# 線性代數

沈威宇

2025 年 1 月 16 日

# 目錄

# 第一章　線性代數（Linear Algebra）

## 第一節　向量空間（Vector Space）

### 一、　Vector space

A vector space over a field $F$ is a non-empty set $V$ together with a binary operation and a binary function that satisfy the eight axioms listed below. In this context, the elements of $V$ are commonly called vectors, and the elements of $F$ are called scalars.
The binary operation, called vector addition or simply addition assigns to any two vectors $v$ and $w$ in $V$ a third vector in $V$ which is commonly written as $v + w$, and called the sum of these two vectors.
The binary function, called scalar multiplication, assigns to any scalar $a$ in $F$ and any vector $v$ in $V$ another vector in $V$, which is denoted $av$.
To have a vector space, the eight following axioms must be satisfied for every $u$, $v$ and $w$ in $V$, and $a$ and $b$ in $F$.

1. Associativity of vector addition: $u + (v + w) = (u + v) + w$.
2. Commutativity of vector addition: $u + v = v + u$.
3. Identity element of vector addition: There exists an element $0 \in V$, called the zero vector, such that $\forall v \in V : v + 0 = v$.
4. Inverse elements of vector addition: $\forall v \in V : \exists$ an element $-v \in V$, called the additive inverse of $v$, such that $v + (-v) = 0$.
5. Compatibility of scalar multiplication with field multiplication: $a(bv) = (ab)v$.
6. Identity element of scalar multiplication: $1v = v$, where 1 denotes the multiplicative identity in $F$.
7. Distributivity of scalar multiplication with respect to vector addition: $a(u + v) = au + av$.
8. Distributivity of scalar multiplication with respect to field addition: $(a + b)v = av + bv$.

When the scalar field is the real numbers, the vector space is called a real vector space, and when the scalar field is the complex numbers, the vector space is called a complex vector space. These two cases are the most common ones, but vector spaces with scalars in an arbitrary field $F$ are also commonly considered. Such a vector space is called an $F$-vector space or a vector space over $F$.

## 二、 Euclidean vector space (歐幾里德向量空間)

A Euclidean vector space **E** is a finite-dimensional inner product space over the real numbers. This implies a symmetric bilinear form:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{R}$$

$$(x,\ y) \mapsto \langle x,\ y \rangle$$

that the inner product $\langle x,\ x \rangle$ is always positive $\forall x \neq 0$.
The inner product of a Euclidean space is also called dot product and denoted $x \cdot y$. This is specially the case when a Cartesian coordinate system has been chosen, as, in this case, the inner product of two vectors is the dot product of their coordinate vectors.
以下空間指歐幾里德空間，向量為其中向量。

## 三、 Euclidean affine space (歐幾里德仿射空間) or Euclidean space (歐幾里得空間)

A Euclidean space, also known as Euclidean affine space, is an affine space over the reals such that the associated vector space is a Euclidean vector space.
The Euclidean distance $d\ :\ E \times E \to \mathbb{R};\ x,\ y \mapsto d(x,\ y)$ of a Euclidean space $E$ is a metric of $E$, defined to be:

$$d(x,\ y) = |\overrightarrow{xy}|,$$

where $\overrightarrow{xy}$ is a vector in the associated Euclidean vector space such that $x + \overrightarrow{xy} = y$, and $\|\overrightarrow{xy}\|$ is the Euclidean norm of the vector $\overrightarrow{xy}$.

## 四、 p-norm

The $p$-norm of a $n$-dimensional vector $x = ((x_i)_{i=1}^n)$ is defined to be

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in \mathbb{N}_\infty,$$

where the $\infty$-norm is

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |x_i|.$$

The 1-norm is also called Manhattan norm (曼哈頓範數); the 2-norm is also called Euclidean norm (歐幾里德範數).
以下範數均為歐幾里德範數，**v** 之歐幾里德範數記為 $\|\mathbf{v}\|$ 或 $|\mathbf{v}|$。

## 五、 線性獨立（Linear independence）

對於一組向量 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$，如果方程式：

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i = 0$$

僅在所有係數 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 都為零時成立，那麼這組向量就是線性獨立的。
對於任意 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$，與一組線性獨立的向量 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$，必存在唯一係數向量 $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ 使得：

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{P}.$$

## 六、　點積定義

向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$、$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

對於笛卡爾座標歐幾里德向量空間，內積即點積即兩向量之夾腳之餘弦值乘以兩向量之歐幾里德範數之積。

## 七、　正射影

非零向量 **a**、**b**，**a** 在 **b** 方向上的正射影 **c**：

$$\mathbf{c} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\right)\mathbf{b}$$

## 八、　零向量

$V$ 是一個向量空間，$\mathbf{0} \in V$，$\forall v \in V$ ： $v + \mathbf{0} = v$：

$$\forall v \in V \ : \ v/\mathbf{0}$$

## 九、　投影（Projection）

在線性代數中，投影指將一個向量映射到某個子空間上的操作。設 $V$ 是一個向量空間，$U$ 是 $V$ 的一個子空間，則對於任意的向量 $\mathbf{v} \in V$，其在 $U$ 上的投影是一個在 $U$ 中的向量 **u**，滿足：

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$$

其中 $\mathbf{u} \in U$，**w** 是垂直於 $U$ 的向量（即 **w** 在 $U$ 的正交補空間內）。
對任意的 **v** 和投影運算 $P$ ，有：

- 冪等性：

$$P(P(\mathbf{v})) = P(\mathbf{v})$$

- 線性性

$$P(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = P(\mathbf{v}) + P(\mathbf{w})$$

且

$$P(c\mathbf{v}) = cP(\mathbf{v})$$

，其中 $c$ 是一個純量。

## 第二節　矩陣（Matrix）

註：翻譯從臺灣地區翻譯習慣，稱 row 為列、稱 column 為行，或逕用英文。

### 一、　矩陣定義

- 矩陣指：

$$\begin{pmatrix} \text{表達式} & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} \text{表達式} & \dots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

其中每一表達式稱其元或元素

- 矩陣 with $m$ rows and $n$ columns，稱 $m \times n$ 階矩陣。特別當 $m = n$ 時，稱 $n$ 階方陣（Square）。
- 設 $\mathbb{F}$ 為域，佈於 $\mathbb{F}$ 上的所有 $m \times n$ 階矩陣形成的集合稱 $\mathbb{F}^{m\times n}$。
- 矩陣一般以粗體大寫字母代表，有時將 row 與 column 數標於其右下，如 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 或 $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ 表 $m \times n$ 階矩陣，其中 $a_{ij}$ 為第 $i$ row 第 $j$ column 的元素，稱第 $ij$ 元。特別地，方陣的大寫字母右下標逕標其階數，如 $\mathbf{A}_n$ 表 $n$ 階方 陣。特別地，$a_{ii}$ 稱對角線元。
- 僅有一列的矩陣稱列矩陣或列向量，僅有一行的矩陣稱行矩陣或行向量。
- 矩陣 $\mathbf{A}$ 的第 $i$ row 記作 $\mathbf{A}_{i,:}$、第 $j$ column 記作 $\mathbf{A}_{:,j}$。
- 稱兩矩陣相等，若且惟若該二矩陣所有相同位置對應之元素均相等。
- 兩列數相同的矩陣 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 左右合併，記作：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

