三角學

沈威宇

2025 年 6 月 29 日

目錄

第一章　三角學（Trigonometry）

第一節　角（Angle）

一、　（平面）角（(plane) angle）

(一)　角度（degree）

一個完整的圓被平分為 360°。作為單位或省略不寫。物理上無因次。

$'$ 稱角分，等於六十分之一 $^\circ$；$''$ 稱角秒，等於六十分之一 $'$。

$$1^\circ = 60' = 3600''$$

(二)　弧度/弳（度）（radian, rad）

以 r 為半徑的圓的中心為頂點，若展開的角所對應的弧長為 r，該角的大小就是一弧度。物理上無因次。作為單位或省略不寫。

扇形的弧長等於其弧度乘以半徑；扇形的面積等於其弧度乘以半徑的平方除以二。

$$\frac{1\text{rad}}{1^\circ} = \frac{\pi}{180} \approx 57.3 \approx \frac{1}{0.0175}$$
$$\pi \approx 3.14159265, \quad \frac{1}{\pi} \approx 0.3183$$

(三)　廣義角

指將角從 $[0, 2\pi)$ 擴展到任意實數。

(四)　同界角

α、β 為同界角 $\iff \dfrac{\alpha - \beta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$

(五)　斜角

平面上某曲線在某處的斜角指其在該處的切線與 x 軸的最小夾角。一直線之斜角之正切值為其斜率。

二、 立體角（Solid angle）

(一) 球面度/立弳（steradian, or square radian, sr）

以 r 為半徑的球的中心為頂點，若展開的立體角所對應的球面表面積為 r^2，該立體角的大小就是一球面度。物理上無因次。

三、 三角測量

- **仰角（angle of elevation）**：仰視目標時，視線與水平線的夾角。
- **俯角（angle of depression）**：俯視目標時，視線與水平線的夾角。
- **高度角（altitude angle）**：仰視目標時，即仰角；平視目標時，為零；俯視目標時，即負一乘以俯角。
- **天頂角（zenith angle）/傾（斜）角（inclination）**：90° 減去高度角。
- **方位角（azimuth or azimuthal angle）**（地理）：以正北為 0°，順時針為正。
- **象限角（reduced bearing）**（地理）：以東南西北某一方位（通常為正北或正南）為基準，加上向相鄰方位轉向的度數與該相鄰方位，如北 35° 西 代表方位角 325°、南 30° 西代表方位角 210°。

四、 極座標系（Polar Coordinate System）

極座標系是由一參考點，稱極點（pole）或原點（origin），與一始於極點的射線，稱極軸（polar axis），定義的二維座標系。令一個點在以極點為原點、極軸為 x 軸正向的二維右手笛卡爾座標系中有座標 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 使得 $r \geq 0 \wedge \theta \in [0, 2\pi)$，則該點在此極座標系中有極座標 $(r;\theta)$，其中 r 稱徑向距離（radial distance or radius），即與原點的距離，θ 稱極角（polar angle），即相對於 x 軸、逆時針增加的角位置。

五、 球座標系（Spherical Coordinate System）

(一) ISO 80000-2:2019/物理慣例（physics convention）/傾斜角、方位角的球座標系

ISO 80000-2:2019/物理慣例/傾斜角、方位角的球座標系是由一參考點，稱原點（origin），一始於原點的射線，稱極軸（polar axis），與一包含極軸的平面，稱初始子午面（initial meridian plane），定義的三維座標系。令一個點在以原點為原點、極軸為 z 軸正向、初始子午面為 xz 平面的三維右手笛卡爾座標系中有座標 $(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ 使得 $r \geq 0 \wedge \theta \in [0, \pi] \wedge \varphi \in [0, 2\pi)$，則該點在此球座標系中有球座標 $(r;\theta;\varphi)$，其中 r 稱徑向距離（radial distance or radius），即與原點的距離，θ 稱傾（斜）角（inclination）、極角（polar angle）或天頂角（zenith angle），即與 z 軸正向的夾角，φ 稱方位角（azimuth or azimuthal angle），即在 xy 平面正射影相對於 x 軸、逆時針增加的角位置。

(二) 方位角、高度角的球座標系

方位角、高度角的球座標系是由一參考點，稱原點（origin），一始於原點的射線，稱極軸（polar axis），與一包含極軸的平面，稱初始子午面（initial meridian plane），定義的三維座標系。令一個點在以原點為原點、極軸為 z 軸正向、初始子午面為 xz 平面的三維右手笛卡爾座標系中有座標

