

# 電磁學

沈威宇

2025 年 2 月 10 日

# 目錄

第一節 符號約定	1
一、 常數	1
二、 時間純量	1
三、 能量相關純量	1
四、 位置向量空間相關	1
(一) 向量	1
(二) 純量或區域	2
五、 力向量	2
六、 電磁場 (Electromagnetic field) 相關	2
(一) 與位置向量同維度的向量場	2
(二) 純量	2
七、 物的性質	2
(一) 實數	2
(二) 複數或二維向量	3
(三) 與位置向量同維度的向量	3
八、 波 (Wave)	4
(一) 向量	4
(二) 純量	4
九、 數學	5
第二節 電磁學 (Electromagnetism)	5
一、 馬克士威方程組 (Maxwell' s equations) /馬克士威-黑維塞方程組 (Maxwell-Heaviside equations)	5
二、 自由空間 (Free space) /真空 (Vacuum)	5
三、 電荷 (Charge)	5
(一) 電荷量子化 (Charge quantization) 與電荷定義	5
(二) 電荷守恆定律 (Law of conservation of charge, chage conservation law)	6
四、 疊加原理 (Principle of superposition)	6
五、 勞侖茲力 (Lorentz force) /電磁力 (Electromagnetic force)	6
(一) 勞侖茲力定律 (Lorentz force law)	6
(二) 勞侖茲力密度 (Lorentz force density)	6

六、 電通量 (Electric flux)	6
七、 磁通量 (Magnetic flux)	6
八、 電極化 (Polarization)	6
(一) 電偶極子 (Electric dipole)	6
(二) 電偶極矩 (Electric dipole moment)	6
(三) (電) 極化密度 (Polarization current density)	7
(四) 電位移 (場) (Electric displacement (field))	7
(五) 電磁化率 (Electric susceptibility)	7
(六) 相對電容率 (Relative permittivity)	7
(七) 電容率 (Permittivity)	7
九、 磁化 (Magnetization)	7
(一) 磁矩 (Magnetic moment) /磁偶極矩 (Magnetic dipole moment)	7
(二) 磁極 (Magnetic pole)	7
(三) 磁化強度 (Magnetization)	8
(四) 磁場強度 (Magnetic field strength or Magnetic field intensity) /H 場 (H-field)	8
(五) 磁化率 (Magnetic susceptibility)	8
(六) 相對磁導率 (Relative magnetic permeability)	8
(七) 磁導率 (Magnetic permeability)	8
十、 電荷密度 (Charge density)	8
(一) (體積) (總) 電荷密度 ((Volume) (total) charge density)	8
(二) (體積) 束縛電荷密度 ((Volume) bound charge density)	8
(三) (體積) 自由電荷密度 ((Volume) free charge density)	8
(四) 表面 (總) 電荷密度 (Surface (total) charge density)	9
(五) 表面束縛電荷密度 (Surface bound charge density)	9
(六) 表面自由電荷密度 (Surface free charge density)	9
十一、 電流 (Electric current)	9
十二、 電流密度 (Current density)	9
(一) (體積) (總) 電流密度 ((Volume) (total) current density)	9
(二) (體積) 極化電流密度 ((Volume) polarization current density)	9
(三) (體積) 磁化電流密度 ((Volume) magnetization current density)	9
(四) (體積) 束縛電流密度 ((Volume) bound current density)	9
(五) (體積) 自由電流密度 ((Volume) free current density)	10

十三、 庫侖定律 (Coulomb' s law) 與馬克士威第一方程 (Maxwell' s first equation)– 高斯定律 (Gauss' law) . . . . .	10
(一) 庫侖扭秤 (Torsion balance) . . . . .	10
(二) 庫侖定律靜電力形式 . . . . .	10
(三) 庫侖定律電場形式 . . . . .	10
(四) 高斯定律–微分形式 . . . . .	10
(五) 庫侖定律證明高斯定律 . . . . .	10
(六) 高斯定律證明庫侖定律 . . . . .	11
(七) 高斯定律–積分形式 . . . . .	12
十四、 磁偶極子的磁場 . . . . .	12
十五、 馬克士威第二方程 (Maxwell' s second equation) –高斯磁定律 (Gauss' s law for magnetism) /無磁單極 (Absence of free magnetic poles) . . . . .	12
(一) 高斯磁定律–微分形式 . . . . .	12
(二) 高斯磁定律–積分形式 . . . . .	12
十六、 馬克士威第三方程 (Maxwell' s third equation) –法拉第電磁感應定律 (Faraday' s law of electromagnetic induction) . . . . .	12
(一) 法拉第電磁感應定律–微分形式 . . . . .	12
(二) 法拉第電磁感應定律–積分形式 . . . . .	12
十七、 馬克士威第四方程(Maxwell' s fourth equation)-安培–馬克士威方程(Ampère– Maxwell equation) . . . . .	12
(一) 安培–馬克士威定律–微分形式 . . . . .	13
(二) 安培–馬克士威定律–積分形式 . . . . .	13
十八、 電位 (Electric potential) /電純量勢 (Electric scalar potential) /純量勢 (Scalar potential) 與磁向量勢 (Magnetic vector potential) /向量勢 (Vector potential) . . . . .	13
(一) 電純量勢與磁向量勢定義 . . . . .	13
(二) 規範固定 (Gauge fixing) /規範選擇 (Choosing a gauge) . . . . .	13
(三) 庫侖規範 (Coulomb gauge) /Transverse gauge . . . . .	14
(四) 勞侖茲規範 (Lorenz guage) . . . . .	14
(五) 等位/等勢 (Equipotential/Isopotential) . . . . .	14
(六) 電位能 (Electric potential energy) . . . . .	14
(七) 電壓 (Voltage) /電位差 (Electric potential difference) . . . . .	14
十九、 電動勢 (Electromotive force, emf, EMF) . . . . .	14

二十、 場線 (Field line)	14
(一) 定義	14
(二) 電場線 (Line of electric field) /電力線 (Line of electric force)	15
(三) 磁場線 (Line of magnetic field) /磁力線 (Line of magnet force)	15
第三節 電磁相關材料性質	15
一、 鐵電性 (Ferroelectricity)	15
二、 壓電性 (Piezoelectricity)	15
三、 撓曲電性 (Flexoelectricity)	15
四、 順磁性 (Paramagnetism)	15
五、 逆磁性 (Diamagnetism)	15
六、 鐵磁性 (Ferromagnetism) /強磁性	16
七、 反鐵磁性 (Antiferromagnetism) /反強磁性	16
八、 亞鐵磁性 (Ferrimagnetism)	16
九、 居禮溫度 (Curie temperature)	16
十、 奈爾溫度 (Néel temperature)	16
十一、 遲滯現象 (Hysteresis) /滯後現象	16
第四節 靜電學 (Electrostatics)	16
一、 靜電學	16
二、 靜電平衡 (Electrostatic equilibrium)	16
三、 靜電場 (Electrostatic force)	16
四、 靜電力 (Electrostatic force) /庫侖力 (Coulomb force)	17
五、 靜電感應 (Electrostatic induction)	17
(一) 感應起電 (Charging by induction)	17
六、 接觸起電 (Charging by contact)	17
七、 摩擦起電 (Charging by friction)	17
八、 電暈放電 (Corona discharge)	17
九、 靜電學電位能與電位	18
(一) 電位能	18
(二) 電位	18
(三) 單一靜電荷電位能與電位	18

十、 靜電平衡導體、靜電屏蔽 (Electrostatic shielding) 效應與法拉第籠 (Faraday cage)	18
(一) 接地 (Ground)	18
(二) 靜電平衡導體、靜電屏蔽效應與法拉第籠	18
(三) 靜電平衡導體圓球	20
十一、 尖端放電效應	21
十二、 絕緣體圓球靜電平衡	21
十三、 均勻電場	22
(一) 帶電之無限大平板	22
(二) 帶電粒子在均勻電場中的運動	22
十四、 電容器 (Capacitor) 與電容 ((Electric) capacitance)	22
(一) 平板電容器 (Parallel plate capacitor)	22
(二) 球形電容器 (Spherical capacitor)	23
第五節 靜磁學 (Magnetostatics)	23
一、 靜磁學	23
二、 電流磁效應	23
(一) 厄斯特 (Ørsted) 發現電流磁效應	23
(二) 安培 (Ampère) 右手定則 (Right-hand rule)	24
(三) 必歐-沙伐定律 (Biot-Savart law) —微分形式	24
(四) 必歐-沙伐定律 (Biot-Savart law) —積分形式	24
(五) 安培環路定律 (Ampère' s circuital law) /安培定律 (Ampère' s law) —微分形式	24
(六) 安培環路定律 (Ampère' s circuital law) /安培定律 (Ampère' s law) —積分形式	24
(七) 長直載流導線	24
(八) 圓形載流導線	24
(九) 載流螺線管 (Solenoid)	25
三、 勞侖茲力磁力項	25
(一) 右手開掌定則 (Right-hand rule)	25
(二) 磁場中的載流導線	26
(三) 兩平行載流導線	26
(四) 帶電質點速度選擇器	26
(五) 帶電質點迴旋運動	26

第六節 電路學 (Electric Circuit)	27
一、 電路 (Electrical circuit) / (電流) 迴路	27
二、 端電壓 (Terminal voltage)	27
三、 電阻 ((Electric) resistance)	27
(一) 電阻 ((Electric) resistance)	27
(二) 電阻率 (Resistivity) 與電導率 (Conductivity)	27
(三) 歐姆定律 (Ohm' s law) 與歐姆物質 (Ohmic substances)	27
(四) 內電阻 (Internal resistance)	27
四、 串聯與並聯 (Series connection and parallel connection)	28
(一) 串聯 (Series connection)	28
(二) 並聯 (Parallel connection)	28
五、 克希荷夫電路定律 (Kirchhoff' s Circuit Laws) /克希荷夫定則 (Kirchhoff' s Rules)	28
(一) 克希荷夫電流定律 (Kirchhoff' s current law) /克希荷夫第一定律 (Kirchhoff' s first law) /克希荷夫節點定則 (Kirchhoff' s junction rule)	28
(二) 克希荷夫電壓定律 (Kirchhoff' s voltage law) /克希荷夫第二定律 (Kirchhoff' s first law) /克希荷夫環路定則 (Kirchhoff' s loop rule)	28
六、 電感 ((Electric) inductance)	28
七、 電功率 (Electric power)	28
(一) 電功率 (Electric power)	28
(二) 電流熱效應、焦耳熱 (Joule heating) /歐姆熱 (Ohmic heating) /電阻熱 (Resistive heating or resistance heating) 與焦耳第一定律 (Joule' s first law) /焦耳定律 (Joule' s law) /焦耳-冷次定律 (Joule-Lenz law)	28
八、 (電) 阻抗 ((Electric) impedance)	29
(一) 容抗 ((Electric) capacitive reactance)	29
(二) 感抗 ((Electric) inductive reactance)	29
(三) 電抗 ((Electric) reactance)	29
(四) (電) 阻抗 ((Electric) impedance)	29
九、 直流電 (Direct current, DC) 與交流電 (Alternating current, AC)	29
(一) 電池提供的直流電	29
(二) 直流發電機提供的直流電	29
(三) 交流發電機提供的直流電	29
十、 電路圖 (Circuit diagram)	29

十一、 Common Circuit Symbols . . . . .	30
(一) Basic Components . . . . .	30
(二) Power Sources. . . . .	30
(三) Switches . . . . .	30
(四) Diodes . . . . .	30
(五) Transistors . . . . .	30
(六) Operational Amplifiers . . . . .	30
(七) Measuring Instruments . . . . .	30
(八) Connectors . . . . .	30
(九) Transformers . . . . .	31
(十) Miscellaneous Components . . . . .	31
第七節 電磁感應 (Electromagnetic Induction) . . . . .	31
一、 迴路的磁通量 . . . . .	31
二、 法拉第 (Faraday) 發現電磁感應. . . . .	31
三、 冷次定律 (Lenz' s law) . . . . .	31
四、 感應電動勢 (Induced electromotive force) 與法拉第電磁感應定律 (Faraday's law of electromagnetic induction) . . . . .	31
五、 感應電流 (Induced current) . . . . .	31
六、 動生電動勢 (Motional electromotive force) . . . . .	32
(一) 動生電動勢 (Motional electromotive force) . . . . .	32
(二) 弗萊明右手法則 (Fleming' s right-hand rule) . . . . .	32
七、 感應電場 (Induced electric field) . . . . .	32
第八節 電磁波 (Electromagnetic waves) . . . . .	32
一、 歷史 . . . . .	32
二、 非齊次電磁波方程 (Inhomogeneous electromagnetic wave equation) . . . . .	33
三、 齊次電磁波方程 (Homogeneous electromagnetic wave equation) . . . . .	33
四、 光速 (Speed of light) . . . . .	33
五、 平面波 (Plane wave) 解 . . . . .	34
六、 波參數關係 . . . . .	34
七、 電磁波的能量密度 . . . . .	34
八、 拉莫爾公式 (Larmor formula) . . . . .	34
九、 電磁波頻譜 (Electromagnetic spectrum) . . . . .	35



