

# 三角學

沈威宇

2025 年 2 月 26 日

# 目錄

第一章 三角學 (Trigonometry)	1
第一節 角 (Angle)	1
一、 弧度與角度	1
(一) 弧度 (radian) / 徑/徑度	1
(二) 角度 (degree)	1
二、 廣義角	1
三、 極坐標系 (Polar Coordinate System)	1
四、 斜角	2
五、 三角測量	2
第二節 三角比 (Trigonometric Ratios) 與三角函數 (Trigonometric functions)	2
一、 銳角三角比	2
二、 廣義角 (General angles) 三角比/三角函數幾何定義	3
三、 特殊角三角函數值	4
四、 三角函數基本關係	5
五、 奇變偶不變，正負看象限	5
六、 正、餘弦函數級數形式	6
七、 三角函數指數形式	6
八、 三角函數微積分	7
第三節 與三角函數相關的函數	7
一、 反三角函數	7
二、 反三角函數定積分形式	8
三、 atan2 函數	8
四、 雙曲函數 (Hyperbolic functions)	8
五、 反雙曲函數對數形式	9

第四節 公式定理 . . . . .	9
一、 三角形公式定理 . . . . .	9
(一) 勾股/畢氏/商高定理 . . . . .	9
(二) 三角形全等與 $SSA$ 型性質 . . . . .	10
(三) 九點圓與歐拉線 . . . . .	10
(四) 正弦定理 . . . . .	10
(五) 投影定理 . . . . .	11
(六) 餘弦定理 . . . . .	11
(七) 三角形面積定理 . . . . .	12
(八) 重心相關定理 . . . . .	12
(九) 外心相關定理 . . . . .	12
(十) 內心相關定理 . . . . .	12
(十一) 垂心相關定理 . . . . .	13
(十二) 西瓦定理 (Ceva theorem) . . . . .	13
(十三) 孟氏定理 (Menelaus' theorem) . . . . .	13
(十四) 角平分線定理 . . . . .	13
(十五) 角平分線長定理 . . . . .	13
二、 三角函數公式定理 . . . . .	14
(一) 正切萬能公式 . . . . .	14
(二) 二倍角公式 . . . . .	14
(三) 半角公式與平方化倍角公式 . . . . .	14
(四) 三倍角公式 . . . . .	14
(五) 和差角公式 . . . . .	14
(六) 平方關係 . . . . .	15
(七) 三角形內角正切公式 . . . . .	15
(八) 正餘弦函數疊合公式定理 . . . . .	15
(九) 和差化積 . . . . .	15
(十) 積化和差 . . . . .	16
(十一) 連加公式 . . . . .	16
(十二) 變形公式 . . . . .	16
(十三) 單位圓定理 . . . . .	16
(十四) 高次方降次 . . . . .	16

# 第一章 三角學 (Trigonometry)

## 第一節 角 (Angle)

### 一、 弧度與角度

#### (一) 弧度 (radian) / 徑/徑度

指圓周上一段弧長與其對應半徑的比值。物理上無因次。單位同其名或通常省略。扇形的弧長等於其弧度乘以半徑；扇形的面積等於其弧度乘以半徑平方除以二。

#### (二) 角度 (degree)

一個完整的圓被平分為  $360^\circ$ 。物理上無因次。

$$\frac{1\text{徑}}{1^\circ} = \frac{\pi}{180} \approx 57.3 \approx \frac{1}{0.0175}$$
$$\pi \approx 3.14159265, \quad \frac{1}{\pi} \approx 0.3183$$

### 二、 廣義角

指將角從  $[0, 2\pi)$  的普通角擴展到任意實數。

同界角： $\alpha$ 、 $\beta$  為同界角  $\iff \frac{\alpha - \beta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$

### 三、 極坐標系 (Polar Coordinate System)

一種二維坐標系，用於表示平面上的點，其位置由一對數值（距離  $r$  和角度  $\theta$ ）來確定。與笛卡爾坐標系統 (Cartesian Coordinate System) 不同。

- 距離  $r$ ：從極點（通常是坐標原點  $O$ ）到點  $P$  的距離。 $r \geq 0$ 。
- 角度  $\theta$ ：從極軸（通常是水平的正  $x$  軸）逆時針旋轉到點  $P$  所在的射線的角度。角度可以用弧度或度數表示。
- 點  $P$  的極坐標表示為  $[r, \theta]$ 。
- 從極坐標到直角坐標的轉換：

