實多項式函數與方程

沈威宇

2025 年 2 月 26 日

目錄

第一節　實多項式函數與方程（Real Polynomial Functions and Equations）

一、　方程組

- 相容方程組：一組方程組有解，則稱其為相容方程組。
- 相依方程組：一組方程組中，其中一者成立則其他者均成立，則稱其為相容方程組。
- 矛盾方程組：一組方程組無法同時成立，則稱其為矛盾方程組。

二、　多項式

多項式指由多個項（term）組成的代數表達式，每個項是常數（稱該項係數）與零或正整數（為零是該項稱常數項）個變數的非負整數冪次的乘積。
領導係數指最高次項係數。
令有多項式 $f(x)$、$g(x)$、$q(x)$、$r(x)$。

三、　最高次項次數定理

$$\deg(f(x)\cdot g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$$

四、　商式極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0, \deg(f(n)) < \deg(g(n)) \\ \dfrac{f(x)\text{ 領導係數}}{g(x)\text{ 領導係數}}, \deg(f(n)) = \deg(g(n)) \\ \text{不存在}, \deg(f(n)) > \deg(g(n)) \end{cases}$$

五、　近似

$$f(x)\text{ 在 } x = a \text{ 的 } n \text{ 次近似（}n \le \deg(f(x))\text{）} = f(x)\text{ 之泰勒級數最低次 } n \text{ 項}$$

六、　除法定理

恰有一組 $q(x)$、$r(x)$ 滿足：

$$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x)$$

$$\deg(r(x)) < \deg(g(x)) \vee r(x) = 0$$

若 $r(x) = 0$ 則稱 $q(x)$ 為 $f(x)$ 之因式。

(一)　餘式定理

若 $q(x) = ax + b$ 則 $r(x) = f\left(\frac{b}{a}\right)$。

(二) 因式定理

$f\left(\frac{b}{a}\right)=0$ 若且惟若 $ax+b$ 為 $f(x)$ 的因式。

七、 線性變換

(一) 平移

對於任意函數 $f(x)$，$y=f(x)$ 右移 h 單位，上移 k 單位，得 $y=f(x-h)+k$。

(二) 伸縮

對於任意函數 $f(x)$，$y=f(x)$ 以 x 軸為基準線鉛直伸縮為原來的 a 倍，以 y 軸為基準線水平伸縮為原來的 b 倍，得 $y=af\left(\frac{x}{b}\right)$。

八、 零函數

$$f(x)=0$$

九、 一元一次函數

$a\neq 0$

(一) 一般式（斜截式）

$$f(x)=ax+b$$

其中 a 稱斜率，b 稱 y 截距。

(二) 點斜式

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

零函數與一元一次函數合稱線性函數。

十、 一元二次函數

$a\neq 0$

(一) 一般式

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

(二) 標準式

$$f(x)=a(x-h)^2+k$$

其中 $(h,\, k) = \left(-\frac{b}{2a},\, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

(三) 判別式

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

(四) 根

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}\, e^{k\pi i}}{2a} \quad \text{, where } k = 0,\, 1 \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

(五) 圖形特徵

- 拋物線。
- 頂點、極值點、最值點：$(h,\, k)$。
- 對稱軸：$x = h$。
- 開口：a 為正，開口向上，反之向下。$|a|$ 愈大，開口愈小。

(六) 根數

- $a > 0$ 且 $\Delta < 0$：函數恆正，無實根，有二共軛虛根。
- $a < 0$ 且 $\Delta > 0$：函數恆負，無實根，有二共軛虛根。
- $a > 0$ 且 $\Delta = 0$：函數不負，一重實根。
- $a < 0$ 且 $\Delta = 0$：函數不正，一重實根。
- $\Delta < 0$：函數與 x 軸有二交點，二實根。

(七) 根與係數的關係

令根 α、β

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

十一、 一元三次函數

$a \neq 0$

(一) 一般式

$$f(x) = ax^3 + bx^x + cx + d$$

(二) 標準式

$$f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$$

其中 $(h,\ p,\ k)=\left(-\dfrac{b}{3a},\ c-\dfrac{b^2}{3a},\ \dfrac{2b^3-9abc}{27a^2}+d\right)$

(三) 判別式

$$\Delta=\left(\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3$$

(四) 根

1. 三解合併：

$$x=-\frac{b}{3a}+e^{\frac{2k\pi i}{3}}\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}+\sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$
$$+e^{\frac{2(3-k)\pi i}{3}}\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}}\quad \text{, where } k=0,\ 1,\ 2$$

2. 三解分開：

$$x_1=-\frac{b}{3a}+\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}+\sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$
$$+\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}}$$
$$x_2=-\frac{b}{3a}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}+\sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$
$$+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}}$$
$$x_3=-\frac{b}{3a}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}+\sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$
$$+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}}$$

3. 卡丹諾公式（Cardino’s formula）：$x^3=px+q$ 的根為：

$$x=e^{\frac{2k\pi i}{3}}\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}+e^{\frac{2(3-k)\pi i}{3}}\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}.$$

(五) 圖形特徵

- 頂點、二階旋轉對稱點：$(h,\ k)$。
- 極值：$ap<0$ 若且惟若存在二個極值點，$p=0$ 若且惟若存在一個極值點（圖形單調遞增或減），$ap>0$ 若且惟若不存在極值點（圖形嚴格遞增或減）。
- 拐點（兩側凹性不同）：$ap<0$ 則 $(h,\ k)$，否則無。
- 最值點：不存在。

