機率

沈威宇

2025 年 1 月 16 日

目錄

第一節　機率（Probability）

- 試驗（Experiment）：指一個可以重複進行並且每次結果可能不同的過程。具有可重複性，即試驗可以在相同條件下重複進行，與隨機性，即每次試驗的結果可能不同，具有隨機性和不確定性。
- 樣本空間（Sample Space）：一試驗所有可能結果的集合。例如，擲一枚硬幣的樣本空間是 $\{\text{正面}, \text{反面}\}$。
- 事件（Event）：樣本空間的子集。例如，擲一枚骰子得到一個偶數的事件是 $\{2, 4, 6\}$。
- 機率（Probability）：事件發生的可能性，為 0 到 1 之間的數字。機率越接近 1，事件發生的可能性就越大。
- 空事件：機率為零的事件。
- 全事件：機率為一的事件。
- 和事件：事件 A 和事件 B 的和事件為 $A \cup B$。
- 積事件：事件 A 和事件 B 的和事件為 $A \cap B$。
- 餘事件：樣本空間 S 中，事件 A 的餘事件 $A' = S \setminus A$。
- 獨立事件（Independent Events）：指在一次試驗中，兩個或多個事件彼此之間沒有影響。即：

$$\left(\forall J \neq \varnothing \subseteq \{a \mid a \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq a \leq n\} :\ P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P\left(A_j\right)\right) \iff \left(\left(A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n\right)\text{為獨立事件}\right)$$

- 互斥事件（Mutually Exclusive Events）：指在一次試驗中，兩個或多個事件不可能同時發生，即一些互斥事件中的任兩個的和事件的機率為零。
- 古典機率（Classical Probability）：如果一個事件的所有可能結果數目是有限，且樣本空間中每個結果發生的機會相等，則事件發生的機率可以通過以下公式計算：

$$P(A) = \frac{\text{發生事件 A 的結果數}}{\text{所有可能結果數}}$$

- 條件機率（Conditional Probability）：在已知某事件發生的情況下，另一事件發生的機率。通常表示為 $P(A|B)$，即在事件 B 發生的情況下事件 A 發生的機率。

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- 分割/劃分（Partitions）若 $\{A_i\}_{i \in I}$ 是樣本空間 Ω 的一組分割，那麼滿足以下條件：

$$\begin{aligned}
&\forall i \in I :\ A_i \subseteq \Omega, \\
&\forall i,\ j \in I \wedge i \neq j :\ A_i \cap A_j = \varnothing, \\
&\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega.
\end{aligned}$$

- 貝葉斯/貝氏定理（Bayes' Theorem）：
  若 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是樣本空間 Ω 的一個分割，則：

$$\forall 1 \leq j \leq |I|：\ P(A_j|B) = \frac{P\left(A_j\right) \times P\left(B \middle| A_j\right)}{\sum_{k=1}^{|I|} P\left(A_k\right) \times P\left(B \middle| A_k\right)}$$

- 隨機變數（Random Variable）：一個數值函數，將樣本空間中的每個結果映射到一個數值。例如，擲一枚骰子可以看作是一個隨機變數，其值可以是 1 到 6 之間的任意一個整數。

- 期望值（Expected Value）：隨機變數的長期平均值。對於可能值之集合為 Y 的離散隨機變數 X，其期望值計算公式為：

$$E(X) = \sum_{x_i \in Y} (x_i \cdot P(x_i))$$

- 客觀機率/頻率機率：根據過往的經驗或統計數據而得到的客觀數值，通常以過往事件發生的頻率或多次重複試驗來得到該事件發生的機率。

- 主觀機率：沒有統計數據支持的機率數值。