三角學

沈威宇

2025 年 1 月 17 日

目錄

第一章　三角學（Trigonometry）

第一節　角（Angle）

一、　弧度與角度

(一)　弧度（radian）/弳/弳度

指圓周上一段弧長與其對應半徑的比值。物理上無因次。單位同其名或通常省略。扇形的弧長等於其弧度乘以半徑；扇形的面積等於其弧度乘以半徑平方除以二。

(二)　角度（degree）

一個完整的圓被平分為 360°。物理上無因次。

$$\frac{1\text{弳}}{1^\circ} = \frac{\pi}{180} \approx 57.3 \approx \frac{1}{0.0175}$$

$$\pi \approx 3.14159265, \quad \frac{1}{\pi} \approx 0.3183$$

二、　廣義角

指將角從 $[0, 2\pi)$ 的普通角擴展到任意實數。
同界角：α、β 為同界角 $\iff \dfrac{\alpha - \beta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$

三、　極坐標系（Polar Coordinate System）

一種二維坐標系，用於表示平面上的點，其位置由一對數值（距離 r 和角度 θ）來確定。與笛卡爾坐標系統（Cartesian Coordinate System）不同。

- 距離 r：從極點（通常是坐標原點 O）到點 P 的距離。$r \geq 0$。
- 角度 θ：從極軸（通常是水平的正 x 軸）逆時針旋轉到點 P 所在的射線的角度。角度可以用弧度或度數表示。
- 點 P 的極坐標表示為 $[r, \theta]$。
- 從極坐標到直角坐標的轉換：

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

- 從直角坐標到極坐標的轉換：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

四、　斜角

斜角指切線與 x 軸的最小夾角，其正切值為其斜率。

五、　三角測量

- 仰角：仰視目標時，視線與水平線的夾角。
- 俯角：俯視目標時，視線與水平線的夾角。
- 方位角（地理）：以正北為 0°，順時針為正。
- 象限角（地理）：以東南西北某一方位（通常為正北或正南）為基準，加上向相鄰方位轉向的度數與該相鄰方位，如北 35° 西 代表方位角 325°、南 30° 西代表方位角 210°。

第二節　三角比（Trigonometric Ratios）與三角函數（Trigonometric functions）

一、　銳角三角比

- 正弦（Sine，sin）：正弦值是對應角的對邊與斜邊之比，即：

$$\sin\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$$

- 餘弦（Cosine，cos）：餘弦值是對應角的鄰邊與斜邊之比，即：

$$\cos\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$$

- 正切（Tangent，tan）：正切值是對應角的對邊與鄰邊之比，即：

$$\tan\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$$

- 餘切（Cotangent，cot）：

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- 正割（Secant，sec）：

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

- 餘割（Cosecant，csc）：

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

二、 廣義角（General angles）三角比/三角函數幾何定義

在單位圓中，令角度的測量方式是從正 x 軸開始，逆時針方向為正角，順時針方向為負角，且角度數值可以是任何實數。任意角度的三角函數值可以表示為：

- 正弦（Sine，sin）：角 θ 的正弦值是單位圓上 對應點的 y 坐標，即：

$$\sin\theta = y$$

  。為奇函數，定義域 $\mathbb{R}$，值域 $[-1, 1]$，週期 2π，振幅 1，線對稱於 $x = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$，點對稱於 $((n\pi,\ n \in \mathbb{Z}),\ 0)$。

- 餘弦（Cosine，cos）：角 θ 的餘弦值是單位圓 上對應點的 x 坐標，即：

$$\cos\theta = x$$

  。為偶函數，定義 域 $\mathbb{R}$，值域 $[-1, 1]$，週期 2π，振幅 1，線對稱於 $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$，點對稱於 $\left(\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right),\ 0\right)$，$\cos(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 。

