矩陣

沈威宇

2024 年 8 月 19 日

矩陣（Matrix）

註：翻譯從臺灣地區翻譯習慣，稱 row 為列、稱 column 為行，或逕用英文。

一、 矩陣

1. 把一些表達式放在 $\begin{pmatrix} \text{表達式} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} \text{表達式} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix}$ 中稱為矩陣，其中的每一表達式稱其元（素）。矩陣 **with** m **rows and** n **columns**，稱 $m \times n$ 階矩陣。特別當 $m = n$ 時，稱 n 階方陣（**Square**）。

2. 設 $\mathbb{F}$ 為域，佈於 $\mathbb{F}$ 上的所有 $m \times n$ 階矩陣形成的集合稱 $\mathbb{F}^{m\times n}$。

3. 矩陣一般以粗體大寫字母代表，有時將 **row** 與 **column** 數標於其右下，如 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 或 $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ 表 $m \times n$ 階矩陣，其中 a_{ij} 為第 i **row** 第 j **column** 的元素，稱第 ij 元。特別地，方陣的大寫字母右下標逕標其階數，如 $\mathbf{A}_n$ 表 n 階方陣。特別地，a_{ii} 稱對角線元。

4. 僅有一列的矩陣稱列矩陣或列向量，僅有一行的矩陣稱行矩陣或行向量。

5. 矩陣 $\mathbf{A}$ 的第 i**row** 記作 $\mathbf{A}_{i,:}$、第 j**column** 記作 $\mathbf{A}_{:,j}$。

6. 稱兩矩陣相等，若且惟若該二矩陣所有相同位置對應之元素均相等。

7. 兩 **row** 數相同的矩陣 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 左右合併，記作 $\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{pmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$；兩 **column** 數相同的矩陣 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 上下合併，記作 $\begin{pmatrix}\mathbf{A} \\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}\mathbf{A} \\ \mathbf{B}\end{bmatrix}$。

二、 零矩陣（Zero matrix）

1. 定義 $m \times n$ 階零矩陣：

$$\mathbf{O}_{m\times n} = [0]_{m\times n}$$

2. 當運算均有意義：

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$$
$$\mathbf{O}_{m\times n}\mathbf{A}_{n\times p} = \mathbf{O}_{m\times p}, \quad \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{O}_{n\times p} = \mathbf{O}_{m\times p}$$

三、 單位矩陣（Identity matrix）

1. 定義 n 階單位矩陣：

$$\mathbf{I}_n = [(i = j)?1 : 0]_n$$

2. 當運算均有意義：

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

四、 矩陣加減法

1. 各相同位置對應之元素均相加減。

2. 矩陣加減法有結合律、左右分配率、交換率、左右消去律。

五、 矩陣的係數積

1. 所有元均乘以該係數。

2. 矩陣係數積有結合律、左右分配率、係數交換率。

3. 矩陣係數積當係數非零時有係數消去律：

$$r \neq 0,\, r\mathbf{A} = r\mathbf{B} \implies \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

4. 矩陣係數積當矩陣可逆時有矩陣消去律：

$$\exists \mathbf{A}^{-1},\, r\mathbf{A} = s\mathbf{A} \implies r = s$$

六、 矩陣乘法

1. 矩陣乘法 **AB** 有意義若且惟若 **A** 的 **column** 數等於 **B** 的 **row** 數，即 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 與 $\mathbf{B}_{n\times p}$，其中 $m, n, p \in \mathbb{N}$。

2. 定義矩陣乘法：

$$[a_{ij}]_{m\times n}[b_{ij}]_{n\times p} = [c_{ij} = \text{列向量}\vec{a_i} \cdot \text{行向量}\vec{b_j}]_{m\times p} = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}]_{m\times p}$$

3. 矩陣乘法有結合律：

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

4. 矩陣乘法有右分配率：

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

5. 矩陣乘法有左分配率：

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$$

6. 矩陣乘法無交換率：

$$\exists \mathbf{A},\mathbf{B}: \mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$$

