向量與向量空間

沈威宇

2024 年 11 月 24 日

目錄

第一章　向量與向量空間

第一節　向量與向量空間相關定義

一、　向量空間（**Vector Space**）

又稱線性空間，是線性代數中的基本概念之一。它是一個由向量組成的集合，這些向量可以進行加法運算和數量乘法運算，且滿足一定的公理。

(一)　公理

一個集合 V 是一個向量空間，如果它滿足以下條件：

1. 加法封閉性：對於任意 $u, v \in V$，有 $u + v \in V$。
2. 加法交換律：對於任意 $u, v \in V$，有 $u + v = v + u$。
3. 加法結合律：對於任意 $u, v, w \in V$，有 $(u + v) + w = u + (v + w)$。
4. 零向量存在：存在一個零向量 $0 \in V$，使得對於任意 $v \in V$，有 $v + 0 = v$。
5. 加法逆元存在：對於任意 $v \in V$，存在一個向量 $-v \in V$，使得 $v + (-v) = 0$。
6. 數量乘法封閉性：對於任意 $v \in V$ 和標量 $c \in \mathbb{R}$（或 $\mathbb{C}$），有 $c \cdot v \in V$。
7. 數量乘法分配律：對於任意 $c, d \in \mathbb{R}$ 和 $v \in V$，有 $(c + d) \cdot v = c \cdot v + d \cdot v$。
8. 向量乘法分配律：對於任意 $c \in \mathbb{R}$ 和 $u, v \in V$，有 $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v$。
9. 數量乘法結合律：對於任意 $c, d \in \mathbb{R}$ 和 $v \in V$，有 $(cd) \cdot v = c \cdot (d \cdot v)$。10. 數量乘法單位元存在：對於任意 $v \in V$，有 $1 \cdot v = v$，其中 1 是純量域的乘法單位元。

(二)　例子

1. 歐幾里得空間：例如 $\mathbb{R}^n$，即所有 n 維實數向量的集合。
2. 多項式空間：例如所有次數不超過 n 的多項式的集合。
3. 矩陣空間：例如所有 $m \times n$ 矩陣的集合。
4. 函數空間：例如所有從實數域到實數域的連續函數的集合。

二、 模長（Norm）

模長是一種用來測量向量大小或長度的函數，可以視作向量空間中的長度或距離概念的推廣。

(一) 定義

給定一個向量空間 V，模長是一個映射 $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$，它將向量映射到一個非負實數，滿足以下三個條件：

1. 非負性：對於所有 $\mathbf{v} \in V$，模長 $\|\mathbf{v}\| \geq 0$，且當且僅當 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 時，$\|\mathbf{v}\| = 0$。

2. 齊次性（均勻性）：對於任意的向量 $\mathbf{v} \in V$ 和純量 $\alpha \in \mathbb{R}$（或 $\alpha \in \mathbb{C}$），有 $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$。

3. 三角不等式：對於任意的向量 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$，有 $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$。

(二) 歐幾里得模長

ℓ_2 範數，是最常見的模長定義，對應於向量的歐幾里得距離。

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

(三) 曼哈頓模長

ℓ_1 範數

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|$$

(四) 無窮範數

ℓ_∞ 範數

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\}$$

三、 線性獨立（Linear independence）

對於一組向量 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$，如果方程式：

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$$

僅在所有係數 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 都為零時成立，那麼這組向量就是線性獨立的。

四、 笛卡爾坐標系

笛卡兒坐標系（Système de coordonnées cartésiennes，Cartesian coordinate system），又稱直角坐標系，是一種正交坐標系，由 k 條相互垂直、相交於原點的數線構成 k 維笛卡爾坐標系。

五、 內積定義

向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$、$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\mathbf{a}\text{與}\mathbf{b}\text{之夾角})$$

六、　正射影

非零向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$，$\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 方向上的正射影 $\mathbf{c}$：

$$\mathbf{c}=\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\right)\mathbf{b}$$