- 兩 column 數相同的矩陣 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 上下合併，記作：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

### 二、　零矩陣（Zero matrix）

- 定義 $m \times n$ 階零矩陣：

$$\mathbf{O}_{m\times n} = [0]_{m\times n}$$

- 當運算均有意義：

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$$

$$\mathbf{O}_{m\times n}\mathbf{A}_{n\times p} = \mathbf{O}_{m\times p}, \quad \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{O}_{n\times p} = \mathbf{O}_{m\times p}$$

## 三、 單位矩陣（Identity matrix）

- 定義 $n$ 階單位矩陣：

$$\mathbf{I}_n = [(i=j)?1 : 0]_n$$

- 當運算均有意義：

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

## 四、 矩陣加減法

- 各相同位置對應之元素均相加減。
- 矩陣加減法有結合律、左右分配率、交換率、左右消去律。

## 五、 矩陣的係數積

- 矩陣的係數積即所有元均乘以該係數。
- 矩陣係數積有結合律、左右分配率、係數交換率。
- 矩陣係數積當係數非零時有係數消去律：

$$r \neq 0,\ r\mathbf{A} = r\mathbf{B} \implies \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

- 矩陣係數積當矩陣可逆時有矩陣消去律：

$$\exists \mathbf{A}^{-1},\ r\mathbf{A} = s\mathbf{A} \implies r = s$$

## 六、 矩陣乘法

- 矩陣乘法 **AB** 有意義若且惟若 **A** 的 column 數等於 **B** 的 row 數，即 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 與 $\mathbf{B}_{n\times p}$，其中 $m, n, p \in \mathbb{N}$。
- 定義矩陣乘法：

$$[a_{ij}]_{m\times n}[b_{ij}]_{n\times p} = [c_{ij} = \text{列向量}\mathbf{a_i} \cdot \text{行向量}\mathbf{b_j}]_{m\times p} = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}]_{m\times p}$$

- 矩陣乘法有結合律：

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

- 矩陣乘法有右分配率：

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

- 矩陣乘法有左分配率：

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$$

- 矩陣乘法無交換率：

$$\exists \mathbf{A},\mathbf{B}: \ \mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$$

- 矩陣乘法 $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$ 當運算均有意義且 $\mathbf{A}$ 為 可逆矩陣時有左消去律：

$$\left(\mathbf{AB}=\mathbf{AC}\right) \implies \left(\mathbf{B}=\mathbf{C}\right)$$

- 矩陣乘法 $\mathbf{BA}=\mathbf{CA}$ 當運算均有意義且 $\mathbf{A}$ 為 可逆矩陣時有右消去律：

$$\left(\mathbf{BA}=\mathbf{CA}\right) \implies \left(\mathbf{B}=\mathbf{C}\right)$$

- 積為零矩陣作為必要非充分條件：

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{O}\text{為}\mathbf{A}=\mathbf{O}\text{作為必要非充分條件}$$

$$\mathbf{AB}=\mathbf{O}\text{為}\left(\mathbf{A}=\mathbf{O}\vee\mathbf{B}=\mathbf{O}\right)\text{的必要非充分條件}$$

## 七、 矩陣的自然數冪

$$\mathbf{A}^n=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{A}$$

## 八、 轉置矩陣（Transpose matrix）

- 矩陣的轉置記作 $^\top$，定義為：

$$[a_{ij}]_{m\times n}{}^\top=[a_{ji}]_{n\times m}$$

- 對稱矩陣：$\mathbf{A}=\mathbf{A}^\top$ 若且惟若 $\mathbf{A}$ 為對稱矩陣。

- 反對稱矩陣：$\mathbf{A}=-\mathbf{A}^\top$ 若且惟若 $\mathbf{A}$ 為反對稱矩陣。

- 當方陣 $\mathbf{A}$ 可逆：

$$\left(\mathbf{A}^\top\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\top$$

- 當運算均有意義：

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)^\top=\mathbf{A}^\top+\mathbf{B}^\top$$

- 當運算均有意義：

$$\left(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\dots\mathbf{A}_n\right)^\top=\mathbf{A}_n{}^\top\mathbf{A}_{n-1}{}^\top\mathbf{A}_{n-2}{}^\top\dots\mathbf{A}_1{}^\top$$

## 九、 矩陣的行、列運算

- 矩陣的行運算包含：
  - 行交換（Column swapping）：將矩陣中的兩行位置互換。例如，將第 $i$ 行和第 $j$ 行交換。
  - 行加倍（Column multiplication）：將矩陣中的某一行乘以一個非零常數 $k$。
  - 行相加（Column addition）：將某一行加上一個常數倍的另一行。例如，將第 $j$ 行乘以一個常數 $k$，然後將其加到第 $i$ 行上。
- 矩陣的列運算包含列交換（Row swapping）、列加倍（Row multiplication）、列相加（Row addition），與對應行運算相同，僅將行換成列。
- 矩陣行列互換即同矩陣之轉置。

## 十、 行列式（Determinant）、餘因子矩陣（Cofactor Matrix）、伴隨矩陣（Adjugate matrix）與反方陣（Inverse matrix）

### (一) 餘因子矩陣（Cofactor Matrix）

- 定義 $\mathbf{M}_{ij}$ 為 $\mathbf{A}$ 去 掉 $i$th row 與 $j$th column 的子矩陣。
- 定義矩陣 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 的餘因子矩陣 $\operatorname{cof}(\mathbf{A}_{m\times n})$ 為：

$$\operatorname{cof}(\mathbf{A}_{m\times n}) = \left((-1)^{i+j}\det\left(\mathbf{M}_{ij}\right)\right)_{m\times n}$$

### (二) 行列式（Determinant）

- 定義行列式 $\det(\mathbf{A})$ 或 $|\mathbf{A}|$ 為其任意行或列與其餘因子矩陣的同一位置的行或列的點積，即對於一階方陣為其唯一元素，對於 $\geq 2$ 階方陣為：

$$\det\left(\mathbf{A}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det\left(\mathbf{M}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(-1)^{j+i}\det\left(\mathbf{M}_{ji}\right) \quad \text{for all } j \in \mathbb{N} < n$$

- 行列式經行列運算：方陣轉置，行列式不變；兩列（行）交換，行列式變號；某列（行）乘以實數倍加到另一列（行），行列式不變；列（行）乘 $n$，行列式乘 $n$；依某一列（行）將一個矩陣拆成二個，原矩陣之行列式為該二矩陣之行列式之和；$n$ 個矩陣之行列式之積等於 $n$ 個矩陣之積之行列式。
- 

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \wedge \det\left(\mathbf{A}\right) \neq 0 : \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\left(\mathbf{A}\right)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

### (三) 伴隨矩陣（Adjugate matrix）

定義矩陣 $\mathbf{A}$ 的伴隨矩陣 $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$：

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \operatorname{cof}(\mathbf{A})^{\top}$$

### (四) 反方陣（Inverse matrix）/乘法反方陣/逆方陣

- 定義方陣 **A** $(\det(\mathbf{A}) \neq 0)$ 的反方陣 $\mathbf{A}^{-1}$ 為：

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

- 以伴隨矩陣與行列式求反方陣：

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}$$

- 正則矩陣（Orthogonal/Orthonormal matrix）/非奇異矩陣（Nonsingular matrix）/非退化矩陣（Nondegenerate matrix）指存在乘法反方陣的矩陣；奇異矩陣（Singular matrix）/退化矩陣（Degenerate matrix）/非正則矩陣（Non-Orthogonal/Non-Orthonormal matrix）指不存在乘法反方陣的矩陣。

