流體力學

沈威宇

2025 年 6 月 30 日

目錄

第一節　流體力學（Fluid Mechanics）

一、　符號約定

- t：時間
- $\mathbf{v}$：流速場
- ρ：密度
- V：控制體積
- M：流體分子分子量
- n：流體分子分子數
- p：壓力
- R：理想氣體常數
- T：絕對溫度
- u：每個流體分子的平均內能
- $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$：物質導數（Material derivative）/隨質導數（Substantial derivative）
- $\mathscr{R}$：雷諾數（Reynolds number）
- η：黏滯性係數/動力黏度（Kinematic viscosity）

二、　物質導數（Material derivative）/隨質導數（Substantial derivative）

對於任意場 $\mathbf{y}$，其物質導數 $\frac{\mathrm{D}\mathbf{y}}{\mathrm{D}t}$ 定義為：

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{y}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{y}).$$

三、　連續性方程（Continuity equation）/質量守恆

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

四、　納維-斯托克斯方程式（Navier–Stokes equations）/動量守恆

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p$$

五、　狀態方程式（Equation of state）

描述流體的熱力學狀態，形式為：

$$f(p, V, T) = 0$$

例如理想氣體方程式為：

$$pV - nRT = 0$$

六、　歐拉方程式（Euler equations）

對於零黏度、零導熱率的流體：

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{v}$$
$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$$
$$\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = -\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{v}$$

七、　不可壓縮約束

對於不可壓縮的流體：

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$$
$$\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = 0$$
$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

八、　雷諾數（Reynolds number）

密度 ρ、黏滯性係數/動力黏度 η、特徵長度 L、特徵速率 v，雷諾數 $\mathscr{R}$ 定義為：

$$\mathscr{R} = \frac{\rho\eta L}{v}$$

九、　斯托克定律（Stokes' law）

雷諾數極小而可忽略、動力黏度 η 的液體中，半徑 a、速度 $\mathbf{v}$ 的小球，受阻力 $\mathbf{F}$ 為：

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta a\mathbf{v}$$