$(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi)$ 使得 $r \geq 0 \wedge \theta \in [0, 2\pi) \wedge \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，則該點在此球座標系中有球座標 $(r; \theta; \varphi)$，其中 r 稱徑向距離（radial distance or radius），即與原點的距離，θ 稱方位角（azimuth or azimuthal angle），即在 xy 平面正射影相對於 x 軸、逆時針增加的角位置，φ 稱高度角（altitude angle）或仰角（angle of elevation），即相對於在 xy 平面正射影、逆時針增加的角位置，即 $\frac{\pi}{2}$ 減去高度角。

(三) 高度角、方位角的球座標系

高度角、方位角的球座標系是由一參考點，稱原點（origin），一始於原點的射線，稱極軸（polar axis），與一包含極軸的平面，稱初始子午面（initial meridian plane），定義的三維座標系。令一個點在以原點為原點、極軸為 z 軸正向、初始子午面為 xz 平面的三維右手笛卡爾座標系中有座標 $(r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta)$ 使得 $r \geq 0 \wedge \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \wedge \varphi \in [0, 2\pi)$，則該點在此球座標系中有球座標 $(r; \theta; \varphi)$，其中 r 稱徑向距離（radial distance or radius），即與原點的距離，θ 稱高度角（altitude angle）或仰角（angle of elevation），即相對於在 xy 平面正射影、逆時針增加的角位置，即 $\frac{\pi}{2}$ 減去高度角，φ 稱方位角（azimuth or azimuthal angle），即在 xy 平面正射影相對於 x 軸、逆時針增加的角位置。

第二節　三角比（Trigonometric Ratios）與三角函數（Trigonometric functions）

一、　銳角三角比

- 正弦（Sine，sin）：正弦值是對應角的對邊與斜邊之比，即：

$$\sin\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$$

- 餘弦（Cosine，cos）：餘弦值是對應角的鄰邊與斜邊之比，即：

$$\cos\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$$

- 正切（Tangent，tan）：正切值是對應角的對邊與鄰邊之比，即：

$$\tan\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$$

- 餘切（Cotangent，cot）：

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- 正割（Secant，sec）：

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

- 餘割（Cosecant，csc）：

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

二、 廣義角（General angles）三角比/三角函數幾何定義

在單位圓中，令角度的測量方式是從正 x 軸開始，逆時針方向為正角，順時針方向為負角，且角度數值可以是任何實數。任意角度的三角函數值可以表示為：

- 正弦（Sine，sin）：角 θ 的正弦值是單位圓上 對應點的 y 坐標，即：

$$\sin\theta = y$$

 。為奇函數，定義域 $\mathbb{R}$，值域 $[-1,1]$，週期 2π，振幅 1，線對稱於 $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, n\in\mathbb{Z}$，點對稱於 $((n\pi, n\in\mathbb{Z}), 0)$。

- 餘弦（Cosine，cos）：角 θ 的餘弦值是單位圓 上對應點的 x 坐標，即：

$$\cos\theta = x$$

 。為偶函數，定義 域 $\mathbb{R}$，值域 $[-1,1]$，週期 2π，振幅 1，線對稱於 $x=n\pi, n\in\mathbb{Z}$，點對稱於 $\left(\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, n\in\mathbb{Z}\right), 0\right)$，$\cos(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 。

- 正切（Tangent，tan）：角 θ 的正切值是正弦值與餘弦值的比，即：

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

 。為奇函數，定義域 $\left\{x\in\mathbb{R} \middle| \pi \nmid \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$，值域 $\mathbb{R}$，週期 π，點對稱於 $\left(\left(\frac{n}{2}\pi, n\in\mathbb{Z}\right), 0\right)$。

- 餘切（Cotangent，cot）：

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

 。為奇函數，定義域 $\{x\in\mathbb{R} \mid \pi \nmid x\}$，值域 $\mathbb{R}$，週期 π，點對稱於 $\left(\left(\frac{n}{2}\pi, n\in\mathbb{Z}\right), 0\right)$，$\cot(x) = -\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$。

- 正割（Secant，sec）：

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

 。為偶函數，定義域 $\left\{x\in\mathbb{R} \middle| \pi \nmid \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$，值域 $\{y\in\mathbb{R} \mid -1\le y \vee y\le 1\}$，週期 π，線對稱於 $((n\pi, n\in\mathbb{Z}), 0)$，點對稱於 $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, n\in\mathbb{Z}$。

