牛頓力學與重力

沈威宇

2025 年 4 月 15 日

目錄

第一章　牛頓力學（Newtonian Mechanics）與重力（Gravity）

第一節　牛頓力學

一、　時刻與時間

(一)　時刻

自時間為零起算，經過 k 秒，稱第 k 秒末、第 k 秒或第 $k+1$ 秒初。

(二)　時間

- 第 k 秒初到第 k 秒末稱第 k 秒內。
- 第 1 秒初到第 k 秒末稱 k 秒內。

二、　牛頓運動定律（Newton’s laws of motion）

- 第一定律：假若施加於某物體的外力為零，則該物體的運動速度不變（慣性定律）
- 第二定律：施加於物體的外力等於此物體的質量與加速度的乘積（加速度定律）
- 第三定律：當兩個物體交互作用於對方時，彼此施加於對方的力，其大小相等、方向相反（作用力與反作用力定律）

三、　平移運動/平動

(一)　向量

- 力（Force）：物體間的交互作用。
- 平衡力：作用在同一物體上、量值相等、方向相反的力。
- 反作用力（Reaction force）：給定某作用力（Action force），必定存在的一個與其大小相等、方向相反的力。
- 位置（Position）：相對於某參考原點建立向量空間，表示空間中某點的向量，其分量數等於空間之維度數。
- 位移（Displacement）：末位置減初位置。
- （瞬間）速度（Velocity）：位置對時間的導數。

- 平均速度（Average velocity）：位移除以時間。
- （瞬間）加速度（Acceleration）：速度對時間的導數。
- 平均加速度（Average acceleration）：末速度減去初速度，再除以時間。
- 動量（Momentum）：質量與速度的乘積。
- 衝量（Impulse）：末動量減去初動量。
- 保守力（Conservative force）：只與物體位置有關而與路徑、時間無關的力，對於兩給定端點間的任意路徑，其對位置的路徑積分相同。

(二) 純量

- 距離（Distance）：兩物體之距離為其位置向量差的歐幾里得範數。
- （慣性）質量：對於某物施力時該力與其該物加速度的比值。
- （瞬間）速率（Speed）：速度的歐幾里得範數。
- 路徑長（Path length）：速率對時間自初時刻到末時刻的積分。
- 平均速率（Average speed）：路徑長除以時間。
- 功（Work）：力的路徑積分。
- 功率（Power）：功除以時間。
- 動能（Kinetic energy）：二分之一乘以動量的平方除以質量，二分之一乘以質量乘以速率的平方。
- 位能（Potential energy）：物體因其相對於其他物體的位置、自身內部的應力、電荷或其他因素所持有的能量。對於保守力，位能只與物體位置有關而與路徑、時間無關。位能一般僅定義於保守力。
- 力學能（Mechanical energy）：動能與位能的總和。
- 密度（Density）：質量除以體積。
- 質心（Center of mass）：物體內密度乘以位置向量的體積積分除以總質量。

(三) 功能定理（The Work–Energy Theorem）

一物在一段時間內所受外力作功等於其動能變化。

(四) 質心位置

質心之位置對時間函數等於物體內密度乘以位置對時間函數的體積積分除以總質量。

(五) 質心動能

系統總質量 m，質心速度 $\mathbf{v}_c$，質心動能 K_c：

$$K_c = \frac{m\mathbf{v}_c{}^2}{2}.$$

系統質心動能僅受系統外力影響。

(六) 力學能守恆（Law of Conservation of Mechanical Energy）

對於熱孤立系統，若僅受保守力作功，則力學能守恆。

四、 轉動

(一) 向量

- （槓桿）力臂（Lever arm）：施力點相對於受力物質心的位置向量。
- 力矩（Torque）：力與力臂的叉積。
- 角位置（Angular position）：相對於某個參考旋轉軸與參考角位置原點，物體的位置向量在垂直參考旋轉軸的次一維超平面上的投影與參考角位置原點的夾角，逆時針為正方向。對於每個軸有一個角位置。要描述某物體的定向（Orientation）需要的角位置向量之分量數等於二分之一 (空間之維度數的平方減去空間之維度數)。
- 角位移（Angular displacement）：末角位置減初角位置。
- （瞬間）角速度（Angular velocity）：角位置對時間的導數。
- （瞬間）角加速度（Angular acceleration）：角速度對時間的導數。
- 角動量（Angular momentum）：轉動慣量與角速度的乘積。

(二) 純量

- 轉動慣量（Moment of inertia）：物體內密度乘以與參考軸距離的平方的體積積分。轉動慣量乘以角加速度等於力矩。
- （瞬間）角速率（Angular speed）：角速度的歐幾里得範數。

(三) 轉動與平動的關係

令有某固定參考旋轉軸與某點剛體，令剛體位置 $\mathbf{x}$，參考旋轉軸方向單位向量 $\hat{n}$，參考旋轉軸至該點剛體最短向量 $\mathbf{r}$。設 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}=0$，$\frac{\mathrm{d}(\mathbf{x}\cdot\hat{n})}{\mathrm{d}t}=0$。令剛體質量 m、轉動慣量 $I=m\mathbf{r}^2$、角速度 ω、角加速度 α、速度 $\mathbf{v}$、加速度 $\mathbf{a}$、角動量 $L=I\omega$、轉動動能 K。力與力矩量值均不為無限大。

