三角比、三角函數與其相關函數

沈威宇

December 31, 2024

目錄

第一節　三角比（Trigonometric Ratios）、三角函數（Trigonometric Functions）與其相關函數

一、　弧度與角度

(一)　弧度（radian）/徑/徑度

指圓周上一段弧長與其對應半徑的比值。物理上無因次。單位同其名或通常省略。

(二)　角度（degree）

一個完整的圓被平分為 $360°$。物理上無因次。

$$\frac{1\text{徑}}{1°}=\frac{\pi}{180}\approx 57.3\approx\frac{1}{0.0175}$$

二、　廣義角

指將角從 $[0,\,2\pi)$ 的普通角擴展到任意實數。
同界角：α、β 為同界角 $\iff\ \dfrac{\alpha-\beta}{2\pi}\in\mathbb{Z}$

三、　極坐標系（Polar Coordinate System）

一種二維坐標系，用於表示平面上的點，其位置由一對數值（距離 r 和角度 θ）來確定。與笛卡爾坐標系統（Cartesian Coordinate System）不同。

- 距離 r：從極點（通常是坐標原點 O）到點 P 的距離。$r\geq 0$。
- 角度 θ：從極軸（通常是水平的正 x 軸）逆時針旋轉到點 P 所在的射線的角度。角度可以用弧度或度數表示。
- 點 P 的極坐標表示為 $[r,\theta]$。
- 從極坐標到直角坐標的轉換：

$$x=r\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta$$

- 從直角坐標到極坐標的轉換：

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

四、　三角測量

- 仰角：仰視目標時，視線與水平線的夾角。
- 俯角：俯視目標時，視線與水平線的夾角。
- 方位角（地理）：以正北為 0°，順時針為正。

- 象限角（地理）：以東南西北某一方位（通常為正北或正南）為基準，加上向相鄰方位轉向的度數與該相鄰方位，如北 35° 西 代表方位角 325°、南 30° 西代表方位角 210°。

五、 銳角三角比（Trigonometric Ratios）

- 正弦（Sine，sin）：正弦值是對應角的對邊與斜邊之比，即：

$$\sin\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$$

- 餘弦（Cosine，cos）：餘弦值是對應角的鄰邊與斜邊之比，即：

$$\cos\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$$

- 正切（Tangent，tan）：正切值是對應角的對邊與鄰邊之比，即：

$$\tan\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$$

- 餘切（Cotangent，cot）：

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- 正割（Secant，sec）：

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

- 餘割（Cosecant，csc）：

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

六、 廣義角三角比/三角函數幾何定義

在單位圓中，令角度的測量方式是從正 x 軸開始，逆時針方向為正角，順時針方向為負角，且角度數值可以是任何實數。任意角度的三角函數值可以表示為：

- 正弦（Sine，sin）：角 θ 的正弦值是單位圓上 對應點的 y 坐標，即：

$$\sin\theta = y$$

  。為奇函數，定義域 $\mathbb{R}$，值域 $[-1, 1]$，週期 2π，振幅 1，線對稱於 $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}$，點對稱於 $((n\pi, n \in \mathbb{Z}), 0)$。

- 餘弦（Cosine，cos）：角 θ 的餘弦值是單位圓 上對應點的 x 坐標，即：

$$\cos\theta = x$$

  。為偶函數，定義 域 $\mathbb{R}$，值域 $[-1, 1]$，週期 2π，振幅 1，線對稱於 $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$，點對稱於 $\left(\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}\right), 0\right)$，$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 。

- 正切（Tangent，tan）：角 θ 的正切值是正弦值與餘弦值的比，即：

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

  。為奇函數，定義域 $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \pi \nmid \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$，值域 $\mathbb{R}$，週期 π，點對稱於 $\left(\left(\frac{n}{2}\pi, n \in \mathbb{Z}\right), 0\right)$。

- 餘切（Cotangent，cot）：

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

  。為奇函數，定義域 $\{x \in \mathbb{R} \,|\pi \nmid x\}$，值域 $\mathbb{R}$，週期 π，點對稱於 $\left(\left(\frac{n}{2}\pi,\, n \in \mathbb{Z}\right), 0\right)$，$\cot(x) = -\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$。

