圓錐曲線

沈威宇

2025 年 3 月 30 日

目錄

第一節　圓錐曲線/圓錐截痕（conic section, quadratic curve）

一、　約定

- 參數屬於擴展實數系（extended real number system），即 $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$，其中 $\infty = +\infty = -(-\infty)$。
- 若一表達式中某值為無限大，該表達式定義為其在該值趨近於無限大的極限，且允許該極限為無限大、負無限大或無意義。
- 定義無限大乘以任意正擴展實數為無限大；定義無限大乘以零無意義；定義任何數除以零無意義。
- 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$、$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$，則定義 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$，與 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - g(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 無關。
- 圓錐和圓錐曲線均為某歐幾里德仿射空間（Euclidean affine space）的子集。
- 某點與空間中某方向無限遠處的距離定義為無限大；A 點與空間中某方向無限遠處的距離減去 B 點與空間中某方向無限遠處的距離定義為 $B - A$ 與該方向單位向量的點積。
- 位置表示依賴於座標時使用笛卡爾座標系統。
- 將一線段作為一值時，其值為其長度。
- 各等式或不等式僅考慮其兩側均有意義時。

二、　圓錐曲線定義

(一)　圓錐曲線的等價定義

- 圓錐曲線指三維空間中一雙葉圓錐（double-napped cone）與一平面的截線。稱兩個同時與圓錐與該平面相切的球為丹德林球（Dandelin spheres）或焦球（focal spheres），其一的球心可以在無限遠處（拋物線）；稱該二丹德林球與該平面的切點為焦點。
- 圓錐曲線指平面上距兩不一定相異的定點（稱焦點（focus））的距離和為一大於兩焦點距離的定值（稱兩倍半主軸）的所有點的集合（圓、橢圓、拋物線），或距離差的絕對值為一大於等於的兩焦點距離的定值（除圓外稱兩倍半主軸）的所有點的集合（圓、拋物線、雙曲線），其中一定點可在某方向無限遠處（拋物線）。
- 對於 $0 \le \varepsilon \le 1$ 的離心率/偏心率（eccentricity）ε，圓錐曲線指平面上距一定點（稱焦點）的距離與距一定直線（稱準線（directrix））的距離之比值為離心率的所有點的集合，其中準線可在無限遠處（圓）；對於 $\varepsilon > 1$（雙曲線），圓錐曲線指前述集合及和該集合有相同漸近線（asymptote）、對稱軸與離心率的同種集合之聯集。
- 圓錐曲線指任意笛卡爾座標平面上，$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的圖形，且該方程有實數解，且 A、B、C 不全為零。

(二)　參數與相關圖形定義

- 離心率（eccentricity）ε：圓錐曲線上的點與焦點的距離與其與準線的距離之比值。

- 中心（center）：對於圓、橢圓和雙曲線為幾何中心（對於雙曲線即兩漸近線的交點）；對於拋物線為頂點（即對稱軸與拋物線的焦點）。
- 焦距（focal length）f：中心與焦點的距離，對於拋物線特指非無限遠處的焦點與中心的距離。
- 線性離心率（linear eccentricity）c：兩焦點距離之一半。
- 焦點準線距/焦點參數（focal parameter）p：與某準線較近的焦點與該準線的距離。
- 中心準線距 d：中心與準線的距離。
- 主軸（major axis）：通過中心與焦點的直線或線段。
- 半主軸（semi-major axis）a：主軸與圓錐曲線兩交點的距離的一半，若僅一交點則定義為無限大（拋物線）。
- 弦（chord）：連接圓錐曲線上的兩點的線段。
- 焦半徑（focal radius）：焦點與圓錐曲線上一點的連線段。
- 焦弦（focal chord）：過焦點連接圓錐曲線上的兩點的線段。
- 正焦弦（latus rectum）：垂直主軸的焦弦。
- 半正焦弦（semi-latus rectum）ℓ：正焦弦長度的一半。
- 次軸（minor axis）：垂直主軸於中心的直線，或垂直主軸於中心且長度為兩倍半次軸且以中心為中點的線段。
- 半次軸（semi-minor axis）b：$b = a\sqrt{|1-\varepsilon^2|}$。

