複數與複數平面

沈威宇

2025 年 3 月 2 日

目錄

第一節　複數與複數平面

一、　複數（Complex Number）

- 複數：可表示成 $z = a + bi$ 得數，其中 $a, b \in \mathbb{R}$。
- 實部（Real part）：$z = a + bi$ 的實部 $\Re(z) = a$。
- 虛部（Imaginary part）：$z = a + bi$ 的虛部 $\Im(z) = b$。
- 虛數：虛部不為零的複數。
- 純虛數：實部為零的虛數。

二、　共軛複數（Conjugate complex number）

z 的共軛複數 $\bar{z}$，稱 z bar，為其實部加上其虛部的負一倍。

(一)　複數除法

複數除法可將分子與分母同乘以分母的共軛複數計算。

(二)　共軛複數的性質

- $$\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}.$$
- $$\overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{z_1 - z_2}.$$
- $$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$
- $$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\frac{z_1}{z_2}}, \quad z_2 \neq 0.$$
- $$\overline{z^n} = \left(\bar{z}\right)^n, \quad zn \neq 0.$$
- $$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

三、　複數的絕對值/向徑/模（長）

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

即：

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

四、 負實數的根號

令 $a > 0$，定義：

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i.$$

五、 歐拉公式（Euler's formula）

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

六、 多項式的性質

(一) 代數基本定理（Fundamental theorem of algebra）

任何一個次數大於零的複係數 n 次方程式都至少有一個複數根。

(二) 根數

若 k 重根計作 k 個根，則複係數 n 次多項式方程恰有 n 個複數根。

(三) 虛根成對定理

實係數多項式方程 $f(x) = 0$ 如有虛根 x 則 $\bar{x}$ 亦為其根。

(四) 共軛複數的函數值

實係數多項式函數 f、複數 z：

$$\overline{f(z)} = f\left(\bar{z}\right).$$

(五) 奇數次實係數多項式方程

奇數次實係數多項式方程必有實根。

七、 複數平面(Complex plane)/阿爾岡平面(Argand plane)/高斯平面(Gaussian plane)

由實軸為橫軸與虛軸為縱軸定義的二位笛卡爾座標平面，與複數域一一對應。

八、 輻角（Argument）

此處輻角用 $\arg(z)$ 代表 z 的輻角，用 $\mathrm{Arg}(z)$ 代表 z 的輻角主值/主輻角，少數文獻反之。

(一) 輻角

設有非零複數 $z = x + yi \in \mathbb{C}_{\neq 0}$，其中 $x, y \in \mathbb{R}$，那麼 z 的輻角 $\arg(z) = \varphi$ 指的是使等式：

$$z = x + yi = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

成立的任何實數 φ。

$\arg(0)$ 可為任意角。

(二) 輻角主值/主輻角

設有非零複數 $z = x + yi \in \mathbb{C}_{\neq 0}$，其中 $x, y \in \mathbb{R}$，那麼 z 的輻角主值 $\operatorname{Arg}(z)$ 為：

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{atan2}(y, x)$$

(三) 複數極式

令複數 z 有輻角 θ，則其極式為：

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

九、 複數運算的幾何意義

(一) 四則運算

- 複數相加減，兩平面向量相加減。
- 複數相乘，模長相乘、輻角相加。
- 複數相除，模長相除、輻角相減。

(二) 棣美弗公式（De Moivre’s formula）

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \quad r \neq 0 \wedge n \in \mathbb{Z}.$$

在 n 非整數時右式為左式之其中一解。

(三) 雙曲線函數棣美弗公式

$$(r(\cosh\theta + i\sinh\theta))^n = r^n(\cosh(n\theta) + i\sinh(n\theta)), \quad r \neq 0 \wedge n \in \mathbb{Z}.$$

在 n 非整數時右式為左式之其中一解。

(四) 點積

複數平面上 $P(z_1)$ 與 $Q(z_2)$ 的點積為 $\Re(z_1 \cdot \overline{z_2})$。

十、 複數的冪及其在複數平面上的幾何意義

(一) 1 的正整數分之一次冪及其在複數平面上的幾何意義

令 $n \in \mathbb{N}$，$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$，則 $1^{\frac{1}{n}}$，即 $x^n = 1$ 的 n 個根，為 ω 的 0 到 $n-1$ 次方，即：

$$e^{\frac{2\pi k}{n}} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{N}_0 < n.$$

