向量與向量空間

沈威宇

2024 年 8 月 9 日

第一章　向量與向量空間相關定義

一、　向量空間（Vector Space）

又稱線性空間，是線性代數中的基本概念之一。它是一個由向量組成的集合，這些向量可以進行加法運算和數量乘法運算，且滿足一定的公理。

(一)　公理

一個集合 V 是一個向量空間，如果它滿足以下條件：1. 加法封閉性：對於任意 $u, v \in V$，有 $u + v \in V$。2. 加法交換律：對於任意 $u, v \in V$，有 $u + v = v + u$。3. 加法結合律：對於任意 $u, v, w \in V$，有 $(u + v) + w = u + (v + w)$。4. 零向量存在：存在一個零向量 $0 \in V$，使得對於任意 $v \in V$，有 $v + 0 = v$。5. 加法逆元存在：對於任意 $v \in V$，存在一個向量 $-v \in V$，使得 $v + (-v) = 0$。6. 數量乘法封閉性：對於任意 $v \in V$ 和標量 $c \in \mathbb{R}$（或 $\mathbb{C}$），有 $c \cdot v \in V$。7. 數量乘法分配律：對於任意 $c, d \in \mathbb{R}$ 和 $v \in V$，有 $(c + d) \cdot v = c \cdot v + d \cdot v$。8. 向量乘法分配律：對於任意 $c \in \mathbb{R}$ 和 $u, v \in V$，有 $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v$。9. 數量乘法結合律：對於任意 $c, d \in \mathbb{R}$ 和 $v \in V$，有 $(cd) \cdot v = c \cdot (d \cdot v)$。10. 數量乘法單位元存在：對於任意 $v \in V$，有 $1 \cdot v = v$，其中 1 是純量域的乘法單位元。

(二)　例子

1. 歐幾里得空間：例如 $\mathbb{R}^n$，即所有 n 維實數向量的集合。2. 多項式空間：例如所有次數不超過 n 的多項式的集合。3. 矩陣空間：例如所有 $m \times n$ 矩陣的集合。4. 函數空間：例如所有從實數域到實數域的連續函數的集合。

二、　模長（Norm）

模長是一種用來測量向量大小或長度的函數，可以視作向量空間中的長度或距離概念的推廣。

(一)　定義

給定一個向量空間 V，模長是一個映射 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$，它將向量映射到一個非負實數，滿足以下三個條件：

1.　非負性：對於所有 $\mathbf{v} \in V$，模長 $\|\mathbf{v}\| \geq 0$，且當且僅當 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 時，$\|\mathbf{v}\| = 0$。

2.　齊次性（均勻性）：對於任意的向量 $\mathbf{v} \in V$ 和純量 $\alpha \in \mathbb{R}$（或 $\alpha \in \mathbb{C}$），有 $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$。

3.　三角不等式：對於任意的向量 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$，有 $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$。

(二)　歐幾里得模長

ℓ_2 範數，是最常見的模長定義，對應於向量的歐幾里得距離。

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

(三)　曼哈頓模長

ℓ_1 範數

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|$$

(四)　無窮範數

ℓ_∞ 範數

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|\}$$

三、　線性獨立（**Linear independence**）

對於一組向量 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，如果方程式：

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$$

僅在所有係數 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 都為零時成立，那麼這組向量就是線性獨立的。

四、　笛卡爾坐標系

笛卡兒坐標系（Système de coordonnées cartésiennes，Cartesian coordinate system），又稱直角坐標系，是一種正交坐標系，由 k 條相互垂直、相交於原點的數線構成 k 維笛卡爾坐標系。

五、　內積定義

向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$、$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\left(\mathbf{a}\text{與}\mathbf{b}\text{之夾角}\right)$$

六、　正射影

非零向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$，$\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 方向上的正射影 $\mathbf{c}$：

$$\mathbf{c} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\right)\mathbf{b}$$

七、　零向量

V 是一個向量空間，$\mathbf{0} \in V$，$\forall v \in V$： $v + \mathbf{0} = v$：

$$\forall v \in V ： v/\mathbf{0}$$

八、　仿射包（**Affine hull**）

An affine combination is a linear combination of points where all coefficients sum up to 1.
The affine hull of a set of points S in a Euclidean space (aff(S)) is the smallest affine space (a flat or

subspace that is not necessarily passing through the origin) that contains all the points in $\boldsymbol{S}$, namely, the set of all affine combinations of the points in $\boldsymbol{S}$.

$$\operatorname{aff}(S)=\left\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i \,\middle|\, k>0,\ x_i\in S,\ \alpha_i\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1\right\}$$

九、 凸包（**Convex hull**）

A convex combination is a linear combination of points where all coefficients are non-negative and sum up to 1.

