電磁學

沈威宇

2024 年 12 月 26 日

目錄

第一章　電磁學（Electromagnetics）

第一節　符號約定

一、　常數

- 基本電荷：$e = 1.6021766208 \times 10^{-19}$ C
- 普朗克常數：$h = 6.62607015 \times 10^{-34}$ J s $= 6.62607015 \times 10^{-34}$ m^2 kg s^{-1}
- 真空光速：$c = 299792458$ m s^{-1}
- 真空磁導率/磁常數：$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A}^2 \approx 1.25663706 \times 10^{-6}\,\mathrm{H\ m}^{-1} = 1.25663706 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg\ m\ s}^{-2}\ \mathrm{A}^{-2}$
- 真空電容率/電常數：$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{c^2\mu_0} \approx 8.854187817 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\ m}^{-1} = \mathrm{A}^2\ \mathrm{s}^4\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{m}^{-3} = 8.854187817 \times 10^{-12}\,\mathrm{A}^2\ \mathrm{s}^4\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{m}^{-3}$

二、　時間純量

- 時間：t (s)

三、　能量純量

- 能量：E (J $=$ m^2 kg s^{-2})
- 功（Work）：W (J)
- 功率（Power）：P (J/s)

四、　位置向量

- 位置向量場：$\mathbf{r}$ (m)

五、　位置場上的區域或其測度

- 曲線/長度：L (m)
- 曲面/面積：A (m^2)
- 三維區域/體積：V (m^3)

六、 法向量

- （某曲面的）單位法向量：$\hat{n}$

七、 視為對位置與物之函數

(一) 物的函數（對位置之偏微分為零，且物體不改變其外之該物理量者）

- 純量（場）
  - 電荷：q (庫侖 = C)
  - 電容率（Permittivity）：ε ($\mathrm{F\ m^{-1} = A^2\ s^4\ kg^{-1}\ m^{-3}}$)
  - 相對電容率（Relative permittivity）：$\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$
  - 靜電力常數/庫侖常數（此處用 SI 制故不視其為常數）：$k_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}$。真空下，$k_e = 8.9875517873681764 \times 10^9\ \mathrm{N\ m^2\ C^{-2}}$。
  - 磁導率（Magnetic permeability）：μ ($\mathrm{H\ m^{-1} = kg\ m\ s^{-2}\ A^{-2}}$)
  - （體積）（總）電荷密度（(Volume) (total) charge density）：ρ ($\mathrm{C\ m^{-3} = A\ s\ m^{-3}}$)
  - （體積）束縛電荷密度（(Volume) bound charge density）：ρ_b ($\mathrm{C\ m^{-3} = A\ s\ m^{-3}}$)
  - （體積）自由電荷密度（(Volume) free charge density）：ρ_f ($\mathrm{C\ m^{-3} = A\ s\ m^{-3}}$)
  - 表面（總）電荷密度（Surface (total) charge density）：ρ ($\mathrm{C\ m^{-2} = A\ s\ m^{-2}}$)
  - 表面束縛電荷密度（Surface bound charge density）：ρ_b ($\mathrm{C\ m^{-2} = A\ s\ m^{-2}}$)
  - 表面自由電荷密度（Surface free charge density）：ρ_f ($\mathrm{C\ m^{-2} = A\ s\ m^{-2}}$)
  - 能量：$\mathbf{E}$ ($\mathrm{J = m^2\ kg\ s^{-2}}$)
- 向量（場）
  - 速度：$\mathbf{v}$ (m/s)
  - 加速度：$\mathbf{a}$ ($\mathrm{m/s^2}$)
  - 電動勢（Electromotive force, emf, EMF）：$\mathcal{E}$ (V)
  - 動量：$\mathbf{p}$ (kg m/s)
  - （電）極化密度（Polarization density）：$\mathbf{P}$ ($\mathrm{C\ m^{-2} = A\ s\ m^{-2}}$)
  - 磁矩（Magnetic moment）/磁偶極矩（Magnetic dipole moment）：$\mathbf{m}$ ($\mathrm{A\ m^2}$)
  - 電偶極矩（Electric dipole moment）：$\mathbf{e}$ (C m = A s m)
  - 磁化強度（Magnetization）（M 場（M-field））：$\mathbf{M}$ ($\mathrm{A\ m^{-1}}$)
  - 電流（Electric current）：$\mathbf{I}$ (A = C/s)
  - 總電流密度（Current density）：$\mathbf{j}$ ($\mathrm{A\ m^{-2}}$)
  - （電）極化電流密度（Polarization current density）：$\mathbf{j_P}$ ($\mathrm{A\ m^{-2}}$)
  - 磁化電流密度（Magnetization current density）：$\mathbf{j_P}$ ($\mathrm{A\ m^{-2}}$)
  - 束縛電流密度（Bound current density）：$\mathbf{j}_b$ ($\mathrm{A\ m^{-2}}$)
  - 自由電流密度（Free current density）：$\mathbf{j}_f$ ($\mathrm{A\ m^{-2}}$)

(二) 電磁場（Electromagnetic field）與其積分

- 向量（場）
  - 電場（Electric field）/**E** 場（**E**-field）：$\mathbf{E}$ (V m^{-1} = N C^{-1} = kg m s^{-3} A^{-1})
  - 磁通量密度（Magnetic flux density）/B 場（B-field）：$\mathbf{B}$ (特斯拉 = Tesla = T = N A^{-1} m^{-1} = kg s^{-2} A^{-1})
  - 磁向量勢（Magnetic vector potential）/向量勢（Vector potential）：$\mathbf{A}$ (A m)
- 純量（場）
  - 電位能（Electric potential energy）：$U_{\mathbf{E}}$ (J = N m = kg m^2 s^{-2})
  - 電位（Electric potential）/電純量勢（Electric scalar potential）/純量勢（Scalar potential）：ϕ (V = J/C = N m C^{-1} = kg m^2 s^{-3} A^{-1})
  - 電通量（Electric flux）：Φ_E (V m = kg m^3 s^{-3} A^{-1})
  - 磁通量（Magnetic flux）：Φ_B (韋伯 = Weber = Wb = T m^2 = kg m^2 s^{-2} A^{-1})
  - 電壓（Voltage）/電位差（Electric potential difference）：V (V)

(三) 其他

- 向量（場）
  - 電位移（Electric displacement）：$\mathbf{D}$ (C m^{-2} = A s m^{-2})
  - 磁場強度（Magnetic field strength）/H 場（H-field）：$\mathbf{H}$ (A m^{-1})
  - 勞倫茲力（Lorentz force）/電磁力（Electromagnetic force）：$\mathbf{F}$ (N = kg m s^{-2})
  - 勞倫茲力密度（Lorentz force density）：$\mathbf{f}$ (N m^{-3} = kg m^{-2} s^{-2})
  - 力矩（Torque）：τ (N m = kg m^2 s^{-2})
- 純量（場）
  - 電阻（Resistance）（對於歐姆物質而言為僅物的函數，不受場影響，對非歐姆物質則否）：R (Ω= V/A)
  - 電容器之電容（Capacitance of a capacitor）：C (法拉 = Farad = F = C V^{-1} = kg^{-1} m^{-2} s^4 A^2)