$$\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r}.$$

$$\mathbf{a}=\alpha\times\mathbf{r}-\omega^2\mathbf{r}.$$

$$K=\frac{I\omega^2}{2}=\frac{L^2}{2I}.$$

五、 變質量系統

加速度量值不為無限大。

(一) 質量增加

- t 時：物質量 m、速度 $\mathbf{v}$；質量 dm 之速度為 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$；總動量 $\mathbf{p}$
- $(t+\mathrm{d}t)$ 時：物的參數在 t 時為 i 者變為為 $i+\mathrm{d}i$；總動量 $\mathbf{p}+\mathrm{d}\mathbf{p}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= (m+\mathrm{d}m)\mathbf{v}+(\mathrm{d}m)\mathbf{u} \\
\mathbf{p}+\mathrm{d}\mathbf{p} &= (m+\mathrm{d}m)(\mathbf{v}+\mathrm{d}\mathbf{v}) \\
&= m\mathbf{v}+m(\mathrm{d}\mathbf{v})+(\mathrm{d}m)\mathbf{v}+(\mathrm{d}m)(\mathrm{d}\mathbf{v})
\end{aligned}$$

$$\lim_{\mathrm{d}t\to 0}(\mathrm{d}m)(\mathrm{d}\mathbf{v})=0$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{p} &= m(\mathrm{d}\mathbf{v})-(\mathrm{d}m)\mathbf{u} \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} &= m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}
\end{aligned}$$

(二) 質量減少

- t 時：物質量 m、速度 $\mathbf{v}$；總動量 $\mathbf{p}$
- $(t+\mathrm{d}t)$ 時：物的參數在 t 時為 i 者變為為 $i+\mathrm{d}i$，其中 d$m<0$；質量 –dm 之速度為 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$；總動量 $\mathbf{p}+\mathrm{d}\mathbf{p}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= m\mathbf{v} \\
\mathbf{p}+\mathrm{d}\mathbf{p} &= m(\mathbf{v}+\mathrm{d}\mathbf{v})+(\mathrm{d}m)\mathbf{u} \\
\mathrm{d}\mathbf{p} &= m(\mathrm{d}\mathbf{v})+(\mathrm{d}m)\mathbf{u} \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} &= m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}
\end{aligned}$$

第二節　常見接觸力

生活中常見的接觸力多主要由電磁力構成。

一、　正向力（Normal Force）

垂直於界面的排斥方向的接觸力，且其值足夠小不使界面兩側的物體產生垂直於界面的排斥方向相對速度。

二、　摩擦力（Friction Force）

平行於界面的與物體受他合力水平分量相反的接觸力。與正向力、物體材質及粗糙程度有關，與接觸面積與非相對位置對時間函數無關。

- 靜摩擦力（Static Friction）：界面兩側物體相對靜止時的摩擦力，等於物體受他合力水平分量的相反，小於最大靜摩擦力。
- 最大靜摩擦力（Maximum Static Friction）：一界面的靜摩擦力的最大值，正比於該界面的正向力，其與正向力的比值稱（最大）靜摩擦（力）係數。

- 動摩擦力（Kinetic Force）：界面兩側物體有相對移動時的摩擦力，為一定值，正比於該界面的正向力，略小於最大靜摩擦力，其與正向力的比值稱（滑）動摩擦（力）係數。

三、　彈性力/回復力（Elastic Force/Restoring Force）

彈性物體垂直於物體內部假想界面的吸引方向的接觸力，對於符合虎克定律（Hooke’s Law），彈性力等於力常數/彈力常數/彈性常數乘以相對於平衡點的位移，可定義彈力位能等於力常數乘以相對於平衡點的位移的平方除以二。

四、　張力（Tension）

曲線狀物體內部的吸引方向的接觸力。

五、　表面張力（Surface Tension）

液體表面分子間的吸引力。

第三節　重力

一、　Kepler’s Laws (克卜勒定律)

Kepler’s laws are published by Johannes Kepler in 1609 to 1619.
Let:

the star orbited by the planet $= (0, 0)$

a : the length of the semi-major axis of the planet’s orbit,

b : the length of the semi-minor axis of the planet’s orbit,

c : the focal length of the planet’s orbit,

e : the eccentricity of the orbit,

x : x-axis component of the planet’s position,

y : y-axis component of the planet’s position,

r : the distance between the star and the planet,

θ : the angle between the line between the planet and the star and x-axis,

ω : the angular velocity of the planet with reference to the star,

α : the angular acceleration of the planet with reference to the star,

A : the area swept by the line connecting the planet and the star,

m : the mass of the planet,

L : the angular momentum of the planet,

T : the period of time the planet takes to orbit its star

(一)　Kepler’s First Law of Ellipses (克卜勒第一橢圓定律)

For a planet:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos(\theta)}$$

(二) Kepler’s Second Law of Equal Areas (克卜勒第二等面積定律)

$$\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}r^2\alpha = \frac{1}{2m}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0$$

(三) Kepler’s Third Harmonic Law (克卜勒第三週期定律)

For all planets orbiting the same star:

$$\frac{a^3}{T^2} = k$$

where k is a constant.
According to the law of universal gravitation:

$$k = \frac{GM}{4\pi^2}$$

where G is the gravitational constant and M is the mass of the star.

二、 內行星最大視角

設觀察者 A 所在星球繞恆星 S 之軌道為半徑 R 的圓，同平面上其內行星 B 繞 S 之軌道為半徑 r 的圓，星球視為質點，則 A 觀察 B 與 S 之夾角之最大值為 $\arcsin\frac{r}{R}$，發生於 $\overline{AB}\perp\overline{BS}$ 時。

三、 牛頓萬有引力定律（Newton’s Law of Universal Gravitation）

牛頓重力服從牛頓萬有引力定律：

$$F = \frac{\mathrm{G}m_1m_2}{r^2}$$

其中：F 為重力；萬有引力常數 G = 6.67430×10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}；m_1、m_2 為兩質點質量；r 為兩質點距離。

(一) Shell Theorem (球殼定理)

Theorem:

1. A spherically symmetric body affects external objects gravitationally as though all of its mass were concentrated at a point at its center.
2. If the body is a spherically symmetric shell (i.e., a hollow ball), no net gravitational force is exerted by the shell on any object inside, regardless of the object’s location within the shell.