The convex hull of a set of points $\boldsymbol{S}$ in a Euclidean space (conv($\boldsymbol{S}$)) is the smallest convex set that contains all the points in $\boldsymbol{S}$, namely, the set of all convex combinations of points in $\boldsymbol{S}$.

$$\operatorname{conv}(S)=\left\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i \,\middle|\, k>0,\ x_i\in S,\ \alpha_i\in[0,\,1],\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1\right\}$$

十、 投影（**Projection**）

在線性代數中，投影指將一個向量映射到某個子空間上的操作。設 V 是一個向量空間，U 是 V 的一個子空間，則對於任意的向量 $\mathbf{v}\in V$，其在 U 上的投影是一個在 U 中的向量 $\mathbf{u}$，滿足：

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$$

其中 $\mathbf{u}\in U$，$\mathbf{w}$ 是垂直於 U 的向量（即 $\mathbf{w}$ 在 U 的正交補空間內）。
對任意的 $\mathbf{v}$ 和投影運算 P ，有：

(一) 冪等性

$$P(P(\mathbf{v}))=P(\mathbf{v})$$

(二) 線性性

$$P(\mathbf{v}+\mathbf{w})=P(\mathbf{v})+P(\mathbf{w})$$

且

$$P(c\mathbf{v})=cP(\mathbf{v})$$

，其中 c 是一個純量。

第二章 向量與向量空間公式定理

一、 超平面法向量

向量空間 $\mathbb{R}^n$ 中一 $(n-1)$ 維超平面 E：$\vec{n}\cdot\mathrm{x}+c=0$（$|\vec{n}|\neq 0$）之法向量為 $\vec{n}$ 的任意非零實數倍。

二、 超平面到點最短向量

向量空間 $\mathbb{R}^n$ 中一 $(n-1)$ 維超平面 E：$\vec{n}\cdot\mathrm{x}+c=0$（$\left|\vec{n}\right|\neq 0$）與一點 $\mathbf{P}$，E 距離 $\mathbf{P}$ 最短的點為 $\mathbf{Q}$，則：

$$\overrightarrow{\mathbf{QP}}=\frac{\vec{n}\cdot\mathbf{P}+c}{\left|\vec{n}\right|^2}\vec{n}$$

Proof. 令 $\overrightarrow{\mathbf{QP}}=t\vec{n}$：

$$\vec{n}\cdot\left(\mathbf{P}-t\vec{n}\right)+c=0$$

$$\vec{n}\cdot\mathbf{P}-t\left|\vec{n}\right|^2+c=0$$

$$t=\frac{\vec{n}\cdot\mathbf{P}+c}{\left|\vec{n}\right|^2}$$

□

三、 平行超平面間最短向量

向量空間 $\mathbb{R}^n$ 中兩 $(n-1)$ 維超平面 E：$\vec{n}\cdot\mathrm{x}+c=0$ 與 F：$\vec{n}\cdot\mathrm{x}+d=0$（$\left|\vec{n}\right|\neq 0$），$\mathbf{P}$ 與 $\mathbf{Q}$ 分別在 E、F 上且 $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}/\vec{n}$，則：

$$\overrightarrow{\mathbf{PQ}}=\frac{d-c}{\left|\vec{n}\right|^2}\vec{n}$$

Proof. 令 $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}=t\vec{n}$：

$$\vec{n}\cdot\left(\mathbf{P}+t\vec{n}\right)+d=0$$

$$d+t\left|\vec{n}\right|^2-c=0$$

$$t=\frac{d-c}{\left|\vec{n}\right|^2}$$

□

四、 超平面夾角

向量空間 $\mathbb{R}^n$ 中兩 $(n-1)$ 維超平面 E：$\vec{m}\cdot\mathrm{x}+c=0$ 與 F：$\vec{n}\cdot\mathrm{x}+d=0$（$\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\neq 0$），$\vec{m}\times\vec{n}\neq\vec{0}$，則：

E、F 的夾角餘弦值 $\cos\theta$ 為：

$$\cos\theta=\pm\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}$$

E、F 的角平分超平面為：

$$\frac{\vec{m}\cdot\mathrm{x}+c}{\left|\vec{m}\right|^2}=\pm\frac{\vec{n}\cdot\mathrm{x}+d}{\left|\vec{n}\right|^2}$$