(三) 分類

- 圓：$\varepsilon = 0$ 的圓錐曲線
- 橢圓：$0 < \varepsilon < 1$ 的圓錐曲線
- 拋物線：$\varepsilon = 1$ 的圓錐曲線
- 雙曲線：$\varepsilon > 1$ 的圓錐曲線

(四) 性質

$$
\begin{aligned}
&c = a\varepsilon \\
&\ell = p\varepsilon = a|1-\varepsilon^2| = \frac{b^2}{a} \\
&cd = a^2 \\
&d = \frac{f}{\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

- 次軸平行正焦弦平行準線垂直主軸。
- 除去雙曲線通過共軛軸的焦弦，正焦弦是最短的焦弦。
- 中心與兩焦點必共線，該線即主軸。除拋物線外，中心為兩焦點之中點；除拋物線外，主軸與圓錐曲線交於兩點，且中心為該二點之中點。

- 必存在一個直角三角形使得其三邊長為半主軸、半次軸與線性離心率且半次軸必為一股長（含一邊長為零另二邊等長（圓）或兩邊無限長（拋物線））。
- 兩焦點與中心之距離的平均為線性離心率。
- 不論位置、方向，只論形狀，圓錐曲線有兩個自由度。
- 圓錐曲線退化若且惟若 $\ell = 0$。

三、 圓（circle）

(一) 性質

$$\begin{aligned}
&\varepsilon = 0\\
&\text{主軸：任意過圓心直線}\\
&a, b\text{： 半徑}\\
&a = b\\
&2a, 2b\text{： 直徑}\\
&\varepsilon = c = f = 0\\
&\ell = a = b\\
&p = d = \infty
\end{aligned}$$

- 圓上一點距焦點的距離為半徑。
- 任一過焦點/中心的直線為對稱軸。
- 若某點在一圓上，則其以任意過圓心直線為線對稱軸的對稱點亦在該圓上。

(二) 圓

- 標準式：

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{a}\right)^2 = 1$$

- 準線方程：任意無限遠處直線
- 中心/圓心：(h, k)
- 焦點：(h, k)
- 主、次軸方程：任意互相垂直於 (h, k) 的一組直線。
- 參數式：

$$(a\cos(t) + h, a\sin(t) + k), \quad 0 \le t < 2\pi$$

- 一般式形式：

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Dy + F = 0, \quad \text{有實數解}$$

(三) 直徑式

令兩點 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$，則以 $\overline{PQ}$ 為直徑的圓的方程式為：

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

四、 橢圓（ellipse）

(一) 性質

主軸：長軸

次軸：短軸

a： 半長軸

b： 半短軸

$$ab \neq 0, \quad a > b$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$c = f = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\ell = \frac{b^2}{a}$$

$$p = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$d = \frac{c}{\varepsilon^2} = \frac{a}{\varepsilon} = c + p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

- 稱橢圓與主/長軸和次/短軸的四個交點為頂點。
- 橢圓上一點距兩焦點的距離和為兩倍半長軸。
- 主/長軸和次/短軸為對稱軸。
- 若某點在一橢圓上，則其以長軸或短軸為線對稱軸的對稱點亦在該橢圓上。

(二) 標準方向橢圓

- 方向：主/長軸平行 x 軸
- 標準式：

$$\left(\frac{x - h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - k}{b}\right)^2 = 1$$

- 準線方程：

$$x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} + h$$

- 中心/圓心：(h, k)
- 焦點：$(h \pm \sqrt{a^2 - b^2}, k)$
- 主/長軸方程：

$$y = k$$

- 次/短軸方程：

$$x = h$$

- 頂點：$(h \pm a, 0)$ 與 $(0, k \pm b)$
- 參數式：

$$(a\cos(t) + h, b\sin(t) + k), \quad 0 \le t < 2\pi$$

- 一般式形式：

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad AC > 0 \wedge |A| < |C| \wedge \text{有實數解}$$

(三) 兩焦點式

- 兩焦點式：

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} + \sqrt{(x-\gamma)^2 + (y-\delta)^2} = 2a$$