十、 偏振 (Polarization)	35
(一) s 偏振(s polarization)/垂直(German: senkrecht)偏振與 p 偏振(p polarization) /平行 (parallel) 偏振	35
(二) 偏振片/偏振器 (Polarizer)	36
第九節 電磁學的應用	36
一、 靜電學的應用	36
(一) 驗電器 (Electroscope)	36
(二) 避雷針/引雷針 (Lightning rod)	36
(三) 靜電除塵器 (Electrostatic precipitator, ESP)	36
(四) 凡德格拉夫起電機/范氏起電機 (Van de Graaff generator)	36
(五) 影印機	36
(六) 電容式觸控螢幕 (Capacitive touchscreen)	37
二、 靜磁學的應用	37
(一) 電磁鐵 (Electromagnet)	37
(二) 電動機/馬達 ((Electric) motor)	37
(三) 磁軌砲 (Railgun)	38
(四) 基布爾秤 (Kibble balance) /瓦特天平 (Watt balance) /電流天平 (Current balance)	38
(五) 質譜儀 (Mass spectrometry, MS)	38
三、 電路學的應用	39
(一) 接地線	39
(二) 輸電 (Electric power transmission)	39
(三) 電阻式觸控螢幕 (Resistive touchscreen)	39
四、 電磁感應的應用	39
(一) 電磁感應拋射實驗	39
(二) 法拉第弔詭 (Faraday paradox)	39
(三) 法拉第圓盤單極發電機 (Faraday disk homopolar generator)	39
(四) 發電機 (Electric generator)	39
(五) 變壓器 (Transformer)	40
(六) 電磁爐 (Induction cooker)	40
(七) 電吉他	41

五、 電磁波的應用 . . . . .	41
(一) 各波段電磁波的應用 . . . . .	41
(二) 太陽眼鏡 . . . . .	41
(三) 立體電影 . . . . .	41
(四) 無線射頻辨識系統 (Radio frequency identification, RFID) . . . . .	41
六、 非侵入式的神經影像技術 . . . . .	42
(一) 腦波 (Brain wave) . . . . .	42
(二) 腦電圖/腦電波儀 (Electroencephalography, EEG) . . . . .	42
(三) 腦磁圖/腦磁波儀 (Magnetoencephalography, MEG) . . . . .	42
(四) 磁振造影 (Magnetic Resonance Imaging, MRI) . . . . .	43

## 第一節 符號約定

此處使用 SI 制。

### 一、 常數

- 真空光速 (Speed of light in vacuum) :  $c = 299792458 \text{ m s}^{-1}$  , 不確定度為零, 用於定義 m
- 基本電荷 (Elementary charge) :  $e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$  , 不確定度為零, 用於定義 A
- 普朗克常數 (Planck constant) :  $h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s}$  , 不確定度為零, 用於定義 kg
- 精確結構常數 (Fine-structure constant) :  $0.0072973525643(11)$  , 有  $1.6 \times 10^{-10}$  的相對不確定度
- 真空磁導率 (Vacuum magnetic permeability) / 磁常數 (Magnetic constant) :  $\mu_0 = \frac{2\alpha h}{e^2 c} \approx 1.25663706212(19) \text{ H m}^{-1} \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg m s}^{-2} \text{ A}^{-2}$  , 有  $1.6 \times 10^{-10}$  的相對不確定度
- 真空電容率 (Vacuum permittivity) / 電常數 (Electric constant) :  $\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} \approx 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1} = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \text{ s}^4 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}$  , 有  $1.6 \times 10^{-10}$  的相對不確定度
- 靜電力常數/庫侖常數 (Coulomb's constant) :  $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \approx 8.9875517873681764 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$

### 二、 時間純量

- 時間 :  $t \text{ (s)}$

### 三、 能量相關純量

- 能量 :  $E \text{ (J = m}^2 \text{ kg s}^{-2})$  , 1 度 = 1 瓩 小時 =  $1 \text{ kW h} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$
- 功 (Work) :  $W \text{ (J)}$
- 功率 (Power) :  $P \text{ (J/s)}$

### 四、 位置向量空間相關

#### (一) 向量

- 位置向量 :  $\mathbf{r} \text{ (m)}$
- 微分長度元 :  $d\mathbf{l} \text{ (m)}$
- 微分面積元 :  $d\mathbf{S} \text{ (m}^2\text{)}$
- 微分體積元 :  $d\mathbf{V} \text{ (m}^3\text{)}$

## (二) 純量或區域

- 長度/曲線： $\ell$  (m)
- 面積/曲面： $S$  (m<sup>2</sup>)
- 體積/三維流形： $V$  (m<sup>3</sup>)

## 五、 力向量

- 力 (Force)： $\mathbf{F}$  (N = kg m s<sup>-2</sup>)
- 力密度 (Force density)： $\mathbf{f}$  (N m<sup>-3</sup> = kg m<sup>-2</sup> s<sup>-2</sup>)
- 力矩 (Torque)： $\tau$  (N m = kg m<sup>2</sup> s<sup>-2</sup>)

## 六、 電磁場 (Electromagnetic field) 相關

### (一) 與位置向量同維度的向量場

- 電場 (Electric field) /E 場 (E-field)： $\mathbf{E}$  (V m<sup>-1</sup> = N C<sup>-1</sup> = kg m s<sup>-3</sup> A<sup>-1</sup>)
- 磁通量密度 (場) (Magnetic flux density (field)) /B 場 (B-field) /磁場 (Magnetic field)： $\mathbf{B}$  (特斯拉 = Tesla = T = N A<sup>-1</sup> m<sup>-1</sup> = kg s<sup>-2</sup> A<sup>-1</sup>)，1 T = 10<sup>4</sup> G = 10<sup>4</sup> 高斯 = 10<sup>4</sup> Gauss
- 磁向量勢 (Magnetic vector potential) /向量勢 (Vector potential)： $\mathbf{A}$  (A m)
- 電位移 (場) (Electric displacement (field))： $\mathbf{D}$  (C m<sup>-2</sup> = A s m<sup>-2</sup>)
- 磁場強度 (Magnetic field strength or Magnetic field intensity) /H 場 (H-field)： $\mathbf{H}$  (A m<sup>-1</sup>)

### (二) 純量

- 電位能 (Electric potential energy)： $U_e$  (J = N m = kg m<sup>2</sup> s<sup>-2</sup>)
- 電位 (Electric potential) /電純量勢 (Electric scalar potential) /純量勢 (Scalar potential)： $\phi$  (V = J/C = N m C<sup>-1</sup> = kg m<sup>2</sup> s<sup>-3</sup> A<sup>-1</sup>)
- 電通量 (Electric flux)： $\Phi_E$  (V m = kg m<sup>3</sup> s<sup>-3</sup> A<sup>-1</sup>)
- 磁通量 (Magnetic flux)： $\Phi_B$  (韋伯 = Weber = Wb = T m<sup>2</sup> = kg m<sup>2</sup> s<sup>-2</sup> A<sup>-1</sup>)

## 七、 物的性質

### (一) 實數

- 電荷 (Charge)： $q$  (庫倫 = Coulomb = C)
- 電磁化率 (Electric susceptibility)： $\chi_e$ ，對於非線性材料不只一個
- 電容率 (Permittivity)： $\epsilon$  (F m<sup>-1</sup> = A<sup>2</sup> s<sup>4</sup> kg<sup>-1</sup> m<sup>-3</sup>)
- 相對電容率 (Relative permittivity)： $\epsilon_r$

- 磁化率 (Magnetic susceptibility) :  $\chi_v$
- 相對磁導率 (Relative permeability) :  $\mu_r$
- 磁導率 (Magnetic permeability) :  $\mu$  ( $\text{H m}^{-1} = \text{kg m s}^{-2} \text{ A}^{-2}$ ) , 有時為二階張量
- 電阻率 (Resistivity) :  $\rho$  ( $\Omega\text{m} = \text{kg}^1 \text{ m}^3 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-2}$ )
- 電導率 (Conductivity) :  $\kappa$  ( $\text{S m}^{-1} = \text{siemen m}^{-1} = \text{西門子 m}^{-1} = \text{kg}^{-1} \text{ m}^{-3} \text{ s}^3 \text{ A}^2$ )
- (體積) (總) 電荷密度 ((Volume) (total) charge density) :  $\rho$  ( $\text{C m}^{-3} = \text{A s m}^{-3}$ )
- (體積) 束縛電荷密度 ((Volume) bound charge density) :  $\rho_b$  ( $\text{C m}^{-3} = \text{A s m}^{-3}$ )
- (體積) 自由電荷密度 ((Volume) free charge density) :  $\rho_f$  ( $\text{C m}^{-3} = \text{A s m}^{-3}$ )
- 表面 (總) 電荷密度 (Surface (total) charge density) :  $\rho$  ( $\text{C m}^{-2} = \text{A s m}^{-2}$ )
- 表面束縛電荷密度 (Surface bound charge density) :  $\rho_b$  ( $\text{C m}^{-2} = \text{A s m}^{-2}$ )
- 表面自由電荷密度 (Surface free charge density) :  $\rho_f$  ( $\text{C m}^{-2} = \text{A s m}^{-2}$ )
- 電流強度 (Current intensity) :  $I$  (A)
- 電壓 (Voltage) / 電位差 (Electric potential difference) :  $\Delta V$  (V)
- 電容 ((Electric) capacitance) :  $C$  (法拉 = Farad = F =  $\text{C V}^{-1} = \text{kg}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ s}^4 \text{ A}^2$ )
- 電感 ((Electric) inductance) :  $L$  (亨利 = Henry = H =  $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ A}^{-2}$ )
- 電阻 ((Electric) resistance) :  $R$  ( $\Omega = \text{V/A}$ )
- 容抗 ((Electric) capacitive reactance) :  $X_C$  ( $\Omega = \text{V/A}$ )
- 感抗 ((Electric) inductive reactance) :  $X_L$  ( $\Omega = \text{V/A}$ )
- 電抗 ((Electric) reactance) :  $X$  ( $\Omega = \text{V/A}$ )

## (二) 複數或二維向量

- (電) 阻抗 ((Electric) impedance) :  $Z$  ( $\Omega = \text{V/A}$ )

## (三) 與位置向量同維度的向量

- 速度 :  $\mathbf{v}$  (m/s)
- 加速度 :  $\mathbf{a}$  ( $\text{m/s}^2$ )
- 電動勢 (Electromotive force, emf, EMF) :  $\mathcal{E}$  (V)
- 動量 :  $\mathbf{p}$  (kg m/s)
- (電) 極化密度 (Polarization density) :  $\mathbf{P}$  ( $\text{C m}^{-2} = \text{A s m}^{-2}$ )
- 磁矩 (Magnetic moment) / 磁偶極矩 (Magnetic dipole moment) :  $\mathbf{m}$  ( $\text{A m}^2$ )

- 電偶極矩 (Electric dipole moment) :  $\mathbf{e}$  ( $\text{C m} = \text{A s m}$ )
- 磁化強度 (Magnetization) /M 場 (M-field) :  $\mathbf{M}$  ( $\text{A m}^{-1}$ )
- 電流 ((Electric) current) :  $\mathbf{I}$  ( $\text{A} = \text{C/s}$ )
- (體積) (總) 電流密度 ((Volume) (total) current density) :  $\mathbf{J}$  ( $\text{A m}^{-2}$ )
- (體積) 極化電流密度 ((Volume) polarization current density) :  $\mathbf{J}_p$  ( $\text{A m}^{-2}$ )
- (體積) 磁化電流密度 ((Volume) magnetization current density) :  $\mathbf{J}_m$  ( $\text{A m}^{-2}$ )
- (體積) 束縛電流密度 ((Volume) bound current density) :  $\mathbf{J}_b$  ( $\text{A m}^{-2}$ )
- (體積) 自由電流密度 ((Volume) free current density) :  $\mathbf{J}_f$  ( $\text{A m}^{-2}$ )

## 八、 波 (Wave)

### (一) 向量

- 角波向量 (Angular wave vector) :  $\mathbf{k}$  ( $\text{m}^{-1}$ )
- 相速度方向單位向量 :  $\hat{\mathbf{v}}$
- 相速度 (Phase velocity) :  $\mathbf{v}$  ( $\text{m/s}$ )
- 群速度 (Group velocity) :  $\mathbf{v}_g$  ( $\text{m/s}$ )

### (二) 純量

- 角頻率 (Angular frequency) 量值 :  $\omega$  ( $\text{s}^{-1}$ )
- 頻率 :  $\nu$  ( $\text{s}^{-1}$ )
- 波長 (Wavelength) :  $\lambda$  ( $\text{m}$ )
- 波數 (Wave number) :  $k$  ( $\text{m}^{-1}$ )
- 折射率 :  $n$
- 能量密度 :  $u$  ( $\text{J/m}^3$ )
- 相位角 (Phase angle) :  $\phi$
- 相速率 (Phase speed) :  $v$

## 九、 數學

- 二維中封閉曲線積分參數化方向依格林定理 (Green' s Theorem)。
- 三維中封閉曲線積分參數化方向依斯托克定理 (Stokes' Theorem)。
- 三維中封閉曲面積分參數化方向依高斯定理 (Gauss' s Theorem)。
- 對於向量  $\mathbf{v}$ ， $|\mathbf{v}|$  表示其歐幾里得距離。
- 單位法向量： $\hat{n}$
- 零向量以  $0$  表示。
- 任意純量  $A$  與非零向量  $\mathbf{B}$ ，向量  $\mathbf{C} = \frac{A}{|\mathbf{B}|} \mathbf{B}$  表示  $\mathbf{C}$  使得  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = A$  且  $|A| = |\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{C}|$ ，即  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = A$  且  $\mathbf{B}/\mathbf{C}$ 。
- 任意向量  $\mathbf{a}$ ， $\hat{\mathbf{a}}$  或  $UV(\mathbf{a})$  指與  $\mathbf{a}$  同向的單位向量。
- $\text{closure}(A)$  指  $A$  的閉包。
- 拓撲空間  $(X, \tau)$  中，集合  $C \subseteq X$  被稱為不連通的，如果

$$\exists A, B \in \tau \text{ s.t. } A \cap B = \emptyset \wedge C \cap A \neq \emptyset \wedge C \cap B \neq \emptyset \wedge C \subseteq A \cup B.$$

