

傅立葉分析

沈威宇

2025 年 6 月 29 日

目錄

第一節 傅立葉分析 (Fourier Analysis)	1
一、 傅立葉級數 (Fourier series)	1
二、 傅立葉 (積分) 轉換與逆轉換	1

第一節 傅立葉分析 (Fourier Analysis)

傅立葉分析指將函數分解為多個正弦函數之和的分析。其分解過程稱為傅立葉轉換 (或變換) (Fourier transform)。

一、 傅立葉級數 (Fourier series)

$$\left(f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{inx} \right) \Leftrightarrow \left(F_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right)$$

其中 F_n 為複振幅。

對於實函數可以寫成：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

其中 a_n 和 b_n 是實頻率分量的振幅。

二、 傅立葉 (積分) 轉換與逆轉換

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}(f)(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

其中： \mathbf{x} 是實空間中的變量，相當空間中的位置向量或時間變量，為一個 d -維向量； \mathbf{k} 是頻率空間中的變量，相當傅立葉級數中於每個正弦波的波數，也是一個 d -維向量； $f(\mathbf{x})$ 符合：

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \right| < \infty$$

證明：

Statement.

For all $f(\mathbf{x})$ such that $\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| < \infty$, the following holds true:

$$\left(F(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \right) \Leftrightarrow \left(f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^d} F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \right)$$

Proof.

We begin by assuming that $F(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$. First, we show that the inverse Fourier transform of $F(\mathbf{k})$ recovers $f(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^d} F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} d\mathbf{x}' \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}. \end{aligned}$$

By changing the order of integration, we get:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}') \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \right) d\mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}') \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} d\mathbf{k} \right) d\mathbf{x}'. \end{aligned}$$

The integral inside is a known result of the Dirac delta function:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} d\mathbf{k} = 2\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Therefore,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}') \cdot 2\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

This completes the proof that the inverse Fourier transform of $F(\mathbf{k})$ gives back $f(\mathbf{x})$, thus proving the statement. □