七、　零向量

V 是一個向量空間，$\mathbf{0}\in V$，$\forall v\in V: v+\mathbf{0}=v$：

$$\forall v\in V: v /\!/ \mathbf{0}$$

八、　投影（Projection）

在線性代數中，投影指將一個向量映射到某個子空間上的操作。設 V 是一個向量空間，U 是 V 的一個子空間，則對於任意的向量 $\mathbf{v}\in V$，其在 U 上的投影是一個在 U 中的向量 $\mathbf{u}$，滿足：

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$$

其中 $\mathbf{u}\in U$，$\mathbf{w}$ 是垂直於 U 的向量（即 $\mathbf{w}$ 在 U 的正交補空間內）。
對任意的 $\mathbf{v}$ 和投影運算 P ，有：

(一)　冪等性

$$P(P(\mathbf{v}))=P(\mathbf{v})$$

(二)　線性性

$$P(\mathbf{v}+\mathbf{w})=P(\mathbf{v})+P(\mathbf{w})$$

且

$$P(c\mathbf{v})=cP(\mathbf{v})$$

，其中 c 是一個純量。

第二節　向量與向量空間公式定理

一、　超平面法向量

向量空間 $\mathbb{R}^n$ 中一 $(n-1)$ 維超平面 $E:\vec{n}\cdot\mathbf{x}+c=0$（$|\vec{n}|\neq 0$）之法向量為 $\vec{n}$ 的任意非零實數倍。

二、　超平面到點最短向量

向量空間 $\mathbb{R}^n$ 中一 $(n-1)$ 維超平面 $E:\vec{n}\cdot\mathbf{x}+c=0$（$|\vec{n}|\neq 0$）與一點 $\mathbf{P}$，E 距離 $\mathbf{P}$ 最短的點為 $\mathbf{Q}$，則：

$$\overrightarrow{\mathbf{QP}}=\frac{\vec{n}\cdot\mathbf{P}+c}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

Proof.
令 $\overrightarrow{\mathbf{QP}} = t\vec{n}$：

$$\vec{n} \cdot (\mathbf{P} - t\vec{n}) + c = 0$$

$$\vec{n} \cdot \mathbf{P} - t|\vec{n}|^2 + c = 0$$

$$t = \frac{\vec{n} \cdot \mathbf{P} + c}{|\vec{n}|^2}$$

□

三、 平行超平面間最短向量

向量空間 $\mathbb{R}^n$ 中兩 $(n-1)$ 維超平面 $E: \vec{n} \cdot \mathbf{x} + c = 0$ 與 $F: \vec{n} \cdot \mathbf{x} + d = 0$（$|\vec{n}| \neq 0$），$\mathbf{P}$ 與 $\mathbf{Q}$ 分別在 E、F 上且 $\overrightarrow{\mathbf{PQ}} /\!/ \vec{n}$，則：

$$\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = \frac{d-c}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

Proof.
令 $\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = t\vec{n}$：

$$\vec{n} \cdot (\mathbf{P} + t\vec{n}) + d = 0$$

$$d + t|\vec{n}|^2 - c = 0$$

$$t = \frac{d-c}{|\vec{n}|^2}$$

□

四、 兩超平面夾角與分角面

向量空間 $\mathbb{R}^n$ 中兩 $(n-1)$ 維超平面 $E: \overrightarrow{m} \cdot \mathbf{x} + c = 0$ 與 $F: \vec{n} \cdot \mathbf{x} + d = 0$（$|\overrightarrow{m}||\vec{n}| \neq 0$），$\overrightarrow{m} \times \vec{n} \neq \vec{0}$，則：

1. E、F 夾角之餘弦值為：

$$\pm\frac{\overrightarrow{m} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{m}| \cdot |\vec{n}|}$$

2. E、F 的分角面為：

$$\frac{\overrightarrow{m} \cdot \mathbf{x} + c}{|\overrightarrow{m}|^2} \pm \frac{\vec{n} \cdot \mathbf{x} + d}{|\vec{n}|^2} = 0$$

   若 $\frac{\overrightarrow{m} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{m}| \cdot |\vec{n}|} \neq 0$，則 $\pm$ 取與 $\overrightarrow{m} \cdot \vec{n}$ 同號者為銳角角平分超平面，與 $\overrightarrow{m} \cdot \vec{n}$ 異號者為鈍角角平分超平面。

