指數與對數

沈威宇

2024 年 9 月 16 日

第一章　指數（Exponent）與對數（Logarithm）

一、　實數域指數

1. 名稱：a^n 中 a 稱底數，n 稱指數。

2. 定義：a^n 的定義域 $\{(a,n)\} = (\mathbb{R}, \mathbb{N}) \cup (\mathbb{R}\ \ \{0\}, \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R})$。對於有定義的 a^n 且 $n \in \mathbb{N}$，定義 $a^n = \prod_{i=1}^{n} a$。對於有定義的 a^n 且 $n = \frac{1}{p}$，其中 $p \in \mathbb{N}$，定義 $a^n = \sqrt[p]{a}$。對於有定義的 a^n 且 $n = 0$，定義 $a^n = 1$。對於有定義的 a^n 且 $n < 0$，定義 $a^n = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a}$。對於有定義的 a^n 且 $n \in \mathbb{R}\ \ \mathbb{Q}$，以逼近法定義 a^n。

3. $w > 0, y$ 為正奇數，則定義 $\sqrt[y]{-w} = -\sqrt[y]{w}$，但 $(-w)^y$ 無意義。

4. 指數函數：$f(x) = a^x$ 稱以 a 為底的指數函數。定義域 $\mathbb{R}$，值域 $\{y \mid y > 0\}$。

5. 科學記號：$a \times 10^n$，其中：$1 \leq a < 10$，$n \in \mathbb{Z}$。

6. 指數成長：指 $f'(x) \propto f(x)$，即 $f(x) \propto e^x$。

7. 指數律：

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

8. 微積分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x$$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$$

二、　實數域對數

1. 名稱：$\log_a(b)$ 中 a 稱底數，b 稱真數。

2. 定義：$\log_a(b)$ 的定義域 $\{(a,b)\} = (\mathbb{R}_{>0 \wedge \neq 1}, \mathbb{R}_{>0})$。對於有定義的 $\log_a(b)$，定義 $x = \log_a(b) \equiv a^x = b$

3. 常用（**Common**）對數：$\log(b) = \log_{10}(b)$。

4. 自然（**Natural**）對數：$\ln(b) = \log_e(b)$。

5. 對數律：

$$\log_a(r) + \log_a(s) = \log_a(rs)$$

$$\log_a(r) - \log_a(s) = \log_a\left(\frac{r}{s}\right)$$
$$\log_{a^m}(r^n) = \frac{n}{m}\log_a(r)$$
$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c a}$$

6. 微積分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x) = \frac{1}{x}$$
$$\int_0^x \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x$$

7. 尤拉數：

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

8. 小數，其整數部分稱首數（**Characteristic**），小數部分稱尾數（**Mantissa**）。

三、 複數域指數

定義：z^w 的定義域 $\{(z, w)\} = (\mathbb{C}, \mathbb{C})$。令 $z = re^{i\theta}$、$w = a + bi$。a^n 定義為：

$$\begin{aligned}
z^w &= \left(re^{i\theta}\right)^{a+bi} \\
&= \left(re^{i\theta}\right)^{a+bi} = \left(re^{i\theta}\right)^{a} \cdot \left(re^{i\theta}\right)^{bi} \\
&= r^a \cdot e^{ia\theta} \cdot e^{ib\ln(r)} \cdot e^{-b\theta} \\
&= r^a \cdot e^{i(a\theta + b\ln(r) - b\theta)}
\end{aligned}$$

指數律仍成立。

四、 複數域對數

定義：$\ln(z)$ 的定義域 $\{z\} = \mathbb{C}\ \ \{0\}$。令 $z = x + yi$，$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 為 z 的模長，$\arg(z) = \arg(x + yi) = \operatorname{atan2}(y, x)$ 為 z 的輻角主值。$\ln(z)$ 定義為：

$$\ln(z) = \ln(\|z\|) + i\arg(z)$$

對數律仍成立。