7. 矩陣乘法 $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$ 當運算均有意義且 $\mathbf{A}$ 為可逆矩陣時有左消去律：

$$(\mathbf{AB}=\mathbf{AC}) \implies (\mathbf{B}=\mathbf{C})$$

8. 矩陣乘法 $\mathbf{BA}=\mathbf{CA}$ 當運算均有意義且 $\mathbf{A}$ 為可逆矩陣時有右消去律：

$$(\mathbf{BA}=\mathbf{CA}) \implies (\mathbf{B}=\mathbf{C})$$

9. 積為零矩陣的必要非充分條件：

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{O}\text{為}\mathbf{A}=\mathbf{O}\text{的必要非充分條件}$$
$$\mathbf{AB}=\mathbf{O}\text{為}(\mathbf{A}=\mathbf{O}\vee\mathbf{B}=\mathbf{O})\text{的必要非充分條件}$$

七、 矩陣的自然數冪

$$\mathbf{A}^n=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{A}$$

八、 轉置矩陣（**Transpose matrix**）

1. 矩陣的轉置記作 $^{\mathrm{T}}$，定義為：

$$[a_{ij}]_{m\times n}{}^{\mathrm{T}}=[a_{ji}]_{n\times m}$$

2. 對稱矩陣：$\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 若且惟若 $\mathbf{A}$ 為對稱矩陣。

3. 反對稱矩陣：$\mathbf{A}=-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 若且惟若 $\mathbf{A}$ 為反對稱矩陣。

4. 當方陣 $\mathbf{A}$ 可逆：

$$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$$

5. 當運算均有意義：

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$

6. 當運算均有意義：

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\ldots\mathbf{A}_n)^{\mathrm{T}}={\mathbf{A}_n}^{\mathrm{T}}{\mathbf{A}_{n-1}}^{\mathrm{T}}{\mathbf{A}_{n-2}}^{\mathrm{T}}\ldots{\mathbf{A}_1}^{\mathrm{T}}$$

九、 矩陣的行、列運算

1. 矩陣的行運算包含：

(1) 行交換（**Column swapping**）：將矩陣中的兩行位置互換。例如，將第 i 行和第 j 行交換。

(2) 行加倍（**Column multiplication**）：將矩陣中的某一行乘以一個非零常數 k。

(3) 行相加（**Column addition**）：將某一行加上一個常數倍的另一行。例如，將第 j 行乘以一個常數 k，然後將其加到第 i 行上。

2. 矩陣的列運算包含：

(1) 列交換（**Row swapping**）：將矩陣中的兩列位置互換。例如，將第 i 列和第 j 列交換。

(2) 列加倍（**Row multiplication**）：將矩陣中的某一列乘以一個非零常數 k。

(3) 列相加（**Row addition**）：將某一列加上一個常數倍的另一列。例如，將第 j 列乘以一個常數 k，然後將其加到第 i 列上。

3. 矩陣行列互換指矩陣之轉置。

十、 對角矩陣（Diagonal matrix）

1. 對角矩陣：$\mathbf{D}=[d_{ij}]_n$，其中 $d_{ij}=0$ ***if*** $i\neq j$ 若且惟若 $\mathbf{D}$ 為對角矩陣。

2. n 階對角矩陣 $\mathbf{D}$、$\det(\mathbf{D})\neq 0$，則：

$$\mathbf{D}^{-1}=[(i=j)?({d_{ij}}^{-1}):0]_n$$

3. 對角矩陣 $\mathbf{D}=[d_{ij}]_n$ 與 $\mathbf{E}=[e_{ij}]_n$：

$$\mathbf{DE}=[d_{ij}e_{ij}]_n$$

十一、 行列式（Determinant）、餘因子矩陣（Cofactor Matrix）、伴隨矩陣（Adjugate matrix）與反方陣（Inverse matrix）