- 正切（Tangent，tan）：角 θ 的正切值是正弦值與餘弦值的比，即：

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

  。為奇函數，定義域 $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \pi \nmid \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$，值域 $\mathbb{R}$，週期 π，點對稱於 $\left(\left(\frac{n}{2}\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right),\ 0\right)$。

- 餘切（Cotangent，cot）：

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

  。為奇函數，定義域 $\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \nmid x\}$，值域 $\mathbb{R}$，週期 π，點對稱於 $\left(\left(\frac{n}{2}\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right),\ 0\right)$，$\cot(x) = -\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$。

- 正割（Secant，sec）：

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

  。為偶函數，定義域 $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \pi \nmid \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$，值域 $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \le y \vee y \le 1\}$，週期 π，線對稱於 $((n\pi,\ n \in \mathbb{Z}),\ 0)$，點對稱於 $x = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$。

- 餘割（Cosecant，csc）：

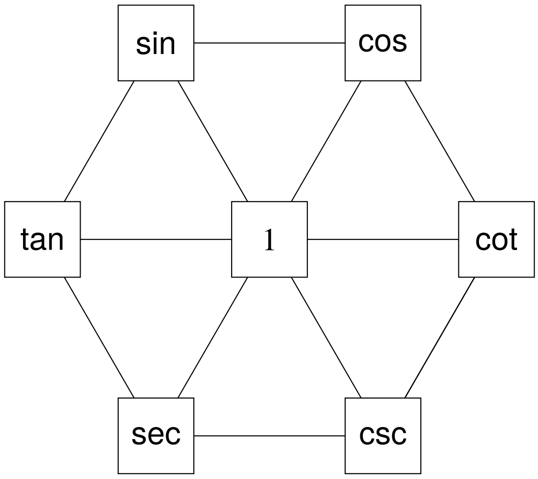
$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

  。為奇函數，定義域 $\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \nmid x\}$，值域 $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \le y \vee y \le 1\}$，週期 π，線對稱於 $x = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$，點對稱於 $((n\pi,\ n \in \mathbb{Z}),\ 0)$，$\csc(x) = \sec\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$。

三、 特殊角三角函數值

Radian	Angle	sin	cos	tan
0	0°	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	
π	180°	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{3}$	60 °	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{12}$	15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{12}$	75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	18°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$\frac{2\pi}{10}$	36°	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$\frac{3\pi}{10}$	54°	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$\frac{4\pi}{10}$	72°	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$

四、 三角函數基本關係



- 名稱：左側三者為正；右側三者為餘；上面二者為弦；中間二者為切；下面二者為割。
- 餘角關係：以鉛直軸為對稱軸，位於線對稱位置的三角比為餘角關係，即對於銳角 θ，左 $(\theta) =$ 右 $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$。
- 倒數關係：三條通過中心點的連線為倒數關係，其兩端之三角比互為倒數，相乘為 1。
- 商數關係：六邊形周上，連續三個頂點形成的連線，其兩端之三角比相乘等於中間之三角比。
- 平方關係：圖中有三個倒正三角形，其在上方兩頂點之二者之平方和等於在下方頂點者。

五、 奇變偶不變，正負看象限

今有函數 f，已知其為 sin、cos、tan、sec、csc、cot 之一，且已知 $f(\theta)$。欲求 $f(\phi)$，其中 $\phi = \pm\theta \pm n\frac{\pi}{2}$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。

- 判斷方法：奇變偶不變，正負看象限。
- 上句：奇偶指 n 之奇偶，變指倒數，即：若 n 為奇數則令 $g(\theta) = \frac{1}{f(\theta)}$，否則令 $g(\theta) = f(\theta)$，則 $|f(\phi)| = |g(\theta)|$。
- 下句：象限指假設 $[r, \theta]$ 在第一象限時，$[r, \phi]$ 之象限。令該象限中任意角度為 ω。令 $k = \frac{f(\phi)}{g(\theta)}$。則 $k = \frac{f(\omega)}{|f((\omega)|}$，即：

