多項式函數與方程

沈威宇

2024 年 8 月 19 日

第一章　多項式函數與方程

一、　方程組

1.　相容方程組：一組方程組有解，則稱其為相容方程組。

2.　相依方程組：一組方程組中，其中一者成立則其他者均成立，則稱其為相容方程組。

3.　矛盾方程組：一組方程組無法同時成立，則稱其為矛盾方程組。

二、　多項式

指由多個項（**term**）組成的代數表達式，每個項是常數與零或正整數個變數的乘積，且每個變數的指數必須是非負整數。

三、　定理

多項式 $f(x)$、$g(x)$、$q(x)$、$r(x)$，$\deg(f(x))$ 表 $f(x)$ 的最高次項次數：

(一)　最高次項次數定理

$$\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$$

(二)　商式極限

領導係數指最高次項係數

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0, \deg(f(n)) < \deg(g(n)) \\ \dfrac{f(x)\ \text{領導係數}}{g(x)\ \text{領導係數}}, \deg(f(n)) = \deg(g(n)) \\ \text{不存在}, \deg(f(n)) > \deg(g(n)) \end{cases}$$

(三)　近似

$$f(x)\ \text{在}\ x = a\ \text{的}\ n\ \text{次近似（}n \leq \deg(f(x))\text{）} = f(x)\ \text{之泰勒級數最低次}\ n\ \text{項}$$

(四)　除法定理

恰有一組 $q(x)$、$r(x)$ 滿足：

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

$$\deg(r(x)) < \deg(g(x))$$

若 $r(x)=0$ 則稱 $q(x)$ 為 $f(x)$ 之因式。

餘式定理：若 $q(x)=ax+b$ 則 $r(x)=f(\frac{b}{a})$。

因式定理：$f(\frac{b}{a})=0$ 若且惟若 $ax+b$ 為 $f(x)$ 的因式。

(五) 平移與伸縮變換

1. 對於任意函數 $f(x)$，$y=f(x)$ 右移 h 單位，上移 k 單位，得 $y=f(x-h)+k$。

2. 對於任意函數 $f(x)$，$y=f(x)$ 以 x 軸為基準線鉛直伸縮為原來的 a 倍，以 y 軸為基準線水平伸縮為原來的 b 倍，得 $y=af\left(\frac{x}{b}\right)$。

(六) 側與距離

1. 側：在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，假設有 $\mathbf{L}$：$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$。點 P 滿足 $f(P)>0$ 若且惟若 P 在 $\mathbf{L}$ 的正側。點 P 滿足 $f(P)=0$ 若且惟若 P 在 $\mathbf{L}$ 上。點 P 滿足 $f(P)<0$ 若且惟若 P 在 $\mathbf{L}$ 的負側。

2. 與點距離：在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，假設有 $\mathbf{L}$：$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ ，且 f 為一次函數，且 f 的係數為 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ，且 f 的常數項為 c。點 P 到 $\mathbf{L}$ 的距離 $d(P, \mathbf{L})=\frac{|f(P)|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n {a_i}^2}}$。

3. 之間距離：在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，假設有 $\mathbf{L}_1$：$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ 、$\mathbf{L}_2$：$(g(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ ，且 f 、g 為一次函數，且 f 、g 的係數均為 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ，且 f 、g 的常數項分別為 c 、d。$\mathbf{L}_1$ 到 $\mathbf{L}_2$ 的距離 $d(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)=\frac{|c-d|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n {a_i}^2}}$。

4. 到點向量：在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，假設有 $\mathbf{L}$：$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ ，且 f 為一次函數，且 f 的係數為 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ，且 f 的常數項為 c。$\mathbf{L}$ 上距離點 P 最近的點到點 P 的向量 $\vec{v}=\frac{f(P)}{\sum_{i=1}^n {a_i}^2}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。

5. 之間向量：在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，假設有 $\mathbf{L}_1$：$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ 、$\mathbf{L}_2$：$(g(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ ，且 f 、g 為一次函數，且 f 、g 的係數均為 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ，且 f 、g 的常數項分別為 c 、d。$\mathbf{L}_1$ 上任意點 P 到 $\mathbf{L}_2$ 上距離點 P 最近的點的向量 $\vec{v}=\frac{c-d}{\sum_{i=1}^n {a_i}^2}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。

四、 零函數

$$f(x)=0$$

五、　一元一次函數

$a \neq 0$

(一)　一般式（斜截式）

$$f(x) = ax + b$$

其中 a 稱斜率，b 稱 y 截距，$\tan^{-1}(a)$ 稱斜角。

(二)　點斜式

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

零函數與一元一次函數合稱線性函數。

六、　一元二次函數

$a \neq 0$

(一)　一般式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(二)　標準式

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

其中 $(h,\, k) = \left(-\dfrac{b}{2a},\, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

(三)　判別式

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

(四)　根

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\, e^{k\pi i}}{2a} \quad \text{, where } k = 0,\, 1 \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

註：尤拉公式：

$$e^{bi} = \cos(b) + i \sin(b)$$

註：$x^n = y$ 的解為：

$$x = \sqrt[n]{y}\, e^{\frac{2n\pi i}{n}} \quad , \forall\, k = 0,\, 1, \ldots,\, n - 1$$

