

電磁學

沈威宇

2024 年 12 月 5 日

目錄

第一章 電磁學	1
第一節 符號約定	1
一、 常數	1
二、 時間純量	1
三、 能量純量	1
四、 位置向量	1
五、 視為對位置與物之函數	1
(一) 物的函數 (與物體之位置無關, 且物體不改變其外之該物理量者)	1
(二) 服從疊加原理	2
(三) 其他	3
六、 電磁波	3
七、 運算子多載	4
第二節 電荷量子化 (Charge quantization)	4
第三節 馬克士威電磁場理論 (Electromagnetic theory of Maxwell)	4
一、 定義與定律	4
第四節 偶極子 (Dipole)	7
第五節 靜電學	7
一、 庫倫定律	7
二、 證明庫倫定律與高斯定律關係	7
三、 靜電感應	8
四、 接觸起電	8
五、 摩擦起電	9
第六節 法拉第弔詭 (Faraday paradox)	9

第七節 場線 (Field line)	9
一、 性質	10
二、 電場/力線 (Line of electric field) (電力線) 性質	10
三、 磁場/力線 (Line of magnetic field) 性質	10
第八節 等位 (Equipotential)	11
一、 等位	11
二、 等電位體	11
第九節 不考慮電荷加速放出電磁波的近似	11
一、 不考慮電荷加速放出電磁波的點電荷電位	11
二、 不考慮電荷加速放出電磁波的帶電粒子在均勻電場中的運動	12
第十節 應用	12
一、 發電機	12
二、 電動機/馬達 (Motor)	12
三、 電磁爐	12
第十一節 電磁波	13
一、 推論	13
二、 波參數關係	14
三、 能量密度	14
四、 拉莫爾方程式 (Larmor formula)	14
五、 愛因斯坦 (Einstein) 光量子論 (Quantum theory of light)	15
六、 電磁波頻譜 (Electromagnetic spectrum)	15
七、 應用	15

第一章 電磁學

第一節 符號約定

一、 常數

- 基本電荷： $e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{C}$
- 普朗克常數： $h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{J s} = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{m}^2 \text{kg s}^{-1}$
- 真空光速： $c = 299792458 \text{ m s}^{-1}$
- 真空磁導率/磁常數： $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2 \approx 1.25663706 \times 10^{-6} \text{H m}^{-1} = 1.25663706 \times 10^{-6} \text{kg m s}^{-2} \text{A}^{-2}$
- 真空電容率/電常數： $\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} \approx 8.854187817 \times 10^{-12} \text{F m}^{-1} = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{A}^2 \text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-3}$

二、 時間純量

- 時間： $t \text{ (s)}$

三、 能量純量

- 能量： $E \text{ (J} = \text{m}^2 \text{kg s}^{-2})$
- 功 (Work)： $W \text{ (J)}$
- 功率 (Power)： $P \text{ (J/s)}$

四、 位置向量

- 位置向量場： \mathbf{r}

五、 視為對位置與物之函數

(一) 物的函數 (與物體之位置無關，且物體不改變其外之該物理量者)

- 純量 (場)
 - 長度： $L \text{ (m)}$
 - 面積： $A \text{ (m}^2\text{)}$

- 體積： V (m^3)
- 電荷： q (C)
- 電容率 (Permittivity)： ε ($\text{F m}^{-1} = \text{A}^2 \text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-3}$)
- 相對電容率 (Relative permittivity)： $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$
- 磁導率 (Magnetic permeability)： μ ($\text{H m}^{-1} = \text{kg m s}^{-2} \text{A}^{-2}$)
- 總電荷密度 (Charge density)： ρ ($\text{C m}^{-3} = \text{A s m}^{-3}$)
- 束縛電荷密度 (Bound charge density)： ρ_b ($\text{C m}^{-3} = \text{A s m}^{-3}$)
- 自由電荷密度 (Free charge density)： ρ_f ($\text{C m}^{-3} = \text{A s m}^{-3}$)
- 能量： E ($\text{J} = \text{m}^2 \text{kg s}^{-2}$)
- 庫倫常數 (此處用 SI 制故不視其為常數)： $k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$ 。真空下， $k_e = 8.9875517873681764 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2}$ 。

• 向量 (場)