E、F 夾角之餘弦值為：

$$\pm\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$$

五、　超平行體體積

$$\forall A_1,\, A_2, \ldots,\, A_n \in \mathbb{R}^n,\, O = O_n：\left|\det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}\right| = \text{Volume of the } n\text{-dimensional shape spanned by the vectors} \vec{OA},\ \ldots$$

六、　分點公式

$$\forall \text{ points } A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ not in the same } \mathbb{R}^{n-2} \text{ space}$$

$$\wedge \left(\forall 1 \le i \le n, i \in \mathbb{N}：c_i \in \mathbb{R}, c_i > 0\right) \wedge \sum_{i=1}^{n} c_i = 1：$$

$$K = \sum_{i=1}^{n} c_i A_i$$

$$\iff \text{volume}(KA_2A_3 \ldots A_n)：\text{volume}(A_1KA_3 \ldots A_n)：\text{volume}(A_1A_2K \ldots A_n)：$$

$$\ldots：\text{volume}(A_1A_2 \ldots A_{n-1}K) = c_1：c_2：\ldots：c_n$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{KA_i} = 0$$

七、　向量決定向量空間

$\mathbb{R}^k$中，線性獨立的k個實向量可以線性組合為$\mathbb{R}^k$中的任意向量。

八、　點決定超平面

不共$k-1$[illegible]$k+1$點可以決定一個k維圖形，即其凸包，與一個k維超平面，即其仿射包。

九、　超平面間的關係

$n,\, k,\, m \in \mathbb{Z}$兩個$k$維超平面在$\mathbb{R}^n$空間中的關係有：

$$\begin{cases} \text{完全重合（} \implies n \ge k \ge 0\text{）} \\ \text{平行（} \implies n-1 \ge k \ge 0\text{）} \\ \text{正交相交（} \implies n-1 \ge k \ge 1\text{）[illegible]k-1[illegible]} \\ \text{非正交相交（} \implies n-2 \ge k \ge m+2 \ge 2\text{）[illegible]m (m<k-1} \\ \text{歪斜：不平行也不相交。(} \implies n-2 \ge k \ge 1\text{)} \end{cases}$$

十、　一般式

n維空間中，一個$n-1$維流形可以表示成：$f(\mathbf{x}) = 0, \text{where}\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ f$為光滑函數

n維空間中，一個$n-1$維超平面可以表示成：$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + c = 0, \text{where}\, \mathbf{a},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x}$為自變項,$c \in \mathbb{R}$

十一、　參數式

n維空間中，一個$m\,(m < n)$維流形可以表示成：$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{u})\,\mathbf{x},\ \mathbf{f}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m,\ \mathbf{f}$為光滑函數

十二、 三垂線定理

Provided that point B, C, and line L on plane E. If two of the following three statements are true, then the rest one must be true.

$$\overline{AB} \perp E \tag{1}$$

$$\overline{BC} \perp L \text{ at } C \tag{2}$$

$$\overline{AC} \perp L \text{ at } C \tag{3}$$

Proof.

Proof of $(1) \wedge (2) \implies (3)$*:*

Assume that $\overline{AB} \perp E$ and $\overline{BC} \perp L$ at C.

1. Since $\overline{AB} \perp E$, the line segment $\overline{AB}$ is perpendicular to the plane E, meaning AB is parallel to the normal vector $\mathbf{n}_E$ of the plane E.

2. Since $\overline{BC} \perp L$ at C, the line segment $\overline{BC}$ is perpendicular to the line L at point C.

3. The key observation is that L lies within plane E. Therefore, the normal vector $\mathbf{n}_E$ is perpendicular to any vector lying on L.

4. Given $\overline{BC} \perp L$, the direction of $\overline{BC}$ must be along $\mathbf{n}_E$, meaning it is perpendicular to the plane E. This implies that any line perpendicular to L at C must also be perpendicular to any other line in E that is perpendicular to L at C.

5. Since $\overline{AB}$ is already perpendicular to E (and hence to any line in E), $\overline{AC}$ must also be perpendicular to L at C.

Thus, $\overline{AC} \perp L$ at C, so $(1) \wedge (2) \implies (3)$.

Proof of $(2) \wedge (3) \implies (1)$*:*

Assume that $\overline{BC} \perp L$ at C and $\overline{AC} \perp L$ at C.

