組合數學

沈威宇

2025 年 6 月 29 日

目錄

第一節　組合數學（Combinatorics）

一、　計數原理（Counting principle）/基本計數原理（Fundamental principle of counting）

- **窮舉法（Proof by exhaustion）**：將所有可能一一列舉出而計算數目的方法。
- **樹狀圖（Tree structure）**：畫出樹狀圖列舉而計算數目的方法。
- **乘法原理（Rule of product or multiplication principle）**：若有 a 種方法做事 A，b 種方法做事 B，則合共有 $a \cdot b$ 種方法做事 $A \wedge B$。
- **加法原理（Rule of sum or addition principle）**：若有 a 種方法做事 A，b 種方法做事 B，則合共有 $a + b$ 種方法做事 $A \vee B$。

二、　冪集計數原理（Counting principle for power sets）

$$n(2^A) = 2^{n(A)}$$

三、　排容原理/取捨原理（Principle of inclusion-exclusion or inclusion–exclusion principle, PIE）

Statement:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\varnothing \neq J \subseteq \{a | a \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq a \leq n\}} \left((-1)^{|J|-1} \cdot \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|\right)$$

以元素證明：

Proof.

$$\begin{aligned}
&\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\varnothing \neq J \subseteq \{a | a \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq a \leq n\}} \left((-1)^{|J|-1} \cdot \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|\right) \\
&\equiv 1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \cdot \sum_{I \subseteq \{a | a \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq a \leq n\} \wedge |I| = k} 1_{A_I}\right) \\
&\equiv \forall \left(x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i, m = \sum_{i : x \in A_i} 1\right) : 1 = \sum_{k=1}^{m} \left((-1)^{k-1} \sum_{I \subset \{a | a \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq a \leq m\} \wedge |I| = k} 1\right) \\
&\equiv \forall \left(x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i, m = \sum_{i : x \in A_i} 1\right) : \binom{m}{0} = \sum_{k=1}^{m} \left((-1)^{k-1} \binom{m}{k}\right) \\
&\equiv \forall \left(x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i, m = \sum_{i : x \in A_i} 1\right) : (1 - 1)^m = 0
\end{aligned}$$

□

以數學歸納法證明：

Proof.

當 $n = 2, |A_1 \bigcup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2)$，命題成立；

假設當 $n = k \geq 2, k \in \mathbb{N}$，命題成立，

則當 $n = k + 1,$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right|$$

$$= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right|$$

$$= \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{a | a \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq a \leq k+1\}} \left((-1)^{|J|-1} \cdot \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|\right)$$

，命題亦成立。

由數學歸納法，得證。

□

四、 階乘（Factorial）與伽瑪函數（Gamma function）

(一) 階乘（Factorial）

$$n! = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} i, & \text{if } n \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{if } n = 0. \end{cases}$$

(二) 伽瑪函數（Gamma function）

階乘函數在正實部複數域上的擴展。

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t, \quad \Re(z) > 0$$

其中 $\Re(z)$ 指 z 之實部。
特別地，對於正實數 z：

$$\Gamma(z) = (z-1)!$$

五、 排列（Permutation）

(一) 盡相異物排列

從 n 相異物中取 m 個排成一直列（$0 \leq m \leq n$），正逆序視為二，其排列總數 $P_m^n = \dfrac{n!}{(n-m)!}$。

(二) 不盡相異物排列

設有 n 物，共有 k 種，第 i 種有 m_i 個。全取排成一直列，正逆序視為二，其排列總數為 $\dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{n} m_i!}$。

(三) 盡相異物重複排列

從 n 類相異物中，任取 m 個排成一直列，正逆序視為二，其中每類物品的個數均不小於 m 且可重複選取，其排列總數為 n^m。

六、 錯排（Derangement）

n 相異物全取作直線排列，其中 m 物（$m \leq n$）依次被限制不能排列於相異單一指定位置之排列，其方法數稱 D_m^n；當 $m = n$，錯排方法數稱 D_n。

(一) 全錯排

遞迴式：

$$\begin{cases} D_0 &= 1 \\ D_1 &= 0 \\ D_n &= (n-1) \cdot (D_{n-1} + D_{n-2}) \quad \text{（當 } n > 2\text{）} \end{cases}$$

一般式：

$$\begin{aligned} D_n &= n! \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (C_i^n \cdot (n-i)! \cdot (-1)^i \end{aligned}$$

錯排機率：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e}$$

(二) 非全錯排

$$D_m^n = \sum_{i=0}^{m} \left((-1)^i \cdot C_i^m \cdot (n-i)!\right)$$

七、 環狀排列（Cyclic permutation）

環狀排列：n 物全取排列成環狀，不同方法之判定僅考慮相對位置，不考慮絕對位置，惟翻轉（順時針 $\rightleftharpoons$ 逆時針）視為二種。

(一) 盡相異物環狀排列

$$\frac{n!}{m \cdot (n-m)!}$$

(二) 不盡相異物環狀排列

n 不盡相異物，全取作環狀排列，求其方法數。

- **法一：**
  子循環：一個長度 n 的給定直線排列，若其前 $\frac{n}{m}$ 物重複 m 次等同於原排列，且不存在 > 1 的 k 使原排列的前 $\frac{n}{m \cdot k}$ 物重複 k 次等同於原排列的前 $\frac{n}{m}$ 物，則稱原排列的前 $\frac{n}{m}$ 物為一個長度