否則它被稱為連通的。

## 第二節 電磁學 (Electromagnetism)

### 一、 馬克士威方程組 (Maxwell' s equations) / 馬克士威-黑維塞方程組 (Maxwell-Heaviside equations)

是一組偏微分方程，由馬克士威於 1862 年提出，提出時包含勞倫茲力定律，現在則一般寫作四個方程，與勞倫茲力定律一起構成了古典電磁學的基礎。

### 二、 自由空間 (Free space) / 真空 (Vacuum)

電磁學中的自由空間或真空指沒有具有靜止質量的物質、光的相速度為真空光速、磁常數為真空磁常數的空間。

### 三、 電荷 (Charge)

#### (一) 電荷量子化 (Charge quantization) 與電荷定義

定義電子的電荷為負基本電荷 (Elementary charge)，由 1909 年密立坎 (Millikan) 油滴實驗首測量。定義基本電荷為  $1.602176620810^{-19}$  庫倫 (Coulomb, C)。次核子物質外，所有物質所帶的電荷皆為基本電荷  $e$  的整數倍。

## (二) 電荷守恆定律 (Law of conservation of charge, charge conservation law)

一個系統如與外界無電荷交換，則該系統的總電荷維持定值。可從高斯磁定律與安培-馬可士威定律得出。

## 四、 疊加原理 (Principle of superposition)

對於所有線性系統，如電場、磁場等，兩個或多個刺激引起的淨響應是由每個刺激單獨引起的響應總和。

## 五、 勞倫茲力 (Lorentz force) / 電磁力 (Electromagnetic force)

### (一) 勞倫茲力定律 (Lorentz force law)

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- $\mathbf{E}$  與  $\mathbf{B}$  以之定義。
- $q\mathbf{E}$  稱電力項； $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  稱磁力項。

### (二) 勞倫茲力密度 (Lorentz force density)

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J}_f \times \mathbf{B}.$$

## 六、 電通量 (Electric flux)

曲面  $S$  上的電通量  $\Phi_E$  定義為：

$$\Phi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

## 七、 磁通量 (Magnetic flux)

曲面  $S$  上的磁通量  $\Phi_B$  定義為：

$$\Phi_B = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

對於均勻磁場  $\mathbf{B}$  通過定向 (Oriented) 平面  $\mathbf{S}$ ，其磁通量可簡化為：

$$\Phi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}.$$

## 八、 電極化 (Polarization)

### (一) 電偶極子 (Electric dipole)

兩點電荷電荷  $+q$ 、 $-q$ ，自電荷  $-q$  指向電荷  $q$  的向量為  $\mathbf{d}$ ，二者稱電偶極子，具有電偶極矩

$$\mathbf{e} = q\mathbf{d}.$$

### (二) 電偶極矩 (Electric dipole moment)

定義為：

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e} \times \mathbf{E}.$$



### (三) (電) 極化密度 (Polarization current density)

定義為：

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{e}}{dV}.$$

### (四) 電位移 (場) (Electric displacement (field))

定義為：

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

### (五) 電磁化率 (Electric susceptibility)

對於線性材料，定義為：

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \chi_e \mathbf{E}.$$

對於非線性材料，定義為：

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \mathbf{E},$$

其中  $\chi_i$  稱第  $i$  電磁化率。此處定義：

$$\chi_e \mathbf{E} = \mathbf{P} - \mathbf{P}_0.$$

對於不具有鐵電性的材料， $\mathbf{P}_0 = 0$ 。

### (六) 相對電容率 (Relative permittivity)

定義為：

$$\epsilon_r = (1 + \chi_e).$$

### (七) 電容率 (Permittivity)

定義為：

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0,$$

即：

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}.$$

## 九、 磁化 (Magnetization)

### (一) 磁矩 (Magnetic moment) / 磁偶極矩 (Magnetic dipole moment)

定義為：

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

### (二) 磁極 (Magnetic pole)

定義  $\mathbf{m}$  自 S 極指向 N 極。

### (三) 磁化強度 (Magnetization)

定義為：

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}.$$

### (四) 磁場強度 (Magnetic field strength or Magnetic field intensity) /H 場 (H-field)

定義為：

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}.$$

### (五) 磁化率 (Magnetic susceptibility)

定義為：

$$\mathbf{M} = \chi_v \mathbf{H}.$$

磁化率  $>0$  者具有順磁性；磁化率  $<0$  者具有逆磁性。

### (六) 相對磁導率 (Relative magnetic permeability)

定義為：

$$\mu_r = (1 + \chi_v).$$

### (七) 磁導率 (Magnetic permeability)

定義為：

$$\mu = \mu_r \mu_0,$$

即：

$$\mu \mathbf{H} = \mathbf{B}.$$

## 十、 電荷密度 (Charge density)

### (一) (體積) (總) 電荷密度 ((Volume) (total) charge density)

定義為：

$$\rho = \frac{dq}{dV}.$$

### (二) (體積) 束縛電荷密度 ((Volume) bound charge density)

定義為：

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}.$$

### (三) (體積) 自由電荷密度 ((Volume) free charge density)

定義為：

$$\rho_f = \rho + \rho_b.$$

#### (四) 表面（總）電荷密度 (Surface (total) charge density)

定義為：

$$\sigma = \frac{dq}{dS}.$$

#### (五) 表面束縛電荷密度 (Surface bound charge density)

定義為：

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{n}.$$

#### (六) 表面自由電荷密度 (Surface free charge density)

定義為：

$$\sigma_f = \sigma + \sigma_b.$$

### 十一、 電流 (Electric current)

指通過一截面的電荷的平均定向移動，其方向定義為正電荷移動的方向；其量值，稱電流強度 (Current intensity)  $I$ ，簡稱電流，定義為單位時間內通過某一截面的電荷淨轉移量  $\frac{dq}{dt}$ ，對於某點或可加以流入為正，流出為負；亦可表示成  $I d\mathbf{a}$ ，其中  $I$  為電流強度（正值）、 $d\mathbf{a}$  為該段電路元的電流方向。

### 十二、 電流密度 (Current density)

#### (一) (體積) (總) 電流密度 ((Volume) (total) current density)

流經  $S \rightarrow 0$  的有向電流為  $I_S$ ，則  $S$  的電流密度定義為：

$$\mathbf{J} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{I_S}{S}.$$

#### (二) (體積) 極化電流密度 ((Volume) polarization current density)

定義為：

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

#### (三) (體積) 磁化電流密度 ((Volume) magnetization current density)

定義為：

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}.$$

#### (四) (體積) 束縛電流密度 ((Volume) bound current density)

定義為：

$$\mathbf{J}_b = \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_m.$$

### (五) (體積) 自由電流密度 ((Volume) free current density)

若  $S \rightarrow 0$  處電荷密度  $\rho$ ，該處電荷的平均漂移速度 (Drift velocity) 為  $\mathbf{v}$ ：

$$\mathbf{J}_f = \rho \mathbf{v}.$$

服從：

$$\mathbf{J}_f = \mathbf{J} - \mathbf{J}_b.$$

## 十三、 庫倫定律 (Coulomb' s law) 與馬克士威第一方程 (Maxwell' s first equation) – 高斯定律 (Gauss' law)

### (一) 庫倫扭秤 (Torsion balance)

- 1777 年庫倫發明庫倫扭秤，類似卡文迪西扭秤實驗 (Cavendish experiment)。
- 1785 年庫倫提出庫倫定律並以扭秤實驗支持之。

### (二) 庫倫定律靜電力形式

對於兩分別位於  $\mathbf{r}_0$ 、 $\mathbf{r}$  的電荷  $q_1$ 、 $q_2$ ，其間電容率均勻，其互相之靜電力/庫倫力  $\mathbf{F}$  服從：

$$\mathbf{F} = \frac{k_e q_1 q_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \text{UV}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \text{UV}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

若兩電荷相對靜止且無外加電磁場，其互相之勞倫茲力等於靜電力。

### (三) 庫倫定律電場形式

位於  $\mathbf{r}_0$  的電荷  $q$  發出的電場對  $\mathbf{r}$  的函數  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  為：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{k_e q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \text{UV}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

### (四) 高斯定律-微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f,$$

即：

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

### (五) 庫倫定律證明高斯定律

*Statement.* 假設已知電場疊加原理，假設符合庫倫定律適用條件，則高斯定律微分形式為庫倫定律電場形式的必要條件。

*Proof.*

庫倫定律闡明，一個位於位置  $\mathbf{r}_0$  靜點電荷  $q$  的電場對位置  $\mathbf{r}$  函數為：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \text{UV}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

令電荷密度對  $\mathbf{r}$  的函數為  $\rho(\mathbf{r})$ ，計算位於  $\mathbf{r}_0$  的無窮小電荷元素所產生的位於  $\mathbf{r}$  的電場，積分體積域  $V$  內所有的無窮小電荷元素，可以得到電荷分佈所產生的電場：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r}_0)}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{UV(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} d^3\mathbf{r}.$$

取方程兩邊對於  $\mathbf{r}$  的散度：

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r}_0)}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \nabla \cdot \frac{UV(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} d^3\mathbf{r}.$$

注意到：

$$\nabla \cdot \frac{UV(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

其中  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  為狄拉克  $\delta$  函數。

代入得：

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r}_0)}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d^3\mathbf{r}.$$

化簡得：

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

□

## (六) 高斯定律證明庫侖定律

*Statement.* 假設已知電場疊加原理，假設符合庫侖定律適用條件，假設點電荷的電場為球形，則高斯定律微分形式為庫侖定律電場形式的充分條件。

*Proof.*

高斯定律闡明：

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho.$$

定義球座標系，以庫侖定律欲討論之電荷之位置  $\mathbf{r}_0$  為原點，徑向距離  $r$ 、極角  $\theta$  與方位角  $\phi$ 。由於  $\mathbf{E}$  只依賴  $r$ ：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 |\mathbf{E}|).$$

在球坐標系中，積分體積域  $V$  的微分體積元素  $dV$  為：

$$dV = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi.$$

故對於點電荷  $q$ ，電荷密度  $\rho$  可以表示為：

$$\rho = \frac{q\delta(\mathbf{r})}{4\pi|\mathbf{r}|^2},$$

其中  $\delta(\mathbf{r})$  為狄拉克  $\delta$  函數。

代入得：

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 |\mathbf{E}|) = \frac{q\delta(\mathbf{r})}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|^2}.$$

化簡得：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} UV(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

□

### (七) 高斯定律-積分形式

對於封閉三維流形  $V$  與  $S = \partial V$  :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho_f dV,$$

即：

$$\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV.$$

### 十四、 磁偶極子的磁場

假設  $\mathbf{r}_0$  到  $\mathbf{r}$  磁導率均勻，位於  $\mathbf{r}_0$  的磁矩  $\mathbf{m}$  的磁偶極子發出的  $\mathbf{B}$  場  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  為：

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{3 \mathbf{UV}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) (\mathbf{UV}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}.$$

### 十五、 馬克士威第二方程 (Maxwell' s second equation) -高斯磁定律 (Gauss' s law for magnetism) /無磁單極 (Absence of free magnetic poles)

#### (一) 高斯磁定律-微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

#### (二) 高斯磁定律-積分形式

對於封閉曲面  $S$  :

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

### 十六、 馬克士威第三方程 (Maxwell' s third equation) -法拉第電磁感應定律 (Faraday' s law of electromagnetic induction)

變動磁場產生電場/磁動生電/電磁感應。

#### (一) 法拉第電磁感應定律-微分形式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

#### (二) 法拉第電磁感應定律-積分形式

對於封閉路徑  $\ell = \partial S$  圍成的曲面  $S$  :

$$\oint_{\ell} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

### 十七、 馬克士威第四方程 (Maxwell' s fourth equation) -安培-馬克士威方程 (Ampère-Maxwell equation)

變動電場產生磁場/電動生磁/電流磁效應。

### (一) 安培-馬克士威定律-微分形式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

即：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

*Proof.*

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) &= \mathbf{J} - \mathbf{J}_b + \frac{\partial (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t} \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{M} &= \mathbf{J} - \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

□

### (二) 安培-馬克士威定律-積分形式

對於封閉路徑  $\ell = \partial S$  圍成的曲面  $S$ ：

$$\oint_{\ell} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S},$$

即：

$$\oint_{\ell} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

*Proof.*

$$\begin{aligned}\oint_{\ell} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \iint_S \left( \mathbf{J} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_{\ell} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}$$

□

## 十八、 電位 (Electric potential) / 電純量勢 (Electric scalar potential) / 純量勢 (Scalar potential) 與磁向量勢 (Magnetic vector potential) / 向量勢 (Vector potential)

### (一) 電純量勢與磁向量勢定義

電純量勢  $\phi$  與磁向量勢  $\mathbf{A}$  服從：

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{B} \\ \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.\end{aligned}$$

### (二) 規範固定 (Gauge fixing) / 規範選擇 (Choosing a gauge)

規範固定，或稱規範選擇，表示處理場變數中冗餘自由度的數學過程。

### (三) 庫倫規範 (Coulomb gauge) / Transverse gauge

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

### (四) 勞倫茲規範 (Lorenz gauge)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

### (五) 等位/等勢 (Equipotential/Isopotential)

指空間中的一個區域，其中每個點都處於相同的電位（或有時用於其他勢 (Potential)）。 $n$  維中對某場定義的等位通常是  $\leq (n - 1)$  維，如等位面、等位線，或通稱等位面，兩兩恆不相交或相切。當  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$  時，等位面恆與電場垂直，即在等位面上移動的電荷不受勞倫茲力作功。

*Proof.*

將一等位線參數化為  $\mathbf{r}(t)$ ，則

$$\frac{df(\mathbf{r}(t))}{dt} = 0.$$

根據鏈式法則：

$$\nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0,$$

其中  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  是曲線的切向量。 □

### (六) 電位能 (Electric potential energy)

一電荷  $q$  的電位能  $U_e$  為：

$$U_e = q\phi$$

### (七) 電壓 (Voltage) / 電位差 (Electric potential difference)

電壓或電位差  $\Delta V$  指兩點間之電位之差。

## 十九、 電動勢 (Electromotive force, emf, EMF)

某電動勢源的電動勢  $\mathcal{E}$  指每單位正電荷通過之所獲得的電位能，即令之為曲線  $\ell$ ：

$$\mathcal{E} = - \int_{\ell} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}.$$