1. Since both $\overline{BC}$ and $\overline{AC}$ are perpendicular to L at C, the vectors $\mathbf{BC}$ and $\mathbf{AC}$ are both perpendicular to L. Therefore, $\mathbf{BC}$ and $\mathbf{AC}$ lie in a plane that is perpendicular to L at C.

2. Since L lies in E, the plane that $\mathbf{BC}$ and $\mathbf{AC}$ lie in is perpendicular to E because $\mathbf{BC}$ and $\mathbf{AC}$ are perpendicular to a line that lies in E.

3. Therefore, the line $\overline{AB}$, which must be within the same perpendicular plane as $\mathbf{BC}$ and $\mathbf{AC}$, is also perpendicular to E.

Thus, $\overline{AB} \perp E$, so $(2) \wedge (3) \implies (1)$.

Proof of $(1) \wedge (3) \implies (2)$*:*

Assume that $\overline{AB} \perp E$ and $\overline{AC} \perp L$ at C.

1. Since $\overline{AB} \perp E$, the line segment $\overline{AB}$ is perpendicular to the plane E.

2. Since $\overline{AC} \perp L$ at C, the line segment $\overline{AC}$ is perpendicular to the line L at C.

3. As L lies in E, and $\overline{AB}$ is perpendicular to E, the direction of $\overline{AB}$ corresponds to the normal vector $\mathbf{n}_E$ of the plane E.

4. Now, since $\overline{AC}$ is perpendicular to L at C, and both $\overline{AB}$ and L lie in the same plane E, the vector $\mathbf{BC}$ must also be perpendicular to L at C.

Thus, $\overline{BC} \perp L$ at C, so $(1) \wedge (3) \implies (2)$. □

十三、 超平面投影體積

兩 k 維超平面 L、M 夾角 θ，L 上一個 k 維圖形在 M 上的投影體積為原本體積的 $|\cos\theta|$ 倍。

第三章　二維空間公式定理

一、　二點分點公式

$$m,\, n \in \mathbb{R},\, mn > 0：\ K \text{ on } \overline{AB},\ \overline{AK}:\overline{KB} = m:n \iff \vec{K} = \frac{n}{m+n}\vec{A} + \frac{m}{m+n}\vec{B}$$

二、　平面上二點分點公式擴展圖形

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB},\ x,\ y \in \mathbb{R}：\begin{cases} P \text{ on } \overleftrightarrow{AB} \iff x + y = 1 \\ x + y = 1 \wedge xy \geq 0 \iff P \text{ on } \overline{AB} \\ x + y < 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0 \iff P \text{ in } \Delta OAB \\ x + y > 1 \vee x < 0 \vee y < 0 \iff P \text{ outside of } \Delta OAB \end{cases}$$

第四章　三維空間相關定義與公式定理

一、　三維右手與左手笛卡爾坐標系

- 右手座標系：滿足右手法則，即假設用右手握住一個三維右手座標系，其中大拇指、食指和中指分別指向 x、y、z 軸的正方向。較常用。
- 左手座標系：滿足左手法則，即假設用左手握住一個三維左手座標系，其中大拇指、食指和中指分別指向 x、y、z 軸的正方向。

二、　三維右手笛卡爾坐標系的卦限

I(+, +, +)、II(-, +, +)、III(-, -, +)、IV(+, -, +)、V(+, +, -)、VI(-, +, -)、VII(-, -, -)、VIII(+, -, -)

三、　三維向量外積定義

三維向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} (\mathbf{i},\, \mathbf{j}\, \mathbf{k}) \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

(一)　三維向量外積性質

三維向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta_{\mathbf{ab}}$$

(二)　三重積

$$\forall A,\ B,\ C \in \mathbb{R}^3 ：\ A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$\forall A,\ B,\ C \in \mathbb{R}^3,\ O = (0,\ 0,\ 0) ：\ |A \cdot (B \times C)| = \text{Volume of the parallelepiped spanned by the vectors} \vec{OA},\ \vec{OB},$

第五章　超平面相關定義與公式定理

一、　直線與平面之垂直

若一直線 L 與一平面 E 交於一點 P，且 E 上所有通過該 P 的直線均與 L 垂直，則稱 L 與 E 垂直。

二、　兩面角

由共用邊界直線的兩半平面圍成的夾角稱兩面角，該共用邊界直線稱此兩面角的稜。