- 正割（Secant，sec）：

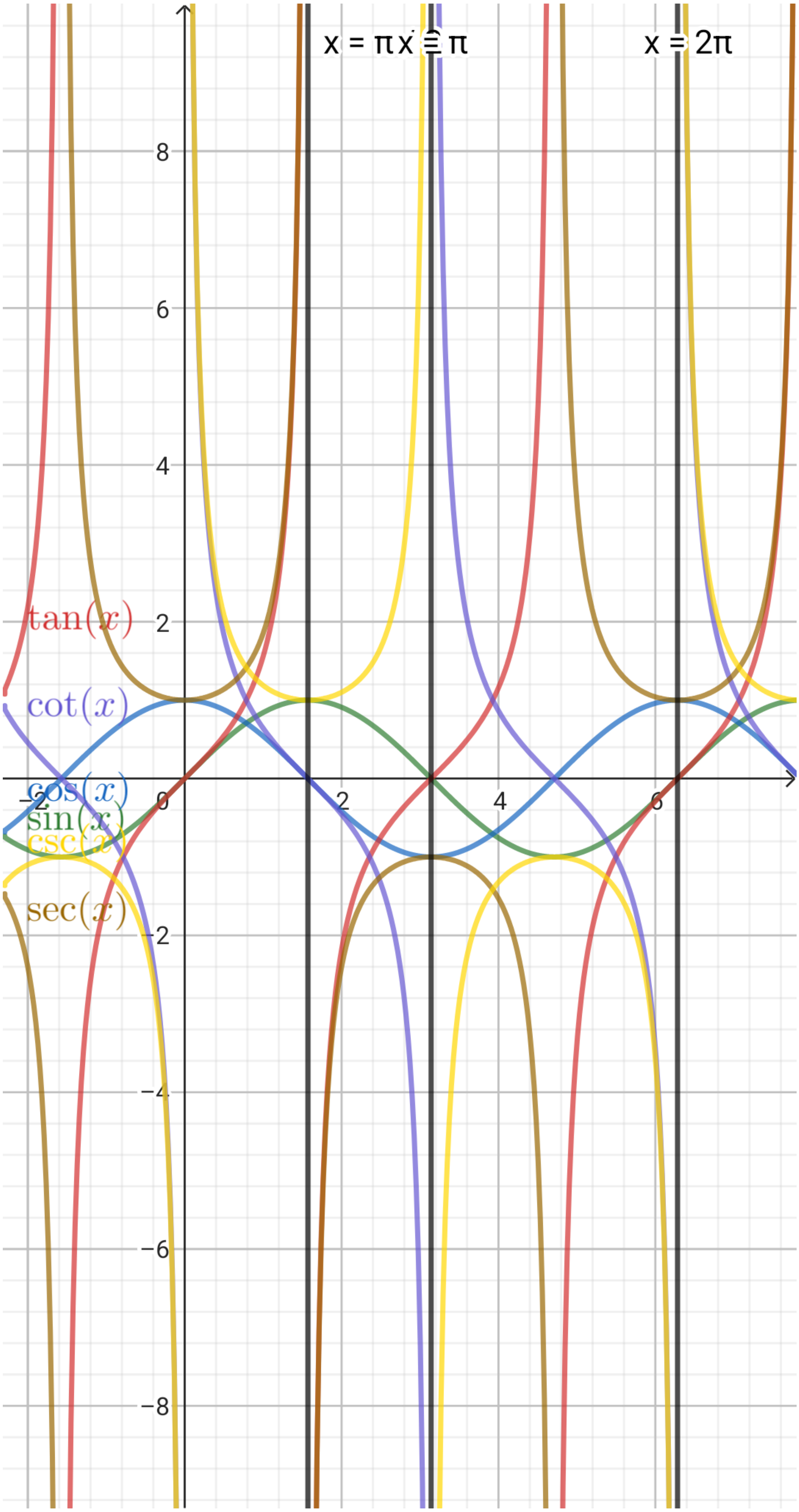
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

  。為偶函數，定義域 $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\pi \nmid \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$，值域 $\{y \in \mathbb{R} \,|{-1} \le y \vee y \le 1\}$，週期 π，線對稱於 $((n\pi,\, n \in \mathbb{Z}), 0)$，點對稱於 $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,\, n \in \mathbb{Z}$。

- 餘割（Cosecant，csc）：

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

  。為奇函數，定義域 $\{x \in \mathbb{R} \,|\pi \nmid x\}$，值域 $\{y \in \mathbb{R} \,|{-1} \le y \vee y \le 1\}$，週期 π，線對稱於 $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,\, n \in \mathbb{Z}$，點對稱於 $((n\pi,\, n \in \mathbb{Z}), 0)$，$\csc(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$。

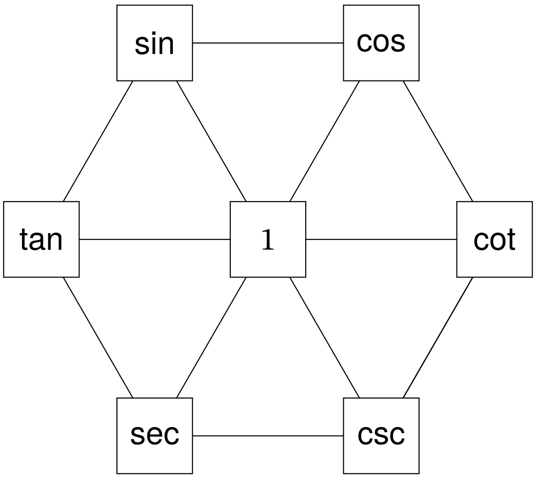


三角函數

七、 特殊角三角函數值

Radian	sin	cos	tan
0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$
π	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$\frac{2\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$\frac{4\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$