1. 定義 $\mathbf{M}_{ij}$ 為 $\mathbf{A}$ 去掉第 i 列與第 j 行的子矩陣。

2. 行列式：定義 1 階方陣之行列式為其唯一的元素。定義方陣 $\mathbf{A}_n$ 的行列式 $\det(\mathbf{A})$ 或 $|\mathbf{A}|$：

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+c}\det(\mathbf{M}_{ic}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+c}\det(\mathbf{M}_{ci}),\quad \text{其中} 0 < c \leq n$$

3. 餘因子矩陣：定義矩陣 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 的餘因子矩陣 $\operatorname{cof}(\mathbf{A}_{m\times n})$ 為：

$$\operatorname{cof}(\mathbf{A}_{m\times n}) = \left[(-1)^{i+j}\det\left(\mathbf{M}_{ij}\right)\right]_{m\times n}$$

4. 伴隨矩陣：定義矩陣 $\mathbf{A}$ 的伴隨矩陣 $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$（或 $\mathbf{A}^*$ 但 $\mathbf{A}^*$ 更常指共軛轉置矩陣）為：

$$\operatorname{cof}(\mathbf{A})^{\mathrm{T}}$$

5. 定義方陣 $\mathbf{A}\,(\det(\mathbf{A}) \neq 0)$ 的反方陣、乘法反方陣、逆方陣 $\mathbf{A}^{-1}$ 為：

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

6. 非奇異矩陣（**Nonsingular matrix**）、非退化矩陣（**Nondegenerate matrix**）、正則矩陣（**Regular matrix**）：

$$\mathbf{A}\text{存在反方陣時} \iff \mathbf{A}\text{可逆} \iff \det(\mathbf{A}) \neq 0 \iff \mathbf{A}\text{為非奇異/非退化/正則矩陣}$$

7. 奇異矩陣（**Singular matrix**）、非退化矩陣（**Degenerate matrix**）：

$$\mathbf{A}\text{為不可逆方陣} \iff \det(\mathbf{A}) = 0 \iff \text{為奇異/退化矩陣}$$

8. 今有 n 階矩陣 $\mathbf{A}$，與「$\mathbf{A}$ 為非奇異矩陣」等價的表述：

$$\begin{aligned}
&\exists\mathbf{A}^{-1}\\
&\exists\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\\
&\exists\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\\
&\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n\text{，即 }\mathbf{A}\text{ 滿秩}\\
&\exists\mathbf{A}\text{的特徵值}\lambda\text{：}\lambda \neq 0
\end{aligned}$$

9. 以伴隨矩陣與行列式求反方陣：

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}$$

10. 克萊姆法則：

$$\operatorname{cof}(\mathbf{A})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\operatorname{cof}(\mathbf{A})^{\mathrm{T}}=\det(\mathbf{A})\mathbf{I}$$

11. 行列式經行列運算：行列互換，行列式不變；列（行）交換，行列式變號；列（行）相加，行列式不變；列（行）加倍，行列式加同倍；依某一列（行）將一個矩陣拆成兩個，原矩陣之行列式為該二矩陣之行列式之和。

12. 公式（假設運算均有意義）：

$$\mathbf{A}\text{可逆，則對所有自然數}n,\ \mathbf{A}^n\text{可逆}$$

$$\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})=\det(\mathbf{AB})$$

$$\forall\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\wedge\det(\mathbf{A})\neq 0:\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\implies\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$\text{方陣}\mathbf{A}\text{與同階之}\mathbf{I}\text{，}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{I}\end{pmatrix}\text{經列運算變為}\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{B}\end{pmatrix}\text{，則}\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\ldots\mathbf{A}_n)^{-1}={\mathbf{A}_n}^{-1}{\mathbf{A}_{n-1}}^{-1}{\mathbf{A}_{n-2}}^{-1}\ldots{\mathbf{A}_1}^{-1}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})^n=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{P}$$

十二、 子空間（Subspaces）

矩陣四大基本空間為行空間、列空間、零空間與左零空間。
dim() 表維度。

(一) 行空間（Column space）

1. 記作 $\operatorname{Col}(\mathbf{A})$、$\mathbf{C}(\mathbf{A})$ 或 $\mathbf{I}\mathrm{m}(\mathbf{A})$。