五、 超平行體體積

$$\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^n, O = O_n: \left|\det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}\right|$$

$$=\text{Volume of the } n\text{-dimensional shape spanned by the vectors} \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$$

六、 分點公式

$\forall$ points $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ not in the same $\mathbb{R}^{n-2}$ space

$\wedge\, (\forall 1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N} : c_i \in \mathbb{R}, c_i > 0) \wedge \sum_{i=1}^{n} c_i = 1$：

$$K = \sum_{i=1}^{n} c_i A_i$$

$\iff$ volume$(KA_2A_3 \dots A_n)$: volume$(A_1KA_3 \dots A_n)$: volume$(A_1A_2K \dots A_n)$:

$\dots$: volume$(A_1A_2 \dots A_{n-1}K) = c_1 : c_2 : \dots : c_n$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{KA_i} = 0$$

七、 向量決定向量空間

$\mathbb{R}^k$中，線性獨立的k個實向量可以線性組合為$\mathbb{R}^k$中的任意向量。

八、 多點決定超平面

不共$k-1$　　$k+1$點可以決定一個k維圖形，即其凸包，與一個k維超平面，即其仿射包。

九、 點與超平面關係

n 維空間中，點 $\mathbf{P}$ 與 $n-1$ 維超平面 E：$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - c = 0$，$\mathbf{P}$ 與 E 的關係有：

- P 在 E 上：$\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} - c = 0$。
- P 在 E 的 $\mathbf{a}$ 方向半空間：$\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} - c > 0$。
- P 在 E 的 $-\mathbf{a}$ 方向半空間：$\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} - c < 0$。

十、 超平面間的關係

$n, k, m \in \mathbb{Z}$ 兩個k維超平面在$\mathbb{R}^n$空間中的關係有：

$$\begin{cases} \text{完全重合（} \implies n \geq k \geq 0\text{）} \\ \text{平行（} \implies n-1 \geq k \geq 0\text{）} \\ \text{正交相交（} \implies n-1 \geq k \geq 1\text{）} \quad \text{k-1} \\ \text{非正交相交（} \implies n-2 \geq k \geq m+2 \geq 2\text{）} \quad \text{m (m<k-1)} \\ \text{歪斜：不平行也不相交。（} \implies n-2 \geq k \geq 1\text{）} \end{cases}$$

十一、 流形表達式

- $n-1$ 維流形一般式：n 維空間中，一個 $n-1$ 維流形可以表示成：

$$f(\mathbf{x}) = 0, \text{ where } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, f\text{為光滑函數}$$

- $n-1$ 維超平面一般式：n 維空間中，一個 $n-1$ 維超平面可以表示成：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}+c=0,\ \text{where}\mathbf{a},\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\,\mathbf{x}\text{為自變項},c\in\mathbb{R}$$

- $n-1$ 維超平面截距式：n 維空間中，一個 $n-1$ 維超平面 E：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=1$，*for i in range(n):*，令 a_i 為 $\mathbf{a}$ 平行於第 i 方向單位向量 e_i 分量，且 *for i in range(n):*$a_i\neq 0,\ b_i=\dfrac{1}{a_i}$，則 E 與第 i 坐標軸的交點為 b_ie_i，且該等交點與原點形成的超三角錐體積為 $\dfrac{\prod_{i=1}^n b_i}{n!}$。
- $\leq n-1$ 維流形參數式：n 維空間中，一個 $m\,(m\leq n)$ 維流形可以表示成：

$$\mathbf{x}=\mathbf{f}(\mathbf{u})\,\mathbf{x},\ \text{where}\mathbf{f}(\mathbf{u})\in\mathbb{R}^n,\,\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m,\,\mathbf{f}\text{為光滑函數}$$

- 直線參數式：n 維空間中，一條直線可表示成：

$$\mathbf{x}=\mathbf{a}+t\mathbf{b},\,\mathbf{x},\ \text{where}\mathbf{a},\,\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$$