- 餘割（Cosecant，csc）：

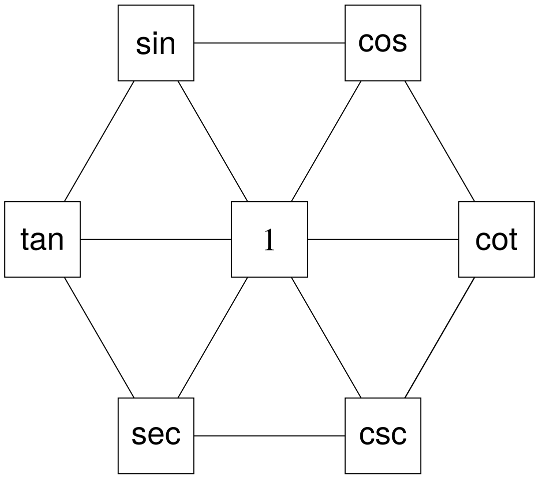
$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

 。為奇函數，定義域 $\{x\in\mathbb{R} \mid \pi \nmid x\}$，值域 $\{y\in\mathbb{R} \mid -1\le y \vee y\le 1\}$，週期 π，線對稱於 $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, n\in\mathbb{Z}$，點對稱於 $((n\pi, n\in\mathbb{Z}), 0)$，$\csc(x)=\sec\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$。

三、 特殊角三角函數值

Radian	Angle	sin	cos	tan
0	0°	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	
π	180°	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{3}$	60 °	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{12}$	15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{12}$	75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	18°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$\frac{2\pi}{10}$	36°	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$\frac{3\pi}{10}$	54°	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$\frac{4\pi}{10}$	72°	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$

四、 三角函數基本關係



- 名稱：左側三者為正；右側三者為餘；上面二者為弦；中間二者為切；下面二者為割。
- 餘角關係：以鉛直軸為對稱軸，位於線對稱位置的三角比為餘角關系，即對於銳角 θ，左 $(\theta) =$ 右 $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$。
- 倒數關係：三條通過中心點的連線為倒數關係，其兩端之三角比互為倒數，相乘為 1。
- 商數關係：六邊形周上，連續三個頂點形成的連線，其兩端之三角比相乘等於中間之三角比。
- 平方關係：圖中有三個倒正三角形，其在上方兩頂點之二者之平方和等於在下方頂點者。

五、 奇變偶不變，正負看象限

今有函數 f，已知其為 sin、cos、tan、sec、csc、cot 之一，且已知 $f(\theta)$。欲求 $f(\phi)$，其中 $\phi = \pm\theta \pm n\frac{\pi}{2}$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。

- 判斷方法：奇變偶不變，正負看象限。
- 上句：奇偶指 n 之奇偶，變指倒數，即：若 n 為奇數則令 $g(\theta) = \frac{1}{f(\theta)}$，否則令 $g(\theta) = f(\theta)$，則 $|f(\phi)| = |g(\theta)|$。
- 下句：象限指假設 $[r, \theta]$ 在第一象限時，$[r, \phi]$ 之象限。令該象限中任意角度為 ω。令 $k = \frac{f(\phi)}{g(\theta)}$。則 $k = \frac{f(\omega)}{|f((\omega)|}$，即：

象限 / f	一	二	三	四
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
csc	+	+	-	-
sec	+	-	-	+
cot	+	-	+	-

六、 正、餘弦函數級數形式

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

七、 三角函數指數形式

根據歐拉/尤拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

三角函數可寫為：

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\tan x = -i\frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\cot x = i\frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1}, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\sec x = \frac{2e^{ix}}{e^{2ix} + 1}, \quad x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\csc x = i\frac{2e^{ix}}{e^{2ix} - 1}, \quad x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

八、 三角函數微積分

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\ln \lvert\sec x\rvert + C$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$	$\ln \lvert\csc x - \cot x\rvert + C$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\ln \lvert\sec x + \tan x\rvert + C$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\ln \lvert\sin x\rvert + C$

