排列組合

沈威宇

2025 年 2 月 4 日

目錄

第一節　排列組合（Permutation and Combination）

一、　計數方法

- 窮舉法：將所有可能一一列舉出而計算數目的方法。
- 樹狀圖：畫出樹狀圖列舉而計算數目的方法。

二、　階乘（Factorial）

$$n! = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} i, & \text{if } n \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{if } n = 0. \end{cases}$$

三、　伽瑪函數（Gamma function）

階乘函數在正實部複數域上的擴展。

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad \Re(z) > 0$$

其中 $\Re(z)$ 指 z 之實部。
特別地，對於正實數 z：

$$\Gamma(z) = (z-1)!$$

四、　排列

- 排列：從 n 相異物中取 m 個排成一直列（$0 \le m \le n$），正逆序視為二，其排列總數 $P^n_m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$。
- 不盡相異物排列：設有 n 物，共有 k 種，第 i 種有 m_i 個。全取排成一直列，正逆序視為二，其排列總數為 $\dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{n} m_i!}$。
- 重複排列：從 n 類相異物中，任取 m 個排成一直列，正逆序視為二，其中每類物品的個數均不小於 m 且可重複選取，其排列總數為 n^m。

五、　錯排

錯排：n 相異物全取作直線排列，其中 m 物（$m \le n$）依次被限制不能排列於相異單一指定位置之排列，其方法數稱 D^n_m。當 $m = n$，錯排方法數稱 D_n。

(一)　D_n

- 遞迴式：

$$\begin{cases} D_0 &= 1 \\ D_1 &= 0 \\ D_n &= (n-1)\cdot(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad (\text{當 } n > 2) \end{cases}$$

- 一般式：

$$D_n = n! \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (C_i^n \cdot (n-i)! \cdot (-1)^i$$

- 錯排機率

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e}$$

(二) D_m^n

$$D_m^n = \sum_{i=0}^{m} \left((-1)^i \cdot C_i^m \cdot (n-i)!\right)$$

六、 環狀排列

環狀排列：n 物全取排列成環狀，不同方法之判定僅考慮相對位置，不考慮絕對位置，惟翻轉（順時針 $\rightleftharpoons$ 逆時針）視為二種。

(一) 全相異物環狀排列

$$\text{全相異物全取作環狀排列方法數} = \frac{n!}{m \cdot (n-m)!}$$

(二) 不盡相異物環狀排列

n 不盡相異物，全取作環狀排列，求其方法數。

- **法一：**
  子循環：一個長度 n 的給定直線排列，若其前 $\frac{n}{m}$ 物重複 m 次等同於原排列，且不存在 > 1 的 k 使原排列的前 $\frac{n}{m \cdot k}$ 物重複 k 次等同於原排列的前 $\frac{n}{m}$ 物，則稱原排列的前 $\frac{n}{m}$ 物為一個長度 $\frac{n}{m}$ 的子循環，稱原排列之子循環長度為 $\frac{n}{m}$、子循環數目為 m。
  令該 n 不盡相異物的所有可能直線排列中，有 d_i 個之子循環長度為 ℓ_i，且 $\sum_{i=1}^{m} d_i =$ 該 n 不盡相異物直線排列方法數，則：

$$\text{所求} = \sum_{i=1}^{m} \frac{d_i}{\ell_i}$$

- **法二：**
  令該 n 不盡相異物可分為 k 相異類，第 i 類（$1 \leq i \leq k$）有 m_i 件相同物。最大公因數 $\gcd(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k) = g$。令所求為 R。
  - 最大公因數 g 為 1：

$$R = \frac{(n-1)!}{\prod_{i=1}^{k} (m_i!)}$$

- 最大公因數 g 為一質數 p：

$$R=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}\left(m_i!\right)}-\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{m_i}{p}!\right)}\right)+\frac{\left(\frac{n}{p}-1\right)!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{m_i}{p}!\right)}$$

- 最大公因數 g 為任一正整數：

令 g之所有相異質因數由小到大依序為$p_1,p_2,p_3,\dots,p_q$

$$R=\sum_{j=0}^{q}\left((-1)^j\cdot\sum_{|Y|=j}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{m_i}{\prod_{y\in Y}y}!\right)}\right)$$

