{5^n+2\cdot 3^n+1}{4}$$