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

- 從直角坐標到極坐標的轉換：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$$

## 四、 斜角

斜角指切線與  $x$  軸的最小夾角，其正切值為其斜率。

## 五、 三角測量

- 仰角：仰視目標時，視線與水平線的夾角。
- 俯角：俯視目標時，視線與水平線的夾角。
- 方位角（地理）：以正北為  $0^\circ$ ，順時針為正。
- 象限角（地理）：以東南西北某一方位（通常為正北或正南）為基準，加上向相鄰方位轉向的度數與該相鄰方位，如北  $35^\circ$  西 代表方位角  $325^\circ$ 、南  $30^\circ$  西代表方位角  $210^\circ$ 。

# 第二節 三角比 (Trigonometric Ratios) 與三角函數 (Trigonometric functions)

## 一、 銳角三角比

- 正弦 (Sine, sin)：正弦值是對應角的對邊與斜邊之比，即：

$$\sin \theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$$

- 餘弦 (Cosine, cos)：餘弦值是對應角的鄰邊與斜邊之比，即：

$$\cos \theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$$

- 正切 (Tangent, tan)：正切值是對應角的對邊與鄰邊之比，即：

$$\tan \theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$$

- 餘切 (Cotangent, cot)：

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

- 正割 (Secant, sec)：

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

- 餘割 (Cosecant, csc)：

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

## 二、 廣義角 (General angles) 三角比/三角函數幾何定義

在單位圓中，令角度的測量方式是從正  $x$  軸開始，逆時針方向為正角，順時針方向為負角，且角度數值可以是任何實數。任意角度的三角函數值可以表示為：

- 正弦 (Sine,  $\sin$ )：角  $\theta$  的正弦值是單位圓上對應點的  $y$  坐標，即：

$$\sin \theta = y$$

◦ 為奇函數，定義域  $\mathbb{R}$ ，值域  $[-1, 1]$ ，週期  $2\pi$ ，振幅 1，線對稱於  $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}$ ，點對稱於  $((n\pi, n \in \mathbb{Z}), 0)$ 。

- 餘弦 (Cosine,  $\cos$ )：角  $\theta$  的餘弦值是單位圓上對應點的  $x$  坐標，即：

$$\cos \theta = x$$

◦ 為偶函數，定義域  $\mathbb{R}$ ，值域  $[-1, 1]$ ，週期  $2\pi$ ，振幅 1，線對稱於  $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ ，點對稱於  $\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}\right), 0$ ， $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 。

- 正切 (Tangent,  $\tan$ )：角  $\theta$  的正切值是正弦值與餘弦值的比，即：

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x}$$

◦ 為奇函數，定義域  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \nmid \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ ，值域  $\mathbb{R}$ ，週期  $\pi$ ，點對稱於  $\left(\left(\frac{n}{2}\pi, n \in \mathbb{Z}\right), 0\right)$ 。

- 餘切 (Cotangent,  $\cot$ )：

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

◦ 為奇函數，定義域  $\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \nmid x\}$ ，值域  $\mathbb{R}$ ，週期  $\pi$ ，點對稱於  $\left(\left(\frac{n}{2}\pi, n \in \mathbb{Z}\right), 0\right)$ ， $\cot(x) = -\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 。

- 正割 (Secant,  $\sec$ )：

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

◦ 為偶函數，定義域  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \nmid \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ ，值域  $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \vee y \leq 1\}$ ，週期  $\pi$ ，線對稱於  $((n\pi, n \in \mathbb{Z}), 0)$ ，點對稱於  $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}$ 。

- 餘割 (Cosecant,  $\csc$ )：

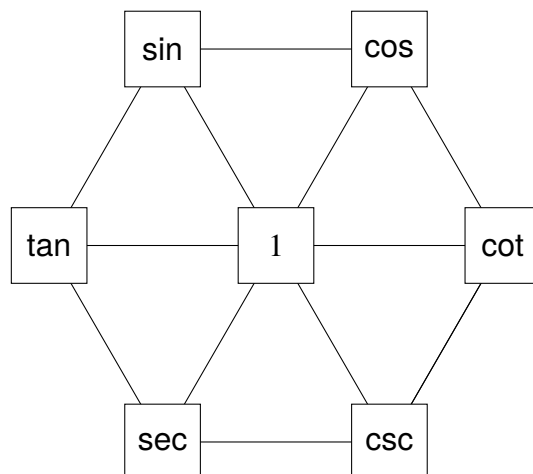
$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