Proof.
Consider a spherical symmetric body as composed of infinitesimally thin spherical shells. Thus, the proposition is equivalent to stating that:
1. A thin spherical shell affects external objects gravitationally as though all of its mass were

concentrated at a point at its center.
2. No net gravitational force is exerted by a thin spherical shell on any object inside, regardless of the object's location within the shell.
In this context, any number divided by 0 is defined as 0, because the universal gravitational force between two objects is zero when their distance is zero.
Let G be the universal gravitational constant, M be the mass of the shell, and R be its radius.
Choose a plane passing through the centroid of the shell, with the centroid of the shell as the origin, and any straight line on this plane as the polar axis, defining a polar coordinate system. Divide the shell into infinite infinitesimal rings such that the center of each ring lies on the polar axis and the plane of each ring is perpendicular to the polar axis. Define the angular position of each ring as the absolute value of its intersection points with the polar coordinate plane, ensuring that each ring has an angular position θ between 0 and π (inclusive).
Take a point P at a distance D from the center of mass of the shell.
Let m be the mass of a particular ring, s be the distance from any point on this ring to P, and dg be the gravitational field strength at P due to this ring, which is positive if it points towards the center of the ring and negative if it points away from the center of the ring.
Let:

$$x = D - R\cos\theta$$

Let dm be the mass of any point on the ring, and ddg be the gravitational field strength at P due to this point.

$$|ddg| = G\frac{dm}{s^2}$$

$$\begin{aligned} dg &= \int ddg \\ &= \left(\frac{G}{s^2}\right)\int\left(\frac{dm \cdot x}{s}\right) \\ &= \frac{G \cdot m \cdot x}{s^3} \end{aligned}$$

For any ring:

$$R^2 + D^2 - s^2 = 2RD\cos\theta$$

$$x^2 = D^2 + R^2\cos^2\theta - 2RD\cos\theta = s^2 - R^2\sin^2\theta$$

$$\begin{aligned} m &= \left(\frac{M}{4\pi R^2}\right) \cdot R\,d\theta \cdot 2\pi \cdot \sqrt{s^2 - x^2} \\ &= \frac{M\,d\theta\sqrt{s^2 - x^2}}{2R} \end{aligned}$$

So:

$$\begin{aligned}
g &= \int dg \\
&= G\int_0^{\pi}\left(\frac{M\sqrt{s^2-x^2}\cdot x}{2Rs^3}\right)d\theta \\
&= \frac{GM}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\theta x}{s^3}\right)d\theta \\
&= \frac{GM}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\theta\,(D-R\cos\theta)}{s^3}\right)d\theta \\
&= \frac{GM}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\theta\left(D-\frac{R^2+D^2-s^2}{2D}\right)}{s^3}\right)d\theta \\
&= \frac{GM}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\theta(-R^2+D^2+s^2)}{2Ds^3}\right)d\theta
\end{aligned}$$

Using $R^2+D^2-s^2=2RD\cos\theta$:

$$\begin{gathered}
ds\frac{d(R^2+D^2-s^2)}{ds}=d\theta\frac{d(2RD\cos\theta)}{d\theta} \\
-ds\cdot 2s=d\theta\cdot(-2RD\sin\theta) \\
s\cdot ds=RD\sin\theta\,d\theta
\end{gathered}$$

So:

$$\begin{aligned}
g &= \frac{GM}{2}\int_{|D-R|}^{D+R}\left(\frac{s(-R^2+D^2+s^2)}{2RD^2s^3}\right)ds \\
&= \frac{GM}{2}\int_{|D-R|}^{D+R}\left(\frac{-R^2+D^2+s^2}{2RD^2s^2}\right)ds
\end{aligned}$$

Considering the following differential expression:

$$\frac{d\left(\frac{s^2-D^2+R^2}{2RD^2s}\right)}{ds}=\frac{2s\cdot 2RD^2s-\left(s^2-D^2+R^2\right)\cdot 2RD^2}{4R^2D^4s^2}=\frac{s^2+D^2-R^2}{2RD^2s^2}$$

We get:

$$\begin{aligned}
g &= \frac{GM}{2}\left(\frac{s^2-D^2+R^2}{2RD^2s}\right)\Bigg|_{|D-R|}^{D+R} \\
&= \frac{GM}{2}\left(\frac{2R^2+2RD}{2RD^2(D+R)}-\frac{2R^2-2RD}{2RD^2|D-R|}\right) \\
&= \frac{GM}{2}\cdot\frac{|D-R|+(D-R)}{D^2|D-R|} \\
&= \begin{cases}\dfrac{GM}{D^2}, \text{ when } D>R \\ 0, \text{ when } D\le R\end{cases}
\end{aligned}$$

□

(二)　空腔定理（Cavity Theorem）

令一均勻球體質量 M、半徑 R、球心 d，以其內任一位置 c 為球心挖一球形空腔，半徑 r，且整個空腔皆在半徑 R 球體中。令一動點 p 於空腔中，該點之重力場強度為 g。

Theorem: g 與 p 之位置無關。

Proof.

$$g = \frac{GM\vec{pd}}{\left|\vec{pd}\right|^2 \cdot R^3} - \frac{GM\vec{pc}}{\left|\vec{pc}\right|^2 \cdot R^3} = \frac{GM\vec{cd}}{R^3}$$

□

四、 標準重力加速度

9.80665 m/s^2。

五、 卡文迪西（扭秤）試驗（Cavendish experiment）

1798 年亨利・卡文迪西（Henry Cavendish）完成。是第一個在實驗室內完成的測量兩個物體之間萬有引力的實驗，並且第一個求出了萬有引力常數和地球質量。實驗裝置是扭秤，用線捆綁的長木棍兩端各有一小鉛球，兩大鉛球分別懸掛在小球附近一小段距離，實驗即測量大球和小球之間微弱的重力。