2. 定義：矩陣 $\mathbf{A}$ 的行空間是由 $\mathbf{A}$ 的所有行向量所生成的子空間。

(二) 列空間（Row space）

定義：矩陣 $\mathbf{A}$ 的列空間 $=\operatorname{Col}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$

(三) 零空間（Null space）/核（空間）(Kernel）

1. 記作 $\ker L$ 或 $\mathrm{Null}(\mathbf{A})$。

2. 定義：設 $\mathbb{F}$ 為域，佈於 $\mathbb{F}$ 上的矩陣 $\mathbf{A}$ 的零空間為：

$$\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

(四) 左零空間（Left null space）

定義：矩陣 $\mathbf{A}$ 的左零空間 $= \ker(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$

(五) 像空間（image space 或 range）

1. 記作 $\mathrm{im}(T)$，其中 $T : V \to W$ 是一個線性映射，V 是有限維的。

2. 定義：像空間是指一個線性映射將定義域中的向量映射到其值域中的所有可能結果的集合。

3. 對於佈於域 $\mathbb{F}$ 上的 $m \times n$ 階矩陣 $\mathbf{A}$ 定義的線性變換 $T : V \to W$：若 $V \in \mathbb{F}^{1\times m}$，$W = V\mathbf{A}$，則 T 的像空間即 $\mathbf{A}$ 的 **row** 空間；若 $V \in \mathbb{F}^{n\times 1}$，$W = \mathbf{A}V$，則 T 的像空間即 $\mathbf{A}$ 的 **column** 空間。

(六) 秩（Rank）

If $\mathbf{A}$ is an $m \times n$ matrix, then the rank of $\mathbf{A}$, denoted as $\mathrm{rank}(\mathbf{A})$, $\mathrm{r}(\mathbf{A})$, or $\mathrm{rk}(\mathbf{A})$, is the maximum number of linearly independent rows (or columns) in $\mathbf{A}$, namely:

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \dim(\mathrm{Col}(\mathbf{A}))$$

(七) Constant rank theorem

row 秩 (the maximum number of linearly independent rows) = column 秩 (the maximum number of linearly independent columns).

Proof.
令 $\mathbf{A}$ 是一個 $m \times n$ 的矩陣，其行秩為 r，即矩陣 $\mathbf{A}$ 的行空間的維度是 r。
令 $c_1, c_2, \ldots, c_r$ 是 $\mathbf{A}$ 的行空間的一組基，構成 $m \times r$ 矩陣 $\mathbf{C} = [c_1, c_2, \ldots, c_r]$，並使得 $\mathbf{A}$ 的每個行向量是 $\mathbf{C}$ 的 r 個行向量的線性組合.
由矩陣乘法的定義，$r \times n$ 矩陣 R s.t. $\mathbf{A} = \mathbf{C}R$.
$\mathbf{A}$ 的每個列向量是 R 的列向量的線性組合，這意味著 $\mathbf{A}$ 的列向量空間被包含於 R 的列向量空間之中.
$\therefore \mathbf{A}$ 的列秩 $\leq R$ 的列秩. 但 R 僅有 r 列，所以 R 的列秩 $\leq \mathbf{A}$ 的行秩. 這就證明了 $\mathbf{A}$ 的列秩 $\leq \mathbf{A}$ 的行秩.
同理可證 $\mathbf{A}$ 的行秩 $\leq \mathbf{A}$ 的列秩，故 $\mathbf{A}$ 的列秩 $= \mathbf{A}$ 的行秩. □

(八) Rank-Nullity Theorem

對於 n 階矩陣 $\mathbf{A}$：

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) + \dim(\ker(\mathbf{A})) = n$$

Proof.

Let $\mathbf{A}$ be an $m \times n$ matrix with r linearly independent columns (i.e., $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = r$). We will show that:
1. There exists a set of $n - r$ linearly independent solutions to the homogeneous system $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.
2. Every other solution is a linear combination of these $n - r$ solutions.