- 直線比例式：n 維空間中，一條方向向量不與任何坐標軸垂直的直線可表示成：

$$\frac{x_1-p_1}{v_1}=\frac{x_2-p_2}{v_2}=...=\frac{x_n-p_n}{v_n}$$

- 超平面隱式方程：n 維空間中，一個 $m\,(m\leq n-2)$ 維超平面可表示成：

$$\textit{for } j \textit{ in range}(n-m):\ \mathbf{a}_j{\cdot}\mathbf{x}{+}c_j=0,\ \text{where}\mathbf{a}_j,\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\,\mathbf{x}\text{為自變項},c_j\in\mathbb{R},\,\{\textit{for } j \textit{ in range}(n-m):\ \mathbf{a}_j\}$$

十二、 三垂線定理

Provided that point B, C, and line L on plane E. If two of the following three statements are true, then the rest one must be true.

$$\overline{AB}\perp E \qquad (1)$$

$$\overline{BC}\perp L \text{ at } C \qquad (2)$$

$$\overline{AC}\perp L \text{ at } C \qquad (3)$$

Proof.
Proof of $(1)\wedge(2)\implies(3)$*:*
Assume that $\overline{AB}\perp E$ and $\overline{BC}\perp L$ at C.
1. Since $\overline{AB}\perp E$, the line segment $\overline{AB}$ is perpendicular to the plane E, meaning AB is parallel to the normal vector $\mathbf{n}_E$ of the plane E.
2. Since $\overline{BC}\perp L$ at C, the line segment $\overline{BC}$ is perpendicular to the line L at point C.
3. The key observation is that L lies within plane E. Therefore, the normal vector $\mathbf{n}_E$ is perpendicular to any vector lying on L.
4. Given $\overline{BC}\perp L$, the direction of $\overline{BC}$ must be along $\mathbf{n}_E$, meaning it is perpendicular to the plane E. This implies that any line perpendicular to L at C must also be perpendicular to any other line in E that is perpendicular to L at C.
5. Since $\overline{AB}$ is already perpendicular to E (and hence to any line in E), $\overline{AC}$ must also be perpendicular to L at C.

Thus, $\overline{AC} \perp L$ at C, so $(1) \wedge (2) \implies (3)$.
Proof of $(2) \wedge (3) \implies (1)$*:*
Assume that $\overline{BC} \perp L$ at C and $\overline{AC} \perp L$ at C.
1. Since both $\overline{BC}$ and $\overline{AC}$ are perpendicular to L at C, the vectors $\mathbf{BC}$ and $\mathbf{AC}$ are both perpendicular to L. Therefore, $\mathbf{BC}$ and $\mathbf{AC}$ lie in a plane that is perpendicular to L at C.
2. Since L lies in E, the plane that $\mathbf{BC}$ and $\mathbf{AC}$ lie in is perpendicular to E because $\mathbf{BC}$ and $\mathbf{AC}$ are perpendicular to a line that lies in E.
3. Therefore, the line $\overline{AB}$, which must be within the same perpendicular plane as $\mathbf{BC}$ and $\mathbf{AC}$, is also perpendicular to E.
Thus, $\overline{AB} \perp E$, so $(2) \wedge (3) \implies (1)$.
Proof of $(1) \wedge (3) \implies (2)$*:*
Assume that $\overline{AB} \perp E$ and $\overline{AC} \perp L$ at C.
1. Since $\overline{AB} \perp E$, the line segment $\overline{AB}$ is perpendicular to the plane E.
2. Since $\overline{AC} \perp L$ at C, the line segment $\overline{AC}$ is perpendicular to the line L at C.
3. As L lies in E, and $\overline{AB}$ is perpendicular to E, the direction of $\overline{AB}$ corresponds to the normal vector $\mathbf{n}_E$ of the plane E.
4. Now, since $\overline{AC}$ is perpendicular to L at C, and both $\overline{AB}$ and L lie in the same plane E, the vector $\mathbf{BC}$ must also be perpendicular to L at C.
Thus, $\overline{BC} \perp L$ at C, so $(1) \wedge (3) \implies (2)$. □

