

拉格朗日乘數

沈威宇

2025 年 1 月 7 日

目錄

第一節 拉格朗日乘數 (Lagrange multiplier)	1
一、 多變數形式	1
二、 單變數形式	2

第一節 拉格朗日乘數 (Lagrange multiplier)

拉格朗日乘數法是一種在有約束條件下尋找函數極值的方法。拉格朗日乘數法所得的解會包含原問題的所有極點，但並不保證每個拉格朗日乘數法所得的臨界點都是原問題的臨界點。

一、多變數形式

令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是自變數向量， $\mathbf{0}$ 是零向量。今有 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^c$ 。在約束條件 $g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 下尋找 $f(\mathbf{x})$ 的極點。

首先，構造拉格朗日函數 $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)$ ：

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda \cdot g(\mathbf{x})$$

其中， $\lambda \in \mathbb{R}^c$ 是拉格朗日乘數向量。

對 \mathcal{L} 求梯度，並將其設為零：

$$\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0}$$

解這個方程組來找到 \mathbf{x} 和 λ 。

Statement: 拉格朗日乘數法所得的 \mathbf{x} 的解，會包含原問題的所有極點。

Proof.

考慮原問題中的一個極點 \mathbf{x}^* 。由於它是約束條件下的極點，它必須滿足約束條件：

$$g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

在 \mathbf{x}^* 附近的任何可行點 \mathbf{x} 都必須滿足約束條件。我們可以將 \mathbf{x} 表示為：

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \delta \mathbf{x}$$

其中 $\delta \mathbf{x}$ 是一個微小的變化，垂直於 $g(\mathbf{x})$ 定義的流形，且屬於 $\nabla g(\mathbf{x}^*)$ 的零空間，即滿足：

$$g(\mathbf{x}^* + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

將 f 在 \mathbf{x}^* 求泰勒展開一階近似：

$$f(\mathbf{x}^* + \delta \mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*) \cdot \delta \mathbf{x} + O(\|\delta \mathbf{x}\|^2)$$

將 g 在 \mathbf{x}^* 求泰勒展開一階近似：

$$g(\mathbf{x}^* + \delta \mathbf{x}) \approx g(\mathbf{x}^*) + \nabla g(\mathbf{x}^*) \cdot \delta \mathbf{x} + O(\|\delta \mathbf{x}\|^2)$$

由於 \mathbf{x}^* 是極點，對於任何可行的 $\delta \mathbf{x}$ ，我們必須有：

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) \cdot \delta \mathbf{x} = 0$$

由於 $g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ ，我們得到：

$$\nabla g(\mathbf{x}^*) \cdot \delta \mathbf{x} = O(\|\delta \mathbf{x}\|^2)$$

因為 $\delta \mathbf{x}$ 是 $\nabla g(\mathbf{x}^*)$ 零空間中的任意微分變化向量，所以 $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ 必須可以表示為 $\nabla g(\mathbf{x}^*)$ 的線性組合。這意味著存在一個向 λ 使得：

$$\nabla \mathcal{L} = \nabla(f(\mathbf{x}) - \lambda \cdot g(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$$

□

二、 單變數形式

令 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 。在約束條件 $g(x) = 0$ 下尋找 $f(x)$ 的極點。
首先，構造拉格朗日函數 $\mathcal{L}(x, \lambda)$ ：

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda \cdot g(x)$$

其中， $\lambda \in \mathbb{R}$ 是拉格朗日乘數。

對 \mathcal{L} 求導數，並將其設為零：

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx} = 0$$

解這個方程組來找到 x 和 λ 。

Statement: 拉格朗日乘數法所得的 x 的解，會包含原問題的所有極點。