- 焦點：(α, β) 與 (γ, δ)
- 中心：$\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{2}, \dfrac{\beta+\delta}{2}\right)$
- 主/長軸方程：

$$(\alpha - \gamma)(y - \beta) = (\beta - \delta)(x - \alpha$$

五、 拋物線（parabola）

(一) 性質

$$\varepsilon = 1$$

主軸：對稱軸、軸

次軸：頂點切線

$$c = a = \infty$$

$$\ell = p = 2d = 2f$$

$b =$ 無意義

(二) 標準方向拋物線

- 方向：開口向 x 軸正方向
- 標準式：

$$(y - k)^2 = 4f(x - h)$$

- 準線方程：

$$x = -f + h$$

- 中心/頂點：(h, k)
- 焦點：$(h + f, k)$（與 (∞, k)）

- （主/對稱）軸方程：

$$y = k$$

- 次軸方程：

$$x = h$$

- 參數式：

$$(ft^2 + h, 2ft + k), \quad t \in \mathbb{R}$$

- 一般式形式：

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad AE \neq 0$$

(三) 焦點-準線式

- 焦點-準線式：

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \frac{|mx + ny + r|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

- 焦點：(α, β)
- 準線方程：$mx + ny + r$
- 中心/頂點：

$$\left(\alpha - \frac{m(m\alpha + n\beta + r)}{2(m^2 + n^2)}, \beta - \frac{n(m\alpha + n\beta + r)}{2(m^2 + n^2)}\right)$$

- （主/對稱）軸方程：

$$n(x - \alpha) = m(y - \beta)$$

六、 雙曲線（hyperbola）

(一) 性質

主軸：貫軸（transverse axis）

次軸：共軛軸（conjugate axis）

a： 半貫軸（semi-transverse axis）

b： 半共軛軸（semi-conjugate axis）

$ab \neq 0$

$\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

$c = f = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\ell = \dfrac{b^2}{a}$

$p = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$d = \dfrac{c}{\varepsilon^2} = \dfrac{a}{\varepsilon} = c - p = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- 一雙曲線在共軛軸兩側的部分稱其兩分支（branch）。
- 距中心距離趨近於無限大時，雙曲線趨近於一對漸近線，兩者交叉於中心且線對稱於貫軸與共軛軸，且該二漸近線是以該雙曲線中心為兩焦點的退化雙曲線。
- 雙曲線上一點距兩焦點的距離差為兩倍半貫軸。
- 主/貫軸和次/共軛軸為對稱軸。
- 若某點在一雙曲線上，則其以貫軸或共軛軸為線對稱軸的對稱點亦在該雙曲線上。
- 對於任意雙曲線，存在唯一一個矩形，使得：其中心為雙曲線中心，其二邊垂直貫軸且長度為二倍半共軛軸。該矩形垂直貫軸的二邊分別與雙曲線之兩分支相切於貫軸上，另二邊平行貫軸且長度為二倍半貫軸，對角線在雙曲線的漸近線上且長度為二倍線性離心率，以其中心為圓心、線性離心率為半徑的圓通過雙曲線的兩焦點與矩形的四個頂點。

(二) 標準方向雙曲線

- 方向：主/貫軸平行 x 軸
- 標準式：

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2-\left(\frac{y-k}{b}\right)^2=1$$

- 準線方程：

$$x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}+h$$

- 中心：(h,k)
- 焦點：$(h\pm\sqrt{a^2+b^2},k)$
- 主/貫軸方程：

$$y=k$$

- 次/共軛軸方程：

$$x=h\pm a$$

- 漸近線方程：

$$\frac{x-h}{a}\pm\frac{y-k}{b}=0$$

- 參數式：

$$(a\sec(t)+h,b\tan(t)+k),\quad 0\le t<2\pi\wedge t\neq\frac{\pi}{2}\wedge t\neq\frac{3\pi}{2}$$

- 一般式形式：

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0,\quad AC<0\wedge\frac{D^2}{4A}-\frac{E^2}{4C}+F<0\wedge \text{有實數解}$$

