傅立葉分析

沈威宇

2025 年 1 月 15 日

目錄

第一節　傅立葉分析（Fourier Analysis）

傅立葉分析指將函數分解為多個正弦函數之和的分析。其分解過程稱為傅立葉轉換 (或變換) (Fourier transform)。

一、　傅立葉級數（Fourier series）

$$\left(f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{inx}\right)\iff\left(F_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x\right)$$

其中 F_n 為複振幅。
對於實函數可以寫成：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$$

其中 a_n 和 b_n 是實頻率分量的振幅。

二、　傅立葉（積分）轉換與逆轉換

$$\hat{f}(\mathbf{k})=\mathcal{F}(f)(\mathbf{k})=\int_{\mathbb{R}^d}f(\mathbf{x})e^{-2\pi i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

其中：$\mathbf{x}$ 是實空間中的變量，相當空間中的位置向量或時間變量，為一個 d-維向量；$\mathbf{k}$ 是頻率空間中的變量，相當傅立葉級數中於每個正弦波的波數，也是一個 d-維向量；$f(\mathbf{x})$ 符合：

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}|f(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right|<\infty$$

證明：

Statement.
For all $f(\mathbf{x})$ such that $\left|\int_{\mathbb{R}^d}f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right|<\infty$, the following holds true:

$$\left(F\big(\mathbf{k}\big)=\int_{\mathbb{R}^d}f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)\iff\left(f(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d}F(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{k}\right)$$

Proof.
We begin by assuming that $F(\mathbf{k})=\int_{\mathbb{R}^d}f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$. First, we show that the inverse Fourier transform of $F(\mathbf{k})$ recovers $f(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x})&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d}F(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{k}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}f(\mathbf{x}')e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}\,\mathrm{d}\mathbf{x}'\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

By changing the order of integration, we get:

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x})&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d}f(\mathbf{x}')\left(\int_{\mathbb{R}^d}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{k}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}'\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d}f(\mathbf{x}')\left(\int_{\mathbb{R}^d}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\,\mathrm{d}\mathbf{k}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}'.\end{aligned}$$

The integral inside is a known result of the Dirac delta function:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\,\mathrm{d}\mathbf{k} = 2\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').$$

Therefore,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}')\cdot 2\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\mathrm{d}\mathbf{x}' \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\mathrm{d}\mathbf{x}' \\ &= f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

This completes the proof that the inverse Fourier transform of $F(\mathbf{k})$ gives back $f(\mathbf{x})$, thus proving the statement. $\square$