- 速度： \mathbf{v} (m/s)
- 加速度： \mathbf{a} (m/s^2)
- 電動勢 (Electromotive force, emf, EMF)： \mathcal{E} (V)
- 動量： \mathbf{p} (kg m/s)
- 電極化密度 (Polarization density)： \mathbf{P} ($\text{C m}^{-2} = \text{A s m}^{-2}$)
- 磁矩 (Magnetic moment)： \mathbf{m} (A m^2)
- 磁化強度 (Magnetization) (M 場 (M -field))： \mathbf{M} (A m^{-1})
- 電流 (Electric current)： \mathbf{I} ($\text{A} = \text{C/s}$)
- 總電流密度 (Current density)： \mathbf{j} (A m^{-2})
- 束縛電流密度 (Bound current density)： \mathbf{j}_b (A m^{-2})
- 自由電流密度 (Free current density)： \mathbf{j}_f (A m^{-2})

(二) 服從疊加原理

• 向量 (場)

- 電場 (Electric field) (\mathbf{E} 場 (\mathbf{E} -field))： \mathbf{E} ($\text{V m}^{-1} = \text{N C}^{-1} = \text{kg m s}^{-3} \text{A}^{-1}$)
- 磁通量密度 (Magnetic flux density) (\mathbf{B} 場 (\mathbf{B} -field))： \mathbf{B} ($\text{T} = \text{N A}^{-1} \text{m}^{-1} = \text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$)
- 勞倫茲力 (Lorentz force) / 電磁力 (Electromagnetic force)： \mathbf{F} ($\text{N} = \text{kg m s}^{-2}$)
- 勞倫茲力密度 (Lorentz force density)： \mathbf{f} ($\text{N m}^{-3} = \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$)
- 力矩 (Torque)： τ ($\text{N m} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$)
- 磁向量勢 (Magnetic potential)： \mathbf{A} (A m)

• 純量 (場)

- 電位能 (Electric potential energy)： U_E ($\text{J} = \text{N m} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$)
- 電位 (Electric potential)： ϕ ($\text{V} = \text{J/C} = \text{N m C}^{-1} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-3} \text{A}^{-1}$)

(三) 其他

- 向量（場）
 - 電位移（Electric displacement）： \mathbf{D} ($\text{C m}^{-2} = \text{A s m}^{-2}$)
 - 磁場強度（Magnetic field strength）（ H 場（ H -field））： \mathbf{H} (A m^{-1})
 - 電壓（Voltage）/電位差（Electric potential difference）： \mathbf{V} (V)
- 純量（場）
 - 電阻（Resistance）（對於歐姆物質而言為僅物的函數，不受場影響，對非歐姆物質則否）： R ($\Omega = \text{V/A}$)
 - 電通量（Electric flux）： Φ_E ($\text{V m} = \text{kg m}^3 \text{s}^{-3} \text{A}^{-1}$)

六、 電磁波

- 向量
 - 角波向量（Angular wave vector）： \mathbf{k} (m^{-1})
 - 相速度方向單位向量： $\hat{\mathbf{v}}$
 - 相速度（Phase velocity）： \mathbf{v} (m/s)
 - 群速度（Grovp velocity）： \mathbf{v}_g (m/s)
- 純量
 - 角頻率（Angular frequency）量值： ω (s^{-1})
 - 頻率： ν (s^{-1})
 - 波長（Wavelength）： λ (m)
 - 波數（Wave number）： k (m^{-1})
 - 折射率： n
 - 能量密度： u (J/m^3)

七、 運算子多載

令：純量 A 除以向量 $B =$ 向量 C ，表示「 $B \cdot C = A$ 」且「 $\|A\| = \|B\| \cdot \|C\|$ 」，即「 $B \cdot C = A$ 」且「 $B \parallel C$ 」。

第二節 電荷量子化 (Charge quantization)

夸克除外，所有物質所帶的電荷皆為基本電荷 e 的整數倍。

第三節 馬克士威電磁場理論 (Electromagnetic theory of Maxwell)

一、 定義與定律

- 電荷 (Charge)：分為正電荷與負電荷。
- 電荷守恆定律 (Law of conservation of charge)：一個系統如與外界無電荷交換，則該系統的總電荷維持定值
- 疊加原理 (Principle of superposition)：對於所有線性系統，兩個或多個刺激引起的淨響應是由每個刺激單獨引起的響應總和。電場、 B 場、力、力密度、力矩、電位能（因 $F = qE$ 是保守力故可定義之）、電位、磁向量勢對位置均符合疊加原理。
- 右手開掌定則：右手張開，拇指指向電流方向，四指指向磁場方向，則掌心面向受力方向。
- 勞倫茲力定律（電場與 B 場以之定義）：