- $n$ 階矩陣 **A**，與「**A** 為非奇異矩陣」等價的表述如：

$$\exists \mathbf{A}^{-1}$$
$$\exists (\mathbf{A}^{\top})^{-1}$$
$$\exists (\mathbf{A}^{\top}\mathbf{A})^{-1}$$
$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n\text{，即 }\mathbf{A}\text{ 滿秩}$$
$$\exists \mathbf{A}\text{的特徵值}\lambda\text{： }\lambda \neq 0$$

- 當運算均有意義：

$$\mathbf{A}\text{可逆，則對所有自然數}n,\ \mathbf{A}^{n}\text{可逆}$$

$$\text{方陣}\mathbf{A}\text{與同階之}\mathbf{I}\text{，}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{I}\end{pmatrix}\text{可經有限次列運算變為}\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{B}\end{pmatrix}\text{，則}\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 \ldots \mathbf{A}_n)^{-1} = \mathbf{A}_n{}^{-1}\mathbf{A}_{n-1}{}^{-1}\mathbf{A}_{n-2}{}^{-1} \ldots \mathbf{A}_1{}^{-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\text{： }(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^{n} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{n}\mathbf{P}$$

- Vandermonde Matrix:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

## 十一、 對角矩陣（Diagonal matrix）

- 對角矩陣：$\mathbf{D} = [d_{ij}]_n$，其 中 $d_{ij} = 0$ *if* $i \neq j$ 若且惟若 **D** 為對角矩陣。

- $n$ 階對角矩陣 **D**，$\det(\mathbf{D}) \neq 0$，則：

$$\mathbf{D}^{-1} = [(i=j)?(d_{ij}{}^{-1}) : 0]_n$$

- 對角矩陣 $\mathbf{D} = [d_{ij}]_n$ 與 $\mathbf{E} = [e_{ij}]_n$：

$$\mathbf{DE} = [d_{ij}e_{ij}]_n$$

# 第三節　線性方程組

## 一、　高斯消去法（Gaussian Elimination）/列簡化（Row reduction）

- 係數矩陣：將線性方程組的係數寫成矩陣，每一方程一 row，稱係數矩陣。
- 增廣矩陣：將方程組等號右側的常數附加入矩陣中的最後一 column，稱增廣矩陣。
- 高斯消去法：是一種使用 row 運算來修改矩陣，直到矩陣的左下角盡可能地用零填充的演算法，對線性方程組增廣矩陣作高斯消去法可求解之。

## 二、　擴展克拉瑪公式

$$\mathbf{AX} = \mathbf{C}$$

其中：
$\mathbf{A}$ 為係數矩陣；
$\mathbf{X}$ 為未知數矩陣；
$\mathbf{C}$ 為常數矩陣。
則：

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}, \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0 \\ \text{無限多解}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{C}, \quad \mathbf{C} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})\text{，即}\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\end{pmatrix}\right) \\ \text{無解}, \quad \mathbf{C} \notin \mathrm{Col}(\mathbf{A})\text{，即}\mathrm{rank}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

## 三、　克拉瑪公式（Cramer's rule/formula）

$$\mathbf{AX} = \mathbf{C}$$

其中：
$\mathbf{A}$ 為 $n \times n$ 階係數矩陣；
$\mathbf{X} = \left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)^\top$ 為未知數行矩陣；
$\mathbf{C} = \left(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\right)^\top$ 為常數行矩陣。
令 $\mathbf{A}_i$ 為 $\mathbf{A}$ 的第 $i$ 行 換成 $\mathbf{C}$。
則：

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}, \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0 \\ \text{無解}, \quad \det(\mathbf{A}) = 0 \wedge \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \det(\mathbf{A}_i)^2 \neq 0 \\ \text{無限多解}, \quad \det(\mathbf{A}) = 0 \wedge \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \det(\mathbf{A}_i)^2 = 0 \end{cases}$$

$x_i = \dfrac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}$ 幾何上可視為 $\mathbf{A}_i$ 行向量組成的平行體體積除以 $\mathbf{A}$ 行向量組成的平行體體積。

### 四、 一次齊次方程組的解

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$$

其中：
**A** 為係數矩陣；
$\mathbf{X} = \left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)^{\top}$ 為未知數；**0** 為 $n$ 維零行向量。
則：

$$\begin{cases} x_i = 0, & \det\left(\mathbf{A}\right) \neq 0 \\ \text{無限多解}, & \det\left(\mathbf{A}\right) = 0 \end{cases}$$

## 第四節 線性變換（Linear transformation）/線性映射（Linear map）

### 一、 Linear transformation or Linear map

A map $T : V \to W$ between vector spaces $V$ and $W$ over field $F$ is linear if

$$\forall a,\, b \in F,\, v,\, w \in V : T(av + bw) = aT(v) + bT(w).$$

### 二、 Invertible map

A map $T : V \to W$ is Invertible if and only if it is bijective. The unique inverse of $T$, called $T^{-1}$, is defined to be:

$$T^{-1} : W \to V; \forall v \in V : T(v) \mapsto v = T^{-1}(T(v)).$$

### 三、 矩陣的線性變換

$n$ 維笛卡爾座標歐幾里德向量空間上一圖形經 $n$ 階矩陣 **A** 線性變化等價於其每個點均左乘矩陣 **A**。原點經矩陣的線性變換必不變。

### 四、 測度經線性變換

$n$ 維笛卡爾座標歐幾里德向量空間中，任意 $n$ 維勒貝格可測子集 $E$，經 $n$ 階矩陣 **A** 線性變換後，其勒貝格測度變為 $E$ 之勒貝格測度的 $|\det(\mathbf{A})|$ 倍。

## 第五節 馬可夫鏈理論（Theory of Markov Chains）

### 一、 狀態空間（State space）

所有可能狀態的集合，其元素稱狀態向量（State vector），表某一狀態機率分布，其分量表機率，其所有分量和為一且每一分量均大於等於零。

## 二、 轉移矩陣（Stochastic matrix）/機率矩陣（Probability matrix）/馬可夫矩陣（Markov matrix）

轉移矩陣指每行和均為一且每一元均大於等於零且維度同狀態向量的方陣。

## 三、 轉移矩陣的封閉性

數個轉移矩陣之乘積、數個轉移矩陣之算數平均、轉移矩陣之自然數冪，均為轉移矩陣。

## 四、 馬可夫鏈（Markov chain）

馬可夫鏈中的一次轉移為當前狀態向量到下一個狀態向量的轉變，遵循無後效性/馬可夫性（Markov Property），即下一個狀態向量僅與當前狀態向量有關，而與此前的狀態向量無關。因此，馬可夫鏈中的一次轉移可以表示成狀態向量左乘一個轉移矩陣。
轉移矩陣的 $n$ 次方左乘狀態向量所得之向量為轉移 $n$ 次後的狀態向量。
從 $i$ 狀態經過 $n$ 次轉移後為 $j$ 狀態的機率記為 $P^{(n)}(i,j)$。