To do this, we will produce an $n \times (n-r)$ matrix $\mathbf{X}$ whose columns form a basis of the null space of $\mathbf{A}$.
Without loss of generality, assume that the first r columns of $\mathbf{A}$ are linearly independent. So, we can write

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix},$$

where

- $\mathbf{A}_1$ is an $m \times r$ matrix with r linearly independent column vectors, and
- $\mathbf{A}_2$ is an $m \times (n - r)$ matrix such that each of its $n - r$ columns is a linear combination of the columns of $\mathbf{A}_1$.

This means that $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1\mathbf{B}$ for some $r \times (n - r)$ matrix $\mathbf{B}$, and hence,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Let

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{I}_{n-r} \end{pmatrix},$$

where $\mathbf{I}_{n-r}$ is the $(n - r) \times (n - r)$ identity matrix. So, $\mathbf{X}$ is an $n \times (n - r)$ matrix such that

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{I}_{n-r} \end{pmatrix} = -\mathbf{A}_1\mathbf{B} + \mathbf{A}_1\mathbf{B} = \mathbf{0}_{m\times(n-r)}.$$

Therefore, each of the $n - r$ columns of $\mathbf{X}$ are particular solutions of $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^m}$.
Furthermore, the $n-r$ columns of $\mathbf{X}$ are linearly independent because $\mathbf{Xu} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^n}$ will imply $\mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^{n-r}}$ for $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^{n-r}$:

$$\mathbf{Xu} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^n} \implies \begin{pmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{I}_{n-r} \end{pmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^n} \implies \begin{pmatrix} -\mathbf{Bu} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\mathbb{F}^r} \\ \mathbf{0}_{\mathbb{F}^{n-r}} \end{pmatrix} \implies \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^{n-r}}.$$

Therefore, the column vectors of $\mathbf{X}$ constitute a set of $n-r$ linearly independent solutions for $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^m}$.
We next prove that any solution of $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^m}$ must be a linear combination of the columns of $\mathbf{X}$.
For this, let

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

be any vector such that $\mathbf{Au} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^m}$. Since the columns of $\mathbf{A}_1$ are linearly independent, $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^m}$ implies $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^r}$.

Therefore,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Au} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^m} \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2\end{pmatrix} = \mathbf{A}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}_1(\mathbf{u}_1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^m} \\
&\Longrightarrow \mathbf{u}_1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}_{\mathbb{F}^r} \\
&\Longrightarrow \mathbf{u}_1 = -\mathbf{B}\mathbf{u}_2 \\
&\Longrightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mathbf{B} \\ \mathbf{I}_{n-r}\end{pmatrix}\mathbf{u}_2 = \mathbf{X}\mathbf{u}_2.
\end{aligned}$$

This proves that any vector $\mathbf{u}$ that is a solution of $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ must be a linear combination of the $n-r$ special solutions given by the columns of $\mathbf{X}$. And we have already seen that the columns of $\mathbf{X}$ are linearly independent. Hence, the columns of $\mathbf{X}$ constitute a basis for the null space of $\mathbf{A}$. Therefore, the nullity of $\mathbf{A}$ is $n-r$. Since r equals the rank of $\mathbf{A}$, it follows that $\text{rank}(\mathbf{A}) + \ker(\mathbf{A}) = n$. This concludes our proof. $\square$

(九) 滿秩（**Full rank**）

$$\text{rank}(\mathbf{A}_{m\times n}) \leq \min(m, n)$$

1. 若 **rank**$(\mathbf{A}_{m\times n}) = \min(m, n)$ 則稱 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 滿秩，否則稱之欠秩。