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- 電位移定義：

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- 磁矩定義：

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

- 磁化強度定義：

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}$$

- H 場定義：

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} - \mathbf{M}$$

- 總電荷密度定義：

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

- 束縛電荷密度定義：

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

- 自由電荷密度定義：

$$\rho_f = \rho - \rho_b$$

- 總電流密度定義：

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$$

- 束縛電流密度定義：

$$\mathbf{j}_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}$$

- 自由電流密度定義：

$$\mathbf{j}_f = \mathbf{j} - \mathbf{j}_b$$

- 勞倫茲力密度定義：

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

- 馬克士威第一方程式-高斯定律微分形式：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

- 馬克士威第二方程式-高斯磁定律（無磁單極）微分形式：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- 磁偶極子磁場公式：

$$\mathbf{B} = \mu \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{4\pi \|\mathbf{r}\|^3}$$

- 1831 年法拉第發現電磁感應（Electromagnetic induction）現象，變動磁場產生的電場導致電荷移動產生的電流稱感應電流（Induced current）。

- 冷次定律（Lenz's law）：由於磁通量的改變而產生的感應電流，其所產生的磁場方向為磁通量改變的負方向。

- 馬克士威第三方程式-法拉第電磁感應定律（變動磁場產生電場/動磁生電/電磁感應）微分形式：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- 1820 年厄斯特（Ørsted）發現載流導線的電流對鄰近的磁針會產生作用力，使磁針偏轉，從而得知電流會產生磁場效應，發現了電學與磁學的關聯。

- 安培（Ampère）右手定則（Right-hand rule）：用右手握住長直載流導線，大拇指的指向為電流的方向，則其餘四指彎曲所指的方向為磁場方向，即磁力線方向。今有環形載流導線或載流螺線管，其中右手四指彎曲所指的方向為其電流方向，則大拇指的指向磁場方向，即磁力線方向。

- 馬克士威第四方程式-馬克士威-安培定律（變動電場產生磁場/動電生磁/電流磁效應）微分形式：

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

即：

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = q \mathbf{v} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- 封閉表面 S 上的電通量 Φ_E ， dS 是 S 上的微小面積，其方向定義為表面法線朝外， S 所圍之淨電荷量 q ：

$$\Phi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon}$$

- 電位能：位置 \mathbf{r}_1 相對於參考點 \mathbf{r}_{ref} 的電位能 U_E ：

$$U_E = -W_{\mathbf{r}_{ref} \rightarrow \mathbf{r}_1} = - \int_{\mathbf{r}_{ref}}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

- 電動勢：

$$\mathcal{E} = \int \frac{\delta W}{q} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

- 電位：

$$\phi = \frac{U_E}{q}$$

- 電壓：位置 \mathbf{r} 相對於 \mathbf{r}_{ref} 的電壓 V 服從：

$$V = \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}_{ref}) = \text{以 } \mathbf{r}_{ref} \text{ 為零位面時 } \mathbf{r} \text{ 的電位}$$

- 磁向量勢：任何 \mathbf{A} 服從：

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

庫倫規範 (Coulomb gauge)：常用的磁向量勢規範，但不是所有磁向量勢定義都需符合

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

- 電場與電位 ϕ 和服從庫倫規範 \mathbf{A} 的磁向量勢的關係：

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

- 電流：指通過一截面的電荷的平均定向移動，方向為正電荷移動的方向，電流的大小，稱電流強度 (Current intensity)，指單位時間內通過某一截面的電荷淨轉移量，每秒通過 1 庫倫的電荷量稱為 1 安培。

$$\mathbf{I} = \frac{q}{t}$$

- 電阻：電阻不改變者，稱歐姆物質 (Ohmic substances)；電阻隨電壓或電流改變者稱非歐姆物質。

$$R = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{I}}{\|\mathbf{I}\|^2}$$

- 焦耳加熱/歐姆加熱/電阻加熱/電流熱效應，是指電流通過物體產生熱量的過程。焦耳-冷次定律指出，電流 \mathbf{I} 通過電阻 R 的物體產生的熱功率 P 服從：

$$P = \|\mathbf{I}\|^2 R$$

第四節 偶極子 (Dipole)