象限 / f	一	二	三	四
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
csc	+	+	-	-
sec	+	-	-	+
cot	+	-	+	-

六、　正、餘弦函數級數形式

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

七、　三角函數指數形式

根據歐拉/尤拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

三角函數可寫為：

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\tan x = -i\frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\cot x = i\frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1}, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\sec x = \frac{2e^{ix}}{e^{2ix} + 1}, \quad x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\csc x = i\frac{2e^{ix}}{e^{2ix} - 1}, \quad x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

八、 三角函數微積分

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\ln\lvert\sec x\rvert + C$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$	$\ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + C$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$

第三節　與三角函數相關的函數

一、 反三角函數

名稱	常用符號	定義	定義域	值域
反正弦	$y = \arcsin x$	$x = \sin y$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
反餘弦	$y = \arccos x$	$x = \cos y$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
反正切	$y = \arctan x$	$x = \tan y$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
反餘切	$y = \operatorname{arccot} x$	$x = \cot y$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
反正割	$y = \operatorname{arcsec} x$	$x = \sec y$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$
反餘割	$y = \operatorname{arccsc} x$	$x = \csc y$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

二、 反三角函數定積分形式

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz, \qquad |x| \le 1$$
$$\arccos x = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz, \qquad |x| \le 1$$
$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{z^2+1}\,dz,$$
$$\operatorname{arccot} x = \int_x^\infty \frac{1}{z^2+1}\,dz,$$
$$\operatorname{arcsec} x = \int_1^x \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}\,dz, \qquad x \ge 1$$
$$\operatorname{arccsc} x = \int_x^\infty \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}\,dz, \qquad x \ge 1$$

三、 atan2 函數

$\operatorname{atan2}(y, x)$ 在 $x > 0$ 時返還 $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 中的解，在 $x < 0$、$y \ge 0$ 時返還 $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 中的解，在 $x < 0$、$y < 0$ 時返還 $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ 在 $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 中的解，在 $x = 0$、$y \ne 0$ 時返還 $\frac{y}{|y|}\frac{\pi}{2}$，在 $x = y = 0$ 時返還值未定義。

四、 輻角（Argument）

此處輻角用 $\arg(z)$ 代表 z 的輻角，用 $\operatorname{Arg}(z)$ 代表 z 的輻角主值，一些文獻反之。

(一) 輻角

設有非零複數 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，記作 $z = x + yi$，其中的 x 和 y 為實數，那麼複數 z 的輻角 $\arg(z) = \varphi$ 指的是使下列等式：

$$z = x + yi = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

成立的任何實數 φ。

(二) 輻角主值

設有非零複數 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，記作 $z = x + yi$，其中的 x 和 y 為實數，那麼複數 z 的輻角主值 $\operatorname{Arg}(z)$ 指的是：

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} x + yi = \operatorname{atan2}(y, x)$$

$$\arg(z) = \{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

五、　雙曲函數（Hyperbolic functions）

各雙曲函數之名稱均以對應之三角函數之名稱前加雙曲（hyperbolic），代號則為對應之三角函數代號後加 h。

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\tanh x &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\
\coth x &= \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}, \quad x \neq 0 \\
\operatorname{sech} x &= \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} \\
\operatorname{csch} x &= \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}, \quad x \neq 0
\end{aligned}$$

六、　反雙曲函數對數形式

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsinh} &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \\
\operatorname{arccosh} &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1 \\
\operatorname{arctanh} &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \quad |x| < 1 \\
\operatorname{arccoth} &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right), \quad |x| > 1 \\
\operatorname{arcsech} &= \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1 \\
\operatorname{arccsch} &= \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), \quad x \neq 0
\end{aligned}$$