，其中$Y\subseteq\{p_1,p_2,p_3,\dots,p_q\}$

，定義$\displaystyle\prod_{y\in\varnothing}y=1$

七、　組合數

組合數記作 C_m^n 或 $\binom{n}{m}$。

(一)　n 非負整數域定義

從 n 相異物中每次取 m 個為一組（$0\le m\le n,\ m,\ n\in\mathbb{N}_0$）之組合數，即：

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!},\quad 0\le m\le n,\ m,\ n\in\mathbb{N}_0.$$

(二)　n 非負實數域定義

$$\binom{n}{m}=\frac{\prod_{i=0}^{m-1}(n-i)}{m!},\quad 0\le m\le n,\ m\in\mathbb{N}_0,\ n\in\mathbb{R}_{\ge 0}.$$

(三)　n 實數域定義

$$\binom{n}{m}=\begin{cases}\dfrac{\prod_{i=0}^{m-1}(n-i)}{m!}, & 0\le m\le n,\ m\in\mathbb{N}_0,\ n\in\mathbb{R}_{\ge 0},\\ (-1)^m\cdot\dbinom{-n+m-1}{m}, & 0\le m\le -n+m-1,\ m\in\mathbb{N}_0,\ n\in\mathbb{R}_{<0}.\end{cases}$$

(四)　m、n 大於負一實部複數域定義

$$\binom{n}{m}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)},\quad 0\le\mathfrak{R}(m)\le\mathfrak{R}(n),\ m,\ n\in\mathbb{C},\ \mathfrak{R}(n),\ \mathfrak{R}(m),\ \mathfrak{R}(n-m)\in\mathbb{R}_{>-1}.$$

(五)　m 大於負一實部複數域、n 複數域定義

$$\binom{n}{m}=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)}, & 0\le\mathfrak{R}(m)\le\mathfrak{R}(n),\ m,\ n\in\mathbb{C},\ \mathfrak{R}(n),\ \mathfrak{R}(m),\ \mathfrak{R}(n-m)\in\mathbb{R}_{>-1},\\ (-1)^m\cdot\dbinom{-n+m-1}{m}, & 0\le\mathfrak{R}(m)\le\mathfrak{R}(-n+m-1),\ m,\ n\in\mathbb{C},\ \mathfrak{R}(-n+m),\ \mathfrak{R}(m+1),\ \mathfrak{R}(-n)\in\mathbb{R}_{>}\end{cases}$$

八、　二項式定理

(一)　二項式定理

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^n, \quad a,b,n\in\mathbb{C},\ a+b\neq 0\\
=&e^{n\left(\ln(|a+b|)+i\cdot\arg(a+b)\right)}\\
=&\begin{cases}\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\cdot a^m\cdot b^{n-m}, & \Re(n)\in\mathbb{N}_0,\\ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\binom{n}{m}\cdot a^m\cdot b^{n-m}, & \Re(n)\notin\mathbb{N}_0,\ |a|<|b|\vee|a||b|=0.\end{cases}
\end{aligned}
$$

其中

$$\arg(x+yi)=\operatorname{atan2}(y,\ x)\in(-\pi,\pi],\quad x,y\in\mathbb{R}$$

為 $z=x+yi$ 的輻角主值；$|a|=\sqrt{\Re(a)^2+\Im(a)^2}$。

(二)　多項式定理

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^n, \quad x_i,n\in\mathbb{C},\ \sum_{i=1}^{m}x_i\neq 0\\
=&e^{n\left(\ln\left(\left|\sum_{i=1}^{m}x_i\right|\right)+i\cdot\arg\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)\right)}\\
=&\begin{cases}\displaystyle\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{m}k_i=n\\ k_i\in\mathbb{N}_0}}\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(k_i!)}\prod_{i=1}^{n}{x_i}^{k_i}, & \Re(n)\in\mathbb{N}_0,\\ \displaystyle\sum_{k_i\in\mathbb{N}_0}\frac{\Gamma(n+1)}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(k_i+1)}\prod_{i=1}^{n}{x_i}^{k_i}, & \Re(n)\notin\mathbb{N}_0,\quad \text{此表達式收斂}.\end{cases}
\end{aligned}
$$

(三)　范德蒙恆等式（Vandermonde identity）

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

Proof.

Consider a lattice path from $(0,0)$ to (n,n) in a grid where each step moves either right $(1,0)$ or up $(0,1)$.

