

三角形與三角函數公式定理

沈威宇

2024 年 12 月 27 日

目錄

第一章 三角形與三角函數公式定理	1
第一節 三角形公式定理	1
一、 勾股/畢氏/商高定理	1
二、 三角形全等與 SSA 型性質：	1
三、 九點圓與歐拉線	2
四、 正弦定理	2
五、 投影定理	3
六、 餘弦定理	3
七、 三角形面積定理	3
八、 重心相關定理	4
九、 外心相關定理	4
十、 內心相關定理	4
十一、 垂心相關定理	4
十二、 西瓦定理 (Ceva theorem)	5
十三、 孟氏定理 (Menelaus' theorem)	5
十四、 角平分線定理	5
十五、 角平分線長定理	5
第二節 三角函數公式定理	5
一、 尤拉公式	5
二、 正切萬能公式	5
三、 二倍角公式	6
四、 半角公式與平方化倍角公式	6
五、 三倍角公式	6
六、 和差角公式	6
七、 平方關係	7

八、	三角形內角正弦公式	7
九、	正餘弦函數疊合公式定理	7
十、	和差化積	7
十一、	積化和差	8
十二、	單位圓定理	8
十三、	高次方降次	8

第一章 三角形與三角函數公式定理

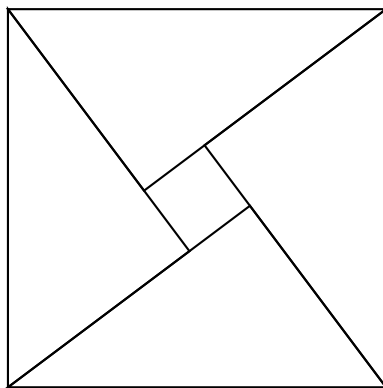
第一節 三角形公式定理

令圖形體積（或面積、長度）之代號同其自身。今有一三角形 $\triangle ABC$ ，其中： $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊長分別為 a 、 b 、 c ； $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 又記作 A 、 B 、 C ；外接圓 O 圓心 O 即外心（**Circumcenter**）、半徑 R ；內接圓 I 圓心 I 即內心（**Incenter**）、半徑 r ；重心（**Centroid**） G ；垂心（**Orthocenter**） H ； $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊中點分別為 M_a 、 M_b 、 M_c ； A 在 \overleftrightarrow{BC} 的垂足為 h_a ， B 在 \overleftrightarrow{CA} 的垂足為 h_b ， C 在 \overleftrightarrow{AB} 的垂足為 h_c ； $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ； $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的角平分線與對邊之交點分別為 \mathcal{B}_a 、 \mathcal{B}_b 、 \mathcal{B}_c ；九點圓 \mathcal{O} 圓心 \mathcal{O} 、半徑 \mathcal{R} ；與 A 、 B 、 C 的兩鄰邊延長線與對邊皆相切的旁切圓分別為 E_a 、 E_b 、 E_c ，其圓心（旁心）各同其圓名。

一、 勾股/畢氏/商高定理

$$(\angle C = 90^\circ) \iff (a^2 + b^2 = c^2)$$

Proof. 趙爽勾股圓方圖證明法：



其中四個三角形的短股為 a 、長股為 b 、斜邊為 c 。

$$4\frac{ab}{2} + (b - a)^2 = c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

□

二、 三角形全等與 SSA 型性質：

令：已知兩三角形一對應位置之邊長相等稱 S ，已知兩三角形一對應位置之角之角度相等稱 A ， S 相鄰表示鄰邊， A 相鄰表示鄰角， S 與 A 相鄰表示邊與其一側的角，當 A 為直角得稱 R ， R 之鄰邊得稱 H 。

1. 三角形的全等性質有 SSS 、 SAS 、 AAS 、 ASA 、 RHS ，當兩三角形符合以上任一條件時，知兩三角形全等。

2. SSA 型的討論：若已知 a 、 b 、 $\angle A$ 。

• $\angle A$ 為銳角，令 C 到 \overrightarrow{AB} 的距離為 $h = b \sin A$ ，則：

- $b < h$: 無解
- $b = h$: 唯一解
- $b > h$: 兩解

• $\angle A$ 為鈍角，則：

- $a \leq b$: 無解
- $a > b$: 唯一解

三、 九點圓與歐拉線

$M_a, M_b, M_c, h_a, h_b, h_c, \frac{A+H}{2}, \frac{B+H}{2}, \frac{C+H}{2}$ 必共圓，該圓稱九點圓