$\frac{n}{m}$ 的子循環，稱原排列之子循環長度為 $\frac{n}{m}$、子循環數目為 m。

令該 n 不盡相異物的所有可能直線排列中，有 d_i 個之子循環長度為 ℓ_i，且 $\sum_{i=1}^{m} d_i =$ 該 n 不盡相異物直線排列方法數，則：

$$\text{所求} = \sum_{i=1}^{m} \frac{d_i}{\ell_i}$$

- **法二：**
令該 n 不盡相異物可分為 k 相異類，第 i 類（$1 \le i \le k$）有 m_i 件相同物。最大公因數 $\gcd(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k) = g$。令所求為 R。
  - 最大公因數 g 為 1：
$$R = \frac{(n-1)!}{\prod_{i=1}^{k}(m_i!)}$$
  - 最大公因數 g 為一質數 p：
$$R = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}(m_i!)} - \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{m_i}{p}!\right)} \right) + \frac{\left(\frac{n}{p} - 1\right)!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{m_i}{p}!\right)}$$
  - 最大公因數 g 為任一正整數：
令 g之所有相異質因數由小到大依序為$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_q$
$$R = \sum_{j=0}^{q} \left((-1)^j \cdot \sum_{|Y|=j} \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{\prod_{y \in Y} y}\right)!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{m_i}{\prod_{y \in Y} y}!\right)} \right)$$
，其中$Y \subseteq \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_q\}$
，定義 $\prod_{y \in \varnothing} y = 1$

八、 組合數（Combinatorics）

組合數記作 C_m^n 或 $\binom{n}{m}$。

(一) 組合數非負整數域定義

從 n 相異物中每次取 m 個為一組（$0 \le m \le n, m, n \in \mathbb{N}_0$）之組合數，即：

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \quad 0 \le m \le n, m, n \in \mathbb{N}_0.$$

(二) 組合數非負實數域定義

$$\binom{n}{m} = \frac{\prod_{i=0}^{m-1}(n-i)}{m!}, \quad 0 \le m \le n, m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{R}_{\ge 0}.$$

(三) 組合數實數域定義

$$\binom{n}{m}=\begin{cases} \dfrac{\prod_{i=0}^{m-1}(n-i)}{m!}, & 0\le m\le n, m\in\mathbb{N}_0, n\in\mathbb{R}_{\ge 0}, \\ (-1)^m\cdot\dbinom{-n+m-1}{m}, & 0\le m\le -n+m-1, m\in\mathbb{N}_0, n\in\mathbb{R}_{<0}. \end{cases}$$

(四) 組合數大於負一複數域定義

$$\binom{n}{m}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)},\quad 0\le\Re(m)\le\Re(n), m,n\in\mathbb{C}, \Re(n),\Re(m),\Re(n-m)\in\mathbb{R}_{>-1}.$$

(五) 組合數複數域定義

$$\binom{n}{m}=\begin{cases} \dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)}, & 0\le\Re(m)\le\Re(n), m,n\in\mathbb{C}, \Re(n),\Re(m),\Re(n-m)\in\mathbb{R}_{>-1}, \\ (-1)^m\cdot\dbinom{-n+m-1}{m}, & 0\le\Re(m)\le\Re(-n+m-1), m,n\in\mathbb{C}, \Re(-n+m),\Re(m+1),\Re(-n)\in\mathbb{R}_{>0}. \end{cases}$$

(六) 二項式定理（Binomial theorem）

$$\begin{aligned} &(a+b)^n,\quad a,b,n\in\mathbb{C}, a+b\ne 0 \\ =&e^{n\left(\ln(|a+b|)+i\cdot\arg(a+b)\right)} \\ =&\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\cdot a^m\cdot b^{n-m}, & \Re(n)\in\mathbb{N}_0, \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\binom{n}{m}\cdot a^m\cdot b^{n-m}, & \Re(n)\notin\mathbb{N}_0, |a|<|b|\vee|a||b|=0. \end{cases} \end{aligned}$$

其中

$$\arg(x+yi)=\operatorname{atan2}(y,x)\in(-\pi,\pi],\quad x,y\in\mathbb{R}$$

為 $z=x+yi$ 的輻角主值；$|a|=\sqrt{\Re(a)^2+\Im(a)^2}$。

(七) 多項式定理（Multinomial theorem）

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^n,\quad x_i,n\in\mathbb{C}, \sum_{i=1}^{m}x_i\ne 0 \\ =&e^{n\left(\ln\left(\left|\sum_{i=1}^{m}x_i\right|\right)+i\cdot\arg\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)\right)} \\ =&\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{m}k_i=n\\ k_i\in\mathbb{N}_0}}\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(k_i!)}\prod_{i=1}^{n}x_i^{k_i}, & \Re(n)\in\mathbb{N}_0, \\ \displaystyle\sum_{k_i\in\mathbb{N}_0}\frac{\Gamma(n+1)}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(k_i+1)}\prod_{i=1}^{n}x_i^{k_i}, & \Re(n)\notin\mathbb{N}_0,\quad \text{此表達式收斂.} \end{cases} \end{aligned}$$