## 二十、 場線 (Field line)

場線於 1851 年由法拉第 (Faraday) 提出。

### (一) 定義

- 場線在該點的切線方向表示向量場在該點的方向。
- 場線在該點的疏密程度正比於向量場在該點的模長。
- 場線除了在源頭點與匯聚點外不會相交，即除了源頭點與匯聚點外散度為零。



- 場線若非封閉，則起點在一個散度為正的點或無限遠處，終點在一個散度為負的點或無限遠處，其餘點散度為零。

## (二) 電場線 (Line of electric field) / 電力線 (Line of electric force)

電場線密度定義為電場，通過一曲面的電場線數目定義為其電通量。電荷密度為正的點，電場散度大於零，故為場線源頭；電荷密度為負的點，電場散度小於零，故為場線匯聚點；電荷密度為零的點，電場散度等於零，故場線不可在電荷密度為零的點相交。

## (三) 磁場線 (Line of magnetic field) / 磁力線 (Line of magnet force)

磁場線密度定義為磁場，通過一曲面的磁場線數目定義為其磁通量。磁通量密度場散度為零，即場線不可相交，即場線為封閉曲線。

# 第三節 電磁相關材料性質

## 一、 鐵電性 (Ferroelectricity)

指的是某些材料在無外加電場時具有自發極化 (spontaneous polarization)，且該極化方向在施加足夠強的外加電場時可以翻轉 (switchability)。鐵不具有鐵電性， $\text{BaTiO}_3$ 、 $\text{LiTaO}_3$  具有鐵電性。

## 二、 壓電性 (Piezoelectricity)

指的是某些材料在施以物理壓力時，其內之電偶極矩會被壓縮而變短，壓電材料為抵抗變化會在材料相對的表面上產生等量正負電荷，稱正壓電效應；在表面施加電位差，其內之電偶極矩會被拉長，壓電材料為抵抗變化會沿電場方向伸長，稱負壓電效應；兩者係數相同。

## 三、 撓曲電性 (Flexoelectricity)

指的是某些材料在施以不均勻物理壓力時，其內之電偶極矩會被改變並破壞中心對稱性，撓曲電材料為抵抗變化會在材料相對的表面上產生等量正負電荷，稱正撓曲電效應；在表面施加電位差，其內之電偶極矩會被改變並破壞中心對稱性，撓曲電材料為抵抗變化會產生不均勻應變，稱撓曲壓電效應；兩者係數相同。

## 四、 順磁性 (Paramagnetism)

指的是某些材料在無外加磁場時有零磁矩；在有外加磁場時呈現磁矩，且該磁矩方向與外磁場之點積為正。

## 五、 逆磁性 (Diamagnetism)

指的是某些材料在無外加磁場時有零磁矩；在有外加磁場時呈現磁矩，且該磁矩方向與外磁場之點積為負。

## 六、 鐵磁性 (Ferromagnetism) /強磁性

指的是某些材料相鄰電子自旋呈相同方向排列，使其在無外加磁場時具有自發磁化 (spontaneous magnetization)，且該磁化方向在施加足夠強的外加磁場時可以翻轉 (switchability)，且翻轉後的磁矩方向與外磁場之點積為正。Fe、Co、Ni 具有鐵磁性。

## 七、 反鐵磁性 (Antiferromagnetism) /反強磁性

指的是某些材料的相鄰電子自旋呈相反方向排列且大小相等，使其具有零磁矩。Mn、NiO 具有反鐵磁性。

## 八、 亞鐵磁性 (Ferrimagnetism)

指的是某些材料的相鄰電子自旋呈相反方向排列且大小不同，使其在無外加磁場時具有自發磁化 (spontaneous magnetization)，且該磁化方向在施加足夠強的外加磁場時可以翻轉 (switchability)，且翻轉後的磁矩方向與外磁場之點積為正。 $\text{Fe}_3\text{O}_4$  具有亞鐵磁性。

## 九、 居禮溫度 (Curie temperature)

指的是某些材料在一定溫度以下呈現鐵磁性或亞鐵磁性，在該溫度以上則否，該溫度稱居禮溫度。

## 十、 奈爾溫度 (Néel temperature)

指的是某些材料在一定溫度以下呈現反鐵磁性，在該溫度以上則否，該溫度稱奈爾溫度。

## 十一、 遲滯現象 (Hysteresis) /滯後現象

指的是具有鐵電性、壓電性、撓曲電性、鐵磁性、反鐵磁性或亞鐵磁性等的材料的狀態對其歷史具有依賴性，在外在改變時具有對原先狀態的記憶性。

# 第四節 靜電學 (Electrostatics)

## 一、 靜電學

靜電學研究電荷分布與電場均不隨時間改變下的電磁學。

## 二、 靜電平衡 (Electrostatic equilibrium)

當電荷分布不隨時間改變，則稱其處於靜電平衡。

## 三、 靜電場 (Electrostatic force)

指電荷分布與電場均不隨時間改變下的電場，其特性有：

- 為保守場：

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

- 不產生電動勢：

$$\mathcal{E} = - \oint_{\ell} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0.$$

#### 四、 靜電力 (Electrostatic force) /庫侖力 (Coulomb force)

指電荷分布與電場均不隨時間改變下的勞侖茲力電力項，為保守力。

#### 五、 靜電感應 (Electrostatic induction)

當一帶電體靠近電中性的物體時，該物體的近端（靠近帶電體的區域）感應出異性電，遠端感應出等量同性電，此種電荷稱感應電荷，此種暫時性的電荷分離現象，稱為靜電感應。因靜電感應使異性電較同性電更近帶電體，故兩物相吸。當帶電體移走時，物體又會恢復成原來的狀態。

導體 (Conductor) 至絕緣體 (Insulator) 皆可，惟金屬乃自由電子移動，故感應電荷較強；絕緣體電子無真正分離出，僅產生感應偶極，感應電荷輕微，亦稱極化現象。

##### (一) 感應起電 (Charging by induction)

若在靜電感應時將電中性體的接地（指用一導體將帶電體與大地相連，從而將電荷經之導入大地），使其帶與帶電體異性之電，稱感應起電。

#### 六、 接觸起電 (Charging by contact)

將電位不同之物體與導體接觸，藉自由電子的轉移使兩者電位相等，稱為接觸起電。

#### 七、 摩擦起電 (Charging by friction)

通過摩擦的方式，使物體之間的電子轉移，使兩物體帶上等量異性電荷，稱摩擦起電。

導體至絕緣體皆可。

電子轉移的原因是兩者電子親和力 (Electron affinity,  $EA$ ) 不同。令電子親和力定義為「一原子之第  $i$  電子親和力  $EA_i$  為該原子的負  $i$  價離子放出一個電子變成負  $i - 1$  價離子所須吸收的能量， $EA_i$  即  $IE_{-i+1}$ ，並使給定義延伸至  $i \leq 0$ ，即將第  $i$  電子親和力  $EA_i$  與第  $-i + 1$  游離能 (Ionization energy,  $IE$ )  $IE_{-i+1}$  視為等價。」例如：由於玻璃棒的電子親和力比絲綢小，所以絲綢摩擦過的玻璃棒帶正電荷，毛皮摩擦過的橡膠棒則帶負電荷。

#### 八、 電暈放電 (Corona discharge)

導體表面電場足夠高時，附近的流體被電解成正負離子，與導體異性者會被導體吸引中和，同性者被導體排開，相當於導體放出自身電荷，稱電暈放電。空氣中欲電暈放電約需 3 百萬伏特每公尺的電場。

## 九、靜電學電位能與電位

### (一) 電位能

電荷  $q$  在位置  $\mathbf{r}_1$  相對於參考點  $\mathbf{r}_{ref}$  的電位能  $U_e(\mathbf{r}_1)$ ：

$$\begin{aligned}U_e(\mathbf{r}_1) &= -W_{\mathbf{r}_{ref} \rightarrow \mathbf{r}_1} \\&= - \int_{\mathbf{r}_{ref}}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\&= - \int_{\mathbf{r}_{ref}}^{\mathbf{r}_1} q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}\end{aligned}$$

其應僅對  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  定義，此時其可視為與時間和速度無關的僅與位置相關的位能而仍服從力學能守恒與歐拉-拉格朗日方程（Euler-Lagrange equation）。

當系統中所有電荷之位置的集合是有界集（Bounded set）時，常以無限遠處為零位面。

### (二) 電位

某處的電位  $\phi$  定義為單位某非零測試電荷  $q$  在該處的電位能  $U_e$  除以其電荷  $q$ 。令參考點  $\mathbf{r}_{ref}$ ，即：

$$\phi = - \int_{\mathbf{r}_{ref}}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

其應僅對  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  定義。

當系統中所有電荷之位置的集合是有界集時，常以無限遠處為零位面。

### (三) 單一靜電荷電位能與電位

以單一靜電荷為例，以無限遠處為電位能與電位零位面，對於原點上單一靜電荷  $q_0$  場源， $\mathbf{r}$  的電位  $\phi(\mathbf{r})$  為

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{k_e q_0}{|\mathbf{r}|}$$

電荷  $q$  在位置  $\mathbf{r}$  的電位能  $U_e(\mathbf{r})$  為

$$U_e(\mathbf{r}) = \frac{k_e q_0 q}{|\mathbf{r}|}$$

## 十、靜電平衡導體、靜電屏蔽（Electrostatic shielding）效應與法拉第籠（Faraday cage）

### (一) 接地（Ground）

地球定義為一電位與帶電量恆為零巨大導體，接地指將一物體與地球以導體相接。

### (二) 靜電平衡導體、靜電屏蔽效應與法拉第籠

令導體指電阻始終為零、其內（不含表面）電場始終為零、無外電場時電極化密度為零的物體。令有某導體  $C$  為熱力學孤立系統，且為連通閉集，且  $C$  不含表面為開集  $D$  使得  $\text{closure}(D) = C$ ，且  $C$

處於靜電平衡。設某開集  $O$  使得  $C \subseteq O$ ，且  $\text{closure}(O)$  為熱力學孤立系統。令  $S$  為  $O$  的開子集的集合，使得

$$\forall A \neq B \in S : (A \cap B = \emptyset) \wedge \left( C \cup \bigcup_{A \in S} \text{closure}(A) = \text{closure}(O) \right).$$

則：

- $D$  中任意點電場為零。

*Proof.*

歸謬證之。假設  $D$  中一點有一非零電場  $\mathbf{E}$ ，則該處自由電子受力  $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ ，故自由電子會移動，違反靜電平衡 □

- $C$  中任兩點電位相同，為等電位體。

*Proof.*

歸謬證之。若  $C$  中存在兩點之電位差  $\Delta V \neq 0$ ，令兩點間有路徑  $\ell \subseteq C$ ，依據梯度定理：

$$\int_{\ell} \nabla \phi \cdot d\ell = \Delta V$$

則該路徑中存在一些部分使得：

$$\nabla \phi \cdot d\ell = -\mathbf{E} \cdot d\ell \neq 0$$

表示自由電子會移動，違反靜電平衡。 □

- $D$  不帶電荷，即  $C$  之淨電荷分布於其表面。

*Proof.*

歸謬證之。若  $D$  中封閉三維流形  $V$  帶電荷  $q$ ，依據馬克士威第一方程，令  $S = \partial V$ ，有：

$$\epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q$$

違反  $D$  中任意點電場為零。 □

- 表面  $C \setminus D$  若有非零電場則垂直於該表面。

*Proof.*

歸謬證之。若  $C \setminus D$  存在不垂直該表面之電場，則違反  $C$  為等電位體。 □

- 若導體  $C$  接地，則  $\forall A \in S : \text{closure}(A)$  的電場與電荷分布不受  $\text{closure}(O) \setminus \text{closure}(A)$  影響，而為  $A$  之函數。

*Proof.*

先證明  $\text{closure}(A)$  的電荷分布不受  $\text{closure}(O) \setminus \text{closure}(A)$  影響。考慮包含  $\text{closure}(A)$  的封閉三維流形  $V$  與  $S = \partial V$  使得  $S \subseteq (D \cup \text{closure}(A)) \cap C$ 。因為  $D$  中任意點電場為零且表面  $C \setminus D$  若有非零電場則垂直於該表面：

$$\epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

依據高斯定律可知  $V$  之淨電荷為零，可知  $\text{closure}(A)$  的電荷分布不受  $\text{closure}(O) \setminus \text{closure}(A)$  影響。

接著證明  $\text{closure}(A)$  的電場不受  $\text{closure}(O) \setminus \text{closure}(A)$  影響。歸謬證之。若命題為非，則  $\text{closure}(A) \cap C$  上的自由電子分布受  $\text{closure}(O) \setminus \text{closure}(A)$  影響，違反  $\text{closure}(A)$  的電荷分布不受  $\text{closure}(O) \setminus \text{closure}(A)$  影響。

又  $V \setminus D$  之電荷乃  $A$  中電荷造成之感應電荷，故  $\text{closure}(A)$  的電荷分布為  $A$  之函數。

由高斯定律可知  $\text{closure}(A)$  之電場為其中電荷分布之函數，又其中電荷分布為  $A$  之函數，故  $\text{closure}(A)$  之電場亦為  $A$  之函數。  $\square$

- 若導體  $C$  接地，若  $S$  中某元素  $A$  使得  $A$  之電荷密度為 0，則  $\text{closure}(A)$  的電場為零，且  $\text{closure}(A) \cup C$  中任兩點電位相同。