對於九點圓圓周 \mathcal{O} 與圓心 O 均符合： $\mathcal{O} = \frac{O+H}{2}$

\mathcal{O}, O, G, H 共線，該線稱歐拉線

$\triangle ABC$ 是等腰三角形 $\iff I$ 在歐拉線上

費爾巴哈定理 (Feuerbach's theorem)：九點圓與三個旁切圓均外切，與內切圓內切（內切圓在內）。

$$\mathcal{O} = \frac{O}{2}$$

四、 正弦定理

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

Proof.

$$\sin A = \frac{\overline{Ch_c}}{a}$$

$$\sin B = \frac{\overline{Ch_c}}{b}$$

□

$$2R \sin A = a$$

Proof. 作 O 。若 $\triangle ABC$ 為直角三角形，觀察可證。

若 $\triangle ABC$ 非直角三角形，以 BC 為一股，令斜邊在 \overrightarrow{BO} 上，作一直角三角形 BCD ，其中 $D = 2O - B$ 。

若 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，根據圓周定理可知， $\angle D = \angle BAC$ ，得證。

若 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形，根據根據圓內接四邊形對角互補定理可知， $\angle D = \pi - \angle A$ ，得證。

□

$$\text{凸四邊形面積} = \frac{1}{2} \text{對角線相乘} \times \sin \text{兩對角線夾角}$$

五、 投影定理

$$a = b \cos C + c \cos B$$

六、 餘弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Proof. 根據投影定理：

$$c = a \cos B + b \cos A$$

兩邊同乘 c ：

$$c^2 = ac \cos B + bc \cos A$$

同理：

$$a^2 = ac \cos B + ab \cos C$$

$$c^2 = bc \cos A + ab \cos C$$

$$c^2 = a^2 - ab \cos C + b^2 - ab \cos C = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

□

平行四邊形定理：平行四邊形四邊長平方和等於兩對角線平方和

$$\text{三角形中線公式：}\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM_a}^2 + \overline{BM_a}^2)$$

七、 三角形面積定理

$$\begin{aligned}\Delta ABC &= \frac{1}{2}a \cdot \overline{Ah_a} \\&= \frac{1}{2}ab \sin C \\&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\text{海龍 (Heron) 公式}) \\&= \frac{abc}{4R} \\&= rs \\&= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}} \\&= \frac{2}{3}\overline{BM_b} \cdot \overline{CM_c} \sqrt{\left| \frac{1 - \left(\overline{AM_a}^2 + \overline{BM_b}^2 + \overline{CM_c}^2\right)^2}{4\overline{BM_b}^2 \overline{CM_c}^2} \right|} \\&= \frac{1}{2}\sqrt{\overline{AB}^2 \overline{AC}^2 - \left(\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right)^2} \\&= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|\end{aligned}$$

八、 重心相關定理

G 為三中線交點

$$\overline{AG} = 2\overline{GM_A}$$

$$G = \frac{A + B + C}{3}$$

九、 外心相關定理

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$$

$$O = \frac{a^2A + b^2B + c^2C}{a^2 + b^2 + c^2}$$

O 為三邊中垂線交點

$$\Delta OAB : \Delta OBC : \Delta OCA = \sin 2C : \sin 2A : \sin 2B$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$$

$$\frac{1}{2}\angle AOB = \angle C \vee \pi - \angle C$$

十、 內心相關定理

I 與三邊均相切

I 為三角角平分線交點

$$I = \frac{a}{a+b+c}A + \frac{b}{a+b+c}B + \frac{c}{a+b+c}C$$

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

十一、 垂心相關定理

H 為三高交點

$$H = \frac{\tan A \cdot A + \tan B \cdot B + \tan C \cdot C}{\tan A + \tan B + \tan C}$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2)$$

$$\text{在複數平面上：} \det \begin{pmatrix} 1 & A & A^2 & \overline{A} \\ 1 & B & B^2 & \overline{B} \\ 1 & C & C^2 & \overline{C} \\ 1 & H & H^2 & \overline{H} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\overline{Hh_a}}{Ah_a} + \frac{\overline{Hh_b}}{Bh_b} + \frac{\overline{Hh_c}}{Ch_c} = 1$$

