# 函數

沈威宇

2024 年 12 月 27 日

# 目錄

# 第一節　函數

## 一、　Definition

A function is formed by three sets, the domain (定義域) $X$, the codomain (對應域) $Y$, and the graph,$R$ that satisfy the three following conditions.

$$R \subseteq \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

$$\forall x \in X, \exists y \in Y, (x, y) \in R$$

$$(x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \implies y = z$$

## 二、　Denotation

A function $f$ is defined by

$$R \subseteq \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

$$\forall x \in X, \exists y \in Y, (x, y) \in R$$

$$(x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \implies y = z$$

We denote $X$ as $D_f$, define range (值域), denoted as $R_f$ or $f(X)$, as

$$R_f = f(X) = \{y \mid x \in X \wedge (x, y) \in R$$

and denote $f$ as $f : D_f \to R_f$.
If

$$x \in X \wedge (x, y) \in R$$

, we call $x$ independent variable, call $y$ dependent variable, denote $y = f(x)$, and call $f(x)$ functional value.

# 第二節　函數性質

## 一、　單射（**Injection**）/一對一（**One-to-one**）

$$\text{函數 } f: V \to W \text{ 為單射函數} \iff \forall x_1, x_2 \in V \text{ s.t. } f(x_1) = f(x_2): x_1 = x_2$$

## 二、　多對一（**Many-to-one**）

$$\text{函數 } f: V \to W \text{ 為多對一函數} \iff \exists x_1, x_2 \in V \wedge x_1 \neq x_2 \text{ s.t. } f(x_1) = f(x_2)$$

## 三、　滿射/蓋射（**Surjection, Onto**）

$$\text{函數 } f: V \to W \text{ 為滿射函數} \iff f(V) = W$$

## 四、　對射（**Bijection**）

$$\text{函數 } f \text{ 為對射函數} \iff \text{函數 } f \text{ 為單射且滿射}$$

## 五、　光滑（Smooth）

$$\text{函數 } f(x)：V \to W \text{ 為光滑函數，即 } C^{\infty} \iff \forall a \in V \forall n \in \mathbb{N} \exists \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$$

## 六、　遞增及遞減

$$\text{函數 } f \text{ 為遞增（Increasing）函數} \iff \forall x_1, x_2 \in D_f：x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$\text{函數 } f \text{ 為遞減（Decreasing）函數} \iff \forall x_1, x_2 \in D_f：x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$\text{函數 } f \text{ 為嚴格遞增（Strictly Increasing）函數} \iff \forall x_1, x_2 \in D_f：x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

$$\text{函數 } f \text{ 為嚴格遞減（Strictly Decreasing）函數} \iff \forall x_1, x_2 \in D_f：x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

$$\text{函數 } f \text{ 在 } I \text{ 上遞增（Increasing）} \iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f：x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$\text{函數 } f \text{ 在 } I \text{ 上遞增（Increasing）} \iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f：x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$\text{函數 } f \text{ 在 } I \text{ 上遞減（Decreasing）} \iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f：x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$\text{函數 } f \text{ 在 } I \text{ 上嚴格遞增（Strictly Increasing）} \iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f：x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

$$\text{函數 } f \text{ 在 } I \text{ 上嚴格遞減（Strictly Decreasing）} \iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f：x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

## 七、　分段函數（Piecewise Function）

$$\text{分段函數：} f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{if } x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{if } x \in A_2 \\ \vdots & \\ f_n(x), & \text{if } x \in A_n \end{cases}$$

其中 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 $D_f$ 的子集，且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = D_f$。

## 八、　合成函數（Composite Function）

$$\text{合成函數：} (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

其中 $g(x)$ 的定義域 $D_g$ 與 $f$ 的定義域 $D_f$ 必須滿足 $g(D_g) \subseteq D_f$。

## 九、　反函數（Inverse Function）

$$\text{反函數：} f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

其中 $f$ 必須是雙射，且反函數的定義域為 $f$ 的值域，值域為 $f$ 的定義域。