◦ 為奇函數，定義域  $\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \nmid x\}$ ，值域  $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \vee y \leq 1\}$ ，週期  $\pi$ ，線對稱於  $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}$ ，點對稱於  $((n\pi, n \in \mathbb{Z}), 0)$ ， $\csc(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 。

### 三、 特殊角三角函數值

Radian	Angle	sin	cos	tan
0	0°	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	
$\pi$	180°	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{12}$	15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{12}$	75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	18°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$\frac{2\pi}{10}$	36°	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$\frac{3\pi}{10}$	54°	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$\frac{4\pi}{10}$	72°	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$

## 四、 三角函數基本關係



- 名稱：左側三者為正；右側三者為餘；上面二者為弦；中間二者為切；下面二者為割。
- 餘角關係：以鉛直軸為對稱軸，位於線對稱位置的三角比為餘角關係，即對於銳角  $\theta$ ，左  $(\theta) =$  右  $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ 。
- 倒數關係：三條通過中心點的連線為倒數關係，其兩端之三角比互為倒數，相乘為 1。
- 商數關係：六邊形周上，連續三個頂點形成的連線，其兩端之三角比相乘等於中間之三角比。
- 平方關係：圖中有三個倒正三角形，其在上方兩頂點之二者之平方和等於在下方頂點者。

## 五、 奇變偶不變，正負看象限

今有函數  $f$ ，已知其為  $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 、 $\sec$ 、 $\csc$ 、 $\cot$  之一，且已知  $f(\theta)$ 。欲求  $f(\phi)$ ，其中  $\phi = \pm\theta \pm n\frac{\pi}{2}$ ，其中  $n \in \mathbb{Z}$ 。

- 判斷方法：奇變偶不變，正負看象限。
- 上句：奇偶指  $n$  之奇偶，變指倒數，即：若  $n$  為奇數則令  $g(\theta) = \frac{1}{f(\theta)}$ ，否則令  $g(\theta) = f(\theta)$ ，則  $|f(\phi)| = |g(\theta)|$ 。
- 下句：象限指假設  $[r, \theta]$  在第一象限時， $[r, \phi]$  之象限。令該象限中任意角度為  $\omega$ 。令  $k = \frac{f(\phi)}{g(\theta)}$ 。則  $k = \frac{f(\omega)}{|f(\omega)|}$ ，即：



象限 $f$	一	二	三	四
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
csc	+	+	-	-
sec	+	-	-	+
cot	+	-	+	-

## 六、 正、餘弦函數級數形式

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

## 七、 三角函數指數形式

根據歐拉/尤拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

三角函數可寫為：

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\tan x = -i \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot x = i \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1}, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sec x = \frac{2e^{ix}}{e^{2ix} + 1}, \quad x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\csc x = i \frac{2e^{ix}}{e^{2ix} - 1}, \quad x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

## 八、三角函數微積分

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x) dx$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\ln  \sec x  + C$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$	$\ln  \csc x - \cot x  + C$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\ln  \sec x + \tan x  + C$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\ln  \sin x  + C$

## 第三節 與三角函數相關的函數

### 一、反三角函數

名稱	常用符號	定義	定義域	值域
反正弦	$y = \arcsin x$	$x = \sin y$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
反餘弦	$y = \arccos x$	$x = \cos y$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
反正切	$y = \arctan x$	$x = \tan y$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
反餘切	$y = \operatorname{arccot} x$	$x = \cot y$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
反正割	$y = \operatorname{arcsec} x$	$x = \sec y$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$
反餘割	$y = \operatorname{arccsc} x$	$x = \csc y$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

## 二、 反三角函數定積分形式

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz, \quad |x| \leq 1$$

$$\arccos x = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz, \quad |x| \leq 1$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{z^2+1} dz,$$

$$\operatorname{arccot} x = \int_x^\infty \frac{1}{z^2+1} dz,$$

$$\operatorname{arcsec} x = \int_1^x \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}} dz, \quad x \geq 1$$

$$\operatorname{arccsc} x = \int_x^\infty \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}} dz, \quad x \geq 1$$

