單變數實多項式函數

沈威宇

2025 年 6 月 29 日

目錄

第一節　單變數實多項式函數 1

一、　多項式（Polynomial） 1

二、　單變數實多項式函數定理 1

(一) 領導係數（leading coefficient） 1

(二) 最高次項次數 1

(三) 除法原理/商定則（Quotient rule） 1

(四) 餘式定理 1

(五) 因式定理 1

(六) 恆等定理 1

三、　零函數 1

四、　一元一次函數 1

(一) 一般式、標準式 2

(二) 線性函數（Linear function） 2

(三) 圖形特徵 2

(四) 根數 2

五、　一元二次函數 2

(一) 一般式 2

(二) 標準式 2

(三) 判別式 2

(四) 根 2

(五) 圖形特徵 2

(六) 根數 3

(七) 根與係數關係 3

六、　一元三次函數 3

(一) 一般式 3

(二) 標準式 3
(三) 判別式 3
(四) 根 3
(五) 卡丹諾公式（Cardino's formula） 4
(六) 圖形特徵 4
(七) 根數 4
(八) 根與係數關係 4
七、 單變數實多項式函數的導函數 4
八、 多項式插值法（Polynomial Interpolation） 5
(一) 牛頓插值法（Newton's Polynomial） 5
(二) 拉格朗日插值法（Lagrange Polynomial） 5

第一節　單變數實多項式函數

一、　多項式（Polynomial）

指由多個項（term）組成的代數表達式，每個項是常數（稱該項係數（coefficient））與零或正整數（為零則該項稱常數項（constant term））個變數的非負整數冪次的乘積。

二、　單變數實多項式函數定理

下 $f(x)$、$g(x)$、$q(x)$、$r(x)$ 均為 x 的實多項式，a、b 為非零實數。

(一)　領導係數（leading coefficient）

指單變數多項式的最高次項係數。

(二)　最高次項次數

$$\deg(af(x)\cdot g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$$

$$\deg(af(x)+bg(x)) \le \max(\deg(f(x)), \deg(g(x)))$$

(三)　除法原理/商定則（Quotient rule）

恰有一組 $q(x)$、$r(x)$ 滿足：

$$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x), \quad \deg(r(x)) < \deg(g(x)) \vee r(x) = 0$$

稱被除式 $f(x)$ 除以除式 $g(x)$ 的商式為 $q(x)$、餘式為 $r(x)$。若 $r(x)=0$ 則 $q(x)$ 為 $f(x)$ 的因式，$f(x)$ 為 $q(x)$ 的倍式。

(四)　餘式定理

$f(x)$ 除以 $(ax+b)$ 的餘式為 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(五)　因式定理

$f\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$ 若且惟若 $ax+b$ 為 $f(x)$ 的因式。

(六)　恆等定理

兩 n 次多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$，若存在 $n+1$ 個相異數 a 使得 $f(a)=g(a)$，則 $f(x)=g(x)$。

三、　零函數

$$f(x) = 0$$

四、　一元一次函數

$a \neq 0$

(一) 一般式、標準式

$$f(x) = ax + b$$

其中 a 稱斜率，b 稱 y 截距。

(二) 線性函數（Linear function）

零函數與一元一次函數合稱線性函數。

(三) 圖形特徵

- 直線。
- 二階旋轉對稱點：圖形上任一點。
- 沒有反曲點。

(四) 根數

一實根。

五、 一元二次函數

$a \neq 0$

(一) 一般式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(二) 標準式

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

其中 $(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

(三) 判別式

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

(四) 根

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(五) 圖形特徵

- 拋物線。
- 頂點、極值點、最值點：(h, k)。
- 對稱軸：$x = h$。

- 開口：a 為正，開口向上；a 為負，向下。$|a|$ 愈大，開口愈小。
- 沒有反曲點。

(六) 根數

- $\Delta > 0$：二相異實根。
- $\Delta = 0$：一實根且為二重根。
- $\Delta < 0$：無實根，二相異共軛虛根，$a > 0$ 則 $f(x) > 0$，$a < 0$ 則 $f(x) < 0$。

(七) 根與係數關係

令根 α、β

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$
$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