*Proof.*

令  $S$  中某元素  $A$  使得  $A$  之電荷密度為 0，則  $\text{closure}(A)$  的電場為零：因  $\text{closure}(A) \cap C$  中之電荷為  $A$  之感應電荷，故  $A$  之電荷密度為 0  $\implies$   $\text{closure}(A)$  之電荷密度為 0。由高斯定律得證。

令  $S$  中某元素  $A$  使得  $A$  之電荷密度為 0，則  $\text{closure}(A) \cup C$  中任兩點電位相同：由上可知  $\text{closure}(A)$  為等電位體，又  $C$  為等電位體，因  $\text{closure}(A) \cap C \neq \emptyset$ ，得證。  $\square$

- 靜電屏蔽效應指靜電平衡導體對  $\text{closure}(A)$  中無電荷之  $A \in S$  的效應，包含接地導體對任意  $A$ ，與未接地但  $\text{closure}(A) \setminus A$  上之電荷發出之電場和在  $\text{closure}(A)$  為零的特殊情況（例如  $S \setminus \{A\}$  中無電荷且  $A$  為開球，或  $\text{closure}(O)$  中無電荷），此時  $\text{closure}(A) \cup C$  為等電位體。
- 任一  $A \in S$  稱一法拉第籠。一些交通工具艙、實驗裝置、監獄、電子元件容器、電纜、通訊屏蔽容器、電梯、RFID 竊取（RFID skimming）容器等為法拉第籠，使其中物件免受外部電擊與電磁傳輸等。

### (三) 靜電平衡導體圓球

令有一半徑  $R$  的導體圓球或薄球殼，帶淨電荷  $q$ ，以球心為原點，無外電場，若為薄球殼則其內空間無電荷，則：

- 其外（含表面）之電場與電位均同一位於原點的點電荷  $q$  產生者。
- 其內（不含表面）之電場為零，電位與表面同。
- 其表面之電荷平均分布。

即，圓球表面任一點之表面電荷密度  $\sigma$ 、位置  $\mathbf{r}$  處，電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 、相對於無限遠處的電位  $\phi_i(\mathbf{r})$ 、相對於球心的電位  $\phi_c(\mathbf{r})$  為：

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{k_e q \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} = \frac{q \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^2}, & |\mathbf{r}| \geq R \\ 0, & |\mathbf{r}| < R \end{cases}$$

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\hat{\mathbf{r}} \int_{\infty}^{|\mathbf{r}|} k_e q x^{-2} dx = -\hat{\mathbf{r}} (-k_e q x^{-1}) \Big|_{\infty}^{|\mathbf{r}|} = \frac{k_e q}{|\mathbf{r}|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|}, & |\mathbf{r}| \geq R \\ \frac{k_e q}{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & |\mathbf{r}| < R \end{cases}$$

$$\phi_c(\mathbf{r}) = \begin{cases} k_e q \left( \frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{1}{R} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{1}{R} \right), & |\mathbf{r}| \geq R \\ 0, & |\mathbf{r}| < R \end{cases}$$

## 十一、 尖端放電效應

尖端放電效應指曲率較大處通常更可能電暈放電。

設兩圓球或薄球殼之電位相同，則其上總電荷正比於其半徑，則其表面電荷密度反比於其半徑。這不嚴謹地暗示無外電場下靜電平衡的帶電導體上曲率較大處的電荷密度和電場通常均較高，此即尖端放電效應的原因。

## 十二、 絕緣體圓球靜電平衡

令絕緣體指電荷恆平均分布之物體。令有一半徑  $R$  的絕緣體圓球  $B$ ，帶淨電荷  $q$ ，以球心為原點，無外電場，則：

圓球任一點之（體積）電荷密度  $\rho$  為：

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

位置  $\mathbf{r}$  處，電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 、相對於無限遠處的電位  $\phi_i(\mathbf{r})$ 、相對於球心的電位  $\phi_c(\mathbf{r})$  為：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{k_e q \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} = \frac{q \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^2}, & |\mathbf{r}| \geq R \\ \frac{k_e q \mathbf{r}}{R^3} = \frac{q \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3}, & |\mathbf{r}| < R \end{cases}$$

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{k_e q}{|\mathbf{r}|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|}, & |\mathbf{r}| \geq R \\ \frac{k_e q}{R} - \int_R^{|\mathbf{r}|} \frac{k_e q x}{R^3} dx = \frac{k_e q}{R} - \frac{k_e q |\mathbf{r}|^2}{2R^3} + \frac{k_e q}{2R} = \frac{3k_e q}{2R} - \frac{k_e q}{2R^3} |\mathbf{r}|^2 = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} |\mathbf{r}|^2, & |\mathbf{r}| < R \end{cases}$$

$$\phi_c(\mathbf{r}) = \begin{cases} k_e q \left( \frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{1}{2R} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{1}{2R} \right), & |\mathbf{r}| \geq R \\ -\frac{k_e q}{2R^3} |\mathbf{r}|^2 = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} |\mathbf{r}|^2, & |\mathbf{r}| < R \end{cases}$$

## 十三、 均勻電場

### (一) 帶電之無限大平板

令有一無限大平板表面電荷密度  $\sigma$ ，平板厚度相對於  $r$  忽略，電荷可分離於兩表面或僅在一表面。則距離平板  $r$  之電場（正表遠板，負表近板）為：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r) &= k_e \sigma r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (r^2 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dx dy \\ &= k_e \sigma r \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} (r^2 + t^2)^{-\frac{3}{2}} t dt d\theta \\ &= k_e \sigma r \frac{2\pi}{2} \\ &= 2\pi k_e \sigma \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

上下兩塊無限大且分別均勻帶正、負電的平板，其中可得一均勻向下的電場。

### (二) 帶電粒子在均勻電場中的運動

令有一均勻平行於  $xy$  平面之電場 ( $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y$ )，一質量  $m$  的點電荷  $q$  以平行於  $xy$  平面之初速度 ( $\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y$ ) 自  $(x_0, y_0)$  運動，假設其僅受該均勻電場施的勞侖茲力，其自身之電場忽略（故動電生磁、動磁生電、產生電磁波亦忽略）， $t$  為時間，則其運動參數式為：

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \mathbf{v}_x t + \frac{q\mathbf{E}_x}{2m} t^2, \\ y(t) &= y_0 + \mathbf{v}_y t + \frac{q\mathbf{E}_y}{2m} t^2 \end{aligned}$$

## 十四、 電容器 (Capacitor) 與電容 ((Electric) capacitance)

電容器一般由兩片導電金屬板構成，中間用絕緣的電介質隔開，可一者接地或均不接地，儲等量異性電。電容器以直流電充電，放出直流電。通交流電則電容器不斷充放電，因此能夠導通之，並具備一定的阻抗。電容器存有的電荷  $q$  指其在給定輸出電壓下可以放出的電荷，令電容體積域  $V$ 、自由電荷密度  $\rho_f$ ， $q$  定義為：

$$q = \iiint_V \rho_f dV.$$

額定電壓內，電容器可儲存的最大電量與外直流電源電壓成正比，令當外直流電源電壓  $\Delta V$  時，某電容器可儲存的最大電量為  $q$ ，則稱此系統之電容  $C$  為：

$$C = \frac{q}{\Delta V},$$

表示其存儲電荷的能力。

### (一) 平板電容器 (Parallel plate capacitor)

平板電容器由兩片可儲等量異性電的平行導電金屬平板構成，中間用絕緣的電介質隔開。

令有平板電容器，其兩金屬板面積均為  $S$ ，內表面相距  $d$ ，忽略邊緣場效應，電介質電容率  $\epsilon$ ，此系統存有電荷  $q$ ，則：



- 此平板電容器兩金屬板間的電場量值（忽視邊緣效應） $|\mathbf{E}|$  為：

$$|\mathbf{E}| = \frac{q}{S\epsilon}$$

- 故兩金屬電位差  $\Delta V$  為：

$$\Delta V = \int_0^d \frac{q}{S\epsilon} dr = \frac{qd}{S\epsilon}$$

- 故電容  $C$  為：

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\epsilon S}{d}$$

## (二) 球形電容器 (Spherical capacitor)

球形電容器由兩同心平行導電金屬球殼構成，中間用絕緣的電介質隔開，兩者儲等量有異性電，其中內球不接地，外球接地或否。

令有球形電容器，其內金屬球殼外表面半徑  $R_1$ ，外金屬球殼內表面半徑  $R_2$ ，電介質電容率  $\epsilon$ ，此系統存有電荷  $q$ ，則：

- 此球形電容器距球心  $r$  ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ) 的電場量值  $|\mathbf{E}(r)|$  為：

$$|\mathbf{E}(r)| = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

- 故兩金屬電位差  $\Delta V$  為：

$$\Delta V = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \left( -\frac{q}{4\pi\epsilon r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

- 故電容  $C$  為：

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

若將外球移除，變成單獨帶電球，則電容  $C$  為：

$$C = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{4\pi\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} = 4\pi\epsilon r_1$$

## 第五節 靜磁學 (Magnetostatics)

### 一、 靜磁學

靜磁學研究電流與磁場不隨時間改變下的電磁學。

### 二、 電流磁效應

#### (一) 厄斯特 (Ørsted) 發現電流磁效應

1820 年厄斯特發現載流導線的電流對鄰近的磁針會產生作用力，使磁針偏轉，從而得知電流會產生磁場效應，發現了電學與磁學的關聯。

## (二) 安培 (Ampère) 右手定則 (Right-hand rule)

- 用右手握住長直載流導線，大拇指的指向為電流的方向，則其餘四指彎曲所指的方向為磁場方向，即磁力線方向。
- 用右手握住圓形載流導線或載流螺線管 (solenoid)，四指彎曲所指的方向為其電流方向，則大拇指的指向為磁場方向，即磁力線方向。

## (三) 必歐-沙伐定律 (Biot-Savart law) —微分形式

一電流元長度  $d\ell$ 、載有電流強度  $I$ ，在  $\mathbf{r}$  產生磁場  $d\mathbf{B}$ ：

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2}.$$

## (四) 必歐-沙伐定律 (Biot-Savart law) —積分形式

電路  $\ell$  上載有電流強度  $I$  (可不均勻)，在  $\mathbf{r}$  產生磁場  $\mathbf{B}$ ：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\ell} \frac{I d\ell \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2}.$$

## (五) 安培環路定律 (Ampère's circuital law) /安培定律 (Ampère's law) —微分形式

環路  $\ell = \partial S$  上，總電流密度  $\mathbf{J}$ ，產生磁場  $\mathbf{B}$ ：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

## (六) 安培環路定律 (Ampère's circuital law) /安培定律 (Ampère's law) —積分形式

環路  $\ell = \partial S$  上，總電流密度  $\mathbf{J}$ 、總電流  $I$ ，產生磁場  $\mathbf{B}$ ：

$$\oint_{\ell} \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I.$$

## (七) 長直載流導線

長直載流導線上載有電流強度  $I$ ，在  $\mathbf{r}$  產生磁場  $\mathbf{B}$ ：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi |\mathbf{r}|} \mathbf{U}(\mathbf{l} \times \mathbf{r}).$$

## (八) 圓形載流導線

半徑  $R$  圓形載流導線  $\ell = \partial S$  上載有電流強度  $I$  (均勻)，在  $\mathbf{r}$  產生磁場  $\mathbf{B}$ ：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{d\ell \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2}.$$

過圓心垂直  $S$  的直線上距離圓心  $a$  處磁場量值：

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I R^2}{2(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*Proof.*

必歐-沙伐定律闡明：

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\boldsymbol{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2}.$$

令圓心為原點， $S$  在  $xy$  平面上，觀測點座標  $(0, 0, a)$ ，並在  $xy$  平面上任選一過原點的直線為極軸在  $xy$  平面上定義極角  $\theta$ 。

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{r} &= \hat{\mathbf{z}} \times (R \cos \theta, R \sin \theta, 0) \times \mathbf{r} \\ &= (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0) \times (-R \cos \theta, -R \sin \theta, a) \\ &= (aR \cos \theta, aR \sin \theta, R^2). \end{aligned}$$

代入得：

$$\begin{aligned} &\oint_{\ell} d\boldsymbol{\ell} \times \hat{\mathbf{r}} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{aR \cos \theta, aR \sin \theta, R^2}{\sqrt{a^2 + R^2}} d\theta \\ &= 2\pi \frac{0, 0, R}{\sqrt{a^2 + R^2}}. \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} 2\pi \frac{0, 0, R}{\sqrt{a^2 + R^2}} \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \\ &= \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I R^2}{2(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

□

當  $a = 0$ ，即圓心處：

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

當  $a \gg R$ ，即無限遠處：

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I R^2}{2a^3}.$$

### (九) 載流螺線管 (Solenoid)

管內愈靠中心軸磁通量密度愈大，管內內側磁通量密度較管內非管口處內側小，管口外側磁通量密度較管內非管口處外側大。

載流螺線管，電流強度  $I$  (均勻)，管內非管口處線圈線密度  $n$ ，磁場量值為：

$$|\mathbf{B}| = \mu_0 n I.$$

均勻線圈密度下，線圈線密度  $n = \frac{N}{\ell}$ ， $N$  為螺線管上線圈匝數， $\ell$  為螺線管長度。

## 三、 勞倫茲力磁力項

### (一) 右手開掌定則 (Right-hand rule)

磁場中的電流，右手張開，拇指指向電流方向，四指指向磁場方向，則掌心面向受力方向。

## (二) 磁場中的載流導線

電路元長度向量  $d\mathbf{a}$  上電流強度  $I$  在磁場  $\mathbf{B}$  中受力  $d\mathbf{F}$ ：

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{a} \times \mathbf{B}.$$

若一段電路電流強度均勻，自使至尾向量  $\mathbf{a}$ ，在均勻磁場  $\mathbf{B}$  中受力  $\mathbf{F}$ ：

$$\mathbf{F} = I \mathbf{a} \times \mathbf{B}.$$

## (三) 兩平行載流導線

兩平行載流導線，長度均為  $\ell$ ，電流強度  $I_1$ 、 $I_2$ ，相距  $r$ ，兩者相吸之力（負表相斥）為  $F$ ：

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \ell.$$

## (四) 帶電質點速度選擇器

均勻磁場  $\mathbf{B}$  與電場  $\mathbf{E}$  中，射入帶電質點速度  $\mathbf{v}$ ，彼等之方向使得  $\mathbf{E}$  與  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  反向（一般三者垂直），則使得  $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  的帶電質點保持原方向，其餘依速度偏折到不同方向。