(五) 圖形特徵與根數

1. 拋物線。

2. 頂點 V、極值點：$(h,\, k)$。

3. 對稱軸：$x = h$。

4. 開口：a 為正，開口向上，反之向下。$|a|$ 愈大，開口愈小。

5. 根數：

(1) $a > 0$ 且 $\Delta < 0$：函數恆正，無實根，有二共軛複根。

(2) $a < 0$ 且 $\Delta > 0$：函數恆負，無實根，有二共軛複根。

(3) $a > 0$ 且 $\Delta = 0$：函數不負，一重實根。

(4) $a < 0$ 且 $\Delta = 0$：函數不正，一重實根。

(5) $\Delta < 0$：函數與 x 軸有二交點，二實根。

七、 一元三次函數

$a \neq 0$

(一) 一般式

$$f(x) = ax^3 + bx^x + cx + d$$

(二) 標準式

$$f(x) = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$$

其中 $(h,\, p,\, k) = \left(\dfrac{b}{3a},\, c - \dfrac{b^2}{3a},\, \dfrac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d\right)$

(三) 判別式

$$\Delta = \left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3$$

(四) 根

1. 直接表述

$$\begin{aligned} x = -\frac{b}{3a} &+ e^{\frac{2k\pi i}{3}} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} \\ &+ e^{\frac{2(3-k)\pi i}{3}} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} \quad \text{, where } k = 0,\, 1,\, 2 \end{aligned}$$

三解分開表述

$$
\begin{aligned}
x_1 = & -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} \\
& + \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} \\
x_2 = & -\frac{b}{3a} + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} \\
& + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} \\
x_3 = & -\frac{b}{3a} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} \\
& + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}}
\end{aligned}
$$

2. 卡迪諾公式（**Cardino's formula**）表述：

令：

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{b}{3a} \\
p &= c - \frac{b^2}{3a} \\
k &= \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d \\
r &= \frac{p}{a} \\
s &= \frac{k}{a} \\
u &= -\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{r^3}{27}}\, e^{\frac{2k\pi i}{2}} \quad \text{, where } k = 0,\, 1
\end{aligned}
$$

$$
C = \sqrt[3]{u}\, e^{\frac{2k\pi i}{3}} \quad \text{, where } k = 0,\, 1,\, 2
$$

則：

$$
x = C - \frac{r}{3C} + h
$$

3. 一般化卡迪諾公式表述：

令：

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= b^2 - 3ac \\ \Delta_1 &= 2b^3 - 9abc + 27a^2 d \\ u &= \Delta_1 + \sqrt{{\Delta_1}^2 - 4{\Delta_0}^3}\, e^{\frac{2k\pi i}{2}} \quad \text{, where } k = 0,\, 1 \\ C &= \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + u}{2}}\, e^{\frac{2k\pi i}{3}} \quad \text{, where } k = 0,\, 1,\, 2\end{aligned}$$

則：

$$x = -\frac{1}{3a}\left(b + C + \frac{\Delta_0}{C}\right)$$

(五) 圖形特徵

1. 頂點 V：$(h,\, k)$。

2. 二階旋轉對稱點、拐點（一階導數為零，二次導數為零）：$(h,\, f(h))$。

3. 鞍點（非極值的駐點，駐點指一階導數為零）：$ap < 0$ 若且惟若存在二個鞍點，$p = 0$ 若且惟若存在一個鞍點（圖形單調遞增或減），$ap > 0$ 若且惟若不存在鞍點（圖形嚴格遞增或減）。

4. 極值：不存在。

八、 平面上的直線

(一) 一般式

$$ax + by + c = 0$$

(二) 截距式

若 $ab \neq 0$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

其中 $p=-\dfrac{c}{a}$、$q=-\dfrac{c}{b}$ 分別為 x、y 截距。

(三)　斜截式

若 $b\neq 0$，即 y 為 x 的函數

$$y=f(x)=mx+q$$

其中 m 稱斜率，$\tan^{-1}(m)$ 稱斜角。

(四)　點斜式

若 $b\neq 0$，即 y 為 x 的函數

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

(五)　參數式

設相異兩點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$：
直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的參數式：

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

射線 $\overrightarrow{AB}$ 的參數式：

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}, \quad t\geq 0$$

線段 $\overline{AB}$ 的參數式：

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}, \quad 0\leq t\leq 1$$

(六)　特性

1. 平面上直線 $\mathbf{L}_1$：$ax+by+c=0$、$\mathbf{L}_2$：$dx+ey+f=0$：$ae=bd$ 若且惟若 $\mathbf{L}_1/\!/\mathbf{L}_2$；$ad+be=0$ 若且惟若 $\mathbf{L}_1\perp\mathbf{L}_2$；若 $\mathbf{L}_1$、$\mathbf{L}_2$ 存在斜率 m_1、m_2 則：$m_1=m_2$ 若且惟若 $\mathbf{L}_1/\!/\mathbf{L}_2$，$m_1m_2=-1$ 若且惟若 $\mathbf{L}_1\perp\mathbf{L}_2$。

2. $\mathbf{L}$：$ax+by+c$：$a>0$ 則 $ax+by+c>0$ 在 $\mathbf{L}$ 之右半平面；$b>0$ 則 $ax+by+c>0$ 在 $\mathbf{L}$ 之上半平面。