第四節　公式定理

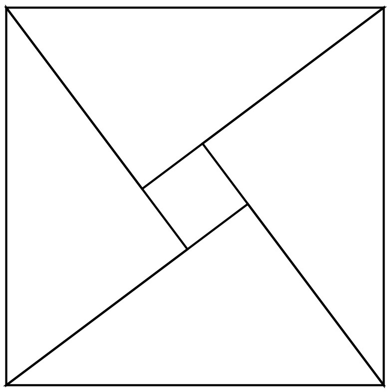
一、　三角形公式定理

令圖形體積（或面積、長度）之代號同其自身。今有一三角形 ΔABC，其中：$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長分別為 a、b、c；$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 又記作 A、B、C；外接圓 O 圓心 O 即外心（Circumcenter）、半徑 R；內接圓 I 圓心 I 即內心（Incenter）、半徑 r；重心（Centroid）G；垂心（Orthocenter）H；$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊中點分別為 M_a、M_b、M_c；A 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 的垂足為 h_a，B 在 $\overleftrightarrow{CA}$ 的垂足為 h_b，C 在 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂足為 h_c；$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$；$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的角平分線與對邊之交點分別為 $\mathscr{B}_a$、$\mathscr{B}_b$、$\mathscr{B}_c$；九點圓 $\mathscr{O}$ 圓心 $\mathscr{O}$、半徑 $\mathscr{R}$；與 A、B、C 的兩鄰邊延長線與對邊皆相切的旁切圓分別為 E_a、E_b、E_c，其圓心（旁心）各同其圓名。

(一)　勾股/畢氏/商高定理

$$(\angle C = 90^\circ) \iff (a^2 + b^2 = c^2)$$

Proof.
趙爽勾股圓方圖證明法：



其中四個三角形的短股為 a、長股為 b、斜邊為 c。

$$4\frac{ab}{2}+(b-a)^2=c$$
$$a^2+b^2=c^2$$

□

(二)　三角形全等與 SSA 型性質

令：已知兩三角形一對應位置之邊長相等稱 S，已知兩三角形一對應位置之角之角度相等稱 A，S 相鄰表示鄰邊，A 相鄰表示鄰角，S 與 A 相鄰表示邊與其一側的角，當 A 為直角得稱 R，R 之鄰邊得稱 H。
三角形的全等性質有 SSS、SAS、AAS、ASA、RHS，當兩三角形符合以上任一條件時，知兩三角形全等。
SSA 型的討論：若已知 a、b、$\angle A$：

- $\angle A$ 為銳角，令 C 到 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離為 $h=b\sin A$，則：
  - b<h: 無解
  - b=h: 唯一解
  - b>h: 兩解
- $\angle A$ 為鈍角，則：
  - a≤b: 無解
  - a>b: 唯一解

(三)　九點圓與歐拉線

$$M_a,\ M_b,\ M_c,\ h_a,\ h_b,\ h_c,\ \frac{A+H}{2},\ \frac{B+H}{2},\ \frac{B+H}{2}\text{必共圓，該圓稱九點圓}$$
$$\text{對於九點圓圓周 }\mathcal{O}\text{ 與圓心 }\mathcal{O}\text{ 均符合：}\mathcal{O}=\frac{O+H}{2}$$
$$\mathcal{O},\ O,\ G,\ H\text{共線，該線稱歐拉線}$$
$$\Delta ABC\text{是等腰三角形}\iff I\text{在歐拉線上}$$

費爾巴哈定理（Feuerbach’s theorem）：九點圓與三個旁切圓均外切，與內切圓內切（內切圓在內）。

$$\mathcal{O}=\frac{O}{2}$$

(四) 正弦定理

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

Proof.

