解析幾何

沈威宇

2025 年 7 月 5 日

目錄

第一節　解析幾何（Analytic Geometry）

下：空間為歐幾里德空間；位置 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$；第 i 軸正方向單位向量 $\mathbf{e}_i$；一向量空間中兩點 P、Q，$\overrightarrow{PQ} \coloneqq Q - P$；$\hat{n}$ 為單位向量，即使得 $|\hat{n}| = 1$；$\hat{\mathbf{v}}$ 為 $\mathbf{v}$ 方向單位向量，即使得 $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{v}} = |\mathbf{v}|$ 且 $|\hat{\mathbf{v}}| = 1$。

一、　正整數維空間

$n \in \mathbb{N}$

(一)　仿射子空間一般式

$\mathbb{R}^n$ 中，一 $n-1$ 維仿射子空間可以表示成：

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + c = 0$$

稱此表達方法為一般式。

(二)　仿射子空間截距式

$\mathbb{R}^n$ 中，$n-1$ 維仿射子空間：

$$E:\ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_1}{a_1} = 1$$

必通過 $a_i\mathbf{e}_i$，$\forall i \in \mathbb{N} \wedge i \leq n$，稱此表達方法為截距式，稱 a_i 為第 i 軸截距。

(三)　仿射子空間隱式方程/多面式

$\mathbb{R}^n$ 中，一個 $m \in \mathbb{N} \wedge m < n$ 維仿射子空間 E 可表示成：

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times n} \wedge \operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n - m \wedge \mathbb{c} \in \mathbb{R}^{n-m}$$

稱此表達方法為隱式方程或多面式，對於三維空間中的直線特稱兩面式。令 $\mathbf{A}$ 的第 i 列為 $\mathbf{A}_i$、$\mathbf{c}$ 的第 i 列為 $\mathbf{c}_i$，則 $\mathbf{A}_i\mathbf{x} = \mathbf{c}_i$ 代表一個 $(n-1)$ 維仿射子空間，且這 $(n-m)$ 個 $(n-1)$ 維仿射子空間的交集為 E。對於三維空間中的直線 E，特稱所有使得 $E \subseteq F$ 的 $(n-1)$ 維仿射子空間 F 的集合為平面系。

(四)　直線參數式

$\mathbb{R}^n$ 中，一直線可表示成：

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t, \quad t \in \mathbb{R}$$

稱 $\mathbf{v}$ 為此直線之方向向量，稱此表達方法為參數式。

(五)　直線（對稱）比例式

$\mathbb{R}^n$ 中，直線：

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \wedge i < j \leq n:\ \frac{x_i - a_i}{v_i} = \frac{x_j - a_j}{v_j}$$

與直線

$$\mathbf{x} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)t, \quad t \in \mathbb{R}$$

相同，稱前一種表達方法為（對稱）比例式。

(六)　點與仿射子空間關係

$\mathbb{R}^n$ 中，一 $(n-1)$ 維仿射子空間 E：$\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}+c=0$ 與一點 $\mathbf{P}$ 可能的關係與其充要條件為：

- P 在 E 上 $\iff$ $\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}+c=0$。
- P 在 E 的 $\mathbf{n}$ 方向半空間 $\iff$ $\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}+c>0$。
- P 在 E 的 $-\mathbf{n}$ 方向半空間 $\iff$ $\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}+c<0$。

(七)　兩仿射子空間關係

$\mathbb{R}^n$ 中，k 維仿射子空間 E 與 m 維仿射子空間，其中 $k,m\in\mathbb{N}\wedge k\le m<n$，可能的關係與其必要條件為：

- 重合：$k=m$
- 平行但不相交：$k=m$
- 相交但不平行。
- 歪斜（不平行也不相交）。

相交時，令它們的一個交點 P，兩者在該點上分別有法空間（normal space）N_PE、N_PF，定義 E 與 F 的主夾角（principal angles）為 N_PE 與 N_PF 的主夾角。

(八)　點在仿射子空間的正射影點與對稱點

$\mathbb{R}^n$ 中，一 $(n-1)$ 維仿射子空間 E：$\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}+c=0$ 與一點 P，E 上距離 $\mathbf{P}$ 最短的點為 $\mathbf{Q}$，稱 $\mathbf{P}$ 在 E 的正射影點/投影點，則：

$$\mathbf{Q}=\mathbf{P}-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}+c}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$$

E 與 $\mathbf{P}$ 距離為：

$$\left|\mathbf{P}-\mathbf{Q}\right|=\frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}+c|}{|\mathbf{n}|}$$

稱 $2\mathbf{Q}-\mathbf{P}$ 為 $\mathbf{P}$ 以 E 為對稱面的對稱點。

(九)　平行仿射子空間間最短向量

$\mathbb{R}^n$ 中，兩平行 $(n-1)$ 維仿射子空間 E：$\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}+c=0$ 與 F：$\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}+d=0$，$F$ 上一點 $\mathbf{P}$，E 上距離 $\mathbf{P}$ 最短的點為 $\mathbf{Q}$，則：

$$\mathbf{Q}=\mathbf{P}-\frac{c-d}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$$