第三節 與三角函數相關的函數

一、 反三角函數

名稱	常用符號	定義	定義域	值域
反正弦	$y = \arcsin x$	$x = \sin y$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
反餘弦	$y = \arccos x$	$x = \cos y$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
反正切	$y = \arctan x$	$x = \tan y$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
反餘切	$y = \operatorname{arccot} x$	$x = \cot y$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
反正割	$y = \operatorname{arcsec} x$	$x = \sec y$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$
反餘割	$y = \operatorname{arccsc} x$	$x = \csc y$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

二、 反三角函數定積分形式

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz, \qquad |x| \le 1$$

$$\arccos x = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz, \qquad |x| \le 1$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{z^2+1}\,dz,$$

$$\operatorname{arccot} x = \int_x^\infty \frac{1}{z^2+1}\,dz,$$

$$\operatorname{arcsec} x = \int_1^x \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}\,dz, \qquad x \ge 1$$

$$\operatorname{arccsc} x = \int_x^\infty \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}\,dz, \qquad x \ge 1$$

三、 atan2 函數

atan2(y,x) 在 $x > 0$ 時返還 $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 中的解，在 $x < 0$、$y \ge 0$ 時返還 $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 中的解，在 $x < 0$、$y < 0$ 時返還 $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ 在 $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 中的解，在 $x = 0$、$y \neq 0$ 時返還 $\frac{y}{|y|}\frac{\pi}{2}$，在 $x = y = 0$ 時返還值未定義。

四、 雙曲函數（Hyperbolic functions）

各雙曲函數之名稱均以對應之三角函數之名稱前加雙曲（hyperbolic），代號則為對應之三角函數代號後加 h。

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\coth x = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}, \quad x \neq 0$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}, \quad x \neq 0$$

五、 反雙曲函數對數形式

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arcsinh} &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \\
\operatorname{arccosh} &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1 \\
\operatorname{arctanh} &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1 \\
\operatorname{arccoth} &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad |x| > 1 \\
\operatorname{arcsech} &= \ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1 \\
\operatorname{arccsch} &= \ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \quad x \neq 0
\end{aligned}
$$

第四節 公式定理

一、 三角函數公式

(一) 正切萬能公式

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \\
\cos\theta &= \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \\
\tan\theta &= \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}
$$

(二) 二倍角公式

$$
\begin{aligned}
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \\
\cos 2\theta &= 1-2\sin^2\theta \\
&= 2\cos^2\theta - 1 \\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta
\end{aligned}
$$

(三) 半角公式與平方化倍角公式

$$\begin{aligned}
\sin^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1-\cos\theta}{2}\\
\cos^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1+\cos\theta}{2}\\
\tan^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\\
\tan\frac{\theta}{2} &= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\\
&= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\\
&= \frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\\
&= \csc\theta-\cot\theta
\end{aligned}$$

(四) 三倍角公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

(五) 和差角公式

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{-\cot\alpha+\cot\beta}$$

$$\sec(\alpha+\beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta\csc\alpha\csc\beta}{-\sec\alpha\sec\beta+\csc\alpha\csc\beta}$$

$$\sec(\alpha-\beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta\csc\alpha\csc\beta}{\sec\alpha\sec\beta+\csc\alpha\csc\beta}$$

$$\csc(\alpha+\beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta\csc\alpha\csc\beta}{\sec\alpha\sec\beta+\csc\alpha\csc\beta}$$

$$\csc(\alpha-\beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta\csc\alpha\csc\beta}{\sec\alpha\sec\beta-\csc\alpha\csc\beta}$$

(六) 平方關係

$$\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = 1-\cos^2\theta$$
$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = 1-\sin^2\theta$$
$$\tan^2\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$

(七) 三角形內角正切公式

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \iff \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$$

(八) 正餘弦函數疊合

$$(a\sin\theta+b\cos\theta)^2 \le a^2+b^2, \quad a,b\in\mathbb{R}$$
$$\begin{aligned} a\sin x+b\cos x &= \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right) \end{aligned}$$

(九) 和差化積公式

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(十) 積化和差公式

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$
$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$
$$2\sin\alpha\sin\beta = -\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

(十一) 連加公式

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$
$$\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

(十二) 正餘切和等於正餘割積公式

$$\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$$

(十三) 正餘弦四次方和公式

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2\theta)$$

(十四) 正餘弦四次方差公式

$$\sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta = -\cos(2\theta)$$

(十五) 正餘弦六次方和公式

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\cos^2\theta = 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2\theta)$$