八、　三角函數基本關係



1. **名稱：左側三者為正；右側三者為餘；上面二者為弦；中間二者為切；下面二者為割。**

2. **餘角關係：以鉛直軸為對稱軸，位於線對稱位置的三角比為餘角關系，即對於銳角 θ，左 $(\theta) =$ 右 $(\frac{pi}{2} - \theta)$。**

3. **倒數關係：三條通過中心點的連線為倒數關係，其兩端之三角比互為倒數，相乘為 1。**

4. **商數關係：六邊形周上，連續三個頂點形成的連線，其兩端之三角比相乘等於中間之三角比。**

5. **平方關係：圖中有三個倒正三角形，其在上方兩頂點之二者之平方和等於在下方頂點者。**

九、　奇變偶不變，正負看象限

今有函數 f，已知其為 sin、cos、tan、sec、csc、cot 之一，且已知 $f(\theta)$。欲求 $f(\phi)$，其中 $\phi = \pm\theta \pm n\frac{\pi}{2}$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。
判斷方法：奇變偶不變，正負看象限。
上句：奇偶指 n 之奇偶，變指倒數，即：若 n 為奇數則令 $g(\theta) = \frac{1}{f(\theta)}$，否則令 $g(\theta) = f(\theta)$，則 $|f(\phi)| = |g(\theta)|$。
下句：象限指假設 $[r, \theta]$ 在第一象限時，$[r, \phi]$ 之象限。令該象限中任意角度為 ω。令 $k = \frac{f(\phi)}{g(\theta)}$。則 $k = \frac{f(\omega)}{|f((\omega)|}$，即：

象限 / f	一	二	三	四
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
csc	+	+	-	-
sec	+	-	-	+
cot	+	-	+	-

十、 正、餘弦函數級數形式

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$
$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

十一、 三角函數指數形式

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$
$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$
$$\tan x=-i\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1},\quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$
$$\cot x=i\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1},\quad x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$$
$$\sec x=\frac{2e^{ix}}{e^{2ix}+1},\quad x\neq\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$
$$\csc x=i\frac{2e^{ix}}{e^{2ix}-1},\quad x\neq 2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

十二、 三角函數微積分

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\ln\lvert\sec x\rvert + C$
$\csc x$	$-\csc x\cot x$	$\ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + C$
$\sec x$	$\sec x\tan x$	$\ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$

十三、 反三角函數

名稱	常用符號	定義	定義域	值域
反正弦	$y = \arcsin x$	$x = \sin y$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
反餘弦	$y = \arccos x$	$x = \cos y$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
反正切	$y = \arctan x$	$x = \tan y$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
反餘切	$y = \text{arccot}\, x$	$x = \cot y$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
反正割	$y = \text{arcsec}\, x$	$x = \sec y$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$
反餘割	$y = \text{arccsc}\, x$	$x = \csc y$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

十四、 反三角函數定積分形式

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz, \qquad |x| \le 1$$

$$\arccos x = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz, \qquad |x| \le 1$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{z^2+1}\,dz,$$

$$\operatorname{arccot} x = \int_x^\infty \frac{1}{z^2+1}\,dz,$$

$$\operatorname{arcsec} x = \int_1^x \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}\,dz, \qquad x \ge 1$$

$$\operatorname{arccsc} x = \int_x^\infty \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}\,dz, \qquad x \ge 1$$

十五、 atan2 函數

atan2(y, x) 在 $x > 0$ 時返還 $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 中的解，在 $x < 0$、$y \ge 0$ 時返還 $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 中的解，在 $x < 0$、$y < 0$ 時返還 $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ 在 $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 中的解，在 $x = 0$、$y \ne 0$ 時返還 $\frac{y}{|y|}\frac{\pi}{2}$，在 $x = y = 0$ 時返還值未定義。

十六、 輻角（Argument）

此處輻角用 $\arg(z)$ 代表 z 的輻角，用 $\operatorname{Arg}(z)$ 代表 z 的輻角主值，一些文獻反之。

(一) 輻角

設有非零複數 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，記作 $z = x + yi$，其中的 x 和 y 為實數，那麼複數 z 的輻角 $\arg(z) = \varphi$ 指的是使下列等式：

$$z = x + yi = \sqrt{x^2+y^2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

成立的任何實數 φ。

(二) 輻角主值

設有非零複數 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，記作 $z = x + yi$，其中的 x 和 y 為實數，那麼複數 z 的輻角主值 $\operatorname{Arg}(z)$ 指的是：

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} x + yi = \operatorname{atan2}(y, x)$$

$$\arg(z) = \{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

十七、 雙曲函數（Hyperbolic functions）

各雙曲函數之名稱均以對應之三角函數之名稱前加雙曲（hyperbolic），代號則為對應之三角函數代號後加 h。

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\coth x = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}, \quad x \neq 0$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}, \quad x \neq 0$$

十八、 反雙曲函數對數形式

$$\operatorname{arcsinh} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\operatorname{arccosh} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1$$

$$\operatorname{arctanh} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{arccoth} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right), \quad |x| > 1$$

$$\operatorname{arcsech} = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{arccsch} = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), \quad x \neq 0$$