E 與 F 距離為：

$$\left|\mathbf{P}-\mathbf{Q}\right|=\frac{|c-d|}{|\mathbf{n}|}$$

(十)　不平行仿射子空間夾角與分角面

$\mathbb{R}^n$ 中，兩不平行 $(n-1)$ 維仿射子空間 E：$\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}+c=0$ 與 F：$\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}+d=0$，則：

1. E、F 夾角，稱兩面角，餘弦值為：

$$\pm\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{m}|\cdot|\mathbf{n}|}$$

若 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}\neq 0$，則 $\pm$ 取與 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}$ 同號者為銳角餘弦值，取與 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}$ 異號者為鈍角餘弦值。

2. E、F 的角平分/分角仿射子空間為：

$$\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}+c}{|\mathbf{m}|}=\pm\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}+d}{|\mathbf{n}|}$$

若 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}\neq 0$，則 $\pm$ 取與 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}$ 同號者為鈍角分角面，取與 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}$ 異號者為銳角分角面。

3. E、F 的交集為一 $(n-2)$ 維仿射子空間，稱稜。

(十一)　點積/內積的幾何意義

兩向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 夾角 θ，則

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{ab}\cos\theta|.$$

(十二)　多點共仿射子空間

$\mathbb{R}^n$ 中，相異 $k\leq n$ 點必共一 $(k-1)$ 維仿射子空間。

(十三)　多點決定超體積域與仿射子空間

$\mathbb{R}^n,\quad n\geq k$ 中，不共 $(k-2)$ 維仿射子空間的 k 點的集合，可以決定一個 $(k-1)$ 維超體積域，即其凸包，與一個 k 維仿射子空間，即其仿射包。

(十四)　線性組合

$\mathbb{R}^n$ 中，不共 $(n-2)$ 維仿射子空間的 n 點 $P_1,P_2,\ldots,P_n$ 共一 $(n-1)$ 維仿射子空間 E，若：

$$P_n=\sum_{i=1}^{n-1}c_iP_i$$

且原點不在 E 上，則：

$$\sum_{i=1}^{n-1}c_i=1$$

（若原點在 E 上則不一定成立）

(十五)　分點公式（Section formula）/加權重心公式

令 U 為所有由 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中不共 $(n-2)$ 維仿射子空間的 n 點形成的序列形成的集合，V 為所有由和為 1 的 n 個非零實數形成的序列形成的集合，W 為所有由和為 1 的 n 個正實數形成的序列形成的集合，定義函數 $f: U\to\mathbb{R}$ 使得 $f(x)$ 為 x 的凸包的超體積，定義函數 $g: S\to U,\quad S\subseteq U\times\mathbf{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$ 使得 $g(x,k,v)$ 為將 x 中的第 k 個元素換成 v 形成的序列，令序列 C 的第 k 個元素為 C_k，則 $\forall C\in V\wedge A\in U$：

$$K=\sum_{k=1}^{n}C_kA_k\iff\left(\forall j,k\in\mathbb{N}\wedge j,k\leq n:\ \frac{f\left(g(A,j,K)\right)}{c_j}=\frac{f\left(g(A,k,K)\right)}{c_k}\right)$$

K 在 A 的仿射包中，特別地，若 $C\in W$ 則 K 在 A 的凸包中。

(十六) 正射影圖形體積

$\mathbb{R}^n$ 中，二 m 維仿射子空間 E、F 相交，其中 $m \in \mathbb{N} \wedge m < n$，且 E、F 有主夾角 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$，則 E 上一個 m 維圖形在 F 上的正射影的體積除以其原本體積為：

$$\prod_{i=1}^{m} \left|\cos\theta_i\right|.$$

(十七) 超三角錐與超平行柱體積

$\mathbb{R}^n$ 中，n 個向量形成的 $n \times n$ 矩陣為 M，則它們所張的超三角錐體積為 $\dfrac{|\det(M)|}{n!}$，它們所張的超平行柱體積為 $\det(M)$。

(十八) 過一點平面與座標軸所圍超三角錐體積最小值

$\mathbb{R}^n$ 中，過一點 $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ 的 $n-1$ 維仿射子空間 E 與所有座標軸所圍成的超三角錐體積 V，其中 $\prod_{i=1}^{n} p_i \neq 0$，則當 E 為：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{np_i} = 1$$