二、 正弦連乘、餘切連加、餘割平方級數與餘切平方級數公式

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x + \frac{\pi k}{n}\right) = 2^{1-n}\sin(nx)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cot\left(x + \frac{\pi k}{n}\right) = n\cot(nx)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\csc^2\left(x + \frac{\pi k}{n}\right) = n^2\csc^2(nx)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\csc^2\frac{\pi k}{n} = \frac{(n-1)(n+1)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cot^2\frac{\pi k}{n} = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x + \frac{\pi k}{n}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}\frac{i}{2}\left(e^{-i\left(x+\frac{\pi k}{n}\right)} - e^{i\left(x+\frac{\pi k}{n}\right)}\right) \\
&= i^n 2^{-n}\prod_{k=0}^{n-1}e^{-i\left(x+\frac{\pi k}{n}\right)}\prod_{k=0}^{n-1}(1 - e^{2i\left(x+\frac{\pi k}{n}\right)}) \\
&= i^n 2^{-n}e^{-inx}e^{-i\pi\left(\frac{n-1}{2}\right)}\prod_{k=0}^{n-1}(1 - e^{2i\left(x+\frac{\pi k}{n}\right)}) \\
&= i^n 2^{-n}e^{-inx}i^{1-n}\prod_{k=0}^{n-1}(1 - e^{2i\left(x+\frac{\pi k}{n}\right)})
\end{aligned}$$

考慮：

$$f(t)=t^n-e^{2inx}$$

$f(t)=0$ 的根為：

$$t=e^{2i\left(x+\frac{\pi k}{n}\right)},\quad k\in\mathbb{N}_0\wedge k<n$$

故：

$$f(t)=\prod_{k=0}^{n-1}(t-e^{2i\left(x+\frac{\pi k}{n}\right)})$$

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1-e^{2i\left(x+\frac{\pi k}{n}\right)})=1-e^{2inx}$$

代回：

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{\pi k}{n}\right)\\ &=i^n2^{-n}e^{-inx}i^{1-n}(1-e^{2inx})\\ &=2^{-n}i(e^{-inx}-e^{inx})\\ &=2^{1-n}\sin(nx)\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left|\sin\left(x+\frac{\pi k}{n}\right)\right|=(1-n)\ln(2)+\ln|\sin(nx)|$$

微分兩次：

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cot\left(x+\frac{\pi k}{n}\right)=n\cot(nx)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\csc^2\left(x+\frac{\pi k}{n}\right)=n^2\csc^2(nx)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\csc^2\left(x+\frac{\pi k}{n}\right)=n^2\csc^2(nx)-\csc^2(x)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\csc^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)=\lim_{x\to 0}n^2\csc^2(nx)-\csc^2(x)=\frac{(n-1)(n+1)}{3}$$

$$\cot^2(x)=\csc^2(x)-1$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cot^2\frac{\pi k}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}\csc^2\frac{\pi k}{n}-n+1=\frac{n^2-3n+2}{3}$$

□

三、 三角形公式定理

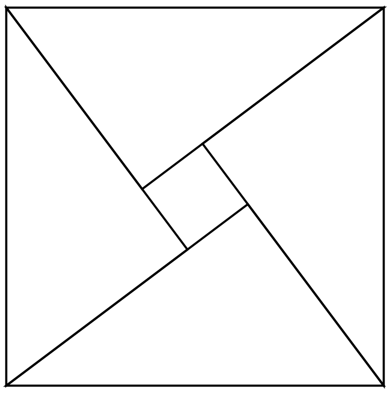
令圖形體積（或面積、長度）之代號同其自身。今有一三角形 ΔABC，其中：$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長分別為 a、b、c；$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 又記作 A、B、C；外接圓 O 圓心 O 即外心（Circumcenter）、半徑 R；內接圓 I 圓心 I 即內心（Incenter）、半徑 r；重心（Centroid）G；垂心（Orthocenter）H；$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊中點分別為 M_a、M_b、M_c；A 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 的垂足為 h_a，B 在 $\overleftrightarrow{CA}$ 的垂足為 h_b，C

在 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂足為 h_c；$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$；$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的角平分線與對邊之交點分別為 $\mathscr{B}_a$、$\mathscr{B}_b$、$\mathscr{B}_c$；九點圓 $\mathscr{O}$ 圓心 $\mathscr{O}$、半徑 $\mathscr{R}$；與 A、B、C 的兩鄰邊延長線與對邊皆相切的旁切圓分別為 E_a、E_b、E_c，其圓心（旁心）各同其圓名。

