流體力學

沈威宇

2025 年 4 月 15 日

目錄

第一節　流體力學（Fluid Mechanics）

一、　符號約定

- $\mathbf{x}$: 位置場
- t: 時間
- ρ: 密度
- V: 任意控制體積
- ∂V: 控制體積 V 的邊界
- $\mathbf{u}$: 流速場
- $\mathbf{n}$: 外法向單位向量
- $\mathrm{d}A$: 邊界 ∂V 的面積元素
- M: 分子量
- p: 氣壓
- R: 理想氣體常數
- T: 絕對溫度
- U: 內能
- $\mathbf{g}$: 加速度
- $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$: 物質導數（Material derivative）/隨質導數（Substantial derivative）。對於任意場 y，定義：

$$\frac{\mathrm{D}y}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial y}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla y).$$

- e: 單位質量的內能

二、　連續性方程（Continuity equation）/質量守恆

Statement.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Proof.
質量守恆定律：

$$\forall V : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho \,\mathrm{d}V = -\int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}A$$

使用高斯散度定理：

$$\int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}A = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \,\mathrm{d}V$$

得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho \,\mathrm{d}V = -\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \,\mathrm{d}V$$

對於任意的控制體積 均成立，則必須滿足局部的守恆形式，即體積積分項中的被積函數（integrand）必須處處相等。因此：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

□

三、 納維-斯托克斯方程式（Navier–Stokes equations）/動量守恆

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p$$

四、 狀態方程式（Equation of state）

狀態方程式描述流體的熱力學狀態，形式為：

$$f(p, V, T) = 0$$

一個著名的狀態方程式為理想氣體方程式：

$$p = \frac{\rho R T}{M}$$

五、 歐拉方程式（Euler equations）

即零黏度和零導熱率的納維-斯托克斯方程式，對於零黏度和零導熱率的流體：

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$$
$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}$$
$$\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}$$

六、 不可壓縮約束

對於不可壓縮的流體：

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$$
$$\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

七、 雷諾數（Reynolds number）

密度 ρ、黏滯性係數/動力黏度（Kinematic viscosity）ν、特徵長度 L、特徵速率 v，雷諾數 Re 定義為：

$$Re = \frac{\rho \nu L}{v}$$

八、 斯托克定律（Stokes law）

雷諾數小而可忽略、動力黏度 ν 之液體，半徑 a、以速度 v 在空氣中運動之液滴，受空氣阻力 F 為：

$$F = -6\pi \nu a v$$

九、 擴散作用（Diffusion）

(一) 格雷姆定律（Graham's Law）

$$\frac{Rate_1}{Rate_2} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$$

其中：$Rate_1$ 和 $Rate_2$ 分別是第一種和第二種氣體的隙流速率，因次為長度 $^3 \cdot$ 時間 $^{-1}$ 或物量 $\cdot$ 時間 $^{-1}$；M_1 和 M_2 分別是兩種氣體的分子量。

在氣體中各處的密度差別不大的情況下，格雷姆定律可以用來估算氣體的擴散速率比。

(二) 菲克第一定律（Fick's first law）

假設從高濃度區域往低濃度流的通量大小與濃度對空間位置的梯度成正比：

$$J = -D\nabla\phi$$

其中：

- J 為擴散通量，即於單位時間內通過某單位面積的物質量，方向與物質流向相同，單位 mol $\cdot$ m^{-2} $\cdot$ s^{-1}。
- D 是擴散係數/擴散率/擴散常數，單位 m^2/s，是一個比例常數，反映了物質擴散的速度，與物質本身的性質、溫度、壓力等因素有關。
- ϕ 是擴散物質的濃度，單位為 mol/m^3。
- $\nabla\phi$ 為濃度對空間位置的梯度。

(三) 菲克第二定律（Fick's second law）

菲克第二定律預測擴散會如何使得濃度隨時間改變，可由質量守恆定律與菲克第一定律導出：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = D\nabla^2\phi$$

十、 布朗運動（Brownian motion）

(一) 歷史

- 1827 布朗（Robert Brown）：觀察到花粉微粒的不規則折線運動，後發現微粒均有之，且顆粒愈小愈活躍，稱布朗運動。
- 1905 愛因斯坦（Albert Einstein）：從分子運動觀點發表布朗運動第一個可用實驗檢驗的定量理論，預言微粒平均運動路徑長與溫度、微粒大小、微粒濃度、液體年的等因素的關係。
- 1910 佩蘭（Jean Baptiste Perrin）：驗證愛因斯坦布朗運動理論，使原子論受接受而不再只是假說。

(二)　愛因斯坦布朗運動理論推導

斯托克定律：

$$f = -6\pi \nu a v$$

滲透壓公式：

$$P = k_B T V$$

其中 P 為滲透壓；V 為單位體積所含小球數。

得：

D：擴散係數

$$D = \frac{k_B T}{6\pi \nu a}$$

λ：方均根位移

t：時間

$$\lambda_x = \sqrt{2Dt} = \sqrt{\frac{k_B T t}{3\pi \nu a}} N_A$$ ：亞弗加厥常數

R：理想氣體常數

$$N_A = \frac{RTt}{3{\lambda_x}^2 \pi \nu a}$$