六、 視重

指物體對地的正向力量值。

第四節 常見運動

一、 兩物碰撞

(一) 碰撞的定義

物體接近時，彼此有排斥力發生。

(二) 碰撞的性質

- 動量守恆。
- 質心動能守恆。
- 總動能、內動能在碰撞過程中不守恆，但碰撞前、後則可能相同或不相同。

(三) 縮減質量（reduced mass）/有效慣性質量/約化質量/減縮質量

一系統中二質點質量 m_1, m_2，縮減質量 μ 定義為：

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

(四) 內動能

內動能為系統總動能減去質心動能。
兩物運動，縮減質量 μ，相對速度 $\mathbf{u}$，內動能 K_{int}：

$$K_{int} = \frac{\mu \mathbf{u}^2}{2}.$$

質心動能加內動能等於兩物的總動能。

(五) 兩物一維碰撞能量與距離關係

兩物距離 x，內動能 K_{int}，則自碰撞過程中 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 與 $\frac{\mathrm{d}K_{int}}{\mathrm{d}t}$ 同號，當 $x=0$ 時 K_{int}。

(六) 恢復係數（coefficient of restitution）

- 碰撞前物 1 相對於物 2 接近速度 v_{12}。
- 碰撞後物 2 相對於物 1 遠離速度 v'_{21}。

恢復係數 e：

$$e=\frac{v'_{21}}{v_{12}}$$

(七) 兩物一維（完全）彈性碰撞（Elastic collision）

- $e=1$
- 碰撞期間作用力均為保守力。
- 兩者最接近時內動能全部轉換成位能。
- 碰撞前、中、後力學能守恆。
- 碰撞前後總動能與內動能均守恆。
- 碰撞前後兩者之相對速度量值不變，符號變號。

(八) 兩物一維非彈性碰撞（Inelastic collision）

- $0\leq e<1$
- 碰撞期間作用力有非保守力。
- 兩者最接近時內動能非全部轉換成位能，有力學能損失。
- 碰撞後力學能、內動能與總動能均小於碰撞前。

(九) 兩物一維完全非彈性碰撞（Completely inelastic collision）

- $e=0$
- 碰撞期間作用力有非保守力。
- 兩者最接近時內動能全部損失，且該損失為力學能損失。
- 碰撞後內動能為零，力學能與總動能均小於碰撞前。

(十) 兩物一維彈性碰撞通式

m_1 原速度 v_1，m_2 原速度 v_2，作彈性碰撞後，m_1 速度變為 v_1'，m_2 速度變為 v_2'，質心速度恆為 v_c。

$$v_1' = 2v_c - v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = 2v_c - v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_2 + m_1}$$

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$$

當 $m_1 = m_2$，$v_1' = v_2$、$v_2' = v_1$。

(十一) 兩物一維彈性碰撞能量變化

m_1 以一速度靠近靜止 m_2，作彈性碰撞。令 $r = \dfrac{m_1}{m_2}$、碰撞前 m_1 之動能 K_1、m_2 之動能 K_2，碰撞後 m_1 之動能 K_1'、m_2 之動能 K_2'。

$$K_2 = 0$$

$$K_1' = \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2}K_1$$

$$K_2' = \frac{4r}{(1+r)^2}K_1$$

$$\frac{K_2'}{K_1} = \frac{4r}{(1+r)^2} = \frac{m_1m_2}{\left(m_1 + m_2\right)^2}$$

$$\frac{K_1'}{K_1} = \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

當 $r = 1$，能量傳遞比率 $= 1$；當 $r = 0.5$ 或 $r = 2$，能量傳遞比率 $= \dfrac{8}{9}$。

(十二) 兩物一維碰撞通式

m_1 原速度 v_1，m_2 原速度 v_2，作恢復係數 e 之碰撞後（$0 \leq e \leq 1$），m_1 速度變為 v_1'，m_2 速度變為 v_2'，質心速度恆為 v_c，碰撞前內動能 K_{int}，碰撞後內動能 K_{int}'。

$$v_1' = (1+e)\,v_c - ev_1 = \frac{(m_1 - em_2)v_1 + (1+e)\,m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = (1+e)\,v_c - ev_2 = \frac{(m_2 - em_1)v_2 + (1+e)\,m_1v_1}{m_2 + m_1}$$

$$K_{int}' = \frac{\mu\left(v_1' - v_2'\right)^2}{2} = \frac{\mu\left(e\left(v_1 - v_2\right)\right)^2}{2} = e^2K_{int}$$

(十三) 兩物夾彈簧作一維彈性碰撞

m_1 原速度 v_1，m_2 原速度 v_2，原內動能 K_{int}，縮減質量 μ，m_1 靠 m_2 側或 m_2 靠 m_1 側黏有一質量不計、力常數為 k 之理想彈簧，作彈性碰撞，碰撞過程中彈簧被壓縮之最大長度為 x。

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{\mu(v_1 - v_2)^2}{2} = K_{int}$$

(十四)　彈簧兩端兩物簡諧運動

一質量不計、力常數 k 之理想彈簧，兩端各黏一物，縮減質量 μ，作簡諧運動，角頻率 ω：

$$\frac{k}{\mu}=\omega^2.$$

二、　有空氣阻力的自由落體運動（Free fall motion with air resistance）

設一質量為 m 之物作有空氣阻力的自由落體運動；令 t 為時間，以該物運動開始為 0；令 $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$ 為該物之位置對時間之函數；設該物所受重力場強度不變且向下（令為 y 軸負向）；設地平參考系為慣性參考系；設空氣阻力 **f** 符合公式 $\mathbf{f}=-\frac{1}{2}\cdot C\cdot\rho\cdot A\cdot\left|\mathbf{r}'(t)\right|\cdot\mathbf{r}'(t)$，其中 C 為該物的阻力係數、ρ 為空氣密度、A 為該物垂直於速度方向的截面積，設其不變。

