三角比與三角函數

Author

2024 年 12 月 27 日

目錄

第一章　三角比與三角函數

第一節　弧度與角度

1. 弧度（**radian**）：又稱弳、弳度。指圓周上一段弧長與其對應半徑的比值。物理上無因次。單位同其名或通常省略。

2. 角度（**degree**）：一個完整的圓被平分為 $360°$。物理上無因次。

$$\frac{1\text{弳}}{1°} = \frac{\pi}{180} \approx 57.3 \approx \frac{1}{0.0175}$$

第二節　廣義角

指將角從 $[0, 2\pi)$ 的普通角擴展到任意實數。
同界角：α、β 為同界角 $\iff \dfrac{\alpha-\beta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$

第三節　極坐標系（**Polar Coordinate System**）

一種二維坐標系，用於表示平面上的點，其位置由一對數值（距離 r 和角度 θ）來確定。與直角坐標系（**Cartesian Coordinate System**）不同。

1. 距離 r：從極點（通常是坐標原點 O）到點 P 的距離。$r \geq 0$。

2. 角度 θ：從極軸（通常是水平的正 x 軸）逆時針旋轉到點 P 所在的射線的角度。角度可以用弧度或度數表示。

3. 點 P 的極坐標表示為 $[r, \theta]$。

4. 從極坐標到直角坐標的轉換：

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

5. 從直角坐標到極坐標的轉換：

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

第四節　三角測量

1. 仰角：仰視目標時，視線與水平線的夾角。
2. 俯角：俯視目標時，視線與水平線的夾角。
3. 方位角（地理）：以正北為 **0**°，順時針為正。
4. 象限角（地理）：以東南西北某一方位（通常為正北或正南）為基準，加上向相鄰方位轉向的度數與該相鄰方位，如北 **35**° 西代表方位角 **325**°、南 **30**° 西代表方位角 **210**°。

第五節　鋭角三角比（**Trigonometric Ratios**）

1. 正弦（**Sine**，sin）：正弦值是對應角的對邊與斜邊之比，即：

$$\sin\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$$

2. 餘弦（**Cosine**，cos）：餘弦值是對應角的鄰邊與斜邊之比，即：

$$\cos\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$$

3. 正切（**Tangent**，tan）：正切值是對應角的對邊與鄰邊之比，即：

$$\tan\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$$

4. 餘切（**Cotangent**，cot）：

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

5. 正割（**Secant**，sec）：

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

6. 餘割（**Cosecant**，csc）：

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

第六節　廣義角三角比/三角函數幾何定義

在單位圓中，令角度的測量方式是從正 x 軸開始，逆時針方向為正角，順時針方向為負角，且角度數值可以是任何實數。任意角度的三角函數值可以表示為：

1. 正弦（**Sine**，sin）：角 θ 的正弦值是單位圓上對應點的 y 坐標，即：

$$\sin\theta = y$$

   。為奇函數，定義域 $\mathbb{R}$，值域 $[-1, 1]$，週期 2π，振幅 **1**，線對稱於 $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$，點對稱於 $((n\pi,\ n \in \mathbb{Z}), 0)$。

2. 餘弦（**Cosine**，cos）：角 θ 的餘弦值是單位圓上對應點的 x 坐標，即：

$$\cos\theta = x$$

   。為偶函數，定義域 $\mathbb{R}$，值域 $[-1, 1]$，週期 2π，振幅 **1**，線對稱於 $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$，點對稱於 $\left(\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right), 0\right)$，$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$。

3. 正切（**Tangent**，tan）：角 θ 的正切值是正弦值與餘弦值的比，即：

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

   。為奇函數，定義域 $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \pi \nmid \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$，值域 $\mathbb{R}$，週期 π，點對稱於 $\left(\left(\frac{n}{2}\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right), 0\right)$。

4. 餘切（**Cotangent**，cot）：

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

   。為奇函數，定義域 $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \pi \nmid x\}$，值域 $\mathbb{R}$，週期 π，點對稱於 $\left(\left(\frac{n}{2}\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right), 0\right)$，$\cot(x) = -\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$。