## 五、 不可約性（Irreducibility）

一個馬爾可夫鏈是不可約的當且僅當對於任意二個狀態向量 $i,j$：

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } P^{(n)}(i,j) > 0.$$

## 六、 非週期性（Aperiodicity）

一個馬爾可夫鏈是非週期性的當且僅當從某狀態返回到自身的所有可能轉移步數的最小公倍數為 1。

## 七、 穩定狀態/穩態（Steady state）/穩態向量（Stationary vector）

今有 $n$ 維狀態向量的狀態空間 $V$ 與 $n$ 階轉移矩陣 $\mathbf{A}$，$\mathbf{AX} = \mathbf{X}$，即 $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{X} = 0$，的解，$\mathbf{X} \in V$，稱穩態向量。

## 八、 唯一穩態

今有 $n$ 維狀態向量的狀態空間 $V$ 與 $n$ 階轉移矩陣 $\mathbf{A}$，若 $\mathbf{A}$ 定義的馬可夫鏈有不可約性與非週期性，則存在唯一的穩態向量 $\mathbf{X}$，且：

$$\forall \mathbf{Y} \in V: \lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n\mathbf{Y} = \mathbf{X}.$$

# 第六節　常見二維線性變換

## 一、 奇異矩陣的線性變換

對於奇異矩陣 $\mathbf{A}$，令 $\mathbf{B} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top$：

1. 若 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ ca & cb \end{bmatrix}$：$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x' & cx' \end{bmatrix}^\top$，其中 $x' = ax + by$。

2. 若 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ d & e\end{bmatrix}$；$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & y'\end{bmatrix}^{\top}$，其中 $y'=dx+ey$。

## 二、 伸縮變換

$x$ 方向伸縮為 $h$ 倍、$y$ 方向伸縮為 $k$ 倍的伸縮變換：

$$\begin{bmatrix}h & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$$

## 三、 推移變換

$x$ 方向推移 $y$ 的 $h$ 倍、$y$ 方向推移 $x$ 的 $k$ 倍的推移變換：

$$\begin{bmatrix}1 & h\\ k & 1\end{bmatrix}$$

## 四、 旋轉變換

逆時針旋轉 $\theta$ 的旋轉變換：

$$\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$$

## 五、 鏡射變換

對過原點極角 $\theta$ 之直線做鏡射的鏡射變換：

$$\begin{bmatrix}\cos(2\theta) & \sin(2\theta)\\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta)\end{bmatrix}$$

## 六、 舉例

- 舉例 1：圓 C：$x^2+y^2=1$ 經 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ 變換後得到圓 C′。求 C′？

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\mathbf{A}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\ 3y\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=2x\\ y'=3y\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{x'}{2}\\ y=\dfrac{y'}{3}\end{cases}$$

$$\therefore\quad\left(\frac{x'}{2}\right)^2+\left(\frac{y'}{3}\right)^2=1\Rightarrow\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{9}=1$$

$$\therefore\quad \text{C}':\ \frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{9}=1$$

C′ 的面積為 $\pi\cdot 2\cdot 3=6\pi$，$\det(\mathbf{A})=6$，C 的面積為 $\pi$，C′ 的面積 $=\det(\mathbf{A})\cdot$ C 的面積。

- 舉例 2：直線 **L**：$4x-3y=5$，沿 $x$ 坐標方向推移 $y$ 坐標的 2 倍，沿 $y$ 坐標方向推移 $x$ 坐標的-3 倍，得一新直線 **L**′。求 **L**′？

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{x'-2y'}{7}\\ \frac{3x'+y'}{7}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}':4\frac{x-2y}{7}+3\frac{3x+y}{7}=5$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}':5x+11y+35=0$$

- 舉例 3：將點 C$(5,2)$ 對 **M**：$x-y+1=0$ 鏡射，得圓 D。求 D？
右移一單位：**M**′：$x-y=0$, C′$(6,2)$。
鏡射矩陣：$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$
D′ $=$ **A**C′ $=(2,6)$
左移一單位：D$(1,6)$

- 舉例 4：$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$a,b\in\mathbb{R}$，直線 $x+y-2=0$ 經 **A** 變換後得直線 $2x+3y-4=0$，求 $(a,b)$？

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}x\\ -x+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ \frac{-2x'+4}{3}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x-2x+4=\frac{-2x'+4}{3}$$

$$\Rightarrow x'=\frac{3}{2}x-4$$

$$\Rightarrow ax-bx-2b=x'=\frac{3}{2}x-4$$

$$\Rightarrow (a,b)=(-\frac{1}{2},-2)$$

# 第七節　線性子空間（Linear subspace）

A linear subspace of a vector space $V$ over a field $\mathbb{K}$ is a nonempty subset $W$ of $V$ such that,

$$\forall w_1,\, w_2\in W,\, a,\, b\in\mathbb{K}:\ aw_1+bw_2\in W.$$

矩陣的四大基本空間為行空間、列空間、零空間與左零空間。

## 一、　行空間（Column space）

- 矩陣 **A** 的行空間記作 Col(**A**) 或 **C**(**A**)。

- 定義：矩陣 **A** 的行空間指 **A** 的所有行向量之線性組合之集合。

## 二、　列空間（Row space）

- 定義：矩陣 **A** 的列空間指 **A** 的所有列向量之線性組合之集合。
- 矩陣 **A** 的列空間 = Col($\mathbf{A}^\top$)。

## 三、　零空間（Null space）/核（空間）（Kernel）

- 線性變換 $L$ 的核記作 ker $L$ 或 Null($L$)。
- 定義：線性變換 $L: V \to W$ 的核定義為：

$$\ker(L) = \{v \in V : L(v) = 0\}.$$

## 四、　左零空間（Left null space）

定義：$L$ 的左零空間 = ker($L^{-1}$)。

## 五、　像空間（Image space 或 range）

- 線性映射 $T$ 的像空間記作 im($T$)，其中 $T: V \to W$ 是一個線性映射，且 其中 $V$ 是有限維的。
- 定義：像空間是指一個線性映射將定義域中的向量映射到其值域中的所有可能結果的集合。
- 定義：線性變換 $T: V \to W$ 的像空間定義為：

$$\mathrm{im}(T) = \{T(v) : v \in V\}.$$

## 六、　秩（Rank）

If **A** is an $m \times n$ matrix, then the rank of **A**, denoted as rank(**A**), r(**A**), or rk(**A**), is the maximum number of linearly independent rows (or columns) in **A**, namely:

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \dim(\mathrm{Col}(\mathbf{A}))$$

## 七、　Constant rank theorem

row 秩 (the maximum number of linearly independent rows) = column 秩 (the maximum number of linearly independent columns).