八、 電磁波（Electromagnetic wave）

- 向量
  - 角波向量（Angular wave vector）：$\mathbf{k}$ (m^{-1})
  - 相速度方向單位向量：$\hat{\mathbf{v}}$
  - 相速度（Phase velocity）：$\mathbf{v}$ (m/s)
  - 群速度（Group velocity）：$\mathbf{v}_g$ (m/s)
- 純量

- 角頻率（Angular frequency）量值：ω (s^{-1})
- 頻率：ν (s^{-1})
- 波長（Wavelength）：λ (m)
- 波數（Wave number）：k (m^{-1})
- 折射率：n
- 能量密度：u ($\mathrm{J/m^3}$)

九、　數學符號

- 純量 A 與非零向量 $\mathbf{B}$，向量 $\mathbf{C} = \frac{A}{\mathbf{B}}$ 表示「$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = A$」且「$|A| = |\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{C}|$」，即「$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = A$」且「$\mathbf{B} /\!/ \mathbf{C}$」。
- $\mathrm{closure}(A)$ 指 A 的閉包。
- 拓樸空間 (X, τ) 中，集合 $C \subseteq X$ 被稱為不連通的，如果

$$\exists A\, B \in \tau \text{ s.t. } A \cap B = \emptyset \wedge C \cap A \neq \emptyset \wedge C \cap B \neq \emptyset \wedge C \subseteq A \cup B.$$

  否則它被稱為連通的。

第二節　古典電磁學（Classical electromagnetism）

一、　定義與定律

(一)　電荷

- 電荷量子化（Charge quantization）與電荷定義：次核子物質除外，所有物質所帶的電荷皆為基本電荷 e 的整數倍，定義該值為 1.602176620810^{-19} 庫侖，由 1909 年密立坎（Millikan）油滴實驗首測量。定義電子的電荷為負基本電荷。
- 電荷守恆定律（Law of conservation of charge）：一個系統如與外界無電荷交換，則該系統的總電荷維持定值。

(二)　疊加原理（Principle of superposition ）

對於所有線性系統，如電場、磁場等，兩個或多個刺激引起的淨響應是由每個刺激單獨引起的響應總和。

(三)　勞倫茲力

- 右手開掌定則：右手張開，拇指指向電流方向，四指指向磁場方向，則掌心面向受力方向。
- 勞倫茲力定律（電場與磁通量密度場以之定義）：

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- 勞倫茲力密度定義：

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \rho\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

(四) 電通量與磁通量

- 曲面 S 上的電通量 Φ_E 定義為：

$$\Phi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

  當 S 為封閉曲面：

$$\varepsilon \Phi_E = \iiint_V \rho \, \mathrm{d}\mathbf{V}$$

  即高斯定律-積分形式。

- 曲面 S 上的磁通量 Φ_B 定義為：

$$\Phi_B = \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

  封閉曲面曲面之磁通量為零（即高斯磁定律-積分形式）。

(五) 電偶極矩與磁偶極矩

- 電偶極矩：兩點電荷，一個帶電荷 $+q$，另一帶電荷 $-q$，間隔距離 d 形成之電偶極子（Electric dipole）之電偶極矩 $\mathbf{e}$ 量值定義為 qd，方向定義為由負電荷指向正電荷。力矩 $\tau = \mathbf{e} \times \mathbf{E}$ 的電偶極矩，自負極指向正極。例如一對大小相等、符號相反的電荷。

- 電極化密度定義：

$$\mathbf{P} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}V}$$

- 電位移定義：

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- 磁矩/磁偶極矩定義：

$$\tau = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

  定義磁矩為自 S 極指向 N 極。

- 磁化強度定義：

$$\mathbf{M} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{m}}{\mathrm{d}V}$$

- H 場定義：

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} - \mathbf{M}$$

(六) 電荷密度

- 總電荷密度定義：

$$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$$

- 束縛電荷密度定義：

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

- 自由電荷密度定義：

$$\rho_f = \rho + \rho_b$$

- 表面電荷密度定義：

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}A}$$

- 表面束縛電荷密度定義：

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{n}$$

- 表面自由電荷密度定義：

$$\sigma_f = \sigma + \sigma_b$$

(七) 電流密度

- 總電流密度定義：

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$$

- 電極化電流密度定義：

$$\mathbf{j}_{\mathbf{P}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

- 磁化電流密度定義：

$$\mathbf{j}_{\mathbf{M}} = \nabla \times \mathbf{M}$$

- 束縛電流密度定義：

$$\mathbf{j}_b = \mathbf{j}_{\mathbf{P}} + \mathbf{j}_{\mathbf{M}}$$

- 自由電流密度定義：

$$\mathbf{j}_f = \mathbf{j} + \mathbf{j}_b$$

(八) 馬克士威方程組（**Maxwell's equations**）/馬克士威-黑維塞方程組（**Maxwell–Heaviside equations**）

馬克士威方程組是一組偏微分方程，與勞倫茲力定律一起構成了古典電磁學的基礎，現在一般寫作四個方程。

(九) 馬克士威第一方程-高斯定律

- 1785 年庫侖提出庫侖定律並以扭秤實驗支持之。
- 庫侖定律靜電力向量形式：對於兩分別位於 $\mathbf{r}_1$、$\mathbf{r}_2$ 且相對靜止的點電荷 q_1、q_2，無外加電場或磁場，電容率均勻，靜電力（庫侖力）$\mathbf{F}$ 服從：

$$\mathbf{F} = k_e \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

- 庫侖定律電場形式：位於 $\mathbf{r}_0$ 的電荷 q 發出的電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 為：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_e q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$$

- 任意介質中馬克士威第一方程-高斯定律-微分形式：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

即

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

- *Statement.* 假設已知電場疊加原理，假設符合庫侖定律適用條件，則高斯定律微分形式為庫侖定律電場形式的必要條件。

  Proof.
  庫侖定律闡明，一個位於位置 $\mathbf{r}_1$ 靜點電荷 q 的電場對位置 $\mathbf{r}$ 函數為：

  $$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}$$

  計算位於 $\mathbf{r}_1$ 的無窮小電荷元素所產生的位於 $\mathbf{r}$ 的電場，積分體積域 V 內所有的無窮小電荷元素，可以得到電荷分佈所產生的電場：

  $$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \rho(\mathbf{r}_1)\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}$$

  取方程兩邊對於 $\mathbf{r}$ 的散度：

  $$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \rho(\mathbf{r}_1)\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}\mathrm{d}^3\mathbf{r}$$

  注意到：

  $$\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3} = 4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)$$

