函數

沈威宇

2025 年 6 月 29 日

目錄

第一節　函數（Functions）

一、　Definition

A function is formed by three sets, the domain (定義域) X, the codomain (對應域) Y, and the graph R that satisfy the three following conditions.

$$R \subseteq \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

$$\forall x \in X, \exists y \in Y, (x, y) \in R$$

$$(x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \implies y = z$$

二、　Denotation

A function f is defined by

$$R \subseteq \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

$$\forall x \in X, \exists y \in Y, (x, y) \in R$$

$$(x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \implies y = z$$

We denote X as D_f, define range (值域), denoted as R_f or $f(X)$, as

$$R_f = f(X) = \{y \mid x \in X \wedge (x, y) \in R$$

and denote f as $f : D_f \to R_f$.
If

$$x \in X \wedge (x, y) \in R$$

, we call x independent variable, call y dependent variable, denote $y = f(x)$, and call $f(x)$ functional value.

第二節　函數性質

一、　單射（Injection）/一對一（One-to-one）

$$\text{函數 } f : V \to W \text{ 為單射函數} \iff \forall x_1, x_2 \in V \text{ s.t. } f(x_1) = f(x_2) : x_1 = x_2$$

二、　多對一（Many-to-one）

$$\text{函數 } f : V \to W \text{ 為多對一函數} \iff \exists x_1, x_2 \in V \wedge x_1 \neq x_2 \text{ s.t. } f(x_1) = f(x_2)$$

三、　滿射/蓋射（Surjection, Onto）

$$\text{函數 } f : V \to W \text{ 為滿射函數} \iff f(V) = W$$

四、　對射（Bijection）

$$\text{函數 } f \text{ 為對射函數} \iff \text{函數 } f \text{ 為單射且滿射}$$

五、　光滑（Smooth）

$$\text{函數 } f(x): V \to W \text{ 為光滑函數，即 } C^{\infty} \iff \forall a \in V \forall n \in \mathbb{N} \exists \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}(a)$$

六、　遞增及遞減

- 函數 f 為遞增（Increasing）函數 $\iff \forall x_1, x_2 \in D_f$ ：$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- 函數 f 為遞減（Decreasing）函數 $\iff \forall x_1, x_2 \in D_f$ ：$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$
- 函數 f 為嚴格遞增（Strictly Increasing）函數 $\iff \forall x_1, x_2 \in D_f$ ：$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- 函數 f 為嚴格遞減（Strictly Decreasing）函數 $\iff \forall x_1, x_2 \in D_f$ ：$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- 函數 f 在 I 上遞增（Increasing） $\iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f$ ：$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- 函數 f 在 I 上遞增（Increasing） $\iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f$ ：$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- 函數 f 在 I 上遞減（Decreasing） $\iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f$ ：$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$
- 函數 f 在 I 上嚴格遞增（Strictly Increasing）$\iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f$ ：$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- 函數 f 在 I 上嚴格遞減（Strictly Decreasing） $\iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f$ ：$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

七、　合成函數（Composite Function）

$$\text{合成函數：} (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

其中 $g(x)$ 的定義域 D_g 與 f 的定義域 D_f 必須滿足 $g(D_g) \subseteq D_f$ 。

八、　反函數（Inverse Function）

$$\text{反函數：} f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

其中 f 必須是雙射，且反函數的定義域為 f 的值域，值域為 f 的定義域。

九、　分段函數（Piecewise Function）

$$\text{分段函數：} f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{if } x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{if } x \in A_2 \\ \vdots \\ f_n(x), & \text{if } x \in A_n \end{cases}$$

其中 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 D_f 的子集，且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = D_f$ 。

十、　線性變換（Linear transformation）

(一)　平移（Translation）

對於任意單變數函數 $f(x)$，$y = f(x)$ 右移 h 單位，上移 k 單位，得 $y = f(x-h) + k$。

(二)　縮放/伸縮（Scaling）

對於任意單變數函數 $f(x)$，$y = f(x)$ 以 x 軸為基準線鉛直伸縮為原來的 a 倍，以 y 軸為基準線水平伸縮為原來的 b 倍，得 $y = af\left(\frac{x}{b}\right)$。