1. 電偶極子：可以定義符合 $\tau = \text{電偶極矩} \times \mathbf{E}$ 的電偶極矩，自負極指向正極。例如一對大小相等、符號相反的電荷。
2. 磁偶極子：擁有磁偶極矩，自 S 極指向 N 極。例如長條形磁鐵、載流螺線管。

第五節 靜電學

一、庫倫定律

庫倫定律向量形式：對於兩分別位於 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 且相對靜止的點電荷 q_1 、 q_2 ，無外加電場或磁場，電容率均勻，靜電力（庫倫力） \mathbf{F} 服從：

$$\mathbf{F} = k_e \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}$$

二、證明庫倫定律與高斯定律關係

庫倫定律電場形式：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|^3}$$

高斯定律微分形式：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}$$

1. *Statement.* 假設已知電場疊加原理，假設符合庫倫定律適用條件，則高斯定律微分形式為庫倫定律電場形式的必要條件。

Proof. 庫倫定律闡明，一個位於位置 \mathbf{r}_1 靜點電荷 q 的電場對位置 \mathbf{r} 函數為：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|^3}$$

計算位於 \mathbf{r}_1 的無窮小電荷元素所產生的位於 \mathbf{r} 的電場，積分體積曲域 \mathcal{V} 內所有的無窮小電荷元素，可以得到電荷分佈所產生的電場：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}_1) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|^3} d^3\mathbf{r}_1$$

取方程式兩邊對於 \mathbf{r} 的散度：

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}_1) \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|^3} d^3\mathbf{r}_1$$

注意到：

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|^3} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$$

其中 $\delta(\mathbf{r})$ 為狄拉克 δ 函數。

代入得：

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) d^3\mathbf{r}_1$$

化簡得：

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon}$$

□

2. *Statement.* 假設已知電場疊加原理，假設符合庫倫定律適用條件，假設點電荷的電場為球形，則高斯定律微分形式為庫倫定律電場形式的充分條件。

Proof. 高斯定律闡明：

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

定義球座標系，徑向距離 r 極角 θ 與方位角 ϕ 。在球座標系中，對於只依賴 r 的向量場，散度算子服從：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{dr^2 E}{dr}$$

在球坐標系中，體積元素（即微小體積）表示為：

$$dV = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

故對於點電荷 q ，電荷密度 ρ 可以表示為：

$$\rho = \frac{dq}{dV} = q \cdot \frac{\delta(\mathbf{r})}{4\pi r^2}$$

其中 $\delta(\mathbf{r})$ 為狄拉克 δ 函數。

代入得：

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr^2 E}{dr} = q \cdot \frac{\delta(\mathbf{r})}{4\pi r^2 \varepsilon}$$

化簡得：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|^3}$$

□

三、 靜電感應

當一帶電體靠近電中性的物體時，該物體的近端（靠近帶電體的區域）感應出異性電，遠端感應出同性電，此種暫時性的電荷分離現象，稱為靜電感應。

當帶電體分離時，物體又會恢復成原來電中性的狀態。

適用於所有物體（導體、絕緣體皆可）。

若在靜電感應時將電中性體的接地，使其帶正電，稱感應起電。

四、 接觸起電

以帶電體與導體接觸，藉自由電子的轉移使物體帶電，稱為接觸起電。

將一帶負電物體與電中性的導體接觸，則帶電體的自由電子會流向導體；再將帶電體遠離，則留下的導體變為帶負電，反之亦同。

接觸起電的導體最後所產生之電性，與帶電體的電性相同。

五、 摩擦起電

摩擦起電效應是通過摩擦的方式使得物體帶上電荷，或使物體之間的價電子轉移。摩擦起電後兩個物體必帶等量異性電荷。

摩擦起電的第一步即是將兩種不同的物體相互摩擦，使它們最外層的電子得到足夠的能量，擺脫原子核的束縛，在兩個物體之間轉移。

價電子轉移的原因是不同原子核對電子的吸引力會有差別。

適用於所有物體（導體、絕緣體皆可）。

例如：由於玻璃棒對電子的束縛能力比絲綢弱，所以絲綢摩擦過的玻璃棒帶正電荷，毛皮摩擦過的橡膠棒則帶負電荷。

第六節 法拉第弔詭（Faraday paradox）

1. 原因：金屬中的自由電子會受勞倫茲力影響使金屬不同位置之間產生電位差。
2. 實驗裝置：假設我們有一個導體圓盤放在垂直於圓盤平面的均勻磁場中。當圓盤旋轉時，如果我們在圓盤的中心和邊緣之間放置一個導線並測量兩端的電壓，根據法拉第定律，我們應該測量到感應電動勢。但如果我們將整個裝置（磁場、圓盤和導線）一起旋轉，仍然可以測到感應電動勢。
3. 弗萊明右手法則（Fleming's right-hand rule）：右手拇指、食指、中指垂直，一導體在右手食指所指方向的磁場中向右手拇指所指方向移動，則產生右手中指方向之電流。