  其中 $\delta(\mathbf{r})$ 為狄拉克 δ 函數。
  代入得：

  $$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon}\iiint_V \rho(\mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\mathrm{d}^3\mathbf{r}$$

  化簡得：

  $$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon}$$

  □

- *Statement.* 假設已知電場疊加原理，假設符合庫侖定律適用條件，假設點電荷的電場為球形，則高斯定律微分形式為庫侖定律電場形式的充分條件。

  Proof.
  高斯定律闡明：

  $$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

  定義球座標系，徑向距離 $\mathbf{r}$ 極角 θ 與方位角 ϕ。
  在球座標系中，對於只依賴 $\mathbf{r}$ 的向量場，散度算子服從：

  $$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{\mathbf{r}^2}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^2 E}{\mathrm{d}\mathbf{r}}$$

  在球坐標系中，積分體積域 V 的微分體積元素 $\mathrm{d}V$ 為：

  $$\mathrm{d}V = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

  故對於點電荷 q，電荷密度 ρ 可以表示為：

  $$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} = q\cdot\frac{\delta(\mathbf{r})}{4\pi\mathbf{r}^2}$$

其中 $\delta(\mathbf{r})$ 為狄拉克 δ 函數。
代入得：

$$\frac{1}{\mathbf{r}^2}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^2 E}{\mathrm{d}\mathbf{r}} = q \cdot \frac{\delta(\mathbf{r})}{4\pi\mathbf{r}^2\varepsilon}$$

化簡得：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}$$

□

- 真空中馬克士威第一方程-高斯定律-微分形式：

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

- 任意介質中馬克士威第一方程-高斯定律-積分形式，對於封閉三維流形 V 與 $S = \partial V$：

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \rho_f \,\mathrm{d}V$$

即

$$\varepsilon \oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \rho \,\mathrm{d}V$$

- 真空中馬克士威第一方程-高斯定律-積分形式，對於封閉三維流形 V 與 $S = \partial V$：

$$\varepsilon_0 \oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \rho \,\mathrm{d}V$$

(十) 馬克士威第二方程-高斯磁定律

- 任意介質中馬克士威第二方程-高斯磁定律（無磁單極）-微分形式：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- 任意介質中馬克士威第二方程-高斯磁定律（無磁單極）-積分形式，對於封閉曲面 S：

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

- 位於 $\mathbf{r}_0$ 的磁矩 $\mathbf{m}$ 發出的 B 場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 為：

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\left(\frac{3(\mathbf{m}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0))(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2} - \mathbf{m}\right)$$

(十一) 馬克士威第三方程-法拉第電磁感應定律

- 1831 年法拉第發現電磁感應（Electromagnetic induction）現象，變動磁場產生的電場導致電荷移動產生的電流稱感應電流（Induced current）。
- 弗萊明右手法則（Fleming's right-hand rule）：右手拇指、食指、中指垂直，一導體在右手食指所指方向的磁場中向右手拇指所指方向移動，則產生右手中指方向之電流。
- 冷次定律（Lenz's law）：由於磁通量的改變而產生的感應電流，其所產生的磁場方向為磁通量改變的負方向。

- 任意介質中馬克士威第三方程-法拉第電磁感應定律（變動磁場產生電場/動磁生電/電磁感應）-微分形式：

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

- 任意介質中馬克士威第三方程-法拉第電磁感應定律（變動磁場產生電場/動磁生電/電磁感應）-積分形式，對於封閉路徑 $L=\partial S$ 圍成的曲面 S：

$$\oint_L\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{L}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

(十二)　馬克士威第四方程-安培-馬克士威定律

- 1820 年厄斯特（Ørsted）發現載流導線的電流對鄰近的磁針會產生作用力，使磁針偏轉，從而得知電流會產生磁場效應，發現了電學與磁學的關聯。

- 安培（Ampère）右手定則（Right-hand rule）：用右手握住長直載流導線，大拇指的指向為電流的方向，則其餘四指彎曲所指的方向為磁場方向，即磁力線方向。今有環形載流導線或載流螺線管，其中右手四指彎曲所指的方向為其電流方向，則大拇指的指向磁場方向，即磁力線方向。

- 任意介質中馬克士威第四方程-安培-馬克士威定律（變動電場產生磁場/動電生磁/電流磁效應）-微分形式：

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

即

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu\left(\mathbf{j}+\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

Proof.

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\\
&\nabla\times\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu}-\mathbf{M}\right)=\mathbf{j}-\mathbf{j}_b+\frac{\partial\left(\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{P}\right)}{\partial t}\\
&\mathbf{j}_b=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\nabla\times\mathbf{M}\\
&\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{B}-\nabla\times\mathbf{M}=\mathbf{j}-\left(\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\nabla\times\mathbf{M}\right)+\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\\
&\nabla\times\mathbf{B}=\mu\left(\mathbf{j}+\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)
\end{aligned}$$

□

- 真空中馬克士威第四方程-安培-馬克士威定律（變動電場產生磁場/動電生磁/電流磁效應）-微分形式：

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

- 任意介質中馬克士威第四方程-安培-馬克士威定律（變動電場產生磁場/動電生磁/電流磁效應）-積分形式，對於封閉路徑 $L=\partial S$ 圍成的曲面 S：

$$\oint_L\mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{L}=\iint_S\mathbf{j}_f\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}+\frac{\partial}{\partial t}\iint_S\mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

即

$$\oint_L\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{L}=\iint_S\mathbf{j}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}+\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\iint_S\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

Proof.

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} - \mathbf{M}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{L} = \iint_S \left(\mathbf{j} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{M}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

□

- 真空中馬克士威第四方程-安培-馬克士威定律（變動電場產生磁場/動電生磁/電流磁效應）-積分形式，對於封閉路徑 $L = \partial S$ 圍成的曲面 S：

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L} = \mu_0 \iint_S \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

(十三)　電純量勢與磁向量勢

- 電純量勢 ϕ 與磁向量勢 $\mathbf{A}$ 服從：

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

- Gauge fixing (規範固定): Gauge fixing, also called choosing a gauge, denotes a mathematical procedure for coping with redundant degrees of freedom in field variables.
  - 庫侖規範（Coulomb gauge）/Transverse gauge：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

  - 勞倫茲規範（Lorenz guage）：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

- 等位/等勢（Equipotential/Isopotential）：指空間中的一個區域，其中每個點都處於相同的電位（或有時用於其他勢（Potential））。n 維中對某場定義的等位通常是 $\leq (n-1)$ 維，如等位面、等位線，或通稱等位面，兩兩恆不相交或相切。當 $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$ 時，等位面恆與電場垂直，即在等位面上移動的電荷不受勞倫茲力作功。