令：g 為重力加速度量值；$k=\dfrac{C\cdot\rho\cdot A}{2\cdot m}$；$(x_0,y_0)$ 為該物之初位置（$t=0$ 時的位置）；(v_{x0},v_{y0}) 為該物之初速度（$t=0$ 時的速度）；$\hat{j}$ 為 y 軸正向之單位向量；T 為該物落地（$y(t)=0$）時之時間；v_{yt} 為該物之終端平行於 y 軸之速度分量，以向 y 軸正向為正，即該物該物平行於 y 軸之速度分量達到 v_{yt} 後即不再變化；t_{yt} 為該物平行於 y 軸之速度分量達到 v_{yt} 之時間；t_{yh} 為該物處於最高點的時間。

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}''(t)&=-k\cdot\mathbf{r}'(t)^2-g\cdot\hat{j}\\
\mathbf{r}(0)&=(x_0,y_0)\\
\mathbf{r}'(0)&=(v_x0,v_y0)\\
x''(t)&=-k\cdot\left(x'(t)\right)^2\\
x(0)&=x_0\\
x'(0)&=v_{x0}\\
\Rightarrow\quad x(t)&=\frac{\ln\left(\frac{1}{v_{x0}}+k\cdot t\right)-\ln\left(\frac{1}{v_{x0}}\right)}{k}+x_0\\
x'(t)&=\frac{v_{x0}}{v_{x0}\cdot k\cdot t+1}\\
x''(t)&=\frac{{v_{x0}}^2\cdot k}{\left(v_{x0}\cdot k\cdot t+1\right)^2}\\
y''(t)&=-k\cdot\left(y'(t)\right)^2-g\\
y(0)&=y_0\\
y'(0)&=v_{y0}\\
\Rightarrow\quad y(t)&=\frac{\ln\left(\cos\left(\sqrt{g\cdot k}\cdot t\pm\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{{v_{y0}}^2\cdot k+g}}\right)\right)\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{{v_{y0}}^2\cdot k+g}}\right)}{k}+y_0\\
y'(t)&=-\frac{\sqrt{g}\cdot\tan\left(\sqrt{g\cdot k}\cdot t\pm\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{{v_{y0}}^2\cdot k+g}}\right)\right)}{\sqrt{k}}\\
y''(t)&=-g\cdot\sec^2\left(\sqrt{g\cdot k}\cdot t\pm\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{{v_{y0}}^2\cdot k+g}}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$T=\frac{\pm\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{{v_{y0}}^{2}\cdot k+g}}\right)\pm\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{g}\cdot e^{-k\cdot y_0}}{\sqrt{{v_{y0}}^{2}\cdot k+g}}\right)}{\sqrt{g\cdot k}}\wedge T>0$$

$$t_{yt}=\begin{cases}\dfrac{\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{{v_{y0}}^{2}\cdot k+g}}\right)\pm\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{g}\cdot e^{-\sqrt{g\cdot k}-k\cdot y_0}}{\sqrt{{v_{y0}}^{2}\cdot k+g}}\right)}{\sqrt{g\cdot k}} & \text{when it} < T.\\ \text{does not exist when otherwise.} \end{cases}$$

$$v_{yt}=\begin{cases}\sqrt{\frac{g}{k}}\ \text{when } t_{yt}\ \text{exists.}\\ \text{does not exist when otherwise.}\end{cases}$$

$$t_{yh}=\begin{cases}\dfrac{z\cdot\pi\pm cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{{v_{y0}}^{2}\cdot k+g}}\right)}{\sqrt{g\cdot k}}, z=\min\{i\in\mathbb{Z}\mid t_{yh}>0\}\ \text{when } v_{y0}>0.\\ 0\ \text{when } v_{y0}\le 0.\end{cases}$$

三、　等速率圓周運動（Uniform circular motion）

設一質點作等速率圓周運動，其軌跡為一圓之圓周，稱該圓為軌跡圓。

令：R 為軌跡圓半徑；t 為時間，以質點運動開始為 0；$\mathbf{r}(t)$ 為質點之位置對時間之函數；v 為質點之速率；ω 為質點之角速度量值；a_n 為質點之法向加速度，以向軌跡圓圓心為正；θ 為質點以圓心為參考點、以逆時針為增的角位置，得以圓周上任意位置為 0；$\theta(t)$ 為 θ 對 t 的函數；ϕ 為質點運動開始瞬間之角位置，即相位角。

$$\begin{aligned}\omega&=\frac{v}{R}\\ a_c&=\omega^2\cdot R\\ &=\frac{v^2}{R}\\ \theta t&=\omega\cdot t+\phi\\ \mathbf{r}(t)&=(R,\omega\cdot t+\phi)\ \text{（極座標系）}\\ &=(R\cdot\cos(\omega\cdot t+\phi),R\cdot\sin(\omega\cdot t+\phi))\ \text{（平面直角座標系）}\end{aligned}$$

四、　鉛直圓周運動（Vertical circular motion）

設：一質點作鉛直圓周運動，其軌跡為一圓之圓周，稱該圓為軌跡圓，並定義軌跡圓所處平面為紙面；其所受重力場強度不變且向下（令為 y 軸負向）；其受一變力，量值 N，方向指向軌跡圓圓心或其反向，以向心為正，離心為負；提供該力之物為一軌跡圓圓心與該質點之連線，稱 N 物，N 物為剛體或繩子影響 N 之變化範圍；質點不受此二力以外之力。