第七節 場線（Field line）

1851 年法拉第提出。

一、 性質

1. 場線在該點的切線方向表示向量場在該點的方向。
2. 場線在該點的疏密程度正比於向量場在該點的模長。
3. 場線除了在源頭點與匯聚點外不會相交，即除了源頭點與匯聚點外散度為零。
4. 場線若非封閉，則起點在一個散度為正的點或無線遠處，終點在一個散度為負的點或無線遠處，其餘點散度為零。

二、 電場/力線 (Line of electric field) (電力線) 性質

電荷密度為正的點，散度大於零，故為場線源頭；電荷密度為負的點，散度小於零，故為場線匯聚點；電荷密度為零的點，散度等於零，故場線不可在該點相交。

三、 磁場/力線 (Line of magnetic field) 性質

散度為零，即場線不可相交，即場線為封閉曲線。

第八節 等位 (Equipotential)

一、 等位

1. 又譯等勢，又稱 Isopotential。指空間中的一個區域，其中每個點都處於相同的電位（或有時用於其他位 (Potential)）。 n 維空間中對純量場定義的等位通常是 $\leq (n-1)$ 維空間。如等位面 (Surface)、等位線 (Line)。
2. n 維空間中，對電場定義 $\leq (n-1)$ 維的等位空間，其必與電場垂直。

二、 等電位體

今有一導體 (Conductor) 是一個力學孤立系統，其表面無空洞但裡面可有空洞，當其處於靜電平衡（電荷不在移動或交換）時，整個導體的電位相同，因此：

1. 其內的電場為零。
2. 其表面為等位面。
3. 其淨電荷分布於其表面。
4. 其表面的電場垂直於其表面。

若該導體為一半徑 R 的圓球，淨電荷 Q ，以球心為原點，則：

5. 圓球外（含表面）位置 r 處的因其而產生的電場和電位與一位於原點的點電荷 Q 會使該點產生的電場和電位相同，即 $\mathbf{E} = k_e \frac{Q\mathbf{r}}{r^3}$ 、 $\phi = k_e \frac{Q}{r}$ ，其中表面因其而產生的電場之量值為 $k_e \frac{Q}{R^2}$ 、電位為 $k_e \frac{Q}{R}$ 。
6. 圓球內（不含表面）之電場為零，電位與表面同為 $k_e \frac{Q}{R}$ 。

靜電屏蔽 (Electrostatic shielding)：若該等電位導體中有空洞，空洞內不受外加電場影響，始終電場為零，故稱之。可用於保護實驗者等。

第九節 不考慮電荷加速放出電磁波的近似

一、 不考慮電荷加速放出電磁波的點電荷電位

今有三點電荷 q_1 、 q_2 、 q_3 ，呈三角形排列， q_1 、 q_2 距離 r_3 ， q_2 、 q_3 距離 r_1 ， q_1 、 q_3 距離 r_2 ，取無線遠處為零位面，電位能分別為 U_1 、 U_2 、 U_3 ，電位分別為 ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 。

$$U_1 = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_3} + \frac{q_1 q_3}{r_2} \right)$$
$$\phi_1 = k_e \left(\frac{q_2}{r_3} + \frac{q_3}{r_2} \right)$$

二、 不考慮電荷加速放出電磁波的帶電粒子在均勻電場中的運動

上下兩塊無限大且分別均勻帶正、負電的平板，其中可得一均勻向下的電場 E 。其中一質量 m 的點電荷 q 以平行於平板初速度 v_0 運動，假設其僅受兩平板給的電場施的勞倫茲力，則其在撞擊到平板前的運動參數式為：

$$(v_0 t, \frac{qE}{2m} t^2)$$

第十節 應用

一、 發電機

發電機的主要功能是將機械能轉換成電能。其基本結構包括：

- 定子 (Stator)：靜止的部分，內部有磁鐵或一組固定的繞組（線圈）形成的電磁鐵作為磁場系統，產生固定的磁場。
- 轉子 (Rotor)：旋轉的部分，內部有繞組，受機械能轉動，使受定子之磁場產生感應電流。
- 換向器 (Commutator)：在直流發電機中使用的裝置，通常由銅片和絕緣材料構成，能夠使轉子繞組在轉動時與輸出電流至外部之導線接觸方向不斷反轉。交流發電機則不用。
- 刷子 (Brushes)：與換向器接觸的碳或銅刷子，幫助電流傳輸。交流發電機則不用。