  Proof.
  將一等位線參數化為 $\mathbf{r}(t)$，則

$$\frac{\mathrm{d}f(\mathbf{r}(t))}{\mathrm{d}t} = 0$$

  根據鏈式法則：

$$\nabla f \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = 0$$

  其中 $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$ 是曲線的切向量。 □

- 電壓或電位差 V 指兩點間之電位之差。

- 電動勢代表一個非電場力來源的等效電位差，例如氧化還原反應的電動勢為還原半反應的還原電位加上氧化半反應的氧化電位。

- 一電荷 q 的電位能 $U_{\mathbf{E}}$ 為：

$$U_{\mathbf{E}} = q\phi$$

(十四) 電流與電阻

- 電流：指通過一截面的電荷的平均定向移動，方向為正電荷移動的方向，電流的大小，稱電流強度（Current intensity），指單位時間內通過某一截面的電荷淨轉移量，每秒通過 1 庫侖的電荷量稱為 1 安培。

$$\mathbf{I} = \frac{q}{t}$$

- 電阻：電阻不改變者，稱歐姆物質（Ohmic substances）；電阻隨電壓或電流改變者稱非歐姆物質。

$$R = \frac{V \cdot \mathbf{I}}{|\mathbf{I}|^2}$$

- 焦耳加熱/歐姆加熱/電阻加熱/電流熱效應，是指電流通過物體產生熱量的過程。焦耳-冷次定律指出，電流 $\mathbf{I}$ 通過電阻 R 的物體產生的熱功率 P 服從：

$$P = |\mathbf{I}|^2 R$$

(十五) 場線（**Field line**）

- 場線於 1851 年由法拉第提出。
- 場線在該點的切線方向表示向量場在該點的方向。
- 場線在該點的疏密程度正比於向量場在該點的模長。
- 場線除了在源頭點與匯聚點外不會相交，即除了源頭點與匯聚點外散度為零。
- 場線若非封閉，則起點在一個散度為正的點或無線遠處，終點在一個散度為負的點或無線遠處，其餘點散度為零。
- 電場線（Line of electric field）/電力線：電場線密度定義為電場，通過一曲面的電場線數目定義為其電通量。電荷密度為正的點，電場散度大於零，故為場線源頭；電荷密度為負的點，電場散度小於零，故為場線匯聚點；電荷密度為零的點，電場散度等於零，故場線不可在電荷密度為零的點相交。
- 磁場線（Line of magnetic field）/磁力線：磁場線密度定義為磁場，通過一曲面的磁場線數目定義為其磁通量。磁通量密度場散度為零，即場線不可相交，即場線為封閉曲線。

(十六) 接地

地球定義為一電位與帶電量恆為零巨大導體，接地指將一物體與地球以導體相接。

(十七) 電容（器）（**Capacitor**）

電容器一般由兩片導電金屬板構成，中間用絕緣的電介質隔開，儲等量異性電或一者儲電一者接地。電容器以直流電充電，放出直流電，通交流電則無法持續充電。當一電容器存有電荷 q 和 $-q$ 或當一者接地而僅電荷 q 時，稱其帶電量 $|q|$。電容器可儲存的最大電量與外直流電源電壓成正比。令當外直流電源電壓 V 時，某電容器可儲存的最大電量為 q，則稱此系統之電容 C 為：

$$C = \frac{q}{V}$$

，表示其存儲電荷的能力。

二、 靜電學（Electrostatics）

(一) 靜電感應（Electrostatic induction）

當一帶電體靠近電中性的物體時，該物體的近端（靠近帶電體的區域）感應出異性電，遠端感應出等量同性電，此種電荷稱感應電荷，此種暫時性的電荷分離現象，稱為靜電感應。
因異性電較同性電更近帶電體，故兩物相吸。
當帶電體移走時，物體又會恢復成原來的狀態。
若在靜電感應時將電中性體的接地（指用一導體將帶電體與大地相連，從而將電荷經之導入大地），使其帶與帶電體異性之電，稱感應起電（Charging by induction）。
導體（Conductor）至絕緣體（Insulator）皆可，惟金屬乃自由電子移動，故感應電荷較強；絕緣體電子無真正分離出，僅產生感應偶極，感應電荷輕微，亦稱極化現象。

(二) 接觸起電（Charging by contact）

將電位不同之物體與導體接觸，藉自由電子的轉移使兩者電位相等，稱為接觸起電。

(三) 摩擦起電（Charging by friction）

通過摩擦的方式，使物體之間的電子轉移，使兩物體帶上等量異性電荷，稱摩擦起電。
導體至絕緣體皆可。
電子轉移的原因是兩者電子親和力（Electron affinity, EA）不同。令電子親和力定義為「一原子之第 i 電子親和力 EA_i 為該原子的負 i 價離子放出一個電子變成負 $i-1$ 價離子所須吸收的能量，EA_i 即 IE_{-i+1}，並使給定義延伸至 $i \leq 0$，即將第 i 電子親和力 EA_i 與第 $-i+1$ 游離能（Ionization energy, IE）IE_{-i+1} 視為等價。」例如：由於玻璃棒的電子親和力比絲綢小，所以絲綢摩擦過的玻璃棒帶正電荷，毛皮摩擦過的橡膠棒則帶負電荷。

(四) 電暈放電（Corona discharge）

導體表面電場足夠高時，附近的流體被電解成正負離子，與導體異性者會被導體吸引中和，同性者被導體排開，相當於導體放出自身電荷，稱電暈放電。空氣中欲電暈放電約需 3 百萬伏特每公尺的電場。

(五) 靜電學電位能與電位

- 靜電場，即 $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ 時的電場，為保守場。
- 電位能：電荷 q 在位置 $\mathbf{r}_1$ 相對於參考點 $\mathbf{r}_{ref}$ 的電位能 $U_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1)$：

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1) &= -W_{\mathbf{r}_{ref}\to\mathbf{r}_1} \\ &= -\int_{\mathbf{r}_{ref}}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= -\int_{\mathbf{r}_{ref}}^{\mathbf{r}_1} q\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \end{aligned}$$

  其應僅對 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 定義，此時其可視為與時間和速度無關的僅與位置相關的位能而仍服從力學能守恆與 Euler-Lagrange Equation。

- 某處的電位 ϕ 定義為單位某非零測試電荷 q 在該處的電位能 $U_{\mathbf{E}}$ 除以其電荷 q。令參考點 $\mathbf{r}_{ref}$，即：

$$\phi = -\int_{\mathbf{r}_{ref}}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

  其應僅對 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 定義，此時 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$。

- 當系統中所有電荷的集合是有界集（Bounded set）時，常以無限遠處為電位能與電位零位面。

- 以單一靜電荷為例，以無限遠處為電位能與電位零位面，對於單一靜電荷 q_0 場源，$\mathbf{r}_1$ 的電位 $\phi(\mathbf{r}_1)$ 為

$$\phi(\mathbf{r}_1) = \frac{k_e q_0}{|\mathbf{r}_1|}$$

  電荷 q 在位置 $\mathbf{r}_1$ 的電位能 $U_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1)$ 為

$$U_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1) = \frac{k_e q_0 q}{|\mathbf{r}_1|}$$