彼等根在複數平面上為以原點為圓心的單位圓的內接正 n 邊形的 n 個頂點。

(二) 非零複數的正整數分之一次冪及其在複數平面上的幾何意義

令 $z \in \mathbb{C}_{\neq 0} \wedge n \in \mathbb{N}$，$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$，則 $z^{\frac{1}{n}}$，即 $x^n = z$ 的 n 個根為 $\sqrt[n]{|z|}$ 乘以 ω 的 0 到 $n-1$ 次方，即：

$$\sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\operatorname{Arg}(z)+2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}(z)+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}(z)+2\pi k}{n}\right), \quad k \in \mathbb{N}_0 < n.$$

彼等根在複數平面上為以原點為圓心、半徑 $\sqrt[n]{|z|}$ 的圓的內接正 n 邊形的 n 個頂點。

(三) 非零複數的複數次冪及其在複數平面上的幾何意義

令 $z \in \mathbb{C}_{\neq 0} \wedge w \in \mathbb{C}$，則 z^w 為：

$$\begin{aligned}
z^w =& e^{w\ln(z)} \\
=& \left(|z|e^{i\arg(z)}\right)^w \\
=& |z|^{\Re(w)}|z|^{\Im(w)i}e^{i\Re(w)\arg(z)}e^{-\Im(w)\arg(z)} \\
=& |z|^{\Re(w)}e^{-\Im(w)\arg(z)+i(\Re(w)\arg(z)+\Im(w)\ln|z|)} \\
=& |z|^{\Re(w)}e^{-\Im(w)\arg(z)}\left(\cos\left(\Re(w)\arg(z)+\Im(w)\ln|z|\right)+i\sin\left(\Re(w)\arg(z)+\Im(w)\ln|z|\right)\right),
\end{aligned}$$

其中：

$$\arg(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

彼等根在複數平面上為螺旋

$$|z|^{\Re(w)}e^{-\Im(w)\theta}\left(\cos\left(\Re(w)\theta+\Im(w)\ln|z|\right)+i\sin\left(\Re(w)\theta+\Im(w)\ln|z|\right)\right)$$

上等輻角差的點。

模長：

$$\left|z^w\right| = |z|^{\Re(w)}e^{-\Im(w)\arg(z)}.$$

- 當 $\Im(w) > 0$：模長對 k 指數衰減，即隨 k 增大趨近於零、隨 k 減小發散至無限大。
- 當 $\Im(w) < 0$：模長對 k 指數增長，即隨 k 增大發散至無限大、隨 k 減小趨近於零。
- 當 $\Im(w) = 0$：模長始終為 $|z|^{\Re(w)}$，即在複數平面上根在以原點為圓心、半徑 $|z|^{\Re(w)}$ 的圓上。

輻角：

$$\arg\left(z^w\right) = \Re(w)\arg(z) + \Im(w)\ln|z|.$$

- 當 $\Re(w) > 0$：輻角對 k 線性增長，即隨 k 增大逆時針旋轉、隨 k 減小順時針旋轉。
- 當 $\Re(w) < 0$：輻角對 k 線性衰減，即隨 k 增大順時針旋轉、隨 k 減小逆時針旋轉。
- 當 $\Re(w) \in \mathbb{Z}$：輻角主值始終為 $\left(\Re(w)\operatorname{Arg}(z)+\Im(w)\ln|z|\right) \mod (2\pi)$，即在複數平面上根在輻角 $\Re(w)\operatorname{Arg}(z)+\Im(w)\ln|z|$ 的射線上。

螺旋方向：

- 當 $\Re(w)\Im(w) > 0$：在複數平面上根在以原點為中心點的順時針發散的螺旋上。
- 當 $\Re(w)\Im(w) < 0$：在複數平面上根在以原點為中心點的逆時針發散的螺旋上。
- 當 $\Im(w) = 0$：在複數平面上根在以原點為圓心的圓上。

根的個數：

- 當 $\Im(w) = 0 \wedge \Re(w) \in \mathbb{Q}$：令 $|\Re(w)| = \frac{m}{n}$ 其中 $n \in \mathbb{N}, \gcd(m, n) = 1$，則有 n 個根，且彼等根在複數平面上為以原點為圓心、半徑 $|z|^{\Re(w)}$ 的圓的內接正 n 邊形的 n 個頂點，且其中一個頂點在輻角 $\Re(w)\operatorname{Arg}(z)$ 的射線上。
- 其他情況：有無限多個根。