

多項式函數與方程

沈威宇

2024 年 11 月 10 日

目錄

第一章 多項式函數與方程	1
一、 方程組	1
二、 多項式	1
三、 最高次項次數定理	1
四、 商式極限	1
五、 近似	1
六、 除法定理	1
七、 平移與伸縮變換	2
八、 側與距離	2
(一) 側	2
(二) 直線與點距離	2
(三) 直線間距離	2
(四) 直線到點最短向量	2
(五) 平行直線之間公垂向量	2
九、 零函數	3
十、 一元一次函數	3
(一) 一般式 (斜截式)	3
(二) 點斜式	3
十一、 一元二次函數	3
(一) 一般式	3
(二) 標準式	3
(三) 判別式	3
(四) 根	3
(五) 圖形特徵與根數	4
十二、 一元三次函數	4
(一) 一般式	4
(二) 標準式	4
(三) 判別式	4
(四) 根	5
(五) 圖形特徵	6

十三、 平面上的直線	6
(一) 一般式	6
(二) 截距式	6
(三) 斜截式	7
(四) 點斜式	7
(五) 參數式	7
(六) 特性	7

第一章 多項式函數與方程

一、 方程組

1. 相容方程組：一組方程組有解，則稱其為相容方程組。
2. 相依方程組：一組方程組中，其中一者成立則其他者均成立，則稱其為相容方程組。
3. 矛盾方程組：一組方程組無法同時成立，則稱其為矛盾方程組。

二、 多項式

1. 多項式指由多個項（term）組成的代數表達式，每個項是常數與零或正整數個變數的乘積，且每個變數的指數必須是非負整數。
2. 令多項式 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $q(x)$ 、 $r(x)$ 。

三、 最高次項次數定理

$$\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$$

四、 商式極限

領導係數指最高次項係數

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0, \deg(f(n)) < \deg(g(n)) \\ \frac{f(x) \text{ 領導係數}}{g(x) \text{ 領導係數}}, \deg(f(n)) = \deg(g(n)) \\ \text{不存在}, \deg(f(n)) > \deg(g(n)) \end{cases}$$

五、 近似

$f(x)$ 在 $x = a$ 的 n 次近似 ($n \leq \deg(f(x))$) = $f(x)$ 之泰勒級數最低次 n 項

六、 除法定理

恰有一組 $q(x)$ 、 $r(x)$ 滿足：

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

$$\deg(r(x)) < \deg(g(x))$$

若 $r(x) = 0$ 則稱 $q(x)$ 為 $f(x)$ 之因式。

餘式定理：若 $q(x) = ax + b$ 則 $r(x) = f\left(\frac{b}{a}\right)$ 。

因式定理： $f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$ 若且惟若 $ax + b$ 為 $f(x)$ 的因式。

七、 平移與伸縮變換

1. 對於任意函數 $f(x)$ ， $y = f(x)$ 右移 h 單位，上移 k 單位，得 $y = f(x - h) + k$ 。
2. 對於任意函數 $f(x)$ ， $y = f(x)$ 以 x 軸為基準線鉛直伸縮為原來的 a 倍，以 y 軸為基準線水平伸縮為原來的 b 倍，得 $y = af\left(\frac{x}{b}\right)$ 。

八、 側與距離

(一) 側

在 \mathbb{R}^n 空間中，假設有 $L: (f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0)$ 。點 P 滿足 $f(P) > 0$ 若且惟若 P 在 L 的正側。點 P 滿足 $f(P) = 0$ 若且惟若 P 在 L 上。點 P 滿足 $f(P) < 0$ 若且惟若 P 在 L 的負側。

(二) 直線與點距離

在 \mathbb{R}^n 空間中，假設有 $L: (f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0)$ ，且 f 為一次函數，且 f 的係數為 a_1, a_2, \dots, a_n ，且 f 的常數項為 c 。點 P 到 L 的距離 $d(P, L) = \frac{|f(P)|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$ 。

(三) 直線間距離

在 \mathbb{R}^n 空間中，假設有 $L_1: (f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0)$ 、 $L_2: (g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0)$ ，且 f 、 g 為一次函數，且 f 、 g 的係數均為 a_1, a_2, \dots, a_n ，且 f 、 g 的常數項分別為 c 、 d 。 L_1 到 L_2 的距離 $d(L_1, L_2) = \frac{|c - d|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$ 。

(四) 直線到點最短向量

在 \mathbb{R}^n 空間中，假設有 $L: (f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0)$ ，且 f 為一次函數，且 f 的係數為 a_1, a_2, \dots, a_n ，且 f 的常數項為 c 。 L 上距離點 P 最近的點到點 P 的向量 $\vec{v} = \frac{f(P)}{\sum_{i=1}^n a_i^2} (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

(五) 平行直線之間公垂向量

在 \mathbb{R}^n 空間中，假設有 $L_1: (f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0)$ 、 $L_2: (g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0)$ ，且 f 、 g 為一次函數，且 f 、 g 的係數均為 a_1, a_2, \dots, a_n ，且 f 、 g 的常數項分別為 c 、 d 。 L_1 上任意點 P 到 L_2 上距離點 P 最近的點的向量 $\vec{v} = \frac{c - d}{\sum_{i=1}^n a_i^2} (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