## (五) 帶電質點迴旋運動

均勻磁場，量值  $B$ ，其中射入速度垂直磁場的帶電質點射流電荷  $q$ 、質量  $m$ 、垂直磁場速度分量量值  $v$ 、平行磁場速度分量量值  $u$ ，將作螺旋線運動，將該運動拆成垂直磁場平面上的圓周迴旋運動與平行磁場方向的運動。

圓周迴旋運動中，向心力量值  $F$ 、半徑  $r$ 、週期  $T$ 、頻率  $f$ ， $r$  稱迴旋半徑（Cyclotron radius）、 $f$  稱迴旋頻率（Cyclotron frequency）：

$$F = \frac{mv^2}{r} = qvB.$$

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}.$$

可知迴旋頻率與初速無關。

平行磁場方向的運動中，帶電質點在一個  $T$  中行進的距離  $d$  為螺距（Pitch）：

$$d = uT = \frac{2\pi mu}{qB}.$$

對於等  $v$  帶電質點射流，迴旋半徑與荷質比（Charge-to-mass ratio）呈反比：

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{Br}.$$

對於帶電質點射流由等電壓  $\Delta V$  施加發射者：

$$q(\Delta V) = \frac{mv^2}{2}.$$

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{\sqrt{2mq(\Delta V)}}{qB}.$$

故迴旋半徑與根號荷質比呈反比：

$$\sqrt{\frac{q}{m}} = \frac{\sqrt{2(\Delta V)}}{Br}.$$

## 第六節 電路學 (Electric Circuit)

### 一、 電路 (Electrical circuit) / (電流) 迴路

導線與電路元件等組成的閉合導體網絡，為電流提供通過的封閉路徑。

### 二、 端電壓 (Terminal voltage)

端電壓  $\Delta V$  指電路元件正極的電位減去負極的電位。

### 三、 電阻 ((Electric) resistance)

#### (一) 電阻 ((Electric) resistance)

某電路元件的電阻  $R$  根據其上電壓  $\Delta V$  與電流  $I$  定義為：

$$R = \frac{\Delta V}{I}$$

#### (二) 電阻率 (Resistivity) 與電導率 (Conductivity)

對於均勻物質，截面積  $S$ ，長度  $\ell$ ，電阻率  $\rho$  與電導率  $\kappa$  定義為：

$$R = \rho \frac{\ell}{S},$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho}.$$

電阻率是材料特性，但受溫度與雜質影響。

金屬的電阻的成因為自由電子與雜質原子或受熱擾動的金屬陽離子碰撞產生，電子的電位能因而轉換成金屬的熱能。對金屬而言一般溫度愈高電阻率愈高、雜質愈多電阻率愈高。

在 20 攝氏度時電阻率最低者為銀 < 銅 < 金 < 鋁 < 鐵，在 1000 攝氏度為金 < 銅 < 銀。

#### (三) 歐姆定律 (Ohm's law) 與歐姆物質 (Ohmic substances)

歐姆定律指電阻不隨電壓或電流改變，即  $R = \frac{\Delta V}{I} = \text{定值}$ 。符合歐姆定律者稱歐姆物質，不符合歐姆定律者稱非歐姆物質，前者如大部分金屬，後者如二極體。

#### (四) 內電阻 (Internal resistance)

電池端電壓  $\Delta V$ 、電動勢  $\mathcal{E}$ 、內電阻  $R_i$ ，流過之電流  $I$  時：

$$\Delta V = \mathcal{E} - IR_i.$$

即當連接到之的外電路電阻為  $R_e$  時：

$$\Delta V = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{R_e + R_i} R_i = \frac{R_e \mathcal{E}}{R_e + R_i}.$$

理想電池沒有內電阻，即電動勢等於端電壓。

常見的 1.5 V 碳鋅電池的在室溫下內電阻約 0.5  $\Omega$ ，電動勢約 1.5 V。

## 四、 串聯與並聯 (Series connection and parallel connection)

### (一) 串聯 (Series connection)

串連電路元件，電壓和為總電壓，阻抗和為等效 (equivalent) 阻抗，電流相同。

### (二) 並聯 (Parallel connection)

並聯電路元件，電壓相同，阻抗的倒數和為等效阻抗的倒數，電流和為總電流。

## 五、 克希荷夫電路定律 (Kirchhoff' s Circuit Laws) /克希荷夫定則 (Kirchhoff' s Rules)

### (一) 克希荷夫電流定律 (Kirchhoff' s current law) /克希荷夫第一定律 (Kirchhoff' s first law) /克希荷夫節點定則 (Kirchhoff' s junction rule)

在某一節點相交的電路中，流入電流和與等於流出電流和。

### (二) 克希荷夫電壓定律 (Kirchhoff' s voltage law) /克希荷夫第二定律 (Kirchhoff' s first law) /克希荷夫環路定則 (Kirchhoff' s loop rule)

沿著任意閉合環路上，所有元件的電位變化和為零。

## 六、 電感 ((Electric) inductance)

某電路元件的電感  $L$  定義為單位電流變化  $\frac{dI}{dt}$  使其產生的感應電壓  $\Delta V$ ，即：

$$\Delta V = L \frac{dI}{dt}.$$

## 七、 電功率 (Electric power)

### (一) 電功率 (Electric power)

一電路元件的電功率為電流通過該元件時的電位能變化率，即：

$$P = \frac{dU_e}{dt} = I(\Delta V).$$

### (二) 電流熱效應、焦耳熱 (Joule heating) /歐姆熱 (Ohmic heating) /電阻熱 (Resistive heating or resistance heating) 與焦耳第一定律 (Joule' s first law) /焦耳定律 (Joule' s law) /焦耳-冷次定律 (Joule-Lenz law)

電流熱效應指電流通過帶有電阻的電路元件而產生熱的過程，其放出的熱稱焦耳熱/歐姆熱/電阻熱。若電阻所消耗的電位能全部轉換成熱能，則電功率等於熱功率，服從焦耳-冷次定律/焦耳定律：

$$P = I(\Delta V) = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R}.$$

## 八、 (電) 阻抗 ((Electric) impedance)

### (一) 容抗 ((Electric) capacitive reactance)

某電路元件在角頻率  $\omega$  的交流電下的電容為  $C$ ，則其容抗  $X_C$  定義為：

$$X_C = -\frac{1}{\omega C},$$

亦有定義為以上定義之相反數者，即容抗為正值，此不用。

### (二) 感抗 ((Electric) inductive reactance)

某電路元件在角頻率  $\omega$  的交流電下的電感為  $L$ ，則其感抗  $X_L$  定義為：

$$X_L = \omega L.$$

### (三) 電抗 ((Electric) reactance)

若電路元件有容抗則定義為容抗，若電路元件有感抗則定義為感抗。

### (四) (電) 阻抗 ((Electric) impedance)

表示為複數時，實部定義為電阻、虛部定義為電抗；表示為二維向量且使用笛卡爾座標時，第一分量定義為電阻、第二分量定義為電抗。

## 九、 直流電 (Direct current, DC) 與交流電 (Alternating current, AC)

### (一) 電池提供的直流電

$A$  為常數，電流對時間函數形如：

$$I = A.$$

### (二) 直流發電機提供的直流電

$A$  為振幅，電流對時間函數形如：

$$A|\sin(\omega t + \phi)|.$$

### (三) 交流發電機提供的直流電

$A$  為振幅，電流對時間函數形如：

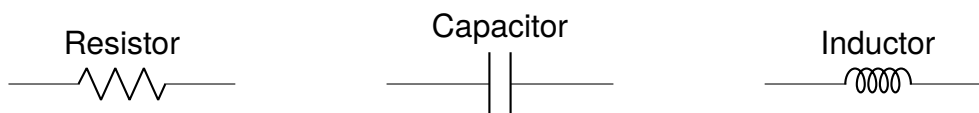
$$A \sin(\omega t + \phi).$$

## 十、 電路圖 (Circuit diagram)

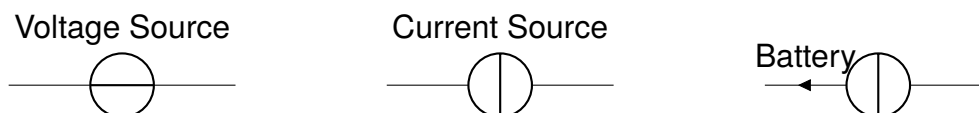
將電路元件以符號表示繪出電路。

## 十一、 Common Circuit Symbols

### (一) Basic Components



### (二) Power Sources



### (三) Switches



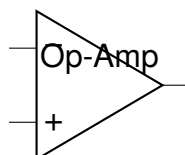
### (四) Diodes



### (五) Transistors



### (六) Operational Amplifiers



### (七) Measuring Instruments



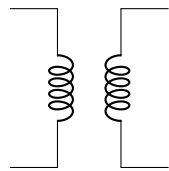
### (八) Connectors



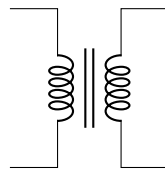


## (九) Transformers

I=Transformer



I=Transformer Core



## (十) Miscellaneous Components

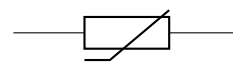
Independent Current Source



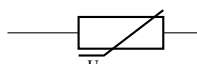
Variable Resistor



Thermistor



Varistor



## 第七節 電磁感應 (Electromagnetic Induction)

### 一、 迴路的磁通量

當考慮的導體形成一封閉迴路 (Closed loop) 時，考慮電流通過的封閉曲線圍成的曲面為  $S$  ( $S$  可任選，因為高斯磁定律保證通過邊界相同的曲面的磁通量均相同)，通過該導體的磁通量定義為通過  $S$  的磁通量。

$N$  匝線圈，一匝為一曲面  $S$ ，則該線圈的磁通量為  $S$  的磁通量的  $N$  倍，對於平面  $S$  可簡化為：

$$\Phi_B = N \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}.$$

### 二、 法拉第 (Faraday) 發現電磁感應

1831 年法拉第發現當通過某導體的磁場變動時會在其上產生感應電流。

### 三、 冷次定律 (Lenz' s law)

1834 年冷次提出，由於磁通量改變而產生的感應電流，所產生的磁通量總是抗拒磁通量的改變。

### 四、 感應電動勢 (Induced electromotive force) 與法拉第電磁感應定律 (Faraday's law of electromagnetic induction)

令單位時間通過一導體的磁通量  $\frac{d\Phi_B}{dt}$ ，產生的電動勢  $\mathcal{E}$  (以正電荷逆時針繞曲面正方向會獲得電位能者為正)：

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

### 五、 感應電流 (Induced current)

感應電動勢產生的電流稱感應電流：

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

## 六、 動生電動勢 (Motional electromotive force)

### (一) 動生電動勢 (Motional electromotive force)

動生電動勢指導體在磁場中移動所產生的感應電動勢，是感應電動勢的一例。令導體兩端點定向連線  $\ell$ ，移動速度  $\mathbf{v}$ ，動生電動勢  $\mathcal{E}$  (以正電荷自  $\ell$  始點移至其終點會獲得電位能為正) 為：

$$\mathcal{E} = \int_{\ell} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell.$$

*Proof.*

導體在  $dt$  中通過定向面積：

$$d\mathbf{S} = \mathbf{v} \times \ell dt.$$

磁通量時變率：

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} = (\mathbf{v} \times \ell) \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot \ell.$$

由法拉第電磁感應定律：

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \int_{\ell} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell.$$

□

### (二) 弗萊明右手法則 (Fleming's right-hand rule)

右手拇指、食指、中指垂直，一導體在右手食指所指方向的磁場中向右手拇指所指方向移動，則產生右手中指方向之動生電動勢。

## 七、 感應電場 (Induced electric field)

電荷在磁場  $\mathbf{B}$  中以速度  $\mathbf{v}$  移動時，勞倫茲力磁力項會對正、負電荷分別施以  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  與  $-\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  方向的力，當電荷在該方向可自由移動時 (如導體中的自由電子)，分布不均的電荷會產生一電場，稱感應電場  $\mathbf{E}$ 。

若正負電荷得以分離至感應電場產生的勞倫茲力電力項與前述磁力項相消，則達平衡而不再分離，此時：

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

## 第八節 電磁波 (Electromagnetic waves)

### 一、 歷史

- 1862 年：馬克士威提出馬克士威方程，並據之預測電磁波的存在及其速度與實驗測得之光速相同，故推測光是電磁波。
- 1887 年：赫茲 (Hertz) 藉由實驗證實了電磁波的存在與其速度為光速。

## 二、 非齊次電磁波方程 (Inhomogeneous electromagnetic wave equation)

根據法拉第電磁感應定律與安培—馬克士威定律：

$$\begin{aligned} & \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= \nabla \times \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{J}_f \right) \\ &= -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \mathbf{J}_f}{\partial t} \\ & \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= \nabla \times \left( \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{J}_f \right) \\ &= \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) + \mu \nabla \times \mathbf{J}_f \\ &= \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \mu \nabla \times \mathbf{J}_f \\ &= -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu \nabla \times \mathbf{J}_f \end{aligned}$$