(六) 靜電平衡

當電荷分布不隨時間改變，則稱其處於靜電平衡。

(七) 靜電平衡導體、靜電屏蔽（Electrostatic shielding）效應與法拉第籠（Faraday cage）

令導體指電阻始終為零、其內（不含表面）電場始終為零、無外電場時電極化密度為零的物體。令有某導體 C 為熱力學孤立系統，且為連通閉集，且 C 不含表面為開集 D 使得 $\mathrm{closure}(D) = C$，且 C 處於靜電平衡。設某開集 O 使得 $C \subseteq O$，且 $\mathrm{closure}(O)$ 為熱力學孤立系統。令 S 為 O 的開子集的集合，使得

$$\forall A \neq B \in S:\ (A \cap B = \emptyset) \wedge \left(C \cup \bigcup_{A \in S} \mathrm{closure}(A) = \mathrm{closure}(O) \right).$$

則：

- D 中任意點電場為零。

  Proof.
  歸謬證之。假設 D 中一點有一非零電場 $\mathbf{E}$，則該處自由電子受力 $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$，故自由電子會移動，違反靜電平衡 □

- C 中任兩點電位相同，為等電位體。

  Proof.
  歸謬證之。若 C 中存在兩點之電位差 $V \neq 0$，令兩點間有路徑 $L \subseteq C$，依據梯度定理：

$$\int_L \nabla\phi \cdot \mathrm{d}L = V$$

  則該路徑中存在一些部分使得：

$$\nabla\phi \cdot \mathrm{d}L = -\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}L \neq 0$$

  表示自由電子會移動，違反靜電平衡。 □

- D 不帶電荷，即 C 之淨電荷分布於其表面。

  Proof.
  歸謬證之。若 D 中封閉三維流形 V 帶電荷 q，依據馬克士威第一方程，令 $S = \partial V$，有：
  $$\varepsilon \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = q$$
  違反 D 中任意點電場為零。 □

- 表面 C　D 若有非零電場則垂直於該表面。

  Proof.
  歸謬證之。若 C　D 存在不垂直該表面之電場，則違反 C 為等電位體。 □

- 若導體 C 接地，則 $\forall A \in S$：$\mathrm{closure}(A)$ 的電場與電荷分布不受 $\mathrm{closure}(O)$　$\mathrm{closure}(A)$ 影響，而為 A 之函數。

  Proof.
  先證明 $\mathrm{closure}(A)$ 的電荷分布不受 $\mathrm{closure}(O)$　$\mathrm{closure}(A)$ 影響。考慮包含 $\mathrm{closure}(A)$ 的封閉三維流形 V 與 $S = \partial V$ 使得 $S \subseteq (D \cup \mathrm{closure}(A)) \cap C$。因為 D 中任意點電場為零且表面 C　D 若有非零電場則垂直於該表面：
  $$\varepsilon \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$
  依據高斯定律可知 V 之淨電荷為零，可知 $\mathrm{closure}(A)$ 的電荷分布不受 $\mathrm{closure}(O)$　$\mathrm{closure}(A)$ 影響。
  接著證明 $\mathrm{closure}(A)$ 的電場不受 $\mathrm{closure}(O)$　$\mathrm{closure}(A)$ 影響。歸謬證之。若命題為非，則 $\mathrm{closure}(A) \cap C$ 上的自由電子分布受 $\mathrm{closure}(O)$　$\mathrm{closure}(A)$ 影響，違反 $\mathrm{closure}(A)$ 的電荷分布不受 $\mathrm{closure}(O)$　$\mathrm{closure}(A)$ 影響。
  又 V　D 之電荷乃 A 中電荷造成之感應電荷，故 $\mathrm{closure}(A)$ 的電荷分布為 A 之函數。
  由高斯定律可知 $\mathrm{closure}(A)$ 之電場為其中電荷分布之函數，又其中電荷分布為 A 之函數，故 $\mathrm{closure}(A)$ 之電場亦為 A 之函數。 □

- 若導體 C 接地，若 S 中某元素 A 使得 A 之電荷密度為 0，則 $\mathrm{closure}(A)$ 的電場為零，且 $\mathrm{closure}(A) \cup C$ 中任兩點電位相同。

  Proof.
  令 S 中某元素 A 使得 A 之電荷密度為 0，則 $\mathrm{closure}(A)$ 的電場為零：因 $\mathrm{closure}(A) \cap C$ 中之電荷為 A 之感應電荷，故 A 之電荷密度為 $0 \implies$ $\mathrm{closure}(A)$ 之電荷密度為 0。由高斯定律得證。
  令 S 中某元素 A 使得 A 之電荷密度為 0，則 $\mathrm{closure}(A) \cup C$ 中任兩點電位相同：由上可知 $\mathrm{closure}(A)$ 為等電位體，又 C 為等電位體，因 $\mathrm{closure}(A) \cap C \neq \emptyset$，得證。 □

- 靜電屏蔽效應指靜電平衡導體對 $\mathrm{closure}(A)$ 中無電荷之 $A \in S$ 的效應，包含接地導體對任意 A，與未接地但 $\mathrm{closure}(A)$　A 上之電荷發出之電場和在 $\mathrm{closure}(A)$ 為零的特殊情況（例如 S　$\{A\}$ 中無電荷且 A 為開球，或 $\mathrm{closure}(O)$ 中無電荷），此時 $\mathrm{closure}(A) \cup C$ 為等電位體。

- 任一 $A \in S$ 稱一法拉第籠。

(八) 靜電平衡導體圓球

令有一半徑 R 的導體圓球或薄球殼，帶淨電荷 q，以球心為原點，無外電場，若為薄球殼則其內空間無電荷，則：

- 其外（含表面）之電場與電位均同一位於原點的點電荷 q 產生者。
- 其內（不含表面）之電場為零，電位與表面同。
- 其表面之電荷平均分布。

即，圓球表面任一點之表面電荷密度 σ、位置 $\mathbf{r}$ 處，電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$、相對於無限遠處的電位 $\phi_i(\mathbf{r})$、相對於球心的電位 $\phi_c(\mathbf{r})$ 為：

$$
\begin{aligned}
&\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}\\
&\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{k_e q\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \dfrac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r}|^3}, & |\mathbf{r}| \geq R \\ 0, & |\mathbf{r}| < R \end{cases}\\
&\phi_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\displaystyle\int_{\infty}^{|\mathbf{r}|} k_e q x^{-2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\left(-k_e q x^{-1}\right)\Big|_{\infty}^{|\mathbf{r}|} = \dfrac{k_e q}{|\mathbf{r}|} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r}|}, & |\mathbf{r}| \geq R \\ \dfrac{k_e q}{R} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon R}, & |\mathbf{r}| < R \end{cases}\\
&\phi_c(\mathbf{r}) = \begin{cases} k_e q\left(\dfrac{1}{|\mathbf{r}|} - \dfrac{1}{R}\right) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{|\mathbf{r}|} - \dfrac{1}{R}\right), & |\mathbf{r}| \geq R \\ 0, & |\mathbf{r}| < R \end{cases}
\end{aligned}
$$