5. 正割（**Secant**，sec）：

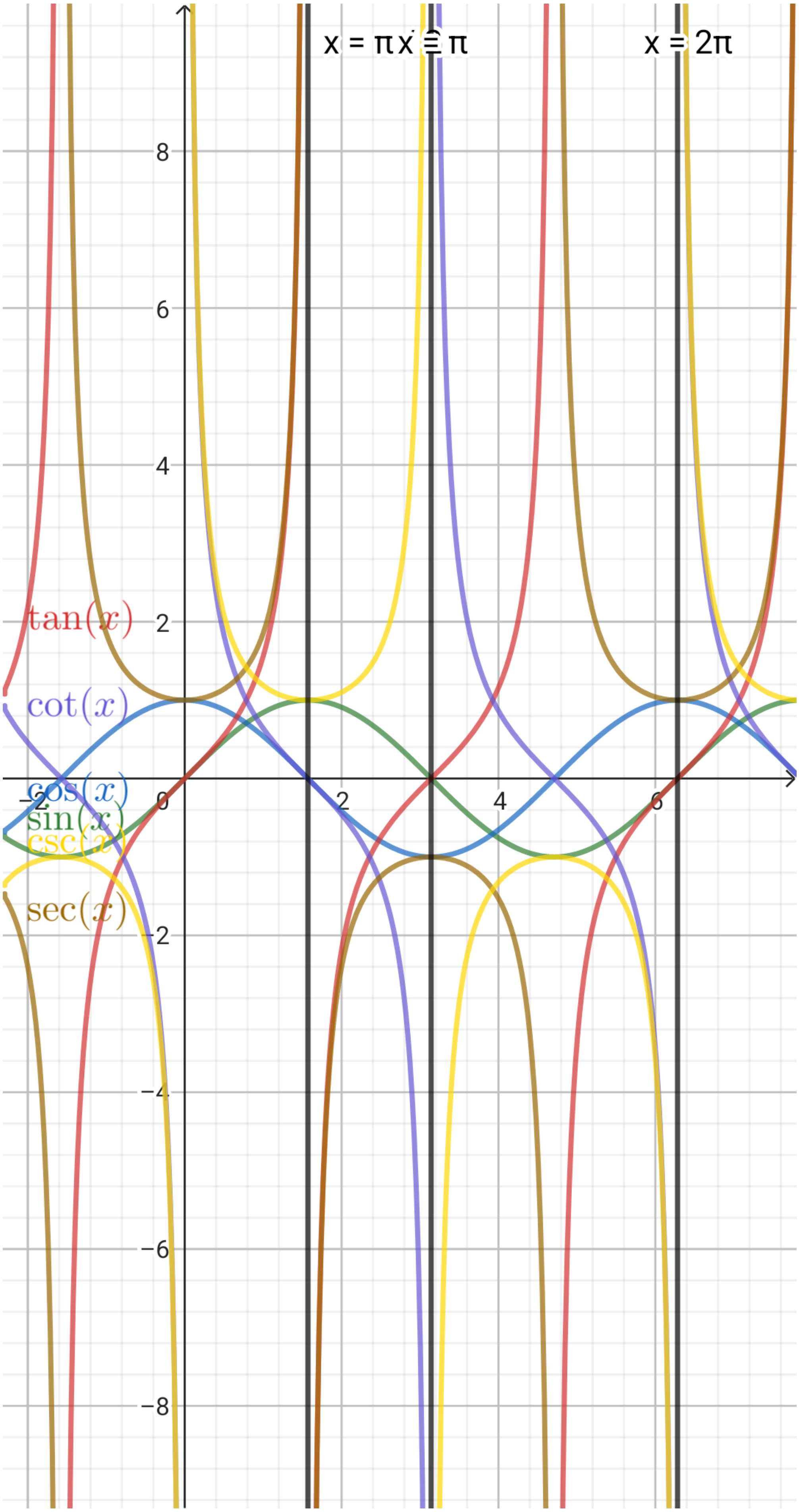
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

   。為偶函數，定義域 $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \pi \nmid \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$，值域 $\{y \in \mathbb{R} \,|\, -1 \le y \vee y \le 1\}$，週期 π，線對稱於 $((n\pi,\ n \in \mathbb{Z}), 0)$，點對稱於 $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$。

6. 餘割（**Cosecant**，csc）：

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

   。為奇函數，定義域 $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \pi \nmid x\}$，值域 $\{y \in \mathbb{R} \,|\, -1 \le y \vee y \le 1\}$，週期 π，線對稱於 $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$，點對稱於 $((n\pi,\ n \in \mathbb{Z}), 0)$，$\csc(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$。