十二、 西瓦定理 (Ceva theorem)

令西瓦線段指各頂點與其對邊或對邊延長線連接而成的直線段。

三角形 $\triangle ABC$ 的西瓦線段 \overrightarrow{AD} 、 \overrightarrow{BE} 、 \overrightarrow{CF} ：

$$\overrightarrow{AD}、\overrightarrow{BE}、\overrightarrow{CF} \text{ 交於一點} \iff \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1 \implies D、E、F \text{ 中有零或二個點不在 } \triangle ABC \text{ 邊上}$$

口訣：頂分頂分頂分頂

十三、 孟氏定理 (Menelaus' theorem)

一直線與 $\triangle ABC$ 的邊 BC 、 CA 、 AB 或其延長線分別交於 L 、 M 、 N ：

$$\iff \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1 \implies L、M、N \text{ 中有一或三數個點不在 } \triangle ABC \text{ 邊上}$$

口訣：頂分頂分頂分頂

十四、 角平分線定理

已知： $\triangle ABC$ 中 $\angle B < \angle C$ ； D 在 \overline{BC} 上； E 在 \overrightarrow{BC} 上且不在 \overline{BC} 上。

內角平分線定理及逆定理： $\angle BAD = \angle DAC \Leftrightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

外角平分線定理及逆定理： $\angle CAE = \pi - \angle BAE \Leftrightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$

十五、 角平分線長定理

$$\overline{AB}_a = \frac{bc \sin A}{(b+c) \sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

第二節 三角函數公式定理

一、 尤拉公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

二、 正切萬能公式

$$\sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

三、 二倍角公式

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= 1 - 2 \sin^2 \theta \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta\end{aligned}$$

四、 半角公式與平方化倍角公式

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ \tan^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \\ \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1 + \sin \theta - \cos \theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta} \\ &= \csc \theta - \cot \theta\end{aligned}$$

五、 三倍角公式

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \\ \cos 3\theta &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ \tan 3\theta &= \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}\end{aligned}$$

六、 和差角公式

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha + \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}\end{aligned}$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{-\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$\sec(\alpha + \beta) = \frac{\sec \alpha \sec \beta \csc \alpha \csc \beta}{-\sec \alpha \sec \beta + \csc \alpha \csc \beta}$$

$$\sec(\alpha - \beta) = \frac{\sec \alpha \sec \beta \csc \alpha \csc \beta}{\sec \alpha \sec \beta + \csc \alpha \csc \beta}$$

$$\csc(\alpha + \beta) = \frac{\sec \alpha \sec \beta \csc \alpha \csc \beta}{\sec \alpha \sec \beta + \csc \alpha \csc \beta}$$

$$\csc(\alpha - \beta) = \frac{\sec \alpha \sec \beta \csc \alpha \csc \beta}{\sec \alpha \sec \beta - \csc \alpha \csc \beta}$$

七、平方關係

$$\sin^2 \theta = \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

八、三角形內角正弦公式

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \iff \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma$$

九、正餘弦函數疊合公式定理

$$(a \sin \theta + b \cos \theta)^2 \leq a^2 + b^2, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$a \sin x + b \cos x$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(x + \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \right)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(x - \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) \right)$$

十、和差化積

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

十一、 積化和差

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

十二、 單位圓定理

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 = a, \theta = \sin^{-1} x + \sin^{-1} y, \phi = \cos^{-1} x + \cos^{-1} y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 1 \iff \theta > \frac{\pi}{2} \iff \phi > \frac{\pi}{2} \\ a = 1 \iff \theta = \frac{\pi}{2} \iff \phi = \frac{\pi}{2} \\ a < 1 \iff \theta < \frac{\pi}{2} \iff \phi < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

十三、 高次方降次

$$\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2 \sin^2 \cos^2 \theta$$

$$\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$\sin^6 \theta + \cos^6 \theta = 1 - 3 \sin^2 \cos^2 \theta$$