(九) 尖端放電效應

尖端放電效應指曲率較大處通常更可能電暈放電。
設兩圓球或薄球殼之電位相同，則其上總電荷正比於其半徑，則其表面電荷密度反比於其半徑。這不嚴謹地暗示無外電場下靜電平衡的帶電導體上曲率較大處的電荷密度和電場通常均較高，此即尖端放電效應的原因。

(十) 絕緣體圓球靜電平衡

令絕緣體指電荷恆平均分布之物體。令有一半徑 R 的絕緣體圓球 B，帶淨電荷 q，以球心為原點，無外電場，則：
圓球任一點之（體積）電荷密度 ρ 為：

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

位置 $\mathbf{r}$ 處，電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$、相對於無限遠處的電位 $\phi_i(\mathbf{r})$、相對於球心的電位 $\phi_c(\mathbf{r})$ 為：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\begin{cases}\dfrac{k_e q\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}=\dfrac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r}|^3}, & |\mathbf{r}|\geq R\\ \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}k_e q\dfrac{|\mathbf{r}|^3}{R^3}\dfrac{1}{|\mathbf{r}|^2}=\dfrac{k_e q\mathbf{r}}{R^3}=\dfrac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon R^3}, & |\mathbf{r}|<R\end{cases}$$

$$\phi_i(\mathbf{r})=\begin{cases}\dfrac{k_e q}{|\mathbf{r}|}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r}|}, & |\mathbf{r}|\geq R\\ \dfrac{k_e q}{R}-\displaystyle\int_R^{|\mathbf{r}|}\dfrac{k_e q x}{R^3}\,\mathrm{d}x=\dfrac{k_e q}{R}-\dfrac{k_e q|\mathbf{r}|^2}{2R^3}+\dfrac{k_e q}{2R}=\dfrac{3k_e q}{2R}-\dfrac{k_e q}{2R^3}|\mathbf{r}|^2=\dfrac{3q}{8\pi\varepsilon R}-\dfrac{q}{8\pi\varepsilon R^3}|\mathbf{r}|^2, & |\mathbf{r}|<R\end{cases}$$

$$\phi_c(\mathbf{r})=\begin{cases}k_e q\left(\dfrac{1}{|\mathbf{r}|}-\dfrac{1}{2R}\right)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{|\mathbf{r}|}-\dfrac{1}{2R}\right), & |\mathbf{r}|\geq R\\ -\dfrac{k_e q}{2R^3}|\mathbf{r}|^2=-\dfrac{q}{8\pi\varepsilon R^3}|\mathbf{r}|^2, & |\mathbf{r}|<R\end{cases}$$

(十一)　帶電之無限大平板

令有一無限大平板表面電荷密度 σ，平板厚度相對於 r 忽略，電荷可分離於兩表面或僅在一表面。則距離平板 r 之電場（正表遠板，負表近板）為：

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(r)\\ =&k_e\sigma r\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(r^2+x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&k_e\sigma r\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\left(r^2+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}t\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta\\ =&k_e\sigma r\frac{2\pi}{2}\\ =&2\pi k_e\sigma\\ =&\frac{\sigma}{2\varepsilon}\end{aligned}$$

上下兩塊無限大且分別均勻帶正、負電的平板，其中可得一均勻向下的電場。

(十二)　帶電粒子在均勻電場中的運動

令有一均勻平行於 xy 平面之電場 $(\mathbf{E}_x,\mathbf{E}_y)$，一質量 m 的點電荷 q 以平行於 xy 平面之初速度 $(\mathbf{v}_x,\mathbf{v}_y)$ 自 (x_0,y_0) 運動，假設其僅受該均勻電場施的勞倫茲力，其自身之電場忽略（故動電生磁、動磁生電、產生電磁波亦忽略），t 為時間，則其運動參數式為：

$$\begin{aligned}x(t)&=x_0+\mathbf{v}_x t+\frac{q\mathbf{E}_x}{2m}t^2,\\ y(t)&=y_0+\mathbf{v}_y t+\frac{q\mathbf{E}_y}{2m}t^2\end{aligned}$$

三、　電磁波

(一)　歷史

- 馬克士威根據馬克士威方程預測電磁波的存在及其速度約與實驗測得之光速相同，故推測光是電磁波。
- 1887 年赫茲（Hertz）藉由實驗證實了電磁波的存在與其速度為光速。

(二) 電磁波之波方程

設電荷對體積的導數為零。

$$\begin{aligned}
&\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})\\
=&\nabla\times\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\\
=&-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B})\\
=&-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\\
=&\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B})\\
=&\nabla\times\left(\mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\\
=&\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{E})\\
=&\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\\
=&-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

對於任意三維向量場 $\mathbf{V}$：

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{V})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{V})-\nabla^2\mathbf{V}$$

又：

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

故得電磁波波動方程：

$$\left(\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E}=0\quad\left(\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B}=0$$

即：

$$\left(c^2\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E}=0\quad\left(c^2\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B}=0$$

(三) 波參數關係

$$
\begin{aligned}
\omega &= 2\pi \cdot \nu \\
\mathbf{k} &= \frac{2\pi}{\lambda}\hat{\mathbf{v}} \\
k &= |\mathbf{k}| \\
\mathbf{v} &= \nu\lambda\hat{\mathbf{v}} = \frac{\omega}{\mathbf{k}} \\
n &= \frac{c}{|\mathbf{v}|} \\
\mathbf{v}_g &= \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} \\
&= \frac{c}{n + \omega \cdot \frac{\partial n}{\partial\omega}} \\
&= \mathbf{v}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{\partial n}{\partial\lambda}\right) \\
&= \mathbf{v} - \lambda\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\lambda} \\
&= \mathbf{v} + \mathbf{k}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{k}}
\end{aligned}
$$

(四) 能量密度

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{B}||\mathbf{v}| &= |\mathbf{E}| \\
\mathbf{B} \times \mathbf{v} &= \mathbf{E} \\
\mathbf{B} &= \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{|\mathbf{v}|^2} \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2} \\
u &= \frac{1}{2\mu}\mathbf{B}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}^2
\end{aligned}
$$