(六) 根與係數的關係

令根 α、β、γ

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

十二、 平面上的直線

(一) 一般式

$$ax+by+c=0$$

(二) 截距式

若 $ab\neq 0$

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

其中 $p=-\frac{c}{a}$、$q=-\frac{c}{b}$ 分別為 x、y 截距。

(三) 斜截式

若 $b\neq 0$，即 y 為 x 的函數

$$y=f(x)=mx+q$$

其中 m 稱斜率。

(四) 點斜式

若 $b\neq 0$，即 y 為 x 的函數

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

(五) 參數式

設相異兩點 $A(x_1,\, y_1)$、$B(x_2,\, y_2)$：
直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的參數式：

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

射線 $\overrightarrow{AB}$ 的參數式：

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}, \quad t\geq 0$$

線段 $\overline{AB}$ 的參數式：

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}, \quad 0\leq t\leq 1$$

(六)　平面上兩個直線關係

平面上直線 **L**$_1$： $ax+by+c=0$、**L**$_2$： $dx+ey+f=0$：

- $$ae=bd \iff \mathbf{L}_1/\mathbf{L}_2$$

- $$ad+be=0 \iff \mathbf{L}_1 \perp \mathbf{L}_2$$

若 **L**$_1$、**L**$_2$ 存在斜率 m_1、m_2 則：

- $$m_1=m_2 \iff \mathbf{L}_1/\mathbf{L}_2$$

- $$m_1m_2=-1 \iff \mathbf{L}_1 \perp \mathbf{L}_2$$

十三、　直線與其他圖形的關係

(一)　半空間

在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，假設有 **L**： $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$。點 P 滿足 $f(P)>0$ 若且惟若 P 在 **L** 的正方向半空間；點 P 滿足 $f(P)=0$ 若且惟若 P 在 **L** 上；點 P 滿足 $f(P)<0$ 若且惟若 P 在 **L** 的負方向半空間。對於 $f=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ 者，當 $c_i>0$，正方向半空間之 x_i 大於其他自變數不變下 **L** 之 x_i，負方向半空間之 x_i 小於其他自變數不變下 **L** 之 x_i；當 $c_i<0$，正方向半空間之 x_i 小於其他自變數不變下 **L** 之 x_i，負方向半空間之 x_i 大於其他自變數不變下 **L** 之 x_i。

(二)　直線與點距離

在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，假設有 **L**： $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ ，且 f 為一次函數，且 f 的係數（即法向量）為 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ，且 f 的常數項為 c。點 P 到 **L** 的距離為：

$$d(P, \mathbf{L})=\frac{|f(P)|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.$$

(三)　直線間距離

在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，假設有 **L**$_1$： $fx_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ 、**L**$_2$： $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ ，且 f 、g 為一次函數，且 f 、g 的係數均為 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ，且 f 、g 的常數項分別為 c 、d。**L**$_1$ 到 **L**$_2$ 的距離為：

$$d(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)=\frac{|c-d|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.$$

(四)　直線到點最短向量

在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，假設有 **L**： $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ，且 f 為一次函數，且 f 的係數為 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，且 f 的常數項為 c。**L** 上距離點 P 最近的點到點 P 的向量為：

$$\mathbf{v} = \frac{f(P)}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

(五)　平行直線之間公垂向量

在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，假設有 $\mathbf{L}_1$ ： $f x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ 、$\mathbf{L}_2$ ： $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ，且 f 、g 為一次函數，且 f 、g 的係數均為 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，且 f 、g 的常數項分別為 c 、d。$\mathbf{L}_1$ 上任意點 P 到 $\mathbf{L}_2$ 上距離點 P 最近的點的向量為：

$$\mathbf{v} = \frac{c-d}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

十四、　Polynomial Interpolation (多項式插值法)

Polynomial interpolation is a method of constructing a polynomial that passes through a given set of points. Given $n+1$ data points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, the goal is to find a polynomial $p(x)$ of degree at most n such that:

$$p(x_i) = y_i \quad \text{for} \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

(一)　Newton's Polynomial (牛頓插值法)

Newton's polynomial interpolation uses the concept of divided differences to construct the polynomial in a recursive form. The Newton interpolating polynomial can be written as:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

where the coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ are obtained using divided differences. The divided differences are recursively computed as follows:

$$f[x_i] = y_i$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_k] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_k] - f[x_i, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_i}$$

The Newton polynomial can be succinctly written as:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

(二)　Lagrange Polynomial (拉格朗日插值法)

Lagrange polynomial interpolation expresses the polynomial as a linear combination of basis polynomials. The Lagrange form of the interpolating polynomial is given by:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

where $L_i(x)$ are the Lagrange basis polynomials, defined as:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Each $L_i(x)$ is a polynomial that is 1 at $x = x_i$ and 0 at all other x_j ($j \ne i$).

Barycentric Form (重心形式) of Lagrange Interpolation:

The Barycentric form is a more efficient and numerically stable way to compute the Lagrange interpolation polynomial. The Barycentric form of the interpolating polynomial is:

$$p(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i y_i}{x - x_i}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i}}$$

where w_i are the barycentric weights, defined as:

$$w_i = \frac{1}{\prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} (x_i - x_j)}$$