*Proof.*
令 **A** 是一個 $m \times n$ 的矩陣，其行秩 為 $r$，即矩陣 **A** 的行空間的維度是 $r$。
令 $c_1, c_2, \ldots, c_r$ 是 **A** 的行空間的一組基，構成 $m \times r$ 矩陣 $\mathbf{C} = [c_1, c_2, \ldots, c_r]$，並使得 **A** 的每個行向量是 **C** 的 $r$ 個 行向量的線性組合.
由矩陣乘法的定義，$r \times n$ 矩陣 $R$ s.t. $\mathbf{A} = \mathbf{C}R$.
**A** 的每個列向量是 $R$ 的列向量的線性組合，這意味著 **A** 的列向量空間被包含於 $R$ 的列 向量空間之中.
∴**A** 的列秩 $\leq R$ 的列秩. 但 $R$ 僅有 $r$ 列，所以 $R$ 的列秩 $\leq$ **A** 的行秩. 這就證明了 **A** 的列秩 $\leq$ **A** 的行秩.
同理可證 **A** 的行秩 $\leq$ **A** 的列秩，故 **A** 的列秩 = **A** 的行秩. □

## 八、 Rank-Nullity Theorem

對於 $n$ 階矩陣 **A**：

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) + \dim(\ker(\mathbf{A})) = n$$

*Proof.*

Let **A** be an $m \times n$ matrix with $r$ linearly independent columns (i.e., $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = r$). We will show that:

1. There exists a set of $n - r$ linearly independent solutions to the homogeneous system $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.
2. Every other solution is a linear combination of these $n - r$ solutions.

To do this, we will produce an $n \times (n - r)$ matrix **X** whose columns form a basis of the null space of **A**. Without loss of generality, assume that the first $r$ columns of **A** are linearly independent. So, we can write

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix},$$

where

- $\mathbf{A}_1$ is an $m \times r$ matrix with $r$ linearly independent column vectors, and
- $\mathbf{A}_2$ is an $m \times (n - r)$ matrix such that each of its $n - r$ columns is a linear combination of the columns of $\mathbf{A}_1$.

This means that $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1\mathbf{B}$ for some $r \times (n - r)$ matrix **B**, and hence,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Let

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{I}_{n-r} \end{pmatrix},$$

where $\mathbf{I}_{n-r}$ is the $(n - r) \times (n - r)$ identity matrix. So, **X** is an $n \times (n - r)$ matrix such that

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{I}_{n-r} \end{pmatrix} = -\mathbf{A}_1\mathbf{B} + \mathbf{A}_1\mathbf{B} = \mathbf{0}_{m\times(n-r)}.$$

Therefore, each of the $n - r$ columns of **X** are particular solutions of $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^m}$.

Furthermore, the $n - r$ columns of **X** are linearly independent because $\mathbf{Xu} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^n}$ will imply $\mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^{n-r}}$ for $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^{n-r}$:

$$\mathbf{Xu} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^n} \implies \begin{pmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{I}_{n-r} \end{pmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^n} \implies \begin{pmatrix} -\mathbf{Bu} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\mathbb{F}^r} \\ \mathbf{0}_{\mathbb{F}^{n-r}} \end{pmatrix} \implies \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^{n-r}}.$$

Therefore, the column vectors of **X** constitute a set of $n-r$ linearly independent solutions for $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^m}$.

We next prove that any solution of $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^m}$ must be a linear combination of the columns of **X**.

For this, let

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

be any vector such that $\mathbf{Au} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^m}$. Since the columns of $\mathbf{A}_1$ are linearly independent, $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^m}$ implies $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^r}$.

Therefore,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Au} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^m} \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}_1(\mathbf{u}_1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^m} \\
&\Longrightarrow \mathbf{u}_1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^r} \\
&\Longrightarrow \mathbf{u}_1 = -\mathbf{B}\mathbf{u}_2 \\
&\Longrightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{I}_{n-r} \end{pmatrix} \mathbf{u}_2 = \mathbf{X}\mathbf{u}_2.
\end{aligned}$$

This proves that any vector $\mathbf{u}$ that is a solution of $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ must be a linear combination of the $n - r$ special solutions given by the columns of $\mathbf{X}$. And we have already seen that the columns of $\mathbf{X}$ are linearly independent. Hence, the columns of $\mathbf{X}$ constitute a basis for the null space of $\mathbf{A}$. Therefore, the nullity of $\mathbf{A}$ is $n-r$. Since $r$ equals the rank of $\mathbf{A}$, it follows that $\text{rank}(\mathbf{A})+\ker(\mathbf{A}) = n$. This concludes our proof. □

### 九、 滿秩（Full rank）

$$\text{rank}(\mathbf{A}_{m\times n}) \leq \min(m, n)$$

- 若 $\text{rank}(\mathbf{A}_{m\times n}) = \min(m, n)$ 則稱 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 滿秩，否則稱之欠秩。
- 一方陣滿秩若且惟若其可逆。

# 第八節 矩陣分析（Matrix Analysis）

## 一、 特徵向量(Eigenvector)、特徵值(Eigenvalue)與特徵多項式(Characteristic polynomial)

#### (一) 特徵向量與特徵值

對於一個給定的方陣 $\mathbf{A}$，它的特徵向量/ 固有向量/本徵向量 $v$ 定義為：$v$ 經 $\mathbf{A}$ 線性轉換之後得到的新向量仍與原來的 $v$ 平行，即：

$$\mathbf{A}v = \lambda v$$

其中 $\lambda$ 為純量，即特徵向量在該線性轉換下縮放的比例，稱 $\mathbf{A}$ 之特徵值/固有值/本徵值。

$$\text{矩陣 } \mathbf{A} \text{ 的特徵向量數} = \text{rank}(\mathbf{A})$$

#### (二) 特徵多項式

- 特徵多項式：對佈於域 $\mathbb{F}$ 上的 $n \times n$ 方陣 $\mathbf{A}$，定義其特徵多項 式為：

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) := \det\left(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\right)$$

- 特徵根與特徵值：對佈於域 $\mathbb{F}$ 上的 $n \times n$ 方陣 $\mathbf{A}$，及其特徵多項式 $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$：

$$\mathbf{A} \text{ 之特徵根之集合} = \{\lambda \in \mathbb{F} \mid p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0\} = \mathbf{A} \text{ 之特徵值之集合}$$

- 

  若$\lambda_i \in$ **F**為$p_{\mathbf{A}}(\lambda)=0$之 $k$ 重根，則$\lambda_i$為 **A** 之特徵值且對應到 $n$ 個互相線性獨立的 **A** 的特徵向量

### (三) 凱萊–哈密頓定理（Cayley–Hamilton theorem）

對於方陣 **A** 及其特徵多項式 $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$：

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})=0$$

## 二、 對角化

- 定義：對角化矩陣 **A** 指構造矩陣 **P** 使得 $\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P}$，其中 **D** 為對角矩陣。
- $n$ 階矩陣 **A** 是可對角化的若且 惟若 **A** 有 $n$ 個線性獨立的特徵向量 $v$。

對角化步驟：

1. 對於矩陣 **A** 的所有特徵根 $\lambda$ 求解特徵向量 $v$ 服從：

   $$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}=0$$

   其中 $\lambda$ 為特徵值。
2. 將所有獨立的特徵向量組成矩陣 **P**，每個特徵向量作為 **P** 的一列。假設 $n$ 階方陣 **A** 有 $n$ 個線性獨立的特徵向量，即 **A** 是可對角化的，則矩陣 **P** 存在且為 $n$ 階方陣。

常見應用：

$$\mathbf{A}^n=(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P})^n=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}^n\mathbf{P}$$