令：R 為軌跡圓半徑；t 為時間，以質點運動開始為 0；v 為質點之速率；u 為質點在軌跡圓最低點時之速率；h 為質點相對於軌跡圓最低點的高度；θ 為質點以圓心為參考點、以最低點為 0、以逆時針為增的角位置，順時針與逆時針以紙面正面之觀察為準；$\theta(t)$ 為 θ 對 t 的函數；ϕ 為質點運動開始瞬間之角位置，即相位角；　為質點之角速度向量；ω 為質點之角速度量值，即 | |；m 為質點之質量；a_g 為重力加速度量值；U 為質點之重力位能，以軌跡圓最低點為零位面；K 為質點之動能；$\hat{k}$

為垂直出紙面之單位向量；T 為質點運動之週期；a_n 為質點之法向加速度，以向軌跡圓圓心為正；a_t 為質點之切向加速度，以與速度同向為正、反向為負。

$$
\begin{aligned}
U &= m a_g h \\
K &= \frac{mv^2}{2} \\
U + K &= \text{constant} \\
v &= \sqrt{u^2 - 2a_g h} \\
N &= m a_g \cos(\theta) + \frac{mv^2}{R} \\
&= \frac{m}{R}(a_g(R-h) + v^2) \\
&= \frac{m}{R}(u^2 - 3a_g h + a_g R) \\
\text{最高點之 } N &= m \cdot \frac{u^2 - 5a_g R}{R} \\
a_n &= \frac{N}{m} - a_g \cos(\theta) \\
&= \frac{v^2}{R} \\
a_t &= -a_g \sin\left(\theta \cdot \frac{}{\omega \cdot \hat{k}}\right) \\
T &= R \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{u^2 - 2a_g R(1-\cos(\theta))}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} &= -\frac{a_g}{R} \cdot sin(\theta(t)) \\
\theta(0) &= \phi \\
\text{當 } \theta &= 0, v = u \\
\Rightarrow \quad \theta(t) &= \pm 2 \cdot \mathrm{am}\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(2 \cdot \frac{a_g}{R} + c_1\right) \cdot \left(t + c_2\right)^2}, \frac{4 \cdot \frac{a_g}{R}}{2 \cdot \frac{a_g}{R} + c_1}\right) \\
c_2 &= \pm \frac{2 \cdot \mathrm{F}\left(\frac{\phi}{2}, \frac{4 \cdot \frac{a_g}{R}}{2 \cdot \frac{a_g}{R} + c_1}\right)}{\sqrt{2 \cdot \frac{a_g}{R} + c_1}} \\
\theta'(-c_2) &= \pm \frac{u}{R}
\end{aligned}
$$

, where $F(x, m)$ is the elliptic integral of the first kind with parameter $m = k^2$, and $\mathrm{am}(x, m)$ is the Jacobi amplitude function.

當 N 物為繩子：

$N \geq 0$。

$u > \sqrt{5a_g R}$：最高點 $N > 0$。

$u = \sqrt{5a_g R}$：最高點 $N = 0$。

$\sqrt{2a_g R} < u < \sqrt{5a_g R}$：軌跡非全在圓周上，此處不討論。

$0 < u \leq \sqrt{2a_g R}$：為單擺，此處不討論。

$u = 0$：靜止，此處不討論。

當 N 物為剛體：

N可為任何數。

$u > \sqrt{5a_g R}$：最高點 $N > 0, v > \sqrt{a_g R}$。

$u = \sqrt{5a_g R}$：最高點 $N = 0, v = \sqrt{a_g R}$。

$2\sqrt{a_g R} < u < \sqrt{5a_g R}$：最高點 $N < 0, v < \sqrt{a_g R}$。

$u = 2\sqrt{a_g R}$：最高點 $N = -mgR, v = 0$，即到達最高點時便靜止不再移動，此處不討論。

$0 < u < 2\sqrt{a_g R}$：為單擺，此處不討論。

$u = 0$：靜止，此處不討論。

五、　簡單單擺（Simple pendulum）

設：一質點作簡單單擺運動，其軌跡為一圓之圓周之部分，稱該圓為軌跡圓，並定義軌跡圓所處平面為紙面；其所受重力場強度不變且向下（令為 y 軸負向）；其受一變力，量值 N，方向指向軌跡圓圓心或其反向，以向心為正，離心為負；提供該力之物為一軌跡圓圓心與該質點之連線，稱 N 物，N 物為剛體或繩子影響 N 之變化範圍；質點不受此二力以外之力。

令：R 為軌跡圓半徑；t 為時間，以質點運動開始為 0；v 為質點之速率；u 為質點在軌跡圓最低點時之速率；h 為質點相對於軌跡圓最低點的高度；θ 為質點以圓心為參考點、以最低點為 0、以逆時針為增的角位置，順時針與逆時針以紙面正面之觀察為準；$\theta(t)$ 為 θ 對 t 的函數（令 t 之定義域自全部正數延伸至全部實數）；ϕ 為質點運動開始瞬間之角位置，即相位角；θ_m 為質點自最低點運動至最高點之角位移之絕對值； 為質點之角速度向量；ω 為質點之角速度量值，即 | |；m 為質點之質量；a_g 為質點之重力加速度量值；U 為質點之重力位能，以軌跡圓最低點為零位面；K 為質點之動能；$\hat{k}$ 為出紙面單位向量；T 為質點運動之週期；a_n 為質點之法向加速度，以向軌跡圓圓心為正；a_t 為質點之切向加速度，以與速度同向為正、反向為負。