(一) 勾股/畢氏/商高定理

$$(\angle C = 90^\circ) \iff (a^2 + b^2 = c^2)$$

Proof.
趙爽勾股圓方圖證明法：



其中四個三角形的短股為 a、長股為 b、斜邊為 c。

$$4\frac{ab}{2} + (b-a)^2 = c$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

□

(二) 三角形全等與 SSA 型性質

令：已知兩三角形一對應位置之邊長相等稱 S，已知兩三角形一對應位置之角之角度相等稱 A，S 相鄰表示鄰邊，A 相鄰表示鄰角，S 與 A 相鄰表示邊與其一側的角，當 A 為直角得稱 R，R 之鄰邊得稱 H。

三角形的全等性質有 SSS、SAS、AAS、ASA、RHS，當兩三角形符合以上任一條件時，知兩三角形全等。

SSA 型的討論：若已知 a、b、$\angle A$：

- $\angle A$ 為銳角，因 C 到 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離為 $b\sin A$：
  - $a < b\sin A$: 無解
  - $a = b\sin A$: 唯一解
  - $a > b\sin A$: 兩解
- $\angle A$ 為鈍角，則：
  - $a \le b$: 無解
  - $a > b$: 唯一解

(三) 九點圓與歐拉線

- $M_a, M_b, M_c, h_a, h_b, h_c, \dfrac{A+H}{2}, \dfrac{B+H}{2}, \dfrac{B+H}{2}$ 必共圓，該圓稱九點圓。
- 九點圓圓周 $\mathcal{O}$ 與圓心 $\mathcal{O}$ 均符合：
$$\mathcal{O} = \frac{O+H}{2}$$
- 歐拉線：$\mathcal{O}, O, G, H$ 共線，該線稱歐拉線。
- ΔABC 是等腰三角形 $\iff$ I 在歐拉線上。
- 費爾巴哈定理（Feuerbach's theorem）：九點圓與三個旁切圓均外切，與內切圓內切（內切圓在內）。
$$\mathcal{O} = \frac{O}{2}$$

(四) 正弦定理

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

Proof.

$$\sin A = \frac{\overline{Ch_c}}{a}$$
$$\sin B = \frac{\overline{Ch_c}}{b}$$

□

$$2R\sin A = a$$

Proof.
作 O。若 ΔABC 為直角三角形，觀察可證。若 ΔABC 非直角三角形，以 BC 為一股，令斜邊在 $\overleftrightarrow{BO}$ 上，作一直角三角形 BCD，其中 $D = 2O - B$。若 ΔABC 為銳角三角形，根據圓周定理可知，$\angle D = \angle BAC$，得證。若 ΔABC 為鈍角三角形，根據根據圓內接四邊形對角互補定理可知，$\angle D = \pi - \angle A$，得證。 □

(五) 凸四邊形面積公式

$$\text{凸四邊形面積} = \frac{1}{2}\ \text{對角線相乘} \times \sin\ \text{兩對角線夾角}$$

(六) 投影定理

$$a = b\cos C + c\cos B$$

(七) 餘弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Proof.
根據投影定理：

$$c = a\cos B + b\cos A$$

兩邊同乘 c：

$$c^2 = ac\cos B + bc\cos A$$

同理：

$$a^2 = ac\cos B + ab\cos C$$

$$c^2 = bc\cos A + ab\cos C$$

$$c^2 = a^2 - ab\cos C + b^2 - ab\cos C = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

□

(八) 平行四邊形邊長與對角線長平方公式

平行四邊形四邊長平方和等於兩對角線長平方和

(九) 三角形中線公式

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM_a}^2 + \overline{BM_a}^2\right)$$

(十) 三角形面積公式

$$\begin{aligned}
\Delta ABC &= \frac{1}{2}a\cdot\overline{Ah_a} \\
&= \frac{1}{2}ab\sin C \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{（海龍（Heron）公式）} \\
&= \frac{abc}{4R} \\
&= rs \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}} \\
&= \frac{2}{3}\overline{BM_b}\cdot\overline{CM_c}\sqrt{\left|\frac{1-\left(\overline{AM_a}^2+\overline{BM_b}^2+\overline{CM_c}^2\right)^2}{4\overline{BM_b}^2\overline{CM_c}^2}\right|} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\overline{AB}^2\overline{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|
\end{aligned}$$

