黃金比例

沈威宇

2025 年 6 月 29 日

目錄

第一節　黃金比例（Golden Ratio）

一、　黃金比例（Golden ratio）

黃金比例 $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$。

黃金比例之倒數 $\dfrac{1}{\phi} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$。

二、　黃金分割點

定義：$\overline{AB}$ 上取一點 C，使 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$，此時 C 點稱線段 $\overline{AB}$ 之黃金分割點，且 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \Phi$。

三、　黃金矩形（Golden rectangle）

定義：矩形 $ABCD$ 使 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi$。

分割：將黃金矩形 $ABCD$ 分成二塊，其一 $ABFE$ 為正方形，則其二 $DEFC$ 為黃金矩形。

四、　黃金三角形（Golden triangle）

定義：腰長與底長之比值為黃金比例或其倒數之等腰三角形，即頂角 $\dfrac{\pi}{5}$ 或 $\dfrac{3\cdot\pi}{5}$ 之等腰三角形。

頂角 $\dfrac{\pi}{5}$ 之等腰三角形之分割：取一腰，其上取一點，使底邊及底邊二端點與該點之連線為一頂角 $\dfrac{\pi}{5}$ 之等腰三角形；取該三角形不與原三角形之邊重合之腰，其上取一點，使底邊及底邊二端點與該點之連線為一頂角 $\dfrac{\pi}{5}$ 之等腰三角形；後不斷取新三角形不與前一三角形之邊重合之腰，其上取一點，使底邊及底邊二端點與該點之連線為一頂角 $\dfrac{\pi}{5}$ 之等腰三角形。依此法，每次分割均產生一頂角 $\dfrac{\pi}{5}$ 之等腰三角形及一頂角 $\dfrac{3\cdot\pi}{5}$ 之等腰三角形。

五、　直角黃金三角形

定義：三邊長比例為 1：$\sqrt{\Phi}$：Φ 之直角三角形。

六、　正五角星形（Pentagram）

性質：令正五角星形 $AFBGCHDIEJ$ 外接五邊形 $ABCDE$ 及內接五邊形 $FGHIJ$，則點 J 為線段 $\overline{BE}$ 的黃金分割點、點 F 為線段 $\overline{BJ}$ 的黃金分割點、內接五邊形邊長為外接五邊形邊長的 $\dfrac{1}{\Phi^2} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 倍、$\overline{AF}$ 為外接五邊形邊長的 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 倍。

七、　黃金螺線（Golden spiral）

定義：自原點向外展開的螺線以極座標方程表示為 $r = a \cdot \Phi^{\frac{2\cdot\theta}{\pi}}$，其中 a 為常數。a 為正則螺線逆時針向外展開，為負則螺線順時針向外展開，為零則圖形僅一點；$|a|$ 愈大，螺線相鄰二層間距愈大。

以黃金矩形近似：將黃金矩形分割之各正方形依序作圓心角 $\frac{\pi}{2}$ 之扇形，半徑為該正方形之邊長，第一個扇形之圓心為靠近剩餘黃金矩形的二頂點任一者，其餘扇形之圓心為最靠近前一扇形圓心者。
以頂角 $\frac{\pi}{5}$ 之等腰三角形近似：取其分割之各頂角 $\frac{3 \cdot \pi}{5}$ 之等腰三角形，以頂角為圓心，腰為半徑，作圓心角 $\frac{3 \cdot \pi}{5}$ 之扇形。

八、 黃金角（Golden angle）

定義：將圓周長依 $1 : \Phi$ 分割成二段，較小之弧長對應之圓心角稱之。其值為 $2 \cdot \pi - \frac{2 \cdot \pi}{\Phi} \approx 137.5°$。

九、 費波納契數列（Successione di Fibonacci）

費波納契數列第 n 項 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$。
$lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

十、 生成螺線（Generative spiral）

若用顯微鏡觀察新芽頂端，可見所有植物的主要徵貌，包含葉子、花瓣、萼片、小花（floret）等，之生長過程，在頂端的中央有一圓形的組織，稱「頂尖」（apex）；而在頂尖的周圍有微小隆起物一個接一個的形成，這些隆起稱「原基」（primordium）。成長時，每一個原基自頂尖移開（頂尖從隆起處向外生長，新的原基在原地），最後長成葉子、花瓣、萼片等，每一原基並希望其生成之器官能夠獲得最大的生長空間，故原基與原基隔得相當開，且較早產生的原基移開得較遠，與頂尖之距離較長。若依照原基的生成時間順序描出原基的位置，可畫出一條捲繞得非常緊的螺線，稱「生成螺線」（generative spiral）。相鄰兩原基之間的角度，稱「發散角」（divergence angle）。在發散角固定的假設下，使原基盡可能緊密排列的發散角為黃金角。當發散角為黃金角時，同時可見左右旋螺線，即一組順時針、一組逆時針，稱「斜列線」（parastichy）。兩組螺線的數目是相鄰的費波納契數。若發散角非黃金角，則原基非盡可能緊密排列，且僅可見一組斜列線。