多項式函數與方程

沈威宇

2025 年 1 月 7 日

目錄

第一節　多項式函數與方程（Polynomial functions and equations）

一、　方程組

- 相容方程組：一組方程組有解，則稱其為相容方程組。
- 相依方程組：一組方程組中，其中一者成立則其他者均成立，則稱其為相容方程組。
- 矛盾方程組：一組方程組無法同時成立，則稱其為矛盾方程組。

二、　多項式

多項式指由多個項（term）組成的代數表達式，每個項是常數與零或正整數個變數的乘積，且每個變數的指數必須是非負整數。
令有多項式 $f(x)$、$g(x)$、$q(x)$、$r(x)$。

三、　最高次項次數定理

$$\text{deg}(f(x)\cdot g(x)) = \text{deg}(f(x)) + \text{deg}(g(x))$$

四、　商式極限

領導係數指最高次項係數

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0,\ \text{deg}(f(n)) < \text{deg}(g(n)) \\ \dfrac{f(x)\text{ 領導係數}}{g(x)\text{ 領導係數}},\ \text{deg}(f(n)) = \text{deg}(g(n)) \\ \text{不存在},\ \text{deg}(f(n)) > \text{deg}(g(n)) \end{cases}$$

五、　近似

$f(x)$ 在 $x = a$ 的 n 次近似（$n \le \text{deg}(f(x))$） $= f(x)$ 之泰勒級數最低次 n 項

六、　除法定理

恰有一組 $q(x)$、$r(x)$ 滿足：

$$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x)$$

$$\text{deg}(r(x)) < \text{deg}(g(x))$$

若 $r(x) = 0$ 則稱 $q(x)$ 為 $f(x)$ 之因式。

(一)　餘式定理

若 $q(x) = ax + b$ 則 $r(x) = f(\frac{b}{a})$。

(二) 因式定理

$f(\frac{b}{a}) = 0$ 若且惟若 $ax + b$ 為 $f(x)$ 的因式。

七、 線性變換

(一) 平移

對於任意函數 $f(x)$，$y = f(x)$ 右移 h 單位，上移 k 單位，得 $y = f(x - h) + k$。

(二) 伸縮

對於任意函數 $f(x)$，$y = f(x)$ 以 x 軸為基準線鉛直伸縮為原來的 a 倍，以 y 軸為基準線水平伸縮為原來的 b 倍，得 $y = af\left(\frac{x}{b}\right)$。

八、 側與距離

(一) 側

在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，假設有 **L**：$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$。點 P 滿足 $f(P) > 0$ 若且惟若 P 在 **L** 的正側。點 P 滿足 $f(P) = 0$ 若且惟若 P 在 **L** 上。點 P 滿足 $f(P) < 0$ 若且惟若 P 在 **L** 的負側。

(二) 直線與點距離

在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，假設有 **L**：$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$，且 f 為一次函數，且 f 的係數為 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，且 f 的常數項為 c。點 P 到 **L** 的距離 $d(P, \mathbf{L}) = \frac{|f(P)|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$。

(三) 直線間距離

在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，假設有 $\mathbf{L}_1$：$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$、$\mathbf{L}_2$：$(g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$，且 f、g 為一次函數，且 f、g 的係數均為 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，且 f、g 的常數項分別為 c、d。$\mathbf{L}_1$ 到 $\mathbf{L}_2$ 的距離 $d(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2) = \frac{|c - d|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$。

(四) 直線到點最短向量

在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，假設有 **L**：$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$，且 f 為一次函數，且 f 的係數為 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，且 f 的常數項為 c。**L** 上距離點 P 最近的點到點 P 的向量 $\vec{v} = \frac{f(P)}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。

(五) 平行直線之間公垂向量

在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，假設有 $\mathbf{L}_1$：$(f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$、$\mathbf{L}_2$：$(g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$，且 f、g 為一次函數，且 f、g 的係數均為 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，且 f、g 的常數項分別為 c、d。$\mathbf{L}_1$ 上任意點 P 到 $\mathbf{L}_2$ 上距離點 P 最近的點的向量 $\vec{v} = \frac{c - d}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。

九、 零函數

$$f(x)=0$$

十、 一元一次函數

$a \neq 0$

(一) 一般式（斜截式）

$$f(x)=ax+b$$

其中 a 稱斜率，b 稱 y 截距，$\tan^{-1}(a)$ 稱斜角。

(二) 點斜式

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

零函數與一元一次函數合稱線性函數。

十一、 一元二次函數

$a \neq 0$

(一) 一般式

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

(二) 標準式

$$f(x)=a(x-h)^2+k$$

其中 $(h,\ k)=\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

(三) 判別式

$$\Delta=b^2-4ac$$

(四) 根

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}\,e^{k\pi i}}{2a} \quad \text{, where } k=0,\ 1 \\ &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