(三) 兩焦點式

- 兩焦點式：

$$\left|\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}-\sqrt{(x-\gamma)^2+(y-\delta)^2}\right| = 2a$$

- 焦點：(α, β) 與 (γ, δ)
- 中心：$\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}, \frac{\beta+\delta}{2}\right)$
- 主/長軸方程：

$$(\alpha-\gamma)(y-\beta) = (\beta-\delta)(x-\alpha$$

(四) 漸近線式

以 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 與 $a_2x+b_2y+c_2=0$ 為漸近線的雙曲線可以表示為：

$$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=k$$

其中 $k=0$ 時為退化雙曲線，即該二漸近線。

(五) 等軸雙曲線

$\varepsilon=\sqrt{2}$ 的雙曲線，服從：

$$a=b=\ell=\sqrt{2}p=\sqrt{2}d=\frac{c}{\sqrt{2}}$$

(六) 共軛雙曲線（conjugate hyperbola）

一組雙曲線的共軛雙曲線為具有相同線性離心率和漸近線的另一組雙曲線。原雙曲線的貫軸為共軛雙曲線的共軛軸，原雙曲線的共軛軸為共軛雙曲線的貫軸，原雙曲線的半貫軸等於共軛雙曲線的半共軛軸，原雙曲線的半共軛軸等於共軛雙曲線的半貫軸。

(七) 雙曲線族

雙曲線族指具有相同漸近線的雙曲線的集合。

七、 標準方向非退化圓錐曲線極座標方程

定義極座標 $[r,\theta]=(x\cos\theta, y\sin\theta)$，則較 x 座標較小的焦點在原點的標準方向非退化圓錐曲線方程為：

$$r=\frac{\ell}{1-\varepsilon\cos\theta}$$

八、 雙葉圓錐/雙重圓錐（double-napped cone）

(一) 定義

設空間中有一定直線（稱軸（axis））過一定點（稱頂點（vertex））。定義母線（generatrix）為一通過頂點並與軸夾一非零且非直角的定角度的直線，則所有母線形成的曲面稱雙葉圓錐。

(二) 標準方向雙葉圓錐

- 方向：開口向 z 軸正負向
- 標準式：

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\tan^2(\phi)(z-\gamma)^2$$

其中 α、β、γ 為常數，$0\le\phi<\dfrac{\pi}{2}$，ϕ 是母線與軸的夾角。

- 軸：

$$(\alpha,\beta,\gamma)+(0,0,1)t,\quad t\in\mathbb{R}$$

- 頂點：(α,β,γ)
- 母線：任意 $0\le s\le 1$ 的直線：

$$(\alpha,\beta,\gamma)+\left(s,\sqrt{1-s^2},\cot^2(\phi)\right)t,\quad t\in\mathbb{R}$$

- 過 $0\le s\le 1$ 的母線 $(\alpha,\beta,\gamma)+\left(s,\sqrt{1-s^2},\cot^2(\phi)\right)t,\quad t\in\mathbb{R}$ 切圓錐之平面：

$$s(x-\alpha)+\sqrt{1-s^2}(y-\beta)=\tan^2(\phi)(z-\gamma)$$

(三) 圓錐截痕的離心率與丹德林球

$0\le s\le 1$ 的平面：

$$z=\cot(\theta)\left(s(x-\alpha)+\sqrt{1-s^2}(y-\beta)\right)+\omega+\gamma$$

截雙葉圓錐：

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\tan^2(\phi)(z-\gamma)^2$$

其中 α、β、γ 為常數，$0\le\phi<\dfrac{\pi}{2}$，ϕ 是母線與軸的夾角，$0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\theta$ 是平面與軸的夾角。

離心率為：

$$\varepsilon=\frac{\cos\theta}{\cos\phi}$$

- 圓：$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\varepsilon=0$
- 橢圓：$\theta>\phi$，$0<\varepsilon<1$
- 拋物線：$\theta=\phi$，$\varepsilon=1$
- 雙曲線：$\theta<\phi$，$\varepsilon>1$

兩丹德林球為：

- 球心：

$$\left(\alpha,\beta,\frac{\omega\sin(\theta)}{\sin(\phi)+\sin(\theta)}+\gamma\right)$$