## 三、 共軛轉置（Conjugate transpose）/埃爾米特共軛（Hermitian conjugate）/埃爾米特轉置（Hermitian transpose）

定義：指將矩陣的每個元均取其共軛複數而後將矩陣轉置，矩陣 **A** 的共軛轉置記作 $\mathbf{A}*$。

## 四、 么正矩陣（Unitary matrix）/酉矩陣

定義：指其共軛轉置恰為其逆矩陣的方陣。

## 五、 逆矩陣的擴展定義

### (一) 廣義逆（Generalized inverse, g-inverse）

A matrix $A^{\mathrm{g}} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ is a generalized inverse of a matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ if:

$$AA^{\mathrm{g}}A=A.$$

對所有矩陣，廣義逆必存在，但不必唯一。對所有非奇異矩陣，廣義逆必為其乘法反方陣。

### (二) 單邊逆（One-sided inverse）

- 右逆（Right inverse）：If the matrix $A$ has dimensions $n \times m$ and rank $\mathrm{rank}(A) = n$, then there exists an $m \times n$ matrix $A_{\mathrm{R}}^{-1}$ such that
$$AA_{\mathrm{R}}^{-1} = I_n,$$
where $I_n$ is the $n \times n$ identity matrix.
- 左逆（Left inverse）：If the matrix $A$ has dimensions $n \times m$ and rank $\mathrm{rank}(A) = m$, then there exists an $m \times n$ matrix $A_{\mathrm{L}}^{-1}$ such that
$$A_{\mathrm{L}}^{-1}A = I_m,$$
where $I_m$ is the $m \times m$ identity matrix.

### (三) 自反廣義逆（Reflexive generalized inverse）

**A** 的自反廣義逆 $\mathbf{A}^g$ 符合：

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^g\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^g\mathbf{A}\mathbf{A}^g = \mathbf{A}^g$$

### (四) 摩爾—彭若斯廣義逆（Moore–Penrose inverse）/偽逆（Pseudoinverse）/擬反

**A** 的摩爾—彭若斯廣義逆記作 $\mathbf{A}^+$，符合：

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$$

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^+\right)^* = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$$

$$\left(\mathbf{A}^+\mathbf{A}\right)^* = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$$

對所有矩陣，必存在唯一偽逆。對所有非奇異矩陣，偽逆必為其乘法反方陣。

# 第九節　向量空間相關定理

## 一、　超平面法向量

向量空間 $\mathbb{R}^n$ 中一 $(n-1)$ 維超平面 $E$： $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + c = 0$（$|\mathbf{n}| \neq 0$）之法向量為 **n** 的任意非零實數倍。

## 二、　超平面到點最短向量

向量空間 $\mathbb{R}^n$ 中一 $(n-1)$ 維超平面 $E$： $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + c = 0$（$|\mathbf{n}| \neq 0$）與一點 $P$，$E$ 距離 $P$ 最短的點為 $Q$，則：

$$\overrightarrow{QP} = \frac{\mathbf{n} \cdot P + c}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$$

*Proof.*
令 $\overrightarrow{QP} = t\mathbf{n}$：

$$\mathbf{n} \cdot (P - t\mathbf{n}) + c = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot P - t|\mathbf{n}|^2 + c = 0$$

$$t = \frac{\mathbf{n} \cdot P + c}{|\mathbf{n}|^2}$$

□

## 三、 平行超平面間最短向量

向量空間 $\mathbb{R}^n$ 中兩 $(n-1)$ 維超平面 $E$： $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + c = 0$ 與 $F$： $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + d = 0$（$|\mathbf{n}| \neq 0$），$P$ 與 $Q$ 分別在 $E$、$F$ 上且 $\overrightarrow{PQ} / \mathbf{n}$，則：

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{d-c}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$$

*Proof.*
令 $\overrightarrow{PQ} = t\mathbf{n}$：

$$\mathbf{n} \cdot (P + t\mathbf{n}) + d = 0$$

$$d + t|\mathbf{n}|^2 - c = 0$$

$$t = \frac{d-c}{|\mathbf{n}|^2}$$

□

## 四、 兩超平面夾角與分角面

向量空間 $\mathbb{R}^n$ 中兩 $(n-1)$ 維超平面 $E$： $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} + c = 0$ 與 $F$： $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + d = 0$（$|\mathbf{m}||\mathbf{n}| \neq 0$），$\mathbf{m} \times \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$，則：

1. $E$、$F$ 夾角之餘弦值為：

$$\pm\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|}$$

2. $E$、$F$ 的分角面為：

$$\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} + c}{|\mathbf{m}|^2} \pm \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + d}{|\mathbf{n}|^2} = 0$$

   若 $\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} \neq 0$，則 $\pm$ 取與 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$ 同號者為銳角角平分超平面，與 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$ 異號者為鈍角角平分超平面。

## 五、 分點公式

$\forall$ points $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ not in the same $\mathbb{R}^{n-2}$ space

$\wedge \left(\forall 1 \le i \le n, i \in \mathbb{N} : c_i \in \mathbb{R}, c_i > 0\right) \wedge \sum_{i=1}^{n} c_i = 1$：

$K = \sum_{i=1}^{n} c_i A_i$

$\iff$ volume$(KA_2A_3 \ldots A_n)$：volume$(A_1KA_3 \ldots A_n)$：volume$(A_1A_2K \ldots A_n)$：

$\ldots$：volume$(A_1A_2 \ldots A_{n-1}K) = c_1 : c_2 : \ldots : c_n$

$\iff \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{KA_i} = 0$

## 六、 線性獨立向量線性組合

$\mathbb{R}^k$中，線性獨立的$k$個實向量可以線性組合為$\mathbb{R}^k$中的任意向量。

## 七、 多點決定圖形與平面

$\mathbb{R}^{>k}$ 中不共 $k-1$ 維超平面的相異 $k+1$ 點可以決定一個 $k$ 維圖形，其凸包，與一個 $k$ 維超平面，其仿射包。

## 八、 點與超平面關係

$n$ 維空間中，點 **P** 與 $n-1$ 維超平面 $E$： $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - c = 0$，**P** 與 $E$ 的關係有：

- $P$ 在 $E$ 上：$\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} - c = 0$。
- $P$ 在 $E$ 的 **a** 方向半空間：$\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} - c > 0$。
- $P$ 在 $E$ 的 $-\mathbf{a}$ 方向半空間：$\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} - c < 0$。

## 九、 超平面間的關係

$n, k, m \in \mathbb{Z}$ 兩個 $k$ 維超平面在 $\mathbb{R}^n$ 空間中的可能關係有（條件為必要非充分）：

$$\begin{cases} \text{完全重合} & n \ge k \ge 0, \\ \text{平行} & n-1 \ge k \ge 0, \\ \text{正交相交：相交於 } k-1 \text{ 維的子空間。} & n-1 \ge k \ge 1, \\ \text{非正交相交：相交於 } m\,(m < k-1) \text{ 維的子空間。} & n-2 \ge k \ge m+2 \ge 2, \\ \text{歪斜：不平行也不相交。} & n-2 \ge k \ge 1. \end{cases}$$

正交相交中，若兩超平面之夾角為直角，即兩超平面之法向量之夾角為直角，稱兩超平面垂直。

## 十、　流形表達式

- $n-1$ 維流形一般式：$\mathbb{R}^n$ 中，一個 $n-1$ 維流形可以表示成：

$$f(\mathbf{x})=0,\ \text{where}\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ f\text{為光滑函數}$$