$$\sin A = \frac{\overline{Ch_c}}{a}$$

$$\sin B = \frac{\overline{Ch_c}}{b}$$

□

$$2R \sin A = a$$

Proof.
作 O。若 ΔABC 為直角三角形，觀察可證。
若 ΔABC 非直角三角形，以 BC 為一股，令斜邊在 $\overleftrightarrow{BO}$ 上，作一直角三角形 BCD，其中 $D = 2O - B$。
若 ΔABC 為銳角三角形，根據圓周定理可知，$\angle D = \angle BAC$，得證。
若 ΔABC 為鈍角三角形，根據根據圓內接四邊形對角互補定理可知，$\angle D = \pi - \angle A$，得證。 □

$$凸四邊形面積 = \frac{1}{2} 對角線相乘 \times \sin 兩對角線夾角$$

(五) 投影定理

$$a = b\cos C + c\cos B$$

(六) 餘弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Proof.
根據投影定理：

$$c = a\cos B + b\cos A$$

兩邊同乘 c：

$$c^2 = ac\cos B + bc\cos A$$

同理：

$$a^2 = ac\cos B + ab\cos C$$

$$c^2 = bc\cos A + ab\cos C$$

$$c^2 = a^2 - ab\cos C + b^2 - ab\cos C = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

□

平行四邊形定理：平行四邊形四邊長平方和等於兩對角線平方和

三角形中線公式：$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM_a}^2 + \overline{BM_a}^2\right)$

(七) 三角形面積定理

$$
\begin{aligned}
\Delta ABC &= \frac{1}{2}a \cdot \overline{Ah_a} \\
&= \frac{1}{2}ab\sin C \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{（海龍（Heron）公式）} \\
&= \frac{abc}{4R} \\
&= rs \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}} \\
&= \frac{2}{3}\overline{BM_b} \cdot \overline{CM_c}\sqrt{\left|\frac{1-\left(\overline{AM_a}^2+\overline{BM_b}^2+\overline{CM_c}^2\right)^2}{4\overline{BM_b}^2\overline{CM_c}^2}\right|} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|
\end{aligned}
$$

(八) 重心相關定理

G 為三中線交點

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM_A}$$

$$G = \frac{A+B+C}{3}$$

(九) 外心相關定理

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$$

$$O = \frac{a^2A+b^2B+c^2C}{a^2+b^2+c^2}$$

O 為三邊中垂線交點

$$\Delta OAB : \Delta OBC : \Delta OCA = \sin 2C : \sin 2A : \sin 2B$$

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overline{AB}^2$$

$$\frac{1}{2}\angle AOB = \angle C \vee \pi - \angle C$$

(十) 內心相關定理

I 與三邊均相切

I 為三角角平分線交點

$$I = \frac{aA+bB+cC}{a+b+c}$$

$$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

(十一) 垂心相關定理

$$H \text{ 為三高交點}$$

$$H=\frac{\tan A\cdot A+\tan B\cdot B+\tan C\cdot C}{\tan A+\tan B+\tan C}$$

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2\right)$$

$$\text{在複數平面上：}\det\begin{pmatrix}1 & A & A^2 & \overline{A}\\ 1 & B & B^2 & \overline{B}\\ 1 & C & C^2 & \overline{C}\\ 1 & H & H^2 & \overline{H}\end{pmatrix}=0$$

$$\frac{\overline{Hh_a}}{\overline{Ah_a}}+\frac{\overline{Hh_b}}{\overline{Bh_b}}+\frac{\overline{Hh_c}}{\overline{Ch_c}}=1$$

(十二) 西瓦定理（Ceva theorem）

令西瓦線段指各頂點與其對邊或對邊延長線連接而成的直線段。

三角形 ΔABC 的西瓦線段 $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$：

$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$ 交於一點 $\Longleftrightarrow \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=1 \Longrightarrow D$、$E$、$F$中有零或二個點不在$\Delta ABC$ 邊上

口訣：頂分頂分頂分頂

(十三) 孟氏定理（Menelaus' theorem）

一直線與 ΔABC 的邊 BC、CA、AB 或其延長線分別交於 L、M、N：

$\Longleftrightarrow \dfrac{\overline{AN}}{\overline{NB}}\cdot\dfrac{\overline{BL}}{\overline{LC}}\cdot\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}}=1 \Longrightarrow L$、$M$、$N$中有一或三數個點不在$\Delta ABC$ 邊上

