

# 函數

沈威宇

November 2, 2024

# 第一章 函數

## 一、 Definition

A function is formed by three sets, the domain (定義域)  $X$ , the codomain (對應域)  $Y$ , and the graph,  $R$  that satisfy the three following conditions.

$$R \subseteq \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

$$\forall x \in X, \exists y \in Y, (x, y) \in R$$

$$(x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \implies y = z$$

## 二、 Denotation

A function  $f$  is defined by

$$R \subseteq \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

$$\forall x \in X, \exists y \in Y, (x, y) \in R$$

$$(x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \implies y = z$$

We denote  $X$  as  $D_f$ , define range (值域), denoted as  $R_f$  or  $f(X)$ , as

$$R_f = f(X) = \{y \mid x \in X \wedge (x, y) \in R\}$$

and denote  $f$  as  $f : D_f \rightarrow R_f$ .

If

$$x \in X \wedge (x, y) \in R$$

, we call  $x$  independent variable, call  $y$  dependent variable, denote  $y = f(x)$ , and call  $f(x)$  functional value.

# 第二章 函數性質

## 一、 單射 (Injection) / 一對一 (One-to-one)

$$\text{函數 } f : V \rightarrow W \text{ 為單射函數} \iff \forall x_1, x_2 \in V \text{ s.t. } f(x_1) = f(x_2) : x_1 = x_2$$

## 二、 多對一 (Many-to-one)

$$\text{函數 } f : V \rightarrow W \text{ 為多對一函數} \iff \exists x_1, x_2 \in V \wedge x_1 \neq x_2 \text{ s.t. } f(x_1) = f(x_2)$$

## 三、 滿射/蓋射 (Surjection, Onto)

$$\text{函數 } f : V \rightarrow W \text{ 為滿射函數} \iff f(V) = W$$

## 四、 對射 (Bijection)

$$\text{函數 } f \text{ 為對射函數} \iff \text{函數 } f \text{ 為單射且滿射}$$

## 五、 光滑 (Smooth)

函數  $f(x) : V \rightarrow W$  為光滑函數，即  $C^\infty \iff \forall a \in V \forall n \in \mathbb{N} \exists \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$

## 六、 遞增及遞減

函數  $f$  為遞增 (Increasing) 函數  $\iff \forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$

函數  $f$  為遞減 (Decreasing) 函數  $\iff \forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

函數  $f$  為嚴格遞增 (Strictly Increasing) 函數  $\iff \forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$

函數  $f$  為嚴格遞減 (Strictly Decreasing) 函數  $\iff \forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

函數  $f$  在  $I$  上遞增 (Increasing)  $\iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$

函數  $f$  在  $I$  上遞減 (Decreasing)  $\iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

函數  $f$  在  $I$  上嚴格遞增 (Strictly Increasing)  $\iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$

函數  $f$  在  $I$  上嚴格遞減 (Strictly Decreasing)  $\iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

## 七、 分段函數 (Piecewise Function)

$$\text{分段函數 : } f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{if } x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{if } x \in A_2 \\ \vdots \\ f_n(x), & \text{if } x \in A_n \end{cases}$$

其中  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是  $D_f$  的子集，且  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = D_f$ 。

## 八、 合成函數 (Composite Function)

$$\text{合成函數 : } (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

其中  $g(x)$  的定義域  $D_g$  與  $f$  的定義域  $D_f$  必須滿足  $g(D_g) \subseteq D_f$ 。

## 九、 反函數 (Inverse Function)

$$\text{反函數 : } f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

其中  $f$  必須是雙射，且反函數的定義域為  $f$  的值域，值域為  $f$  的定義域。