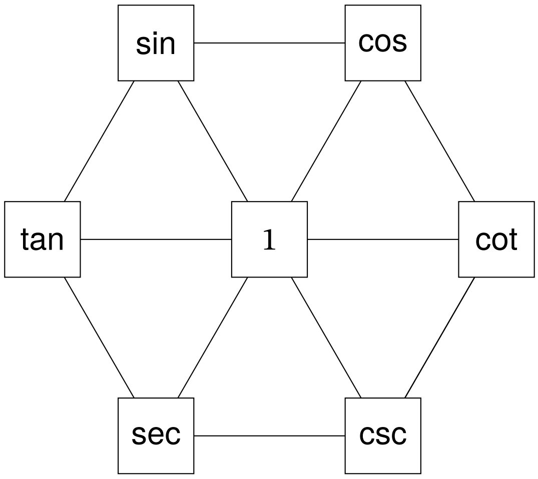


三角函數

一、 特殊角三角函數

Radian	sin	cos	tan
0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$
π	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$\frac{2\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$\frac{4\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$

二、 三角函數基本關係



1. 名稱：左側三者為正；右側三者為餘；上面二者為弦；中間二者為切；下面二者為割。

2. 餘角關係：以鉛直軸為對稱軸，位於線對稱位置的三角比為餘角關系，即對於銳角 θ，左 (θ) = 右 $(\frac{pi}{2} - \theta)$。

3. 倒數關係：三條通過中心點的連線為倒數關係，其兩端之三角比互為倒數，相乘為 **1**。

4. 商數關係：六邊形周上，連續三個頂點形成的連線，其兩端之三角比相乘等於中間之三角比。

5. 平方關係：圖中有三個倒正三角形，其在上方兩頂點之二者之平方和等於在下方頂點者。

三、　奇變偶不變，正負看象限

今有函數 f，已知其為 sin、cos、tan、sec、csc、cot 之一，且已知 $f(\theta)$。欲求 $f(\phi)$，其中 $\phi = \pm\theta \pm n\frac{\pi}{2}$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。

方法：奇變偶不變，正負看象限。

上句：奇偶指 n 之奇偶，變指倒數，即：若 n 為奇數則令 $g(\theta) = \frac{1}{f(\theta)}$，否則令 $g(\theta) = f(\theta)$，則 $|f(\phi)| = |g(\theta)|$。

下句：象限指假設 $[r, \theta]$ 在第一象限時，$[r, \phi]$ 之象限。令該象限中任意角度為 ω。令 $k = \frac{f(\phi)}{g(\theta)}$。則 $k = \frac{f(\omega)}{|f((\omega)|}$，即：

象限 / f	一	二	三	四
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
csc	+	+	-	-
sec	+	-	-	+
cot	+	-	+	-

第七節　三角函數級數定義

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

第八節　三角函數微積分

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\ln\|\sec x\| + C$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$	$\ln\|\csc x - \cot x\| + C$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\ln\|\sec x + \tan x\| + C$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\ln\|\sin x\| + C$

第九節　反三角函數與相關函數

一、　反三角函數

名稱	常用符號	定義	定義域	值域
反正弦	$y = \arcsin x$	$x = \sin y$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
反餘弦	$y = \arccos x$	$x = \cos y$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
反正切	$y = \arctan x$	$x = \tan y$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
反餘切	$y = \operatorname{arccot} x$	$x = \cot y$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
反正割	$y = \operatorname{arcsec} x$	$x = \sec y$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$
反餘割	$y = \operatorname{arccsc} x$	$x = \csc y$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

Inverse Trigonometric Functions

二、　反正切二函數

atan2(y, x) 在 $x > 0$ 時返還 $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 中的解，在 $x < 0$、$y \geq 0$ 時返還 $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 中的解，在 $x < 0$、$y < 0$ 時返還 $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ 在 $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 中的解，在 $x = 0$、$y \neq 0$ 時返還 $\frac{y}{|y|}\frac{\pi}{2}$，在 $x = y = 0$ 時返還值未定義。

三、　輻角（**Argument**）

此處輻角用 $\arg(z)$ 代表 z 的輻角，用 $\operatorname{Arg}(z)$ 代表 z 的輻角主值，一些文獻反之。

(一)　輻角

設有非零複數 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，記作 $z = x + yi$，其中的 x 和 y 為實數，那麼複數 z 的輻角 $\arg(z) = \varphi$ 指的是使下列等式：

$$z = x + yi = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

成立的任何實數 φ。

四、 輻角主值

設有非零複數 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，記作 $z = x + yi$，其中的 x 和 y 為實數，那麼複數 z 的輻角主值 $\operatorname{Arg}(z)$ 指的是：

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} x + yi = \operatorname{atan2}(y,\ x)$$

$$\arg(z) = \{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi \ \mid\ k \in \mathbb{Z}\}$$