六、 一元三次函數

$a \neq 0$

(一) 一般式

$$f(x) = ax^3 + bx^x + cx + d$$

(二) 標準式

$$f(x) = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$$

其中 $(h, p, k) = \left(-\frac{b}{3a}, c - \frac{b^2}{3a}, \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d\right)$

(三) 判別式

$$\Delta = 18abc - 4a^3c + a^2b^2 - 4b^3 - 27c^2$$

對於 $x^3 = px + q$ 為：

$$\Delta = 4p^3 - 27q^2$$

(四) 根

$$x = -\frac{b}{3a} + e^{\frac{2k\pi i}{3}} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$
$$+ e^{\frac{2(3-k)\pi i}{3}} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

(五) 卡丹諾公式（Cardino’s formula）

$x^3 = px + q$ 的根為：

$$x = e^{\frac{2\pi k}{3}} \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + e^{\frac{2\pi(3-k)}{3}} \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} = e^{\frac{2\pi k}{3}} \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + e^{\frac{2\pi(3-k)}{3}} \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

(六) 圖形特徵

- 頂點、二階旋轉對稱點、反曲點：(h, k)。
- 開口：$a > 0$ 則 $x > h$ 時向上、$x < h$ 時向下；$a < 0$ 則 $x < h$ 時向上、$x > h$ 時向下。
- 極值：$ap < 0$ 若且惟若存在二個極值點，$p = 0$ 若且惟若存在一個極值點（圖形單調遞增或減），$ap > 0$ 若且惟若不存在極值點（圖形嚴格遞增或減）。
- 最值點：不存在。
- 發散：a 為正，$x \to \infty$ 向上發散，$x \to -\infty$ 向下發散；a 為負，$x \to \infty$ 向下發散，$x \to -\infty$ 向上發散。$|a|$ 愈大，發散愈快。
- 頂點處斜率：p

(七) 根數

- $\Delta > 0$：三相異實根。
- $\Delta = 0$：一實根且為三重根或二相異實根且其一為二重根。
- $\Delta < 0$：一實根，二相異共軛虛根。

(八) 根與係數關係

令根 α、β、γ

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

七、 單變數實多項式函數的導函數

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n \cdot x^{n-1}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(\Delta x)^k\right) - x^n}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(\Delta x)^k}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(\Delta x)^{k-1}\\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

□

八、 多項式插值法（Polynomial Interpolation）

給定：

$$A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}_0 \wedge k \le n\} \subseteq \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall i \ne j:\ a_i \ne a_j,$$

$$B = \{b_k \mid k \in \mathbb{N}_0 \wedge k \le n\} \subseteq \mathbb{R},$$

多項式插值法指找 到一個次數最多為 n 的多項式 $p(x)$ 使得：

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \wedge k \le n:\ p(a_k) = b_k$$

的方法。

(一) 牛頓插值法（Newton's Polynomial）

定義差商（divided difference）：

$$\begin{cases}
f[a_i] = b_i, & i \in \mathbb{N}_0 \wedge i \le n,\\
f[a_i, a_{i+1}] = \dfrac{f[a_{i+1}] - f[a_i]}{a_{i+1} - a_i}, & i \in \mathbb{N}_0 \wedge i \le n-1,\\
f[(a_i)_{i=j}^{k}] = \dfrac{f[(a_i)_{i=i+1}^{k}] - f[(a_i)_{i=j}^{k-1}]}{a_k - a_j}, \quad j < k \le n \wedge j,k \in \mathbb{N}_0. &
\end{cases}$$

則：

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f[(a_i)_{i=0}^{k}]\prod_{i=0}^{k-1}(x - a_i).$$

(二) 拉格朗日插值法（Lagrange Polynomial）

標準形式：定義基函數（base function）：

$$\ell_k(x) = \prod_{a \in A \setminus \{a_k\}} \frac{x - a}{a_k - a}$$

則：

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \ell_k(x).$$

重心形式（Barycentric form）：定意權重（weight）：

$$w_k = \prod_{a_i \in A \setminus \{a_k\}} \frac{1}{a_k - a_i}$$

則：

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k w_k}{x - a_k}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x - a_k}}, & x \notin A. \\ b_k, \quad x = a_k \in A. \end{cases}$$