- $\leq n-1$ 維流形參數式：$\mathbb{R}^n$ 中，一個 $m\,(m\leq n)$ 維流形可以表示成：

$$\mathbf{x}=\mathbf{f}(\mathbf{u})\,\mathbf{x},\ \text{where}\ \mathbf{f}(\mathbf{u})\in\mathbb{R}^n,\ \mathbf{u}\in\mathbb{R}^m,\ \mathbf{f}\ \text{為光滑函數}$$

## 十一、　超平面表達式

- $n-1$ 維超平面一般式：$\mathbb{R}^n$ 中，一個 $n-1$ 維超平面可以表示成：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}+c=0,\ \text{where}\ \mathbf{a},\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ \mathbf{x}\text{為自變項},\ c\in\mathbb{R}$$

- $n-1$ 維超平面截距式：$\mathbb{R}^n$ 中，一個 $n-1$ 維超平面 $E$： $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=1$，`for` $i$ `in range(`$n$`):`，令 $a_i$ 為 $\mathbf{a}$ 平行於第 $i$ 方向單位向量 $e_i$ 分量，且 `for` $i$ `in range(`$n$`):` $a_i\neq 0,\ b_i=\dfrac{1}{a_i}$，則 $E$ 與第 $i$ 坐標軸的交點範數為 $b_i$，且該等交點與原點形成的超三角錐體積為 $\dfrac{\prod_{i=1}^{n}b_i}{n!}$。
- 超平面隱式方程：$\mathbb{R}^n$ 中，一個 $m\,(m\leq n-2)$ 維超平面可表示成：

`for` $j$ `in range(`$n-m$`):`
$\mathbf{a}_j\cdot\mathbf{x}+c_j=0,\ \text{where}\ \mathbf{a}_j,\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,$
$\mathbf{x}$ 為自變項, $c_j\in\mathbb{R},$
$\{$`for` $j$ `in range(`$n-m$`):` $\mathbf{a}_j\}$ 之間線性獨立

## 十二、　直線表達式

$\mathbb{R}^n$ 中一直線可表示為：

- 參數式：

$$L:\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{v}t,\quad t\in\mathbb{R}$$

其中 $\mathbf{x}$ 為自變數向量，$\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$ 為空間中一點，$\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 為直線方向向量。

- (對稱) 比例式：僅適用於直線方向向量各分量均不為零時。

$$L:\forall 0<i,j\leq n:\ \frac{x_i-x_{0i}}{v_i}=\frac{x_j-x_{0j}}{v_j}$$

其中 $\left((x_i)_{i=1}^n\right)$ 為自變數向量，$\left((x_{0i})_{i=1}^n\right)$ 為空間中一點，$\left((v_i)_{i=1}^n\right)$ 為直線方向向量。

## 十三、　超平面投影體積

兩 $k$ 維超平面 $L$、$M$ 夾角 $\theta$，$L$ 上一個 $k$ 維圖形在 $M$ 上的投影體積為原本體積的 $|\cos\theta|$ 倍。

## 十四、 超平行體體積

$$\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^n, O = O_n：$$

$$\left|\det\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}\right|$$

=Volume of the $n$-dimensional shape spanned by the vectors$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$

## 十五、 超三角錐體積

$\mathbb{R}^d$ 中，原點與 $d$ 個點形成一個體積 $V$ 的超三角錐，該 $d$ 個點形成的 $d \times d$ 矩陣為 $M$：

$$V = \frac{|\det(M)|}{d!}$$

## 十六、 過一點平面與座標軸所圍超三角錐體積最小值

令：$\mathbb{R}^d$ 中，第 $i$ 維單位向量為 $e_i$；過 $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{d} p_i e_i$ 之超平面 $E$： $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 1$ 與所有座標軸所圍成的超三角錐體積為 $V$，其中 $\forall 1 \le i \le n$： $p_i \ne 0$。

當 $E$ 通過 $\frac{p_i}{d} e_i \, (1 \le i \le n)$ 時，$V$ 有最小值 $\frac{d^d \prod_{i=1}^{d} p_i}{d!}$。

*Proof.*

令 $E$ 與各軸的交點為 $c_1 e_1, c_2 e_2, \ldots, c_d e_d$。

$$V = \frac{\prod_{i=1}^{d} c_i}{d!}$$

$$\forall 1 \le i \le n：\ c_i \mathbf{n} \cdot e_i - 1 = 0$$

即：

$$c_i = \frac{1}{n_i}$$

其中 $n_i$ 是 $\mathbf{n}$ 在第 $i$ 個維度的分量。

故：

$$V = \frac{1}{d! \prod_{i=1}^{d} n_i}$$

欲求函數：

$$V = \frac{1}{d! \prod_{i=1}^{d} n_i}$$

在限制條件：

$$\sum_{i=1}^{d} n_i p_i = 0$$

下的最小值。

利用拉格朗日乘數法，令存在拉格朗日乘數 $\lambda$，使得：

$$\mathcal{L}(n_1, n_2, \ldots, n_d, \lambda) = \frac{1}{d! \prod_{i=1}^{d} n_i} + \lambda \sum_{i=1}^{d} n_i p_i$$

求 $\mathcal{L}$ 對每個 $n_j$ 的偏導數並令其為零：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_j} = -\frac{1}{d!\prod_{i=1}^{d} n_i n_j} + \lambda p_j = 0$$

整理得到：

$$\lambda p_j = \frac{1}{d!\prod_{i=1}^{d} n_i n_j}$$

令

$$p_j n_j = \frac{1}{d!\lambda \prod_{i=1}^{d} n_i} \quad \forall j$$

令常數 $C$，使得：

$$p_j n_j = C \quad \forall j$$

$$\sum_{i=1}^{d} n_i p_i = Cd = 1$$

$$C = \frac{1}{d}$$

因此：

$$n_j = \frac{1}{dp_j}$$

$$c_j = dp_j$$

$$V = \frac{1}{d!\prod_{i=1}^{d} n_i} = \frac{1}{d!} \cdot \left( \prod_{i=1}^{d} dp_i \right) = \frac{d^d \prod_{i=1}^{d} p_i}{d!}$$

□

# 第十節　二維空間相關定理

## 一、　二點分點公式

$$m,\, n \in \mathbb{R},\, mn > 0：\ K \text{ on } \overline{AB},\ \overline{AK}：\overline{KB} = m：n \iff \mathbf{K} = \frac{n}{m+n}\mathbf{A} + \frac{m}{m+n}\mathbf{B}$$

## 二、　平面上二點分點公式擴展圖形

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB},\ x,\ y \in \mathbb{R}：\begin{cases} P \text{ on } \overleftrightarrow{AB} \iff x + y = 1 \\ x + y = 1 \wedge xy \geq 0 \iff P \text{ on } \overline{AB} \\ x + y < 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0 \iff P \text{ in } \Delta OAB \\ x + y > 1 \vee x < 0 \vee y < 0 \iff P \text{ outside of } \Delta OAB \end{cases}$$

# 第十一節　三維空間相關定義與定理

## 一、　三維右手與左手笛卡爾坐標系

- 右手座標系：滿足右手法則，即假設用右手握住一個三維右手座標系，其中大拇指、食指和中指分別指向 $x$、$y$、$z$ 軸的正方向。較常用。
- 左手座標系：滿足左手法則，即假設用左手握住一個三維左手座標系，其中大拇指、食指和中指分別指向 $x$、$y$、$z$ 軸的正方向。