2. 一方陣滿秩若且惟若其可逆。

十三、 特徵向量（**Eigenvector**）、特徵值（**Eigenvalue**）與特徵多項式

(一) 特徵向量與特徵值

對於一個給定的方陣 $\mathbf{A}$，它的特徵向量/固有向量/本徵向量 v 定義為：v 經 $\mathbf{A}$ 線性轉換之後得到的新向量仍與原來的 v 平行，即：

$$\mathbf{A}v = \lambda v$$

其中 λ 為純量，即特徵向量在該線性轉換下縮放的比例，稱 $\mathbf{A}$ 之特徵值/固有值/本徵值。

$$\text{矩陣 } \mathbf{A} \text{ 的特徵向量數} = \text{rank}(\mathbf{A})$$

(二) 特徵多項式

1. 特徵多項式：對佈於域 $\mathbb{F}$ 上的 $n \times n$ 方陣 $\mathbf{A}$，定義其特徵多項式為：

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) := \det(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \in \mathbb{F}[\lambda]$$

2. 特徵根與特徵值：對佈於域 $\mathbb{F}$ 上的 $n \times n$ 方陣 $\mathbf{A}$，及其特徵多項式 $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$：

$$\mathbf{A} \text{ 之特徵根之集合} \{\lambda \in \mathbb{F} \mid p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \land \lambda \in \mathbb{F}\} = \mathbf{A} \text{ 之特徵值之集合}$$

若$\lambda_i \in \mathbf{F}$為$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$之 k 重根，則λ_i為 $\mathbf{A}$ 之特徵值且對應到 n 個互相線性獨立的 $\mathbf{A}$ 的特徵向量

(三) 凱萊–哈密頓定理（**Cayley–Hamilton theorem**）

對於方陣 $\mathbf{A}$ 及其特徵多項式 $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$：

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = 0$$

十四、 對角化

1. 定義：對角化矩陣 $\mathbf{A}$ 指構造矩陣 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P}$，其中 $\mathbf{D}$ 為對角矩陣。

2. n 階矩陣 $\mathbf{A}$ 是可對角化的若且惟若 $\mathbf{A}$ 有 n 個線性獨立的特徵向量 v。

3. 步驟：

(1) 對於矩陣 $\mathbf{A}$ 的所有特徵根 λ 求解特徵向量 v 服從：

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$$

其中 λ 為特徵值。

(2) 將所有獨立的特徵向量組成矩陣 $\mathbf{P}$，每個特徵向量作為 $\mathbf{P}$ 的一列。假設 n 階方陣 $\mathbf{A}$ 有 n 個線性獨立的特徵向量，即 $\mathbf{A}$ 是可對角化的，則矩陣 $\mathbf{P}$ 存在且為 n 階方陣。

4. 應用：

$$\mathbf{A}^n = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P})^n = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}^n\mathbf{P}$$

十五、 共軛轉置（**Conjugate transpose**）

定義：又稱埃爾米特共軛或埃爾米特轉置（**Hermitian transpose**），指將矩陣的每個元均取其共軛複數而後將矩陣轉置，矩陣 $\mathbf{A}$ 的共軛轉置記作 $\mathbf{A}*$。

十六、 么正矩陣（**Unitary matrix**）

定義：指其共軛轉置恰為其逆矩陣的方陣。又譯酉矩陣。

十七、 廣義逆（**Generalized inverse, g-inverse**）

(一) 廣義逆

A matrix $A^{\mathrm{g}} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ is a generalized inverse of a matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ if:

$$AA^{\mathrm{g}}A = A.$$

對所有矩陣，廣義逆必存在，但不必唯一。對所有非奇異矩陣，廣義逆必為其乘法反方陣。

(二) 單邊逆（**One-sided inverse**）

1. 右逆（**Right inverse**）：**If the matrix** A **has dimensions** $n \times m$ **and rank** $\operatorname{rank}(A) = n$**, then there exists an** $m \times n$ **matrix** A_{R}^{-1} **called the right inverse of** A **such that**

$$AA_{\mathrm{R}}^{-1} = I_n,$$

where I_n is the $n \times n$ identity matrix.