(五) 拉莫爾公式（**Larmor formula**）

非相對論性點電荷 q 在加速度 $\mathbf{a}$ 的狀態下釋放電磁波的總功率 P 為：

$$P = \frac{q^2\mathbf{a}^2}{6\pi\varepsilon c^3}$$

(六) 電磁波頻譜（**Electromagnetic spectrum**）

令光速為 c。

名稱	頻率範圍	波長範圍	能量範圍
伽馬（γ）射線	300 EHz - 30 EHz	1 pm - 10 pm	1.24 MeV - 124 keV
硬 X 射線 (HX)	30 EHz - 3 EHz	10 pm - 100 pm	124 keV - 12.4 keV
軟 X 射線 (SX)	3 EHz - 30 PHz	100 pm - 10 nm	12.4 keV - 124 eV
極端紫外線 (EUV)	30 PHz - 3 PHz	10 nm - 100 nm	124 eV - 12.4 eV
近紫外線 (NUV)	3 PHz - 790 THz	100 nm - 380 nm	12.4 eV - 3.26 eV
可見光 (紫色, Violet)	790 THz - 670 THz	380 nm - 450 nm	3.26 eV - 2.75 eV
可見光 (藍色, Blue)	670 THz - 620 THz	450 nm - 485 nm	2.75 eV - 2.56 eV
可見光 (青色, Cyan)	620 THz - 600 THz	485 nm - 500 nm	2.56 eV - 2.48 eV
可見光 (綠色, Green)	600 THz - 530 THz	500 nm - 565 nm	2.48 eV - 2.19 eV
可見光 (黃色, Yellow)	530 THz - 510 THz	565 nm - 590 nm	2.19 eV - 2.1 eV
可見光 (橘色, Orange)	510 THz - 480 THz	590 nm - 625 nm	2.1 eV - 1.98 eV
可見光 (紅色, Red)	480 THz - 400 THz	625 nm - 750 nm	1.98 eV - 1.65 eV
近紅外線 (NIR)	400 THz - 30 THz	750 nm - 10 μm	1.65 eV - 124 meV
中紅外線 (MIR)	30 THz - 3 THz	10 μm - 100 μm	124 meV - 12.4 meV
遠紅外線 (FIR)	3 THz - 300 GHz	100 μm - 1 mm	12.4 meV - 1.24 meV
極高頻 (EHF) 微波	300 GHz - 30 GHz	1 mm - 10 mm	1.24 meV - 124 μeV
超高頻 (SHF) 微波	30 GHz - 3 GHz	10 mm - 100 mm	124 μeV - 12.4 μeV
特高頻 (UHF) 微波	3 GHz - 300 MHz	100 mm - 1 m	12.4 μeV - 1.24 μeV
甚高頻 (VHF) 無線電波	300 MHz - 30 MHz	1 m - 10 m	1.24 μeV - 124 neV
高頻 (HF) 無線電波	30 MHz - 3 MHz	10 m - 100 m	124 neV - 12.4 neV
中頻 (MF) 無線電波	3 MHz - 300 kHz	100 m - 1 km	12.4 neV - 1.24 neV
低頻 (LF) 無線電波	300 kHz - 30 kHz	1 km - 10 km	1.24 neV - 124 peV
甚低頻 (VLF) 無線電波	30 kHz - 3 kHz	10 km - 100 km	124 peV - 12.4 peV
特低頻 (ULF) 無線電波	3 kHz - 300 Hz	100 km - 1 Mm	12.4 peV - 1.24 peV
超低頻 (SLF) 無線電波	300 Hz - 30 Hz	1 Mm - 10 Mm	1.24 peV - 124 feV
極低頻 (ELF) 無線電波	30 Hz - 3 Hz	10 Mm - 100 Mm	124 feV - 12.4 feV

第三節　愛因斯坦（**Einstein**）光量子論（**Quantum theory of light**）

$$\mathbf{p} = \frac{h}{\lambda}\hat{\mathbf{v}}$$
$$E = hf = \frac{h|\mathbf{v}|}{\lambda} = |\mathbf{v}||\mathbf{p}|$$

第四節　常見應用與裝置

一、　法拉第弔詭（**Faraday paradox**）

- 原因：金屬中的自由電子會受勞倫茲力影響使金屬不同位置之間產生電位差。

- 實驗裝置：假設我們有一個導體圓盤放在垂直於圓盤平面的均勻磁場中。當圓盤旋轉時，如果我們在圓盤的中心和邊緣之間放置一個導線並測量兩端的電壓，根據法拉第定律，我們應該測量到感應電動勢。但如果我們將整個裝置（磁場、圓盤和導線）一起旋轉，仍然可以測到感應電動勢。

二、　金箔驗電器

一瓶，一金屬細桿穿過瓶口絕緣塞，桿上瓶內端連接兩金箔片，瓶外端連接金屬球，稱金箔驗電器。金箔不帶電時因自身重量閉合，帶電時則因兩兩金箔帶同性電之勞倫茲力而張開，張角與電量正相關。

- 欲檢測一物體是否帶電：使驗電器不帶電，以物接觸之，若驗電器張開則物帶電，否則否。
- 欲檢測一物體是否為導體：使驗電器帶電，以不帶電物接觸之，若驗電器保持張開則物為絕緣體，否則為導體。
- 欲檢測一物的電性：使驗電器帶已知電，以物接觸之，若驗電器張角變大則物帶與驗電器帶電同性之電，若張角變小則物不帶與驗電器帶電同性之電（若為絕緣體則必帶與驗電器帶電異性之電），若張角先變小至閉合而後張開則物帶量值較驗電器所帶電更多的與驗電器帶電異性之電。

三、　法拉第籠

一些交通工具艙、實驗裝置、監獄、電子元件容器、電纜、通訊屏蔽容器、電梯、RFID 竊取（RFID skimming）容器等為法拉第籠，使其中物件免受外部電擊與電磁傳輸等。

四、　避雷針/引雷針（**Lightning rod**）

避雷針是尖端氣體電暈放電效應的應用。當帶電雲層接近，避雷針尖端感應異性電，與空氣接觸放電使建築物的與雲層異性之電減少，而免遭雷擊。

五、　靜電除塵器（**Electrostatic precipitator, ESP**）

靜電除塵器是尖端氣體電暈放電效應的應用。在排煙管的中心軸與外壁間施以高電壓，外壁接地，中心軸相對外壁為負電位且電場量值甚大使進入排煙管的氣體游離，其中負電者向管壁移動時撞擊煙塵使帶負電而累積在外壁上。

六、　凡德格拉夫起電機/范氏起電機（**Van de Graaff generator**）

凡德格拉夫起電機是一種高壓靜電起電裝置，可產生高達數百萬伏特的靜電電壓。對底部的梳狀針通高壓電，針尖因尖端電暈放電效應而放電，電荷經由滾輪驅動的絕緣體運輸帶運輸到上方的空心金屬球上，分布到球的外表面並逐漸累積。常見演示包含：未接地的人觸碰金屬球，靜電使頭髮帶相同電荷，相互排斥；金屬球產生高壓電擊穿空氣，產生藍白色電光。

七、 平板電容器（Parallel plate capacitor）

平板電容器由兩片可儲等量異性電的平行導電金屬平板構成，中間用絕緣的電介質隔開。
令有平板電容器，其兩金屬板面積均為 A，內表面相距 d，電介質電容率 ε，此系統存有電量 q，則：