(十一)　重心相關定理

G 為三中線交點

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM_A}$$

$$G = \frac{A+B+C}{3}$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Delta GAB = \Delta GAC = \Delta GBC$$

(十二)　外心相關定理

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$$

$$O = \frac{a^2A + b^2B + c^2C}{a^2 + b^2 + c^2}$$

O 為三邊中垂線交點

$$\Delta OAB : \Delta OBC : \Delta OCA = \sin 2C : \sin 2A : \sin 2B$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overline{AB}^2$$

$$\frac{1}{2}\angle AOB = \angle C \vee \pi - \angle C$$

(十三)　內心相關定理

I 與三邊均相切

I 為三角角平分線交點

$$I = \frac{aA + bB + cC}{a+b+c}$$

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

(十四)　垂心相關定理

H 為三高交點

$$H = \frac{\tan A \cdot A + \tan B \cdot B + \tan C \cdot C}{\tan A + \tan B + \tan C}$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2\right)$$

在複數平面上：$\det\begin{pmatrix} 1 & A & A^2 & \overline{A} \\ 1 & B & B^2 & \overline{B} \\ 1 & C & C^2 & \overline{C} \\ 1 & H & H^2 & \overline{H} \end{pmatrix} = 0$

$$\frac{\overline{Hh_a}}{\overline{Ah_a}} + \frac{\overline{Hh_b}}{\overline{Bh_b}} + \frac{\overline{Hh_c}}{\overline{Ch_c}} = 1$$

(十五) 西瓦定理（Ceva theorem）

令西瓦線段指各頂點與其對邊或對邊延長線連接而成的直線段。

三角形 ΔABC 的西瓦線段 $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$：

$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$ 交於一點 $\iff \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1 \implies D$、$E$、$F$中有零或二個點不在$\Delta ABC$ 邊上

口訣：頂分頂分頂分頂

(十六) 孟氏定理（Menelaus' theorem）

一直線與 ΔABC 的邊 BC、CA、AB 或其延長線分別交於 L、M、N：

$\iff \dfrac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \dfrac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1 \implies L$、$M$、$N$中有一或三數個點不在$\Delta ABC$ 邊上

口訣：頂分頂分頂分頂

(十七) 角平分線定理

已知：ΔABC 中 $\angle B < \angle C$；D 在 $\overline{BC}$ 上；E 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上且不在 $\overline{BC}$ 上。

內角平分線定理及逆定理：

$$\angle BAD = \angle DAC \Leftrightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

外角平分線定理及逆定理：

$$\angle CAE = \pi - \angle BAE \Leftrightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

(十八) 角平分線長定理

$$\overline{A\mathscr{B}_a} = \frac{bc \sin A}{(b+c)\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

(十九) 多邊形內角和公式

任二邊不相交於該二邊之頂點（如有）以外之處的 n 邊形，其內角和為 $(n-2)\pi$。

(二十) 四面體內接球半徑定理

$$\text{內接球半徑} = \frac{3 \cdot \text{體積}}{\text{表面積}}$$

(二十一) 正四面體各公式

正四面體 A-BCD 邊長 a，高 h，表面積 A，體積 V，外接球半徑 R，內接球半徑 r，$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 距離 s，重心 $\dfrac{A+B+C+D}{4}$ 與 A 的距離 g：

$$h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$A = \sqrt{3}a^2$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

$$R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$$

$$s = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$g = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

(二十二) 圓內接四邊形對角線公式

一圓內接四邊形 $ABCD$，$\overline{AB} = a$、$\overline{BC} = c$、$\overline{CD} = c$、$\overline{DA} = d$：

$$\overline{AC}^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$$

$$\overline{BD}^2 = \frac{(ac + bd)(ad + cd)}{ad + bc}$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = ac + bd$$

(二十三) 球面餘弦定律

空間中與一定點 O 距離為 $R > 0$ 的所有點 P 所形成的圖形稱一球面，其中 O 稱為球心，R 稱為半徑。

令球面上有球面三角形 ABC，$\angle A$ 之對邊弧長除以球面之半徑等於 a，$\angle B$ 之對邊弧長除以球面之半徑等於 b，$\angle C$ 之對邊弧長除以球面之半徑等於 c。

第一球面餘弦定律：

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

第二球面餘弦定律/角度餘弦定律：

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$