2. 左逆（**Left inverse**）：**If the matrix A has dimensions $n \times m$ and rank $\operatorname{rank}(A) = m$, then there exists an $m \times n$ matrix A_{L}^{-1} called the left inverse of A such that**

$$A_{\mathrm{L}}^{-1}A = I_m,$$

where I_m is the $m \times m$ identity matrix.

(三) 自反廣義逆（Reflexive generalized inverse）

A 的自反廣義逆 $\mathbf{A}^g$ 符合：

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^g\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^g\mathbf{A}\mathbf{A}^g = \mathbf{A}^g$$

(四) 摩爾—彭若斯廣義逆（Moore–Penrose inverse）/偽逆（Pseudoinverse）/擬反

A 的摩爾—彭若斯廣義逆記作 $\mathbf{A}^+$，符合：

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^* = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$$

$$(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^* = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$$

對所有矩陣，必存在唯一偽逆。對所有非奇異矩陣，偽逆必為其乘法反方陣。

十八、 解線性方程組

(一) 高斯消去法（Gaussian Elimination）

1. 係數矩陣：將線性方程組的係數寫成矩陣，每一方程一 **row**，稱係數矩陣。

2. 增廣矩陣：將方程組等號右側的常數附加入矩陣中的最後一 **column**，稱增廣矩陣。

3. 高斯消去法：又稱 **row** 簡化（**row reduction**），是一種使用 **row** 運算來修改矩陣，直到矩陣的左下角盡可能地用零填充的演算法，對線性方程組增廣矩陣作高斯消去法可求解之。

(二) 通用解法

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{C}$$

其中：
A 為係數矩陣（不一定是方陣）；
X 為未知數矩陣；
C 為常數矩陣。
則：

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}, \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0 \\ \text{無限多解}\mathbf{X} = \mathbf{A}^+\mathbf{C}, \quad \mathbf{C} \in \operatorname{Col}(\mathbf{A})\text{，即}\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\end{pmatrix}\right) \\ \text{無解}, \quad \mathbf{C} \notin \operatorname{Col}(\mathbf{A})\text{，即}\operatorname{rank}(\mathbf{A}) \neq \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

(三) 克拉瑪公式

$$\mathbf{AX}=\mathbf{C}$$

其中：
$\mathbf{A}$ 為 $n\times n$ 階係數矩陣；
$\mathbf{X}=\left(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\right)^{\mathrm{T}}$ 為未知數行矩陣；
$\mathbf{C}=\left(c_1,c_2,c_3,\dots,c_n\right)^{\mathrm{T}}$ 為常數行矩陣。
令 $\mathbf{A}_i$ 為 $\mathbf{A}$ 的第 i 行換成 $\mathbf{C}$。
則：

$$\begin{cases} x_i=\dfrac{\det\left(\mathbf{A}_i\right)}{\det\left(\mathbf{A}\right)}, & \det\left(\mathbf{A}\right)\neq 0 \\ \text{無解}, & \det\left(\mathbf{A}\right)=0\wedge\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\det\left(\mathbf{A}_i\right)^2\neq 0 \\ \text{無限多解}, & \det\left(\mathbf{A}\right)=0\wedge\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\det\left(\mathbf{A}_i\right)^2=0 \end{cases}$$

(四) 一次齊次方程組的解

$$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$$

其中：
$\mathbf{A}$ 為係數矩陣；
$\mathbf{X}=\left(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\right)^{\mathrm{T}}$ 為未知數；$\mathbf{0}$ 為 n 維零行向量。
則：

$$\begin{cases} x_i=0, & \det\left(\mathbf{A}\right)\neq 0 \\ \text{無限多解}, & \det\left(\mathbf{A}\right)=0 \end{cases}$$

十九、 同構（Isomorphism）

一個線性變換是同構若且惟若其是可逆的若且惟若其為單射且滿射若且惟若其對應的矩陣是非奇異方陣。

二十、 常見線性變換

1. $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$$\left(\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\equiv\left(\left(\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}\right)\wedge\left(\mathbf{A}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)\right)$$