(八) 范德蒙恆等式（Vandermonde identity）

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

Proof.
Consider a lattice path from $(0,0)$ to (n,n) in a grid where each step moves either right $(1,0)$ or up $(0,1)$.
Since we must choose n steps to move right out of the total $2n$ steps, the total number of such paths is given by:

$$\binom{2n}{n}.$$

Now, let’s count the same paths differently. Choose an intermediate point $(k, n-k)$ at step n. The number of ways to reach this point from $(0,0)$ using k right steps and $n-k$ up steps is $\binom{n}{k}$. From $(k, n-k)$ to (n,n), we need $n-k$ right steps and k up steps, which can be done in $\binom{n}{k}$ ways. Summing over all possible k, we obtain:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

□

(九) 重複組合

由 n 類相異物中，任取 m 個為一組之方法數，其中每類物品的個數均不小於 m 且可重複選取。記作 H_m^n。

$$\begin{aligned} H_m^n &= C_m^{n+m-1} \\ &= C_{n-1}^{n+m-1} \end{aligned}$$

(十) 巴斯卡公式（Pascal’s formula）

$$C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_m^{n-1}$$

(十一)　組合恆等式

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^n = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_k^n = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot C_k^n = 3^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_k^n = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (C_k^n)^2 = C_n^{2n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot C_k^n = n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=3}^{n} C_2^k = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\left(\prod_{i=0}^{x}(k-i)\right) \cdot C_k^n = \left(\prod_{i=0}^{x}(n-i)\right) \cdot C_{k-x-1}^{n-k-1} \quad x < k, x \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\left(\left(\prod_{i=0}^{x}(k-i)\right) \cdot C_k^n\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\left(\prod_{i=0}^{x}(n-i)\right) \cdot C_{k-x-1}^{n-k-1}\right) \\ &= \frac{n!}{(n-x-1)!} \cdot 2^{n-x-1} \\ &\quad x < n, x \in \mathbb{N}, \text{定義 } \forall k < 0：C_k^n = 0 \end{aligned}$$

(十二)　巴斯卡三角形（Pascal's triangle）/楊輝三角形

令最上面一列為第 0 列，向下每列遞增 1；每一列最左之數為第 0 個，向右每個遞增 1。巴斯卡三角形之第 n 列第 m 個數定義為 C_m^n。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & \vdots & & & & \vdots & \end{array}$$

九、　卡特蘭數（Catalan number）

(一)　卡特蘭數（Catalan number）

所有在 $n \times n$ 格點中不越過對角線的單調路徑的個數，一個單調路徑從格點左下角出發，在格點右上角結束，每一步均為向上或向右，記作 C_n。

遞迴式：

$$\begin{cases} C_0 &= 1 \\ C_n &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \cdot C_{n-k} \quad (\text{當 } n > 0) \end{cases}$$

Proof. 令對角線為 $y = x$，第一次到達對角線上時的位置為 (k, k)，則第一次到達對角線前的單調路徑數為 C_k，第一次到達對角線後的單調路徑數為 C_{n-k}，故對 $n > 0$ 成立。$C_0 = C_1 = 0$，亦成立。 □

一般式：

$$\begin{aligned} C_n &= C_n^{2n} - C_{n-1}^{2n} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot C_n^{2n} \end{aligned}$$

Proof. 自 $(0,0)$ 至 (n,n) 的單調路徑數為 C_n^{2n}。考慮這些路徑中不符合卡特蘭數定義者，其第一次跨越對角線 $y = x$ 的點必在 $y = x + 1$ 上，將接下來的路徑對 $y = x + 1$ 鏡射，則終點 (n,n) 變為 $(n-1, n+1)$。在此 $(n-1) \times (n+1)$ 格點中自 $(0,0)$ 至 $(n-1, n+1)$ 的單調路徑數為 C_{n-1}^{2n}。故 $C_n = C_n^{2n} - C_{n-1}^{2n} = \dfrac{1}{n+1} \cdot C_n^{2n}$。 □

(二) 非正方形格點的卡特蘭數

所有在 $n \times k$ 格點中不越過對角線的單調路徑的個數，一個單調路徑從格點左下角出發，在格點右上角結束，每一步均為向上或向右，記作 $C_{n,k}$。

一般式：

$$C_{n,k} = \begin{cases} C_k^{n+k} - C_{k-1}^{n+k} & (\text{當 } n \geq k) \\ C_n^{n+k} - C_{n-1}^{n+k} & (\text{當 } n \leq k) \end{cases}$$