$$
\begin{aligned}
U &= m a_g h \\
K &= \frac{m v^2}{2} \\
U + K &= \text{constant} \\
v &= \sqrt{u^2 - 2 a_g h} \\
N &= m a_g \cos(\theta) + \frac{m v^2}{R} \\
&= \frac{m}{R}(a_g(R - h) + v^2) \\
&= \frac{m}{R}(u^2 - 3 a_g h + a_g R) \\
a_n &= \frac{N}{m} - a_g \cos(\theta) \\
&= \frac{v^2}{R} \\
a_t &= -a_g \sin\left(\theta \cdot \frac{\quad}{\omega \cdot \hat{k}}\right) \\
\theta_m &= \cos^{-1}(1 - \frac{u^2}{2 a_g R}) \\
T &= 2 \cdot \sqrt{\frac{2R}{a_g}} \cdot \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos\left(\theta_m\right)}} \\
&= 2\pi \sqrt{\frac{R}{a_g}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2^i} \cdot \sin^{2i}(\frac{\theta_m}{2}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{a_g}{R} \cdot sin(\theta(t)) \\
&\quad \theta(0) = \phi \\
&\quad \text{當 } \theta = 0, v = u \\
\Rightarrow \quad &\theta(t) = \pm 2 \cdot \mathrm{am}\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(2 \cdot \frac{a_g}{R} + c_1\right) \cdot \left(t + c_2\right)^2}, \frac{4 \cdot \frac{a_g}{R}}{2 \cdot \frac{a_g}{R} + c_1}\right) \\
&\quad c_2 = \pm \frac{2 \cdot \mathrm{F}\left(\frac{\phi}{2}, \frac{4 \cdot \frac{a_g}{R}}{2 \cdot \frac{a_g}{R} + c_1}\right)}{\sqrt{2 \cdot \frac{a_g}{R} + c_1}} \\
&\theta'(-c_2) = \pm \frac{u}{R}
\end{aligned}
$$

, where $F(x, m)$ is the elliptic integral of the first kind with parameter $m = k^2$, and $\mathrm{am}(x, m)$ is the Jacobi amplitude function.

當 N 物為繩子：

$$N \geq 0。$$

$u \geq \sqrt{5a_g R}$：鉛直圓周運動，此處不討論。

$\sqrt{2a_g R} < u < \sqrt{5a_g R}$：軌跡非全在圓周上，此處不討論。

$0 < u \leq \sqrt{2a_g R}$：單擺。

$u = 0$：靜止。

當 N 物為剛體：

N可為任何數。

$u > 2\sqrt{a_g R}$：鉛直圓周運動，此處不討論。

$u = 2\sqrt{a_g R}$：最高點 $N = -mgR, v = 0$，即到達最高點時便靜止不再移動，此處不討論。

$0 < u < 2\sqrt{a_g R}$：單擺。

$u = 0$：靜止。

六、　簡諧運動（Simple harmonic motion）

設一質點作簡諧運動，即所受力使質點之加速度恆為質點自平衡點至該點之位移的 $-k$ 倍。
令：t 為時間，以質點運動開始為 0；$x(t)$ 為質點位置對時間之函數，以平衡點為 0；x_0 為質點之初始位置；R 為質點運動之振幅。

$$\begin{aligned} x''(t) &= -k \cdot x(t) \\ \Rightarrow \quad x(t) &= c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{k} \cdot t\right) + c_2 \cdot \sin\left(\sqrt{k} \cdot t\right) \\ \Rightarrow x(t) &= \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2} \cdot \sin\left(\sqrt{k} \cdot t + \cos^{-1}\left(\frac{c_2}{\sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2} = R$$

$$R \cdot \frac{c_2}{\sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}} = x_0$$

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cdot \sin\left(\sqrt{k} \cdot t + \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{R}\right)\right) \\ x'(t) &= R \cdot \sqrt{k} \cdot \cos\left(\sqrt{k} \cdot t + \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{R}\right)\right) \\ x''(t) &= -R \cdot k \cdot \sin\left(\sqrt{k} \cdot t + \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{R}\right)\right) \\ \text{週期} &= \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \\ \text{角頻率} &= \sqrt{k} \\ \text{相位角} &= \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{R}\right) \end{aligned}$$

簡諧運動之位置對時間方程必與等速率圓周運動向某一方向之投影位置對時間之方程相同，例如：當 $x_0 = R$ 時，與等速率圓周運動水平方向之投影相同、當 $x_0 = 0$ 時，與等速率圓周運動鉛直方向之

投影相同。

七、 阻尼簡諧運動（Damped simple harmonic motion）/次阻尼振盪（Underdamped oscillation）

設一質點作阻尼簡諧運動，即所受合力使質點之加速度恆為質點自平衡點至該點之位移的 $-k$ 倍加上質點速度的 $-b$ 倍。

令：t 為時間，以質點運動開始為 0；$x(t)$ 為質點位置對時間之函數，以平衡點為 0；x_0 為質點之初始位置；R 為質點偏離點之最大位移之絕對值，即振幅。

$$x''(t) = -k \cdot x(t) - b \cdot x'(t)$$

$$x(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{\left(\sqrt{b^2-4\cdot k}+b\right)\cdot t}{2}} + c_2 \cdot e^{\frac{\left(\sqrt{b^2-4\cdot k}-b\right)\cdot t}{2}}$$

$$x(t) = R \cdot e^{-\frac{b\cdot t}{2}} \cdot \cos\left(\sqrt{k-\frac{b^2}{4}} \cdot t + \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{R}\right)\right)$$

$$x'(t) = -\frac{R}{2} \cdot e^{-\frac{b\cdot t}{2}} \cdot \Bigg(b \cdot \Bigg(\cos\left(\sqrt{k-\frac{b^2}{4}} \cdot t + \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{R}\right)\right) + \sqrt{4\cdot k-b^2} \cdot \sin\left(\sqrt{k-\frac{b^2}{4}} \cdot t + \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{R}\right)\right)$$

$$x''(t) = \frac{R}{2} \cdot e^{-\frac{b\cdot t}{2}} \cdot \Bigg(\left(b^2 - 2\cdot k\right) \cdot \cos\left(\sqrt{k-\frac{b^2}{4}} \cdot t + \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{R}\right)\right) + b \cdot \sqrt{4\cdot k-b^2} \cdot \sin\Bigg(\sqrt{k-\frac{b^2}{4}} \cdot t + \cos$$

$$\text{週期} = \frac{2\pi}{\sqrt{k-\frac{b^2}{4}}}$$

$$\text{角頻率} = \sqrt{k-\frac{b^2}{4}}$$

$$\text{相位角} = \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{R}\right)$$