二、 電動機/馬達 (Motor)

電動機的主要功能是將電能轉換成機械能。其基本結構包括：

- 定子 (Stator)：靜止的部分，內部有磁鐵或電磁鐵，產生固定的磁場。
- 轉子 (Rotor)：旋轉的部分，內部有繞組，從外部輸入電流予之，使受定子的磁場的勞倫茲力而轉動。
- 換向器 (Commutator)：在直流電動機中使用的裝置，能夠使轉子繞組在轉動時與外部輸入電流之導線接觸方向不斷反轉。交流電動機則不用。
- 刷子 (Brushes)：與換向器接觸的碳或銅刷子，幫助電流傳輸。交流電動機則不用。

三、 電磁爐

電磁爐的主要功能是將電能轉換成熱能，加熱金屬鍋具。其基本結構包括：

- 電磁線圈 (Induction Coil)：電磁爐的核心部分，通常位於爐面下方，由銅線繞製而成。當交流電流通過這些線圈時，會產生變化的磁場。
- 爐面 (Cooktop)：通常由玻璃陶瓷製成，能夠承受高溫並且易於清潔。爐面上有一個或多個加熱區域，覆蓋在電磁線圈上方。

- 控制面板 (Control Panel)：用於設定加熱功率、時間等，電磁爐會根據設定調節電磁線圈的電流。
- 冷卻系統 (Cooling System)：包括風扇和散熱片，用於散熱以防止電磁線圈過熱。這些部件幫助保持電磁爐的工作溫度在安全範圍內。
- 溫度感測器 (Temperature Sensor)：用於監測爐面的溫度或鍋具的溫度，並將信息傳送給控制系統，以調整加熱功率。
- 安全裝置 (Safety Devices)：包括過熱保護、過電流保護、故障警報等，旨在確保使用過程中的安全性。
- 金屬鍋具：金屬材料在電磁線圈形成變動磁場中產生渦電流，渦電流在鍋具內發生電阻加熱。

第十一節 電磁波

馬克士威根據馬克士威方程式預測電磁波的存在及其速度約與實驗測得之光速相同，故推測光是電磁波。

1887 年赫茲 (Hertz) 藉由實驗證實了電磁波的存在與其速度約為光速。

一、推論

令電荷對體積的導數為零。

$$\begin{aligned}
 & \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\
 &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\
 &= \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\
 & \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \\
 &= \nabla \times \left(\mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\
 &= \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) \\
 &= \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\
 &= -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

對於任意三維向量場 \mathbf{V} ：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$$

又：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

故得電磁波波動方程式：

$$\left(\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0 \quad \left(\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B} = 0$$

波速為 $\sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}}$ 。

二、 波參數關係

$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{v}}$$

$$k = \|\mathbf{k}\|$$

$$\mathbf{v} = \nu\lambda\hat{\mathbf{v}} = \frac{\omega}{\mathbf{k}}$$

$$n = \frac{c}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_g &= \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} \\ &= \frac{c}{n + \omega \cdot \frac{\partial n}{\partial\omega}} \\ &= \mathbf{v} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{\partial n}{\partial\lambda}\right) \\ &= \mathbf{v} - \lambda \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\lambda} \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{k} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{k}} \end{aligned}$$

三、 能量密度

$$\|\mathbf{B}\|\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{E}\|$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{v} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|^2}$$

$$u = \frac{1}{2\mu}\mathbf{B}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}^2$$

四、 拉莫爾方程式 (Larmor formula)

非相對論性點電荷 q 在加速度 \mathbf{a} 的狀態下釋放電磁波的總功率 P 為：

$$P = \frac{q^2 \mathbf{a}^2}{6\pi\varepsilon c^3}$$

五、 愛因斯坦（Einstein）光量子論（Quantum theory of light）

$$\mathbf{p} = \frac{h}{\lambda} \hat{\mathbf{v}}$$

$$E = hf = \frac{h\|\mathbf{v}\|}{\lambda} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{p}\|$$