半徑：

$$\left|\frac{\omega\sin\phi\sin\theta}{\sin\phi+\sin\theta}\right|$$

- 球心：
$$\left(\alpha, \beta, \frac{\omega \sin(\theta)}{-\sin(\phi)+\sin(\theta)}+\gamma\right)$$
半徑：
$$\left|\frac{\omega \sin\phi \sin\theta}{\sin\phi - \sin\theta}\right|$$

九、 圓錐曲線的判別

(一) 一般式

討論一般式：

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

，其中所有係數都是實數，且 $ABC \neq 0$。

令：

$$Q = \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} D/2 \\ E/2 \end{bmatrix}$$

又可以寫作：

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

又可以寫作：

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + N^\top \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

(二) 圖形判別式

圖形判別式 $\det(M) = AC - \dfrac{B^2}{4}$，圖形含實圖形與虛圖形。

- $\det(M) > 0$：不退化圖形為圓（當且僅當 $A = C$ 且 $B = 0$）或橢圓；退化圖形為一點，即中心，發生於 $F = \dfrac{AD^2}{4|A|^3} + \dfrac{CE^2}{4|C|^3}$。
- $\det(M) = 0$：不退化圖形為拋物線；退化圖形為一對平行的直線，平行於退化前拋物線的對稱軸，發生於 $AE = CD = 0$，兩直線重合於 $D^2 + E^2 = 4(A + C)F$。（$A = B = C = 0 \wedge DE \neq 0$ 與退化前拋物線相切但不屬於圓錐曲線。）
- $\det(M) < 0$：不退化圖形為雙曲線；退化圖形為一對交叉於退化前雙曲線中心的直線，發生於 $F = \dfrac{AD^2}{4|A|^3} + \dfrac{CE^2}{4|C|^3}$。

(三) 退化判別式

退化判別式 $\det(Q) = \det(M)F - \frac{AE^2 + CD^2}{4} = AC - \frac{AE^2 + CD^2 + BF^2}{4}$。

- $\det(Q) < 0$（對於拋物線即 $D^2 + E^2 > 4(A + C)F$）：圖形為實圖形。
- $\det(Q) = 0$（對於拋物線即 $D^2 + E^2 = 4(A + C)F$）：圖形為退化圖形。
- $\det(Q) > 0$（對於拋物線即 $D^2 + E^2 < 4(A + C)F$）：圖形為虛圖形。

(四) 轉軸與移軸不變性（rotation and translation invariance）

$\det(Q)$、$\det(M)$ 與 $A + C$ 在轉軸，即：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

和移軸，即：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

後不變。

(五) 中心的代數判定

令圖形的中心為 (x_0, y_0)，有：

$$(x_0, y_0)^\top = -M^{-1}N$$

對於拋物線 M^{-1} 為 M 之偽逆。

(六) 方向的代數判定

主軸極角 θ 服從：

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C}$$

(七) 圓的判別式

設圖形是圓，令：

$$\Delta_c = D^2 + E^2 - 4F$$

- $\Delta_c > 0$：圖形為實圓，圓心 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$，半徑 $\frac{\sqrt{\Delta_c}}{2}$。
- 如果 $\Delta_c = 0$，圖形退化為一點 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$。
- 如果 $\Delta_c < 0$，圖形為虛圓，圓心 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$，半徑 $\frac{\sqrt{\Delta_c}}{2}$。

(八)　圓與直線幾何關係的代數判定

已知圓 C：$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 與直線 **L**：$ax + by + c = 0$。

將 **L** 化為 $y = f(x)$（或 $x = g(y)$）代入 C，消去 y（或 x）得 $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$（或 $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$）。

令 $\Delta_{\mathbf{L}} = \beta^2 - 4\alpha\gamma$：

- $\Delta_{\mathbf{L}} > 0$：圓 C 與直線 **L** 相交於相異二點（相割）。
- $\Delta_{\mathbf{L}} = 0$：圓 C 與直線 **L** 相交於一點（相切）。
- $\Delta_{\mathbf{L}} < 0$：圓 C 與直線 **L** 沒有交點（相離）。