口訣：頂分頂分頂分頂

(十四) 角平分線定理

已知：ΔABC 中 $\angle B<\angle C$；D 在 $\overline{BC}$ 上；E 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上且不在 $\overline{BC}$ 上。

內角平分線定理及逆定理：$\angle BAD=\angle DAC \Leftrightarrow \dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$

外角平分線定理及逆定理：$\angle CAE=\pi-\angle BAE \Leftrightarrow \dfrac{EB}{EC}=\dfrac{AB}{AC}$

(十五) 角平分線長定理

$$\overline{A\mathscr{B}_a}=\frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

二、 三角函數公式定理

(一) 正切萬能公式

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

(二) 二倍角公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 1-2\sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\end{aligned}$$

(三) 半角公式與平方化倍角公式

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1-\cos\theta}{2} \\ \cos^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1+\cos\theta}{2} \\ \tan^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \\ \tan\frac{\theta}{2} &= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \\ &= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} \\ &= \csc\theta - \cot\theta\end{aligned}$$

(四) 三倍角公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

(五) 和差角公式

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$$
$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{-\cot\alpha+\cot\beta}$$
$$\sec(\alpha+\beta)=\frac{\sec\alpha\sec\beta\csc\alpha\csc\beta}{-\sec\alpha\sec\beta+\csc\alpha\csc\beta}$$
$$\sec(\alpha-\beta)=\frac{\sec\alpha\sec\beta\csc\alpha\csc\beta}{\sec\alpha\sec\beta+\csc\alpha\csc\beta}$$
$$\csc(\alpha+\beta)=\frac{\sec\alpha\sec\beta\csc\alpha\csc\beta}{\sec\alpha\sec\beta+\csc\alpha\csc\beta}$$
$$\csc(\alpha-\beta)=\frac{\sec\alpha\sec\beta\csc\alpha\csc\beta}{\sec\alpha\sec\beta-\csc\alpha\csc\beta}$$

(六) 平方關係

$$\sin^2\theta=\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=1-\cos^2\theta$$
$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=1-\sin^2\theta$$
$$\tan^2\theta=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$

(七) 三角形內角正切公式

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \iff \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$$

(八) 正餘弦函數疊合公式定理

$$(a\sin\theta+b\cos\theta)^2\le a^2+b^2,\quad a,\ b\in\mathbb{R}$$
$$\begin{aligned}a\sin x+b\cos x&=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right)\end{aligned}$$

(九) 和差化積

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(十)　積化和差

$$
\begin{aligned}
2\sin\alpha\cos\beta &= \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\
2\cos\alpha\sin\beta &= \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\\
2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\
2\sin\alpha\sin\beta &= -\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)
\end{aligned}
$$

(十一)　變形公式

$$
\begin{aligned}
1+\sin\theta &= \left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\\
1-\sin\theta &= \left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

(十二)　單位圓定理

$$0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ x^2+y^2=a,\ \theta=\sin^{-1}x+\sin^{-1}y,\ \phi=\cos^{-1}x+\cos^{-1}y$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a>1 \iff \theta>\dfrac{\pi}{2} \iff \phi>\dfrac{\pi}{2}\\ a=1 \iff \theta=\dfrac{\pi}{2} \iff \phi=\dfrac{\pi}{2}\\ a<1 \iff \theta<\dfrac{\pi}{2} \iff \phi<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

(十三)　高次方降次

$$
\begin{aligned}
\sin^4\theta+\cos^4\theta &= 1-2\sin^2\cos^2\theta = 1-\frac{1}{2}\sin^2(2\theta)\\
\sin^4\theta-\cos^4\theta &= \sin^2\theta-\cos^2\theta = -\cos(2\theta)\\
\sin^6\theta+\cos^6\theta &= 1-3\sin^2\cos^2\theta = 1-\frac{3}{4}\sin^2(2\theta)
\end{aligned}
$$