時，即第 i 軸截距 np_i 時，V 有最小值：

$$\frac{n^n \prod_{i=1}^{n} \left|p_i\right|}{n!}.$$

Proof.
設 E 為：

$$\sum_{i=1}^{n} n_i x_i = 1$$

則 E 與各軸的交點為 $\dfrac{\mathbf{e}_1}{n_1}, \dfrac{\mathbf{e}_2}{n_2}, \ldots, \dfrac{\mathbf{e}_n}{n_n}$，

$$V = \frac{1}{n! \prod_{i=1}^{n} \left|n_i\right|}$$

限制條件：

$$\sum_{i=1}^{n} n_i p_i = 1$$

利用拉格朗日乘數法：

$$\mathcal{L} := \frac{1}{n! \prod_{i=1}^{n} n_i} + \lambda \sum_{i=1}^{n} n_i p_i - \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_j} = \frac{-1}{n! \prod_{i=1}^{n} n_i n_j} + \lambda p_j = 0$$

$$C := n_j p_j = \frac{1}{\lambda n! \prod_{i=1}^{n} n_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} n_i p_i = Cn = 1$$

$$C = \frac{1}{n}$$

$$n_j = \frac{1}{np_j}$$

□

(十九) 體積經線性變換

$\mathbb{R}^n$ 中，經 $n \times n$ 階矩陣 **A** 的線性變換後，任一 n 維圖形的體積會變為原來的 $|\det(\mathbf{A})|$ 倍。

二、 二維空間

(一) 直線

一般式：

$$ax + by + c = 0$$

截距式：$ab \neq 0$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

其中 $p = -\frac{c}{a}$、$q = -\frac{c}{b}$ 分別為 x、y 截距。

斜截式：$b \neq 0$

$$y = mx + q$$

其中 $m = -\frac{a}{b}$ 為斜率。

點斜式：$b \neq 0$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

其中 (x_0, y_0) 為該直線上任一點。

(二) 直線、射線與線段參數式

設相異兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$：

- 直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的參數式：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- 射線 $\overrightarrow{AB}$ 的參數式：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad t \geq 0$$

- 線段 $\overline{AB}$ 的參數式：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(三)　分點公式擴展圖形

$$\overrightarrow{AP} \coloneqq x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 & \iff P \text{ is on } \overleftrightarrow{BC}, \\ x + y = 1 \land xy \geq 0 & \iff P \text{ is on } \overline{BC}, \\ x = 0 & \iff P \text{ is on } \overleftrightarrow{AC}, \\ 0 \leq y \leq 1 \land x = 0 & \iff P \text{ is on } \overline{AC}, \\ y = 0 & \iff P \text{ is on } \overleftrightarrow{AB}, \\ 0 \leq x \leq 1 \land y = 0 & \iff P \text{ is on } \overline{AB}, \\ x + y < 1 \land x > 0 \land y > 0 & \iff P \text{ is in } \Delta ABC\text{(不含邊界)}, \\ x + y > 1 \lor x < 0 \lor y < 0 & \iff P \text{ is outside of } \Delta ABC \end{cases}$$

(四)　兩直線關係

直線 **L**：$ax + by + c = 0$、**M**：$dx + ey + f = 0$：

- 平行（含重合）：$ae = bd$
- 垂直：$ad + be = 0$

直線 **F**：$y = mx + p$、**G**：$y = nx + q$：

- 平行（含重合）：$m = n$
- 垂直：$mn = -1$

第二節　三維空間

(一)　叉積/外積的幾何意義

兩向量 **a**、**b** 夾角 θ，則

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{ab} \sin \theta|.$$

(二)　四面體與平行六面體體積

向量 **A**, **B**, **C** 所張四面體體積為：

$$\frac{1}{6}\left|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\right|$$

所張平行六面體體積為：

$$\left|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\right|$$

(三)　三垂線定理

設相異點 B、C 和直線 L 均在平面 E 上，A 不在 E 上。如果下列三個命題中有兩個成立，則剩下的一個也必定成立。

$$\overline{AB} \perp E$$

$$\overline{BC} \perp L \text{ at } C$$

$$\overline{AC} \perp L \text{ at } C$$

(四) 兩歪斜線

兩互相歪斜的直線 L：$(x_0, y_0, z_0) + (a, b, c)t, \quad t \in \mathbb{R}$、$M$：$(x_1, y_1, z_1) + (d, e, f)k, \quad k \in \mathbb{R}$ 間必存在唯一公垂線，令為 S，令 $\mathbf{u} = (a, b, c)$，$\mathbf{v} = (d, e, f)$，S 分別交 L、M 於 P、Q，則：

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{v} = 0$$

令平行兩平面 E、F 分別包含 L、M，則該二平面之法向量平行於 $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$，$M$ 上任一點與 E 距離 $=L$ 上任一點與 F 距離 $=L$ 與 M 的距離 $=\overline{PQ}$。

(五) 各體公式

$$\text{柱體體積} = \text{底面積} \times \text{高}$$

$$\text{錐體體積} = \frac{1}{3}\text{底面積} \times \text{高}$$

$$\text{球體體積} = \frac{4}{3}\pi \times \text{半徑}^3$$

$$\text{球體表面積} = 4\pi \times \text{半徑}^2$$