2. $(0,0)$ 經線性變換必仍為 $(0,0)$。

3. 對於平面直角座標上的任意封閉圖形，左乘矩陣 $\mathbf{A}$ 後，面積變成 $|\det(\mathbf{A})|\times$ 原面積。

4. 對於奇異矩陣 $\mathbf{A}$，令 $\mathbf{B}=\mathbf{A}\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$：

(1) 若 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ ca & cb\end{bmatrix}$：$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}x' & cx'\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，其中 $x'=ax+by$。

(2) 若 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ d & e\end{bmatrix}$：$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & y'\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，其中 $y'=dx+ey$。

5. x 方向伸縮為 h 倍、y 方向伸縮為 k 倍的伸縮變換：

$$\begin{bmatrix}h & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$$

6. x 方向推移 y 的 h 倍、y 方向推移 x 的 k 倍的推移變換：

$$\begin{bmatrix}1 & h\\ k & 1\end{bmatrix}$$

7. 逆時針旋轉 θ 的旋轉變換：

$$\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$$

8. 對過原點斜角 θ（即斜率 $\tan(\theta)$）之直線做鏡射的鏡射變換：

$$\begin{bmatrix}\cos(2\theta) & \sin(2\theta)\\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta)\end{bmatrix}$$

9. 轉移矩陣

形式：

$$\begin{bmatrix}a & b\\ 1-a & 1-b\end{bmatrix}$$

，其中 $0 \leq a \leq 1$，$0 \leq b \leq 1$。

(1) 轉移矩陣 $\mathbf{A}_i$，則 $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$、${\mathbf{A}_1}^2$、$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}_1}{n}$ 也是轉移矩陣。

(2) 轉移矩陣 $\mathbf{A}$、矩陣 X_0、$\mathbf{AX}_0$ 有意義，若 $\exists\mathbf{X}$： $\mathbf{X} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{A}^n\mathbf{X}_0$，則稱 $\mathbf{X}$ 為穩定狀態。

10. 舉例 **1**

圓 $\mathrm{C} : x^2 + y^2 = 1$ 經 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 變換後得到圓 C'：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'}{2} \\ y = \dfrac{y'}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \left(\frac{x'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y'}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$$

$$\therefore \mathrm{C}' : \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$$

C' 的面積為 $\pi \cdot 2 \cdot 3 = 6\pi$，$\det(\mathbf{A}) = 6$，$\mathrm{C}$ 的面積為 π，C' 的面積 $= \det(\mathbf{A}) \cdot \mathrm{C}$ 的面積。

11. 舉例 **2**

直線 $\mathbf{L} : 4x - 3y = 5$，沿 x 坐標方向推移 y 坐標的 **2** 倍，沿 y 坐標方向推移 x 坐標的**-3** 倍，得一新直線 $\mathbf{L}'$：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x' - 2y'}{7} \\ \dfrac{3x' + y'}{7} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}' : 4\frac{x - 2y}{7} + 3\frac{3x + y}{7} = 5$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}' : 5x + 11y + 35 = 0$$

12. **舉例 3**

將點 $\mathrm{C}(5,2)$ 對 $\mathbf{M}: x-y+1=0$ 鏡射，得圓 D：

(1) 右移一單位：$\mathbf{M}': x-y=0$**,** $\mathrm{C}'(6,2)$

(2) 鏡射矩陣：$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

(3) $\mathrm{D}'=\mathbf{A}\mathrm{C}'=(2,6)$

(4) 左移一單位：$\mathrm{D}(1,6)$

13. **舉例 4**

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$a,b\in\mathbb{R}$，直線 $x+y-2=0$ 經 $\mathbf{A}$ 變換後得直線 $2x+3y-4=0$，求 (a,b)？

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}x\\ -x+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ \dfrac{-2x'+4}{3}\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow x-2x+4=\frac{-2x'+4}{3}$$
$$\Rightarrow x'=\frac{3}{2}x-4$$
$$\Rightarrow ax-bx-2b=x'=\frac{3}{2}x-4$$
$$\Rightarrow (a,b)=(-\frac{1}{2},-2)$$