- 此平板電容器兩金屬板間的電場量值（忽視邊緣效應）$|\mathbf{E}|$ 為：

$$|\mathbf{E}| = \frac{q}{A\varepsilon}$$

- 故兩金屬電位差 V 為：

$$V = \int_0^d \frac{q}{A\varepsilon}\,\mathrm{d}r = \frac{qd}{A\varepsilon}$$

- 故電容 C 為：

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon A}{d}$$

八、 球形電容器（Spherical capacitor）

球形電容器由兩同心平行導電金屬球殼構成，中間用絕緣的電介質隔開，兩者儲等量有異性電，或外球接地而內球儲電。
令有球形電容器，其內金屬球殼外表面半徑 R_1，外金屬球殼內表面半徑 R_2，電介質電容率 ε，此系統存有電量 q，則：

- 此球形電容器距球心 r（$r_1 \leq r \leq r_2$）的電場量值 $|\mathbf{E}|(r)$ 為：

$$|\mathbf{E}|(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

- 故兩金屬電位差 V 為：

$$V = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\mathrm{d}r = \left(-\frac{q}{4\pi\varepsilon r}\right)\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

- 故電容 C 為：

$$C = \frac{q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

若將外球移除，變成單獨帶電球，則電容 C 為：

$$C = \lim_{r_2\to\infty} \frac{4\pi\varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} = 4\pi\varepsilon r_1$$

九、 觸控螢幕（Touchscreen）

觸控螢幕的原理主要分為電容式觸控和電阻式觸控兩種，其中電容式觸控是現今智慧型手機和平板電腦最常用者。

- 電容式觸控（Capacitive touchscreen）：螢幕表面覆蓋一層透明的導電材料（如氧化銦錫，ITO），當手指、摻入石墨的手套或其他導體接觸螢幕時，會改變該點附近的電場分布，感應器陣列檢測到電場變化，透過運算確定觸控位置。
- 電阻式觸控（Resistive touchscreen）：螢幕由兩層導電膜組成，當按壓螢幕時，兩層膜接觸。接觸點的電阻變化會被測量並轉換為座標。不需要導電特性，可以用任何東西觸控。

十、 發電機

發電機的主要功能是將機械能轉換成電能。其基本結構包括：

- 定子（Stator）：靜止的部分，內部有磁鐵或一組固定的繞組（線圈）形成的電磁鐵作為磁場系統，產生固定的磁場。
- 轉子（Rotor）：旋轉的部分，內部有繞組，受機械能轉動，使受定子之磁場產生感應電流。
- 換向器（Commutator）：在直流發電機中使用的裝置，通常由銅片和絕緣材料構成，能夠使轉子繞組在轉動時與輸出電流至外部之導線接觸方向不斷反轉。交流發電機則不用。
- 刷子（Brushes）：與換向器接觸的碳或銅刷子，幫助電流傳輸。交流發電機則不用。

十一、 電動機/馬達（**Motor**）

電動機的主要功能是將電能轉換成機械能。其基本結構包括：

- 定子（Stator）：靜止的部分，內部有磁鐵或電磁鐵，產生固定的磁場。
- 轉子（Rotor）：旋轉的部分，內部有繞組，從外部輸入電流予之，使受定子的磁場的勞倫茲力而轉動。
- 換向器（Commutator）：在直流電動機中使用的裝置，能夠使轉子繞組在轉動時與外部輸入電流之導線接觸方向不斷反轉。交流電動機則不用。
- 刷子（Brushes）：與換向器接觸的碳或銅刷子，幫助電流傳輸。交流電動機則不用。

十二、 電磁爐

電磁爐的主要功能是將電能轉換成熱能，加熱金屬鍋具。其基本結構包括：

- 電磁線圈（Induction Coil）：電磁爐的核心部分，通常位於爐面下方，由銅線繞製而成。當交流電流通過這些線圈時，會產生變化的磁場。
- 爐面（Cooktop）：通常由玻璃陶瓷製成，能夠承受高溫並且易於清潔。爐面上有一個或多個加熱區域，覆蓋在電磁線圈上方。
- 控制面板（Control Panel）：用於設定加熱功率、時間等，電磁爐會根據設定調節電磁線圈的電流。
- 冷卻系統（Cooling System）：包括風扇和散熱片，用於散熱以防止電磁線圈過熱。這些部件幫助保持電磁爐的工作溫度在安全範圍內。
- 溫度感測器（Temperature Sensor）：用於監測爐面的溫度或鍋具的溫度，並將信息傳送給控制系統，以調整加熱功率。
- 安全裝置（Safety Devices）：包括過熱保護、過電流保護、故障警報等，旨在確保使用過程中的安全性。
- 金屬鍋具：金屬材料在電磁線圈形成變動磁場中產生渦電流，渦電流在鍋具內發生電阻加熱。

十三、 影印機

影印機的原理基於靜電成像技術（electrostatic imaging）。

- 光電導材料（Photoconductive Material）：感光鼓（photoreceptor drum）是覆有光電導材料的圓筒。該材料在黑暗中絕緣，但受光照後會導電。
- 曝光（Exposure）：文件被光源（如氙氣燈或雷射束）照亮，空白處光透射而過，將文件的影像投射到感光鼓上。鼓上未被光照的部分保持靜電荷，而被光照的部分靜電荷被中和。
- 顯影劑/碳粉（Toner）：感光鼓表面的靜電影像吸引帶相反電荷的碳粉，使碳粉附著在感光鼓的圖像區域上。碳粉通常由樹脂、顏料和帶電材料組成。
- 轉印：一張紙被輸送到感光鼓附近，並通過轉印電極產生與感光鼓同性的靜電場。靜電場將碳粉圖像從感光鼓轉移到紙張上。
- 熱壓裝置（Fuser unit）：紙張通過熱壓定影。高溫將碳粉融化並壓附到紙上，形成永久圖像。

十四、 電磁波

- 無線電波：無線通訊。應用振幅調變、頻率調變、相位調變（Phase modulation）等技術，狹窄頻帶的無線電波即可傳遞資訊。
- 微波：Wi-Fi、微波爐。
- 紅外線：人體熱輻射大致處於紅外線，可用於熱感攝影。物質主要吸收的輻射熱為紅外線，以旋轉或振動等方式吸收。
- 可見光：人類眼睛可見的頻帶。顏色依視頻率而定。
- 紫外線：可協助皮膚製造維生素 D，但曝曬過量易曬傷與誘發皮膚癌。可殺死微生物。
- X 射線：穿透力強，身體組織對其吸收率不同，可用於拍攝身體內部結構的影響。X 射線波長與一般晶格長度相近，可用繞射現象研究晶格結構。
- 伽瑪射線：通常是核反應放出，其能量足以殺死細胞，可用於腫瘤治療。
- 濾光器：指可以過濾入射光僅使特定頻率區間通過的光學元件。