Since we must choose n steps to move right out of the total $2n$ steps, the total number of such paths is given by:

$$\binom{2n}{n}.$$

Now, let’ s count the same paths differently. Choose an intermediate point $(k,n-k)$ at step n. The number of ways to reach this point from $(0,0)$ using k right steps and $n-k$ up steps is $\binom{n}{k}$. From $(k,n-k)$ to (n,n), we need $n-k$ right steps and k up steps, which can be done in $\binom{n}{k}$ ways. Summing over all possible k, we obtain:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

九、 重複組合

定義：由 n 類相異物中，任取 m 個為一組之方法數，其中每類物品的個數均不小於 m 且可重複選取。記作 H_m^n。

$$\begin{aligned} H_m^n &= C_m^{n+m-1} \\ &= C_{n-1}^{n+m-1} \end{aligned}$$

十、 巴斯卡公式

$$C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_m^{n-1}$$

十一、 組合恆等式

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^n = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_k^n = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot C_k^n = 3^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_k^n = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (C_k^n)^2 = C_n^{2n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot C_k^n = n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=3}^{n} C_2^k = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\left(\prod_{i=0}^{x}(k-i)\right) \cdot C_k^n = \left(\prod_{i=0}^{x}(n-i)\right) \cdot C_{k-x-1}^{n-k-1} \quad x < k, x \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\left(\left(\prod_{i=0}^{x}(k-i)\right) \cdot C_k^n\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\left(\prod_{i=0}^{x}(n-i)\right) \cdot C_{k-x-1}^{n-k-1}\right) \\ &= \frac{n!}{(n-x-1)!} \cdot 2^{n-x-1} \\ & \quad x < n, x \in \mathbb{N}, \text{定義 } \forall k < 0：C_k^n = 0 \end{aligned}$$

十二、 巴斯卡三角形（Pascal’s triangle）/楊輝三角形

定義：令最上面一列為第 0 列，向下每列遞增 1；每一列最左之數為第 0 個，向右每個遞增 1。巴斯卡三角形之第 n 列第 m 個數定義為 C^n_m。

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & \vdots & & & & \vdots &
\end{array}
$$

十三、 卡特蘭數（Catalan number）

定義：所有在 $n \times n$ 格點中不越過對角線的單調路徑的個數。一個單調路徑從格點左下角出發，在格點右上角結束，每一步均為向上或向右。記作 C_n。

(一) 遞迴式

$$
\begin{cases}
C_0 & = 1 \\
C_n & = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \cdot C_{n-k} \quad （當\ n > 0）
\end{cases}
$$

Proof. 令對角線為 $y = x$，第一次到達對角線上時的位置為 (k, k)，則第一次到達對角線前的單調路徑數為 C_k，第一次到達對角線後的單調路徑數為 C_{n-k}，故對 $n > 0$ 成立。$C_0 = C_1 = 0$，亦成立。 □

(二) 一般式

$$
\begin{aligned}
C_n &= C^{2n}_n - C^{2n}_{n-1} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot C^{2n}_n
\end{aligned}
$$

Proof. 自 $(0, 0)$ 至 (n, n) 的單調路徑數為 C^{2n}_n。考慮這些路徑中不符合卡特蘭數定義者，其第一次跨越對角線 $y = x$ 的點必在 $y = x + 1$ 上，將接下來的路徑對 $y = x + 1$ 鏡射，則終點 (n, n) 變為 $(n - 1, n + 1)$。在此 $(n - 1) \times (n + 1)$ 格點中自 $(0, 0)$ 至 $(n - 1, n + 1)$ 的單調路徑數為 C^{2n}_{n-1}。故 $C_n = C^{2n}_n - C^{2n}_{n-1} = \dfrac{1}{n+1} \cdot C^{2n}_n$。 □

(三) 非正方形格點的卡特蘭數

定義：所有在 $n \times k$ 格點中不越過對角線的單調路徑的個數。一個單調路徑從格點左下角出發，在格點右上角結束，每一步均為向上或向右。
一般式：

$$
\begin{cases}
C^{n+k}_k - C^{n+k}_{k-1} & （當\ n \geq k） \\
C^{n+k}_n - C^{n+k}_{n-1} & （當\ n \leq k）
\end{cases}
$$

十四、　指數級數公式推導

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^r &= n + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)((k+1)^r - k^r) \\ &= n + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}k^j\end{aligned}$$