十三、 超平面投影體積

兩 k 維超平面 L、M 夾角 θ，L 上一個 k 維圖形在 M 上的投影體積為原本體積的 $|\cos\theta|$ 倍。

十四、 超三角錐體積

$\mathbb{R}^d$ 中，原點與 d 個點形成一個體積 V 的超三角錐，該 d 個點形成的 $d \times d$ 矩陣為 M：

$$V = \frac{1}{d!}\,|\det(M)|$$

十五、 過一點超三角錐體積

$\mathbb{R}^d$ 中，第 i 維單位向量為 e_i。過 $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{d} p_i e_i$ 之超平面 E：$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 1$ 與所有坐標軸圍成的超三角錐體積為 V，其中 $\forall 1 \le i \le n$：$p_i \ne 0$。
當 E 通過 $\frac{p_i}{d} e_i \, (1 \le i \le n)$ 時，V 有最小值 $\frac{d^d \prod_{i=1}^{d} p_i}{d!}$。

Proof. 令 E 與各軸的交點為 $c_1 e_1, c_2 e_2, \ldots, c_d e_d$。

$$V = \frac{\prod_{i=1}^{d} c_i}{d!}$$
$$\forall 1 \le i \le n : \; c_i \mathbf{n} \cdot e_i - 1 = 0$$

即：

$$c_i = \frac{1}{n_i}$$

其中 n_i 是 $\mathbf{n}$ 在第 i 個維度的分量。
故：

$$V = \frac{1}{d! \prod_{i=1}^{d} n_i}$$

欲求函數：

$$V = \frac{1}{d! \prod_{i=1}^{d} n_i}$$

在限制條件：

$$\sum_{i=1}^{d} n_i p_i = 0$$

下的最小值。
利用拉格朗日乘數法，令存在拉格朗日乘數 λ，使得：

$$\mathcal{L}(n_1, n_2, \dots, n_d, \lambda) = \frac{1}{d! \prod_{i=1}^{d} n_i} + \lambda \sum_{i=1}^{d} n_i p_i$$

求 $\mathcal{L}$ 對每個 n_j 的偏導數並令其為零：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_j} = -\frac{1}{d! \prod_{i=1}^{d} n_i n_j} + \lambda p_j = 0$$

整理得到：

$$\lambda p_j = \frac{1}{d! \prod_{i=1}^{d} n_i n_j}$$

令

$$p_j n_j = \frac{1}{d! \lambda \prod_{i=1}^{d} n_i} \quad \forall j$$

令常數 C，使得：

$$p_j n_j = C \quad \forall j$$

$$\sum_{i=1}^{d} n_i p_i = Cd = 1$$

$$C = \frac{1}{d}$$

因此：

$$n_j = \frac{1}{d p_j}$$

$$c_j = d p_j$$

$$V = \frac{1}{d! \prod_{i=1}^{d} n_i} = \frac{1}{d!} \cdot \left(\prod_{i=1}^{d} d p_i \right) = \frac{d^d \prod_{i=1}^{d} p_i}{d!}$$

□

十六、　平行

今有超平面 E、F，集合 A、B 分別為 E、F 上的所有直線的非零方向向量：

$$(E /\!/ F) \iff (A \subset B \vee B \subset A)$$

十七、　垂直

今有超平面 E、F，集合 A、B 分別為 E、F 上的所有直線的非零方向向量，法向量集合 $C=\{\mathbf{m}\mid|\forall\mathbf{a}\in A:\mathbf{m}\cdot\mathbf{a}=0\wedge\mathbf{m}\neq 0\}$、$D=\{\mathbf{n}\mid|\forall\mathbf{b}\in B:\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}=0\wedge\mathbf{n}\neq 0\}$：

$$(E\perp F)\iff(\forall\mathbf{m}\in C\perp\forall\mathbf{n}\in D)$$

第三節　二維空間公式定理

一、　二點分點公式

$$m,\,n\in\mathbb{R},\,mn>0:\;K\,\mathrm{on}\,\overline{AB},\,\overline{AK}:\overline{KB}=m:n\iff\vec{K}=\frac{n}{m+n}\vec{A}+\frac{m}{m+n}\vec{B}$$