## 二、　三維右手笛卡爾坐標系的卦限

I(+, +, +)、II(-, +, +)、III(-, -, +)、IV(+, -, +)、V(+, +, -)、VI(-, +, -)、VII(-, -, -)、VIII(+, -, -)

## 三、　三維向量外積定義

三維向量 **a**、**b**：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} (\mathbf{i}, \mathbf{j}\, \mathbf{k}) \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

三維向量外積性質：
三維向量 **a**、**b**：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta_{\mathbf{ab}}$$

## 四、　三重積

$$\forall A,\ B,\ C \in \mathbb{R}^3:\ A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

$\forall A,\ B,\ C \in \mathbb{R}^3,\ O = (0,\ 0,\ 0)$：
$|A \cdot (B \times C)|$ = Volume of the parallelepiped spanned by the vectors$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$

## 五、　兩面角

由共用邊界直線的兩半平面圍成的夾角稱兩面角，該共用邊界直線稱此兩面角的稜。

## 六、　兩面式與平面系

- 兩面式：直線的兩面式表示為兩個平面方程同時成立。
- 平面系：一直線的平面系指通過該直線的所有平面之集合，可表示為該直線的兩面式中的兩平面方程的線性組合。

## 七、 點到直線

點 $P(p, q, r)$ 到直線 $L$ ： $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ ，$t \in \mathbb{R}$ 的距離為 $d(P, L)$，$P$ 在 $L$ 上的投影點為 $Q$，$\mathbf{v} = (a, b, c)$：

1. 用 $\overline{PQ} \cdot (a, b, c) = 0$ 求 $Q$。
2. $d(P, L) = \min\left(\sqrt{\left(p - (x_0 + at)\right)^2 + \left(q - (y_0 + bt)\right)^2 + \left(r - (z_0 + ct)\right)^2}\right)$，將 $d(P, L) = \sqrt{\left(p - (x_0 + at)\right)^2 + \left(q - (y_0 + bt)\right)^2 + \left(r - (z_0 + ct)\right)^2}$ 時的 $t$ 代回 $L$ 得 $Q$。
3. $L$ 上任一點 $A$，$d(P, L) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AP} \times \mathbf{v}\right|}{|\mathbf{v}|}$，$Q = A + \left(\dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^2}\mathbf{v}\right)$。

## 八、 兩歪斜線

兩直線 $L$：$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ ，$t \in \mathbb{R}$ 與 $M$ ：$\begin{cases} x = x_1 + dk \\ y = y_1 + ek \\ z = z_1 + fs \end{cases}$ ，$s \in \mathbb{R}$ 互相歪斜，公垂線交 $L$ 於 $P$、交 $M$ 於 $Q$，$d(L, M) = \overline{PQ}$，$\mathbf{u} = (a, b, c)$，$\mathbf{v} = (d, e, f)$：

1. 解 $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{v} = 0$ 得 $P$、$Q$。
2. 令平行平面 $E$ 包含 $L$、平面 $F$ 包含 $M$，該二平面之法向量 $\mathbf{n} // (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$，以 $L$ 上一點求平面 $E$，求 $M$ 上任一點與 $E$ 距離。

## 九、 點對平面之投影點

令平面外一點 $P$ 對平面 $\mathbf{n} \cdot (x, y, z) + d = 0$ 投影點 $H$：

$$\overrightarrow{PH} = \left(\frac{\overrightarrow{PH} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n}^2}\right)\mathbf{n}$$

## 十、 三垂線定理

Provided that point $B$, $C$, and line $L$ on plane $E$. If two of the following three statements are true, then the rest one must be true.

$$\overline{AB} \perp E \qquad (1)$$

$$\overline{BC} \perp L \text{ at } C \qquad (2)$$

$$\overline{AC} \perp L \text{ at } C \qquad (3)$$

*Proof.*

*Proof of* $(1) \wedge (2) \implies (3)$*:*

Assume that $\overline{AB} \perp E$ and $\overline{BC} \perp L$ at $C$.

1. Since $\overline{AB} \perp E$, the line segment $\overline{AB}$ is perpendicular to the plane $E$, meaning $AB$ is parallel to the normal vector $\mathbf{n}_E$ of the plane $E$.
2. Since $\overline{BC} \perp L$ at $C$, the line segment $\overline{BC}$ is perpendicular to the line $L$ at point $C$.
3. The key observation is that $L$ lies within plane $E$. Therefore, the normal vector $\mathbf{n}_E$ is perpendicular to any vector lying on $L$.
4. Given $\overline{BC} \perp L$, the direction of $\overline{BC}$ must be along $\mathbf{n}_E$, meaning it is perpendicular to the plane $E$. This implies that any line perpendicular to $L$ at $C$ must also be perpendicular to any other line in $E$ that is perpendicular to $L$ at $C$.
5. Since $\overline{AB}$ is already perpendicular to $E$ (and hence to any line in $E$), $\overline{AC}$ must also be perpendicular to $L$ at $C$.

Thus, $\overline{AC} \perp L$ at $C$, so $(1) \wedge (2) \implies (3)$.

*Proof of* $(2) \wedge (3) \implies (1)$*:*

Assume that $\overline{BC} \perp L$ at $C$ and $\overline{AC} \perp L$ at $C$.

1. Since both $\overline{BC}$ and $\overline{AC}$ are perpendicular to $L$ at $C$, the vectors $\overrightarrow{BC}$ and $\overrightarrow{AC}$ are both perpendicular to $L$. Therefore, $\overrightarrow{BC}$ and $\overrightarrow{AC}$ lie in a plane that is perpendicular to $L$ at $C$.
2. Since $L$ lies in $E$, the plane that $\overrightarrow{BC}$ and $\overrightarrow{AC}$ lie in is perpendicular to $E$ because $\overrightarrow{BC}$ and $\overrightarrow{AC}$ are perpendicular to a line that lies in $E$.
3. Therefore, the line $\overrightarrow{AB}$, which must be within the same perpendicular plane as $\overrightarrow{BC}$ and $\overrightarrow{AC}$, is also perpendicular to $E$.

Thus, $\overline{AB} \perp E$, so $(2) \wedge (3) \implies (1)$.

*Proof of* $(1) \wedge (3) \implies (2)$*:*

Assume that $\overline{AB} \perp E$ and $\overline{AC} \perp L$ at $C$.

1. Since $\overline{AB} \perp E$, the line segment $\overline{AB}$ is perpendicular to the plane $E$.
2. Since $\overline{AC} \perp L$ at $C$, the line segment $\overline{AC}$ is perpendicular to the line $L$ at $C$.
3. As $L$ lies in $E$, and $\overline{AB}$ is perpendicular to $E$, the direction of $\overline{AB}$ corresponds to the normal vector $\mathbf{n}_E$ of the plane $E$.
4. Now, since $\overline{AC}$ is perpendicular to $L$ at $C$, and both $\overline{AB}$ and $L$ lie in the same plane $E$, the vector $\overrightarrow{BC}$ must also be perpendicular to $L$ at $C$.

Thus, $\overline{BC} \perp L$ at $C$, so $(1) \wedge (3) \implies (2)$. $\square$