九、 零函數

$$f(x) = 0$$

十、 一元一次函數

$$a \neq 0$$

(一) 一般式 (斜截式)

$$f(x) = ax + b$$

其中 a 稱斜率， b 稱 y 截距， $\tan^{-1}(a)$ 稱斜角。

(二) 點斜式

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

零函數與一元一次函數合稱線性函數。

十一、 一元二次函數

$$a \neq 0$$

(一) 一般式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(二) 標準式

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

$$\text{其中 } (h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$$

(三) 判別式

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

(四) 根

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} e^{k\pi i}}{2a}, \text{ where } k = 0, 1 \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

註：尤拉公式：

$$e^{bi} = \cos(b) + i \sin(b)$$

註： $x^n = y$ 的解為：

$$x = \sqrt[n]{y} e^{\frac{2n\pi i}{n}}, \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

(五) 圖形特徵與根數

1. 拋物線。

2. 頂點 V 、極值點： (h, k) 。

3. 對稱軸： $x = h$ 。

4. 開口： a 為正，開口向上，反之向下。 $|a|$ 愈大，開口愈小。

5. 根數：

(1) $a > 0$ 且 $\Delta < 0$ ：函數恆正，無實根，有二共軛複根。

(2) $a < 0$ 且 $\Delta > 0$ ：函數恆負，無實根，有二共軛複根。

(3) $a > 0$ 且 $\Delta = 0$ ：函數不負，一重實根。

(4) $a < 0$ 且 $\Delta = 0$ ：函數不正，一重實根。

(5) $\Delta < 0$ ：函數與 x 軸有二交點，二實根。

十二、一元三次函數

$$a \neq 0$$

(一) 一般式

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

(二) 標準式

$$f(x) = a(x - h)^3 + p(x - h) + k$$

$$\text{其中 } (h, p, k) = \left(\frac{b}{3a}, c - \frac{b^2}{3a}, \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d \right)$$

(三) 判別式

$$\Delta = \left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2} \right)^3$$

(四) 根

1. 直接表達

$$x = -\frac{b}{3a} + e^{\frac{2k\pi i}{3}} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} \\ + e^{\frac{2(3-k)\pi i}{3}} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} \quad , \text{ where } k = 0, 1, 2$$

2. 三解分開表達

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} \\ + \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} \\ x_2 = -\frac{b}{3a} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} \\ + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} \\ x_3 = -\frac{b}{3a} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} \\ + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}}$$

3. 卡迪諾公式 (Cardino's formula) 表達

令：

$$h = \frac{b}{3a} \\ p = c - \frac{b^2}{3a} \\ k = \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d \\ r = \frac{p}{a} \\ s = \frac{k}{a} \\ u = -\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{r^3}{27}} e^{\frac{2k\pi i}{2}} \quad , \text{ where } k = 0, 1 \\ C = \sqrt[3]{u} e^{\frac{2k\pi i}{3}} \quad , \text{ where } k = 0, 1, 2$$

則：

$$x = C - \frac{r}{3C} + h$$

4. 一般化卡迪諾公式表達

令：

$$\Delta_0 = b^2 - 3ac$$

$$\Delta_1 = 2b^3 - 9abc + 27a^2d$$

$$u = \Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3} e^{\frac{2k\pi i}{2}}, \text{ where } k = 0, 1$$

$$C = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + u}{2}} e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \text{ where } k = 0, 1, 2$$

則：

$$x = -\frac{1}{3a} \left(b + C + \frac{\Delta_0}{C} \right)$$

(五) 圖形特徵

1. 頂點 $V : (h, k)$ 。

2. 二階旋轉對稱點、拐點（一階導數為零，二次導數為零）： $(h, f(h))$ 。

3. 鞍點（非極值的駐點，駐點指一階導數為零）： $ap < 0$ 若且惟若存在二個鞍點， $p = 0$ 若且惟若存在一個鞍點（圖形單調遞增或減）， $ap > 0$ 若且惟若不存在鞍點（圖形嚴格遞增或減）。

4. 極值：不存在。

十三、 平面上的直線

(一) 一般式

$$ax + by + c = 0$$

(二) 截距式

若 $ab \neq 0$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

其中 $p = -\frac{c}{a}$ 、 $q = -\frac{c}{b}$ 分別為 x 、 y 截距。

(三) 斜截式

若 $b \neq 0$ ，即 y 為 x 的函數

$$y = f(x) = mx + q$$

其中 m 稱斜率， $\tan^{-1}(m)$ 稱斜角。

(四) 點斜式

若 $b \neq 0$ ，即 y 為 x 的函數

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

(五) 參數式

設相異兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ：

直線 \overleftrightarrow{AB} 的參數式：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

射線 \overrightarrow{AB} 的參數式：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad t \geq 0$$

線段 \overline{AB} 的參數式：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(六) 特性

1. 平面上直線 $L_1: ax + by + c = 0$ 、 $L_2: dx + ey + f = 0$ ：
若且惟若 $L_1 \parallel L_2$ ； $ad + be = 0$
若且惟若 $L_1 \perp L_2$ ；若 L_1 、 L_2 存在斜率 m_1 、 m_2 則： $m_1 = m_2$ 若且惟若 $L_1 \parallel L_2$ ， $m_1 m_2 = -1$
若且惟若 $L_1 \perp L_2$ 。
2. $L: ax + by + c$ ： $a > 0$ 則 $ax + by + c > 0$ 在 L 之右半平面； $b > 0$ 則 $ax + by + c > 0$ 在 L 之上半平面。