對於任意三維向量場  $\mathbf{F}$ ：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

根據高斯定律與高斯磁定律：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

得非齊次電磁波方程：

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\mu \epsilon} \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{J}_f}{\partial t} \\ \left( \frac{1}{\mu \epsilon} \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} &= -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{J}_f \end{aligned}$$

## 三、 齊次電磁波方程 (Homogeneous electromagnetic wave equation)

當無電磁波源，即前述非齊次電磁波方程右側均為零時，有齊次電磁波方程，簡稱電磁波方程：

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\mu \epsilon} \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} &= 0 \\ \left( \frac{1}{\mu \epsilon} \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

## 四、 光速 (Speed of light)

波速為：

$$v = \frac{1}{\mu \epsilon}.$$

電場與磁場關係為：

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$v^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

對於自由空間，波速即真空光速：

$$c = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}.$$

## 五、 平面波 (Plane wave) 解

令電場有向振幅  $\mathbf{E}_0$ 、磁場有向振幅  $\mathbf{B}_0$ ，齊次電磁波方程的平面波解為：

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{k} \times \mathbf{B}}{\omega}$$

$$\frac{\mathbf{k}}{\omega} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}.$$

## 六、 波參數關係

$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{v}}$$

$$k = |\mathbf{k}|$$

$$\mathbf{v} = \nu \lambda \hat{\mathbf{v}} = \frac{\omega}{\mathbf{k}}$$

$$n = \frac{c}{|\mathbf{v}|}$$

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$$
$$= \frac{c}{n + \omega \cdot \frac{\partial n}{\partial \omega}}$$
$$= \mathbf{v} \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right)$$
$$= \mathbf{v} - \lambda \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda}$$
$$= \mathbf{v} + \mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{k}}$$

## 七、 電磁波的能量密度

$$u = \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 + \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2$$

## 八、 拉莫爾公式 (Larmor formula)

非相對論性點電荷  $q$  在加速度量值  $a$  的狀態下釋放電磁波的總功率  $P$  為：

$$P = \mu_0 \frac{q^2 a^2}{6\pi c}$$

## 九、 電磁波頻譜 (Electromagnetic spectrum)

光色為  $c$  下：

名稱	頻率範圍	波長範圍	能量範圍
伽馬 ( $\gamma$ ) 射線	300 EHz - 30 EHz	1 pm - 10 pm	1.24 MeV - 124 keV
硬 X 射線 (HX)	30 EHz - 3 EHz	10 pm - 100 pm	124 keV - 12.4 keV
軟 X 射線 (SX)	3 EHz - 30 PHz	100 pm - 10 nm	12.4 keV - 124 eV
極端紫外線 (EUV)	30 PHz - 3 PHz	10 nm - 100 nm	124 eV - 12.4 eV
近紫外線 (NUV)	3 PHz - 790 THz	100 nm - 380 nm	12.4 eV - 3.26 eV
可見光紫色 (Violet)	790 THz - 670 THz	380 nm - 450 nm	3.26 eV - 2.75 eV
可見光藍色 (Blue)	670 THz - 620 THz	450 nm - 485 nm	2.75 eV - 2.56 eV
可見光青色 (Cyan)	620 THz - 600 THz	485 nm - 500 nm	2.56 eV - 2.48 eV
可見光綠色 (Green)	600 THz - 530 THz	500 nm - 565 nm	2.48 eV - 2.19 eV
可見光黃色 (Yellow)	530 THz - 510 THz	565 nm - 590 nm	2.19 eV - 2.1 eV
可見光橘色 (Orange)	510 THz - 480 THz	590 nm - 625 nm	2.1 eV - 1.98 eV
可見光紅色 (Red)	480 THz - 400 THz	625 nm - 750 nm	1.98 eV - 1.65 eV
近紅外線 (NIR)	400 THz - 30 THz	750 nm - 10 $\mu$ m	1.65 eV - 124 meV
中紅外線 (MIR)	30 THz - 3 THz	10 $\mu$ m - 100 $\mu$ m	124 meV - 12.4 meV
遠紅外線 (FIR)	3 THz - 300 GHz	100 $\mu$ m - 1 mm	12.4 meV - 1.24 meV
極高頻 (EHF) 微波	300 GHz - 30 GHz	1 mm - 10 mm	1.24 meV - 124 $\mu$ eV
超高頻 (SHF) 微波	30 GHz - 3 GHz	10 mm - 100 mm	124 $\mu$ eV - 12.4 $\mu$ eV
特高頻 (UHF) 微波	3 GHz - 300 MHz	100 mm - 1 m	12.4 $\mu$ eV - 1.24 $\mu$ eV
甚高頻 (VHF) 無線電波	300 MHz - 30 MHz	1 m - 10 m	1.24 $\mu$ eV - 124 neV
高頻 (HF) 無線電波	30 MHz - 3 MHz	10 m - 100 m	124 neV - 12.4 neV
中頻 (MF) 無線電波	3 MHz - 300 kHz	100 m - 1 km	12.4 neV - 1.24 neV
低頻 (LF) 無線電波	300 kHz - 30 kHz	1 km - 10 km	1.24 neV - 124 peV
甚低頻 (VLF) 無線電波	30 kHz - 3 kHz	10 km - 100 km	124 peV - 12.4 peV
特低頻 (ULF) 無線電波	3 kHz - 300 Hz	100 km - 1 Mm	12.4 peV - 1.24 peV
超低頻 (SLF) 無線電波	300 Hz - 30 Hz	1 Mm - 10 Mm	1.24 peV - 124 feV
極低頻 (ELF) 無線電波	30 Hz - 3 Hz	10 Mm - 100 Mm	124 feV - 12.4 feV

## 十、 偏振 (Polarization)

電磁波中的振動方向以偏振表示。

### (一) s 偏振 (s polarization) /垂直 (German: senkrecht) 偏振與 p 偏振 (p polarization) /平行 (parallel) 偏振

s 偏振指電磁波的電場垂直於入射平面；p 偏振指電磁波的電場平行於入射平面。一個電磁波可以分解成偏振方向相互垂直的兩個單一偏振方向的電磁波。

## (二) 偏振片/偏振器 (Polarizer)

指可以過濾入射光僅使特定偏振光通過的光學元件。兩個相互垂直的偏振片可以阻擋所有的電磁波。

# 第九節 電磁學的應用

## 一、靜電學的應用

### (一) 驗電器 (Electroscope)

一瓶，一金屬細桿穿過瓶口絕緣塞，桿上瓶內端連接兩金屬箔片（一般為金箔），瓶外端連接金屬球。金屬箔片不帶電時因自身重量閉合，帶電時則因兩金屬箔片帶同性電之勞侖茲力而張開，張角與電量正相關。

- 欲檢測一物體是否帶電：使驗電器不帶電，以物接觸之，若驗電器張開則物帶電，否則否。
- 欲檢測一物體是否為導體：使驗電器帶電，以不帶電物接觸之，若驗電器保持張開則物為絕緣體，否則為導體。
- 欲檢測一物的電性：使驗電器帶已知電，以物接觸之，若驗電器張角變大則物帶與驗電器帶電同性之電，若張角變小則物不帶與驗電器帶電同性之電（若為絕緣體則必帶與驗電器帶電異性之電），若張角先變小至閉合而後張開則物帶量值較驗電器所帶電更多的與驗電器帶電異性之電。

### (二) 避雷針/引雷針 (Lightning rod)

避雷針是尖端氣體電暈放電效應的應用。當帶電雲層接近，避雷針尖端感應異性電，與空氣接觸放電使建築物的與雲層異性之電減少，而免遭雷擊。

### (三) 靜電除塵器 (Electrostatic precipitator, ESP)

靜電除塵器是尖端氣體電暈放電效應的應用。在排煙管的中心軸與外壁間施以高電壓，外壁接地，中心軸相對外壁為負電位且電場量值甚大使進入排煙管的氣體游離，其中負電者向管壁移動時撞擊煙塵使帶負電而累積在外壁上。

### (四) 凡德格拉夫起電機/范氏起電機 (Van de Graaff generator)

凡德格拉夫起電機是一種高壓靜電起電裝置，可產生高達數百萬伏特的靜電電壓。對底部的梳狀針通高壓電，針尖因尖端電暈放電效應而放電，電荷經由滾輪驅動的絕緣體運輸帶運輸到上方的空心金屬球上，分布到球的外表面並逐漸累積。常見演示包含：未接地的人觸碰金屬球，靜電使頭髮帶相同電荷，相互排斥；金屬球產生高壓電擊穿空氣，產生藍白色電光。

### (五) 影印機

影印機的原理基於靜電成像技術 (electrostatic imaging)。

- 光電導材料 (Photoconductive Material)：感光鼓 (photoreceptor drum) 是覆有光電導材料的圓筒。該材料在黑暗中絕緣，但受光照後會導電。

- 曝光 (Exposure)：文件被光源（如氙氣燈或雷射束）照亮，空白處光透射而過，將文件的影像投射到感光鼓上。鼓上未被光照的部分保持靜電荷，而被光照的部分靜電荷被中和。
- 顯影劑/碳粉 (Toner)：感光鼓表面的靜電影像吸引帶相反電荷的碳粉，使碳粉附著在感光鼓的圖像區域上。碳粉通常由樹脂、顏料和帶電材料組成。
- 轉印：一張紙被輸送到感光鼓附近，並通過轉印電極產生與感光鼓同性的靜電場。靜電場將碳粉圖像從感光鼓轉移到紙張上。
- 熱壓裝置 (Fuser unit)：紙張通過熱壓定影。高溫將碳粉融化並壓附到紙上，形成永久圖像。

## (六) 電容式觸控螢幕 (Capacitive touchscreen)

螢幕表面覆蓋一層透明的導電材料（如氧化銦錫，ITO），當手指、摻入石墨的手套或其他導體接觸螢幕時，會改變該點附近的電場分布，感應器陣列檢測到電場變化，透過運算轉換為觸控位置。電容式觸控是現今智慧型手機和平板電腦最常用者。

## 二、 靜磁學的應用

### (一) 電磁鐵 (Electromagnet)

載流螺線管內插白鐵棒等磁化率高的物體可增加磁場，稱電磁鐵，可用於起重機、電鈴、電話聽筒、揚聲器、磁浮列車等。

### (二) 電動機/馬達 ((Electric) motor)

電動機的主要功能是將電能轉換成機械能。其基本結構包括：

- 定子 (Stator)：靜止的部分，內部有磁鐵或電磁鐵，產生固定的磁場。
- 轉子 (Rotor)：旋轉的部分，內部有繞組，從外部輸入電流予之，使受定子的磁場的勞侖茲力而轉動。
- 換向器/整流子 (Commutator)：在直流或異步交流電動機中使用的裝置，通常由銅片和絕緣材料構成，能夠使轉子繞組在轉動時與輸入電流的外部導線接觸方向不斷反轉。對於直流電動機一般為兩半圓開口環 (Split rings)。
- 刷子 (Brushes)：與換向器接觸的碳或銅刷子，幫助電流傳輸。同步交流電動機則不用。
- 集電滑環 (Slip rings)：同步交流電動機中輸入電流的裝置，一般為兩圓形環。

以同步交流電動機為例，輸入電流  $I$ 、輸入功率  $P_e$ 、磁場  $\mathbf{B}$  量值  $B$ 、線圈兩側均  $\ell$ （電流向為正）、匝數  $N$ 、勞侖茲力  $\mathbf{F}$ 、輸出功率  $P_m$ 、力矩  $\tau$ 、旋轉角頻率  $\omega$ 、轉速  $\mathbf{v}$ 、效率  $\eta$ ：

$$\mathbf{F} = I\ell \times \mathbf{B}$$

$$P_m = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \tau \cdot \omega$$

$$\eta = \frac{P_m}{P_e}.$$

### (三) 磁軌砲 (Railgun)

在兩平行磁軌間架設長度  $\ell$  可滑動的導線，磁軌通電時由左進入經導線由右流出，垂直磁軌段導線受向前勞侖茲力加速，推動其前砲丸射出。

### (四) 基布爾秤 (Kibble balance) / 瓦特天平 (Watt balance) / 電流天平 (Current balance)

基布爾秤主要由以下幾個部分組成：

- 懸掛系統與天平臂：待測物被懸掛在一個天平臂的一端，另一端連接電磁線圈。天平臂必須高穩定性，並具有低摩擦的支點（例如空氣軸承）。
- 線圈與均勻磁場：線圈位於一個均勻的強磁場中，常使用強力永久磁鐵（如釹鐵硼磁鐵）或電磁鐵來提供。線圈受電磁感應產生感應電流，產生向上的勞侖茲力與重力平衡。
- 光學干涉儀：測量線圈的速度。
- 電壓與電流計：使用約瑟夫森效應（Josephson effect）測量電壓。量子霍爾效應（Quantum Hall effect, QHE）測量電流。

基布爾秤有兩種測量模式：

- 力平衡模式/靜態模式：待測物質量  $m$ 、等效重力加速度量值  $g$ 、均勻磁場量值  $B$ 、線圈等效長度  $\ell$ 、線圈電流  $I$ 、線圈不移動：

$$mg = I\ell B.$$

- 速度模式/動態模式：待測物質量  $m$ 、等效重力加速度量值  $g$ 、均勻磁場量值  $B$ 、線圈等效長度  $\ell$ 、線圈不施加電流、線圈在磁場中以速率  $v$  垂直磁場移動、動生電動勢  $\mathcal{E}$ ：

$$\mathcal{E} = vB\ell.$$

由於均勻磁場量值與線圈等效長度較難直接測量，故以速度模式/動態模式測量不確定度較小的電壓（以知動生電動勢）與速率，得到  $B\ell$  並代入力平衡模式/靜態模式中使用，使力平衡模式/靜態模式僅需測量不確定度較小的電流。聯立得：

$$mg = \frac{VI}{v}.$$

基布爾秤的發展促成了 2019 年國際單位制（SI）的重新定義，將公斤單位改為基於普朗克常數的物理量，而不再依賴國際公斤原器。

### (五) 質譜儀 (Mass spectrometry, MS)

- 等速率者：使帶電質點射流先通過速度選擇器，速度垂直磁場，至一板，速度為電場量值和磁場量值之比值者通過一縫隙，其餘攔下。通過者再進入與前述速度選擇器之磁場同向的均勻磁場中，作迴旋運動，過半圓周將落於板上。其落點與前述縫隙之平行板方向距離為兩倍迴旋半徑，與質荷比呈正比。
- 等電壓者：自一縫隙中發射以等電壓發射帶電質點，進入垂直其速度的均勻磁場，作迴旋運動，過半圓周將落於板上。其落點與前述縫隙之平行板方向距離為兩倍迴旋半徑，與根號質荷比呈正比。