註：尤拉公式：

$$e^{bi}=\cos(b)+i\sin(b)$$

註：$x^n=y$ 的解為：

$$x=\sqrt[n]{y}\,e^{\frac{2n\pi i}{n}} \quad ,\ \forall\, k=0,\ 1,\ldots,\ n-1$$

(五) 圖形特徵與根數

- 拋物線。
- 頂點 V、極值點：(h, k)。
- 對稱軸：$x = h$。
- 開口：a 為正，開口向上，反之向下。$|a|$ 愈大，開口愈小。
- 根數：
  - $a > 0$ 且 $\Delta < 0$：函數恆正，無實根，有二共軛複根。
  - $a < 0$ 且 $\Delta > 0$：函數恆負，無實根，有二共軛複根。
  - $a > 0$ 且 $\Delta = 0$：函數不負，一重實根。
  - $a < 0$ 且 $\Delta = 0$：函數不正，一重實根。
  - $\Delta < 0$：函數與 x 軸有二交點，二實根。

十二、 一元三次函數

$a \neq 0$

(一) 一般式

$$f(x) = ax^3 + bx^x + cx + d$$

(二) 標準式

$$f(x) = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$$

其中 $(h, p, k) = \left(\dfrac{b}{3a}, c - \dfrac{b^2}{3a}, \dfrac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d\right)$

(三) 判別式

$$\Delta = \left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3$$

(四) 根

1. 直接表達

$$x = -\frac{b}{3a} + e^{\frac{2k\pi i}{3}} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$
$$+ e^{\frac{2(3-k)\pi i}{3}} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} \quad \text{, where } k = 0, 1, 2$$

2. 三解分開表達

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$
$$+ \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}}$$
$$x_2 = -\frac{b}{3a} + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$
$$+ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}}$$
$$x_3 = -\frac{b}{3a} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$
$$+ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}}$$

3. 卡迪諾公式（Cardino’s formula）表達

令：

$$h = \frac{b}{3a}$$
$$p = c - \frac{b^2}{3a}$$
$$k = \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d$$
$$r = \frac{p}{a}$$
$$s = \frac{k}{a}$$
$$u = -\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{r^3}{27}}\, e^{\frac{2k\pi i}{2}} \quad \text{, where } k = 0,\ 1$$
$$C = \sqrt[3]{u}\, e^{\frac{2k\pi i}{3}} \quad \text{, where } k = 0,\ 1,\ 2$$

則：

$$x = C - \frac{r}{3C} + h$$

4. 一般化卡迪諾公式表達

令：

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= b^2 - 3ac \\ \Delta_1 &= 2b^3 - 9abc + 27a^2d \\ u &= \Delta_1 + \sqrt{{\Delta_1}^2 - 4{\Delta_0}^3}\, e^{\frac{2k\pi i}{2}} \quad \text{, where } k = 0,\, 1 \\ C &= \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + u}{2}}\, e^{\frac{2k\pi i}{3}} \quad \text{, where } k = 0,\, 1,\, 2\end{aligned}$$

則：

$$x = -\frac{1}{3a}\left(b + C + \frac{\Delta_0}{C}\right)$$

(五) 圖形特徵

- 頂點 V：$(h,\, k)$。
- 二階旋轉對稱點、拐點（一階導數為零，二次導數為零）：$(h,\, f(h))$。
- 鞍點（非極值的駐點，駐點指一階導數為零）：$ap < 0$ 若且惟若存在二個鞍點，$p = 0$ 若且惟若存在一個鞍點（圖形單調遞增或減），$ap > 0$ 若且惟若不存在鞍點（圖形嚴格遞增或減）。
- 極值：不存在。

十三、 平面上的直線

(一) 一般式

$$ax + by + c = 0$$

(二) 截距式

若 $ab \neq 0$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

其中 $p = -\frac{c}{a}$、$q = -\frac{c}{b}$ 分別為 x、y 截距。

(三) 斜截式

若 $b \neq 0$，即 y 為 x 的函數

$$y = f(x) = mx + q$$

其中 m 稱斜率，$\tan^{-1}(m)$（或 $\tan^{-1}(m) + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$）稱斜角。

(四) 點斜式

若 $b \neq 0$，即 y 為 x 的函數

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

(五) 參數式

設相異兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$：
直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的參數式：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

射線 $\overrightarrow{AB}$ 的參數式：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad t \geq 0$$

線段 $\overline{AB}$ 的參數式：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(六) 特性

- 平面上直線 **L**$_1$： $ax + by + c = 0$、**L**$_2$： $dx + ey + f = 0$：$ae = bd$ 若且惟若 **L**$_1$/**L**$_2$；$ad + be = 0$ 若且惟若 **L**$_1 \perp$ **L**$_2$；若 **L**$_1$、**L**$_2$ 存在斜率 m_1、m_2 則：$m_1 = m_2$ 若且惟若 **L**$_1$/**L**$_2$，$m_1 m_2 = -1$ 若且惟若 **L**$_1 \perp$ **L**$_2$。
- **L**： $ax + by + c$：$a > 0$ 則 $ax + by + c > 0$ 在 **L** 之右半平面；$b > 0$ 則 $ax + by + c > 0$ 在 **L** 之上半平面。