二、　平面上二點分點公式擴展圖形

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB},\,x,\,y\in\mathbb{R}:\begin{cases}P\,\mathrm{on}\,\overleftrightarrow{AB}\iff x+y=1\\x+y=1\wedge xy\geq 0\iff P\,\mathrm{on}\,\overline{AB}\\x+y<1\wedge x>0\wedge y>0\iff P\,\mathrm{in}\,\Delta OAB\\x+y>1\vee x<0\vee y<0\iff P\,\mathrm{outside\ of}\,\Delta OAB\end{cases}$$

第四節　三維空間相關定義與公式定理

一、　三維右手與左手笛卡爾坐標系

- 右手座標系：滿足右手法則，即假設用右手握住一個三維右手座標系，其中大拇指、食指和中指分別指向 x、y、z 軸的正方向。較常用。
- 左手座標系：滿足左手法則，即假設用左手握住一個三維左手座標系，其中大拇指、食指和中指分別指向 x、y、z 軸的正方向。

二、　三維右手笛卡爾坐標系的卦限

I(+, +, +)、II(-, +, +)、III(-, -, +)、IV(+, -, +)、V(+, +, -)、VI(-, +, -)、VII(-, -, -)、VIII(+, -, -)

三、　三維向量外積定義

三維向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$：

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\det\begin{pmatrix}(\mathbf{i},\,\mathbf{j}\,\mathbf{k})\\\mathbf{a}\\\mathbf{b}\end{pmatrix}$$

(一)　三維向量外積性質

三維向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$：

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta_{\mathbf{ab}}$$

(二)　三重積

$$\forall A,\,B,\,C\in\mathbb{R}^3:\ A\cdot(B\times C)=B\cdot(C\times A)=C\cdot(A\times B)=\det\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix}$$

$$\forall A,\,B,\,C\in\mathbb{R}^3,\,O=(0,\,0,\,0):|A\cdot(B\times C)|$$
$$=\text{Volume of the parallelepiped spanned by the vectors}\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OB},\,\overrightarrow{OC}$$

四、　兩面角

由共用邊界直線的兩半平面圍成的夾角稱兩面角，該共用邊界直線稱此兩面角的稜。

五、　兩面式與平面系

- 兩面式：直線的兩面式表示為兩個平面方程同時成立。
- 平面系：一直線的平面系指通過該直線的所有平面之集合，可表示為該直線的兩面式中的兩平面方程的線性組合。

六、　點到直線

點 $P(p,\,q,\,r)$ 到直線 $L:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases},\,t\in\mathbb{R}$ 的距離為 $d(P,\,L)$，P 在 L 上的投影點為 Q，$\vec{v}=(a,\,b,\,c)$：

1. 用 $\overline{PQ}\cdot(a,\,b,\,c)=0$ 求 Q。
2. $d(P,\,L)=\min\left(\sqrt{(p-(x_0+at))^2+(q-(y_0+bt))^2+(r-(z_0+ct))^2}\right)$，將 $d(P,\,L)=\sqrt{(p-(x_0+at))^2+(q-(y_0+bt))^2+(r-(z_0+ct))^2}$ 時的 t 代回 L 得 Q。
3. L 上任一點 A，$d(P,\,L)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$，$Q=A+\left(\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^2}\vec{v}\right)$。

七、　兩歪斜線

兩直線 $L:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ 與 $M:\begin{cases}x=x_1+dk\\y=y_0+ek\\z=z_0+fk\end{cases}, k\in\mathbb{R}$ 互相歪斜，公垂線交 L 於 P、交 M 於 Q，$d(L, M)=\overline{PQ}$，$\vec{u}=(a, b, c)$，$\vec{v}=(d, e, f)$：

1. 解 $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}=\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}=0$ 得 P、Q。
2. 令平行平面 E 包含 L、平面 F 包含 M，該二平面之法向量 $\vec{n}/\!/(\vec{u}\times\vec{v})$，以 L 上一點求平面 E，求 M 上任一點與 E 距離。

八、　點對平面之投影點

令平面外一點 P 對平面 $\vec{n}\cdot(x, y, z)+d=0$ 投影點 H：

$$\overrightarrow{PH}=\left(\frac{\overrightarrow{PH}\cdot\vec{n}}{(\vec{n})^2}\right)\vec{n}$$