拉格朗日乘數

沈威宇

2024 年 12 月 20 日

目錄

第一章　拉格朗日乘數（Lagrange multiplier）

拉格朗日乘數法是一種在有約束條件下尋找函數極值的方法。拉格朗日乘數法所得的解會包含原問題的所有極點，但並不保證每個拉格朗日乘數法所得的臨界點都是原問題的臨界點。

一、　多變數形式

令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是自變數向量，$\mathbf{0}$ 是零向量。今有 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 和 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^c$ 。在約束條件 $g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 下尋找 $f(\mathbf{x})$ 的極點。
首先，構造拉格朗日函數 $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)$：

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda \cdot g(\mathbf{x})$$

其中，$\lambda \in \mathbb{R}^c$ 是拉格朗日乘數向量。
對 $\mathcal{L}$ 求梯度，並將其設為零：

$$\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0}$$

解這個方程組來找到 $\mathbf{x}$ 和 λ 。
Statement: 拉格朗日乘數法所得的 $\mathbf{x}$ 的解，會包含原問題的所有極點。

Proof.
考慮原問題中的一個極點 $\mathbf{x}^*$。由於它是約束條件下的極點，它必須滿足約束條件：

$$g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

在 $\mathbf{x}^*$ 附近的任何可行點 $\mathbf{x}$ 都必須滿足約束條件。我們可以將 $\mathbf{x}$ 表示為：

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}$$

其中 $\delta\mathbf{x}$ 是一個微小的變化，垂直於 $g(\mathbf{x})$ 定義的流形，且屬於 $\nabla g(\mathbf{x}^*)$ 的零空間，即滿足：

$$g(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

將 f 在 $\mathbf{x}^*$ 求泰勒展開一階近似：

$$f(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*) \cdot \delta\mathbf{x} + O(\|\delta\mathbf{x}\|^2)$$

將 g 在 $\mathbf{x}^*$ 求泰勒展開一階近似：

$$g(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}) \approx g(\mathbf{x}^*) + \nabla g(\mathbf{x}^*) \cdot \delta\mathbf{x} + O(\|\delta\mathbf{x}\|^2)$$

由於 $\mathbf{x}^*$ 是極點，對於任何可行的 $\delta\mathbf{x}$，我們必須有：

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) \cdot \delta\mathbf{x} = 0$$

由於 $g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$，我們得到：

$$\nabla g(\mathbf{x}^*) \cdot \delta\mathbf{x} = O(\|\delta\mathbf{x}\|^2)$$

因為 $\delta\mathbf{x}$ 是 $\nabla g(\mathbf{x}^)$ 零空間中的任意微分變化向量，所以 $\nabla f(\mathbf{x}^)$ 必須可以表示為 $\nabla g(\mathbf{x}^)$ 的線性組合。這意味著存在一個向 λ 使得：

$$\nabla \mathcal{L} = \nabla(f(\mathbf{x}) - \lambda \cdot g(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$$

□

二、　單變數形式

令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 。在約束條件 $g(x) = \mathbf{0}$ 下尋找 $f(x)$ 的極點。
首先，構造拉格朗日函數 $\mathcal{L}(x, \lambda)$：

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda \cdot g(x)$$

其中，$\lambda \in \mathbb{R}$ 是拉格朗日乘數。
對 $\mathcal{L}$ 求導數，並將其設為零：

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}x} = 0$$

解這個方程組來找到 x 和 λ 。
Statement: 拉格朗日乘數法所得的 x 的解，會包含原問題的所有極點。