八、 阻尼單擺（Damped pendulum）/次阻尼單擺（Underdamped pendulum）

設：一質量為 m 之質點作阻尼單擺運動，其軌跡為一圓之圓周之部分，稱該圓為軌跡圓，並定義軌跡圓所處平面為紙面；其所受重力場強度不變且向下（令為 y 軸負向）；其受一變力，量值 N，方向指向軌跡圓圓心或其反向，以向心為正，離心為負；提供該力之物為一軌跡圓圓心與該質點之連線，稱 N 物，N 物為剛體或繩子影響 N 之變化範圍；質點又受一阻力 f，且 f 恆為速度的 $-m \cdot k$ 倍；質點不受此三力以外之力。

令：R 為軌跡圓半徑；**R** 為軌跡圓圓心指向質點位置之向量；t 為時間，以質點運動開始為 0；v 為質點之速率；$\mathbf{v_0}$ 為質點之初始速度；h 為質點相對於軌跡圓最低點的高度；θ 為質點以圓心為參考點、以最低點為 0、以逆時針為增的角位置，順時針與逆時針以紙面正面之觀察為準；$\theta(t)$ 為 θ 對 t 的函數；ϕ 為質點運動開始瞬間之角位置，即相位角；a_g 為質點之重力加速度量值；a_n 為質點之法向加速度，以向軌跡圓圓心為正。

$$
\begin{aligned}
N &= ma_g \cos(\theta) + \frac{mv^2}{R} \\
&= \frac{m}{R}(a_g(R-h) + v^2) \\
&= \frac{m}{R}(u^2 - 3a_g h + a_g R) \\
a_n &= \frac{N}{m} - a_g \cos(\theta) \\
&= \frac{v^2}{R} \\
\theta''(t) &= -a_g \cdot \sin(\theta(t)) - k \cdot \theta'(t) \\
\theta(0) &= \phi \\
\theta'(0) &= \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{v_0}}{R^2}
\end{aligned}
$$

限制：

當 N 物為繩子：N可為任何數，故最大$\left|\text{角位移}\right| < \frac{\pi}{2}$。

當 N 物為剛體：$N \geq 0$，故最大$\left|\text{角位移}\right| < \pi$。

九、 宇宙膨脹

根據霹靂說（The Big Bang Theory），現今宇宙中的所有物質最初是縮聚在一點，在某一瞬間（定義為時間 $t = 0$）突然爆炸開來，往各方向均勻膨脹。經許多年後，形成現在的宇宙，且仍然在膨脹中。宇宙中所見的任一星系（Galaxy），對整個宇宙而言，可近似為一個質點。任何一個星系都可選作為宇宙的中心，其他的星系相對於該星系的速度，皆沿徑向遠離，即對此中心為球形對稱。假設宇宙間的質量分布是均勻的，又各星系之間僅有萬有引力的作用，回答下列各題：

(1) 選取某一星系（例如我們所在的銀河系）為座標原點，考慮徑向座標為 r 的另一星系的運動情形。設在半徑為 r 的球體內所含物質的總質量為 M，萬有引力常數為 G，寫出該星系的運動方程式。

答：假設宇宙間的質量分布是均勻的，所以對於座標原點而言，應為球形對稱。設所考慮的星系質量為 m，則該星系所受萬有引力 **F** 為：

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \ldots \boxed{1}$$

設其加速度為 **a** 其運動方程式即：

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r} \ldots \boxed{2}$$

(2) 假設當 $r \rightarrow \infty$ 時，該星系的徑向速度 $v \leftarrow 0$，求該星系的徑向速度和其徑向座標之間的函數關係。

答：因一維運動，故將向量均視為純量。將二式積分，左式變為功，可換為動能，令積分常數 C，得：

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = C \ldots \boxed{3}$$

當 $r \leftarrow \infty, v \leftarrow 0$，所以 $C = 0$。將三式改寫為：

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \ldots \boxed{4}$$

(3) 承上，試求徑向座標 r 和時間 t 之間的函數關係。

答：解四式：

$$r^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2GM}$$

$$\int r^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{2GM}\,\mathrm{d}t$$

$$\int r^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = r^{\frac{1}{2}}r - \int \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}r\,\mathrm{d}t$$

$$\int r^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = r^{\frac{3}{2}} - \int \frac{1}{2}r^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1}{2}r^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}r^{\frac{3}{2}}$$

$$\int r^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2GM}t$$

$$r = (\frac{3}{2}\sqrt{2GM}t)^{\frac{2}{3}} \ldots \boxed{5}$$

(4) 美國天文學家哈柏經由觀察得知：$v = Hr$，稱為哈柏定律（Hubble's law），式中 H 為哈柏常數（Hubble's constant）。測得 H 值約為 0.5×10^{-10} yr^{-1}，求現在所見宇宙的年齡。

答：將五式帶入四式：

$$v = \sqrt{2GM}(\frac{3}{2}\sqrt{2GM}t)^{-\frac{1}{3}} \ldots \boxed{6}$$

將六式除以五式：

$$H = \frac{\sqrt{2GM}(\frac{3}{2}\sqrt{2GM}t)^{-\frac{1}{3}}}{(\frac{3}{2}\sqrt{2GM}t)^{\frac{2}{3}}}$$

$$H = \sqrt{2GM}(\frac{3}{2}\sqrt{2GM}t)^{-1}$$

$$H = \frac{2}{3}t^{-1}$$

$$\frac{2}{3}t^{-1} = 0.5 \times 10^{-10}\ \mathrm{yr}^{-1}$$

$$t = 1.33 \times 10^{10}\ \mathrm{yr}$$