六、 電磁波頻譜（Electromagnetic spectrum）

令光速為 c 。

名稱	頻率範圍	波長範圍	能量範圍
伽馬（ γ ）射線	300 EHz - 30 EHz	1 pm - 10 pm	1.24 MeV - 124 keV
硬 X 射線 (HX)	30 EHz - 3 EHz	10 pm - 100 pm	124 keV - 12.4 keV
軟 X 射線 (SX)	3 EHz - 30 PHz	100 pm - 10 nm	12.4 keV - 124 eV
極端紫外線 (EUV)	30 PHz - 3 PHz	10 nm - 100 nm	124 eV - 12.4 eV
近紫外線 (NUV)	3 PHz - 790 THz	100 nm - 380 nm	12.4 eV - 3.26 eV
可見光 (紫色, Violet)	790 THz - 670 THz	380 nm - 450 nm	3.26 eV - 2.75 eV
可見光 (藍色, Blue)	670 THz - 620 THz	450 nm - 485 nm	2.75 eV - 2.56 eV
可見光 (青色, Cyan)	620 THz - 600 THz	485 nm - 500 nm	2.56 eV - 2.48 eV
可見光 (綠色, Green)	600 THz - 530 THz	500 nm - 565 nm	2.48 eV - 2.19 eV
可見光 (黃色, Yellow)	530 THz - 510 THz	565 nm - 590 nm	2.19 eV - 2.1 eV
可見光 (橘色, Orange)	510 THz - 480 THz	590 nm - 625 nm	2.1 eV - 1.98 eV
可見光 (紅色, Red)	480 THz - 400 THz	625 nm - 750 nm	1.98 eV - 1.65 eV
近紅外線 (NIR)	400 THz - 30 THz	750 nm - 10 μm	1.65 eV - 124 meV
中紅外線 (MIR)	30 THz - 3 THz	10 μm - 100 μm	124 meV - 12.4 meV
遠紅外線 (FIR)	3 THz - 300 GHz	100 μm - 1 mm	12.4 meV - 1.24 meV
極高頻 (EHF) 微波	300 GHz - 30 GHz	1 mm - 10 mm	1.24 meV - 124 μeV
超高頻 (SHF) 微波	30 GHz - 3 GHz	10 mm - 100 mm	124 μeV - 12.4 μeV
特高頻 (UHF) 微波	3 GHz - 300 MHz	100 mm - 1 m	12.4 μeV - 1.24 μeV
甚高頻 (VHF) 無線電波	300 MHz - 30 MHz	1 m - 10 m	1.24 μeV - 124 neV
高頻 (HF) 無線電波	30 MHz - 3 MHz	10 m - 100 m	124 neV - 12.4 neV
中頻 (MF) 無線電波	3 MHz - 300 kHz	100 m - 1 km	12.4 neV - 1.24 neV
低頻 (LF) 無線電波	300 kHz - 30 kHz	1 km - 10 km	1.24 neV - 124 peV
甚低頻 (VLF) 無線電波	30 kHz - 3 kHz	10 km - 100 km	124 peV - 12.4 peV
特低頻 (ULF) 無線電波	3 kHz - 300 Hz	100 km - 1 Mm	12.4 peV - 1.24 peV
超低頻 (SLF) 無線電波	300 Hz - 30 Hz	1 Mm - 10 Mm	1.24 peV - 124 feV
極低頻 (ELF) 無線電波	30 Hz - 3 Hz	10 Mm - 100 Mm	124 feV - 12.4 feV

七、 應用

- 無線電波：無線通訊。應用振幅調變、頻率調變、相位調變（Phase modulation）等技術，狹窄頻帶的無線電波即可傳遞資訊。
- 微波：Wi-Fi、微波爐。

- 紅外線：人體熱輻射大致處於紅外線，可用於熱感攝影。物質主要吸收的輻射熱為紅外線，以旋轉或振動等方式吸收。
- 可見光：人類眼睛可見的頻帶。顏色依視頻率而定。
- 紫外線：可協助皮膚製造維生素 D，但曝曬過量易曬傷與誘發皮膚癌。可殺死微生物。
- X 射線：穿透力強，身體組織對其吸收率不同，可用於拍攝身體內部結構的影響。X 射線波長與一般晶格長度相近，可用繞射現象研究晶格結構。
- 伽瑪射線：通常是核反應放出，其能量足以殺死細胞，可用於腫瘤治療。