檢測器檢測落點，得質譜（Mass spectrum），常用於測量莫耳質量，如同位素、食安、有機化合物分析等。



### 三、 電路學的應用

#### (一) 接地線

電器正常運作時電流只在設計好的迴路流動，而不與其金屬外表接觸；漏電時則會與其金屬外表接觸，當人體或其他接地導體接觸其金屬外表時就會產生迴路。三腳插頭中的接地線將電器的金屬外表接地，發生漏電時就可以將金屬外表上的電荷導向接地線。

#### (二) 輸電 (Electric power transmission)

輸入電功率  $P_i$  不變，令輸電線為歐姆導體，其熱功率  $P_h$  與輸入電壓  $\Delta V_i$  的關係為：

$$P_h = I^2 R = \left( \frac{P_i}{\Delta V_i} \right)^2 R.$$

即熱功率與平方輸入電壓呈反比，這就是為什麼長距離輸電要使用高壓電，以減熱功耗。

#### (三) 電阻式觸控螢幕 (Resistive touchscreen)

螢幕由兩層導電膜組成，當按壓螢幕時，兩層膜接觸。接觸點的電阻變化會被測量，並透過運算轉換為觸控位置。不需要導電特性，可以用任何東西觸控。

### 四、 電磁感應的應用

#### (一) 電磁感應拋射實驗

電磁鐵裝置上方套一金屬環，電磁鐵接通時產生磁場，金屬環上發生電磁感應，使兩者相斥，金屬環拋射出。

#### (二) 法拉第弔詭 (Faraday paradox)

在有電動勢時導體中的自由電子會產生電流。假設我們有一個導體圓盤放在垂直於圓盤平面的均勻磁場中，我們在圓盤的中心和邊緣之間放置一個導線並測量兩端的電壓。當圓盤旋轉時，根據法拉第定律，我們應該測量到動生電動勢。但如果我們將整個裝置（磁場、圓盤和導線）一起旋轉，我們仍然可以測到動生電動勢。

#### (三) 法拉第圓盤單極發電機 (Faraday disk homopolar generator)

金屬圓盤在磁場中轉動輸出直流電。

#### (四) 發電機 (Electric generator)

發電機的主要功能是將機械能轉換成電能。其基本結構包括：

- 定子 (Stator)：靜止的部分，內部有磁鐵或一組固定的繞組（線圈）形成的電磁鐵作為磁場系統，產生固定的磁場。
- 轉子 (Rotor)：旋轉的部分，內部有繞組，受機械能轉動，使受定子之磁場產生感應電流。

- 換向器/整流子 (Commutator)：在直流或異步交流發電機中使用的裝置，通常由銅片和絕緣材料構成，能夠使轉子繞組在轉動時與輸出電流至外部導線接觸方向不斷反轉。對於直流發電機一般為兩半圓開口環 (Split rings)。
- 刷子 (Brushes)：與換向器接觸的碳或銅刷子，幫助電流傳輸。同步交流發電機則不用。
- 集電滑環 (Slip rings)：同步交流發電機中輸出電流的裝置，一般為兩圓形環。

以同步交流發電機為例，感應電動勢  $\mathcal{E}$ 、磁場  $\mathbf{B}$  量值  $B$ 、線圈定向曲面  $\mathbf{S}$  面積  $S$ 、匝數  $N$ 、旋轉角頻率  $\omega$ 、時間  $t$ ：

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= N\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \\ &= -NBS \frac{d\cos(\omega t)}{dt} \\ &= \omega NBS \sin \omega t.\end{aligned}$$

## (五) 變壓器 (Transformer)

變壓器是一種被動元件，可將電能從一個電路傳輸到其他電路且電壓不同。變壓器由一磁芯（軟鐵芯環）上纏繞主線圈 (Primary coil) 與一至多個副線圈 (Secondary coil) 組成，各線圈間互不以導體接觸。線圈的磁通量變化比值等於其線圈匝數比值，故依法拉第電磁感應定律，感應電動勢比值等於其線圈匝數比值。副線圈匝數大於主線圈為升壓變壓器，副線圈匝數小於主線圈為降壓變壓器。理性情況下，電壓等於電動勢，副線圈總功率等於主線圈功率。對於單一副線圈，線圈的電流比值之倒數等於其線圈匝數比值。

## (六) 電磁爐 (Induction cooker)

電磁爐的主要功能是將電能轉換成熱能，加熱金屬鍋具。其基本結構包括：

- 電磁線圈 (Induction coil)：電磁爐的核心部分，通常位於爐面下方，由銅線繞製而成。當交流電流通過這些線圈時，會產生變化的磁場。
- 爐面 (Cooktop)：通常由玻璃陶瓷製成，能夠承受高溫並且易於清潔。爐面上有一個或多個加熱區域，覆蓋在電磁線圈上方。
- 控制面板 (Control Panel)：用於設定加熱功率、時間等，電磁爐會根據設定調節電磁線圈的電流。
- 冷卻系統 (Cooling System)：包括風扇和散熱片，用於散熱以防止電磁線圈過熱。這些部件幫助保持電磁爐的工作溫度在安全範圍內。
- 溫度感測器 (Temperature Sensor)：用於監測爐面的溫度或鍋具的溫度，並將信息傳送給控制系統，以調整加熱功率。
- 安全裝置 (Safety Devices)：包括過熱保護、過電流保護、故障警報等，旨在確保使用過程中的安全性。
- 金屬鍋具：金屬材料在電磁線圈形成變動磁場中產生渦電流，渦電流在鍋具內發生電流熱效應而加熱之。

## (七) 電吉他

電吉它上有一小段磁化琴弦，旁放置感應線圈，磁化琴弦振動時線圈的磁通量改變，產生感應電動勢，可將琴弦振動轉換成電流訊號。

## 五、 電磁波的應用

### (一) 各波段電磁波的應用

- 無線電波：應用振幅調變、頻率調變、相位調變（Phase modulation）等技術，狹窄頻帶的無線電波即可傳遞資訊。常用於無線通訊、廣播、雷達。
- 微波：常用於 Wi-Fi、微波爐。
- 紅外線：人體熱輻射大致處於紅外線，可用於熱感攝影。物質主要吸收的輻射熱為紅外線，以旋轉或振動等方式吸收。常用於遙控器、熱感攝影。
- 可見光：人類眼睛可見的頻帶。顏色依視頻率而定。
- 紫外線：可協助皮膚製造維生素 D，但曝曬過量易曬傷與誘發皮膚癌。可殺死微生物。常用於消毒、殺菌、鈔票防偽辨識。
- X 射線：穿透力強，身體組織對其吸收率不同，可用於拍攝身體內部結構的影響。X 射線波長與一般晶格長度相近，可用繞射現象研究晶格結構。常用於放射性醫療。
- 伽瑪射線：通常是核反應放出，其能量足以殺死細胞，可用於腫瘤治療。常用於放射性醫療。

### (二) 太陽眼鏡

太陽眼鏡的鏡片為偏振片，阻擋一部分的光故視野較暗，光經過反射後在不同偏振方向強度不同，配戴偏振片時可過濾許多角度的漫射，降低周遭漫射的干擾，使景物顯得較清晰，色彩對比較鮮明。

### (三) 立體電影

立體電影係以兩個視角稍微不同的攝影機同時拍攝兩個影像，並以偏振方向相互垂直的光分別播放兩者，觀影時兩眼分別配戴該二偏振方向的偏振片，產生立體效果。

### (四) 無線射頻辨識系統（Radio frequency identification, RFID）

- RFID 標籤（Tag）：附著在物品上的裝置，內含負責儲存資料與處理通訊的晶片（Integrated Circuit, IC）。根據供電方式可分為：
  - 被動式（Passive）：無內建電池，靠讀取器發出的電磁波讓 RFID 標籤中的線圈產生感應電流供電，並回應訊號，成本低、壽命長，但讀取距離較短（通常在幾公分到數公尺）。
  - 主動式（Active）：內建電池，可主動發送訊號，讀取距離較遠（數十公尺以上），適用於物流或大型設備追蹤。
  - 半主動式（Semi-passive）：內建電池但不主動發射，仍需讀取器激活，適用於感測器應用。

- RFID 讀取器 (Reader)：具有發射器 (Transmitter)，負責發射特定頻率的無線電波以喚醒標籤，與接收器 (Receiver)：負責接收標籤的回應訊號並解碼。
- 後端系統 (Backend System)：負責儲存、分析 RFID 讀取器收集到的數據。

RFID 使用的電磁波頻率愈大，適用距離愈大：

- 低頻 (LF)：短距離 (10 公分內)，常用於動物識別晶片、門禁卡等。
- 中頻 (MF) 至高頻 (HF)：中距離 (1 公尺內)，常用於電子票證、電子支付等。
- 近場通訊 (Near-field communications, NFC)：利用 13.56 MHz 的電磁波以 106 kbit/s、212 kbit/s 或 424 kbit/s 傳遞資料的 RFID 系統。
- 微波：遠距離，物流、交通、倉儲管理、GPS 追蹤等。

## 六、 非侵入式的神經影像技術

### (一) 腦波 (Brain wave)

大腦中的神經元 (neuron) 通過動作電位 (action potential) 傳遞訊號，並在突觸後電位 (postsynaptic potential) 影響下，產生局部電流，當大量神經元同步活躍時，誘發微弱的電場變化與磁場，並改變腦中磁矩排列。

波形類型	頻率範圍	主要功能與狀態
$\delta$ 波	0.5-4 Hz	深度睡眠、昏迷
$\theta$ 波	4-8 Hz	睡夢、冥想、創意
$\alpha$ 波	8-13 Hz	放鬆、休息
$\beta$ 波	13-30 Hz	專注、思考
$\gamma$ 波	>30 Hz	高階認知、記憶

### (二) 腦電圖/腦電波儀 (Electroencephalography, EEG)

EEG 通常使用國際 10-20 系統來安裝電極 (例如 Fp1、Fp2、O1、O2 等)，電極偵測來自大腦皮質的電位變化，通常範圍為微伏特級別。接著訊號放大如低通濾波 (去除肌肉活動雜訊)、高通濾波 (去除直流漂移) 與帶阻濾波 (去除 50/60 Hz 電力噪音)。

### (三) 腦磁圖/腦磁波儀 (Magnetoencephalography, MEG)

MEG 主要利用超導量子干涉儀 (SQUID, Superconducting Quantum Interference Device) 來檢測這些極微弱的磁場變化。SQUID 具有極高的磁場靈敏度，可以偵測到  $10^{-15}$  特斯拉級別的磁場變化，比地磁場 (約 50 微特斯拉) 還要小上百億倍，會感應來自神經元電流的磁場，並轉換為可分析的電訊號，再透過數學模型 (如最小平方誤差法或貝葉斯方法) 來反推訊號來源，確定大腦活動的位置和時間模式。

#### (四) 磁振造影 (Magnetic Resonance Imaging, MRI)

MRI 是一種非侵入式的醫學影像技術，主要利用核磁共振現象 (Nuclear Magnetic Resonance, NMR) 來產生人體內部的高解析度影像，主要涉及強磁場、射頻脈衝 (RF Pulse)、氫原子核自旋磁矩共振來重建影像。

- 拉莫爾頻率 (Larmor frequency)：人體內約 70% 是水，其中氫原子自旋 (spin) 磁矩在強磁場中會沿磁場方向排列，並呈現拉莫爾進動 (Larmor precession)，即繞著磁場軸旋轉，其頻率稱為拉莫爾頻率，等於磁通量密度乘以氫核的磁旋比 (gyromagnetic ratio)，後者約為 42.58 MHz/T。
- 射頻脈衝 (Radio Frequency Pulse, RF Pulse)：當向組織發送與拉莫爾頻率匹配的射頻脈衝時，氫質子的磁矩會吸收能量，並從磁場方向偏轉。當 RF 脈衝關閉後，質子會逐漸回到原來的平衡狀態，釋放出射頻訊號，這個過程稱為弛豫 (relaxation)。
- 弛豫時間 (Relaxation Time)：MRI 主要依靠縱向弛豫時間  $T_1$  與橫向弛豫時間  $T_2$  來形成影像，前者代表質子回復到靜磁場方向的過程，後者代表質子相互干擾導致橫向磁化消失的過程。
- 梯度磁場 (Gradient Magnetic Field)：通過額外施加梯度磁場，讓不同區域的拉莫爾頻率稍有變化，這樣可以利用傅立葉變換 (Fourier Transform, FT) 將接收到的訊號轉換為影像。

加權影像：

- $T_1$  加權影像：脂肪亮，水暗，適合觀察解剖結構。
- $T_2$  加權影像：水亮，脂肪暗，適合檢測水腫、腦脊液、病變區域。
- 質子密度影像 (PDW)：強調質子濃度，組織對比較低。

應用：

- 功能性磁振造影 (fMRI) 用於研究大腦活動，透過血氧水平變化 (BOLD) 來觀察神經活動。
- 磁振血管造影 (Magnetic Resonance Angiography, MRA) 用於檢測血管狹窄或阻塞。