## 三、 atan2 函數

$\operatorname{atan2}(y, x)$  在  $x > 0$  時返還  $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$  在  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  中的解，在  $x < 0, y \geq 0$  時返還  $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  中的解，在  $x < 0, y < 0$  時返還  $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$  在  $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$  中的解，在  $x = 0, y \neq 0$  時返還  $\frac{y}{|y|} \frac{\pi}{2}$ ，在  $x = y = 0$  時返還值未定義。

## 四、 雙曲函數 (Hyperbolic functions)

各雙曲函數之名稱均以對應之三角函數之名稱前加雙曲 (hyperbolic)，代號則為對應之三角函數代號後加 h。

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\coth x = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}, \quad x \neq 0$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}, \quad x \neq 0$$

## 五、反雙曲函數對數形式

$$\operatorname{arcsinh} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$\operatorname{arccosh} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad x \geq 1$$

$$\operatorname{arctanh} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{arcoth} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right), \quad |x| > 1$$

$$\operatorname{arcsech} = \ln \left( \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right), \quad 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{arccsch} = \ln \left( \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \right), \quad x \neq 0$$

## 第四節 公式定理

### 一、三角形公式定理

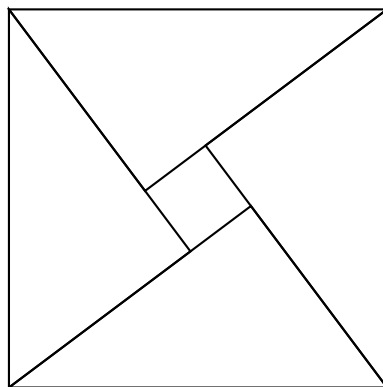
令圖形體積（或面積、長度）之代號同其自身。今有一三角形  $\triangle ABC$ ，其中： $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的對邊長分別為  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ； $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  又記作  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ；外接圓  $O$  圓心  $O$  即外心（Circumcenter）、半徑  $R$ ；內接圓  $I$  圓心  $I$  即內心（Incenter）、半徑  $r$ ；重心（Centroid） $G$ ；垂心（Orthocenter） $H$ ； $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的對邊中點分別為  $M_a$ 、 $M_b$ 、 $M_c$ ； $A$  在  $\overrightarrow{BC}$  的垂足為  $h_a$ ， $B$  在  $\overrightarrow{CA}$  的垂足為  $h_b$ ， $C$  在  $\overrightarrow{AB}$  的垂足為  $h_c$ ； $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ； $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的角平分線與對邊之交點分別為  $\mathcal{B}_a$ 、 $\mathcal{B}_b$ 、 $\mathcal{B}_c$ ；九點圓  $\mathcal{O}$  圓心  $\mathcal{O}$ 、半徑  $\mathcal{R}$ ；與  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的兩鄰邊延長線與對邊皆相切的旁切圓分別為  $E_a$ 、 $E_b$ 、 $E_c$ ，其圓心（旁心）各同其圓名。

### （一）勾股/畢氏/商高定理

$$(\angle C = 90^\circ) \iff (a^2 + b^2 = c^2)$$

*Proof.*

趙爽勾股圖方圖證明法：



其中四個三角形的短股為  $a$ 、長股為  $b$ 、斜邊為  $c$ 。

$$4\frac{ab}{2} + (b-a)^2 = c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

□

## (二) 三角形全等與 $SSA$ 型性質

令：已知兩三角形一對應位置之邊長相等稱  $S$ ，已知兩三角形一對應位置之角之角度相等稱  $A$ ， $S$  相鄰表示鄰邊， $A$  相鄰表示鄰角， $S$  與  $A$  相鄰表示邊與其一側的角，當  $A$  為直角得稱  $R$ ， $R$  之鄰邊得稱  $H$ 。

三角形的全等性質有  $SSS$ 、 $SAS$ 、 $AAS$ 、 $ASA$ 、 $RHS$ ，當兩三角形符合以上任一條件時，知兩三角形全等。

$SSA$  型的討論：若已知  $a$ 、 $b$ 、 $\angle A$ ：

- $\angle A$  為銳角，因  $C$  到  $\overleftrightarrow{AB}$  的距離為  $b \sin A$ ：
  - $a < b \sin A$ : 無解
  - $a = b \sin A$ : 唯一解
  - $a > b \sin A$ : 兩解
- $\angle A$  為鈍角，則：
  - $a \leq b$ : 無解
  - $a > b$ : 唯一解

## (三) 九點圓與歐拉線

- $M_a, M_b, M_c, h_a, h_b, h_c, \frac{A+H}{2}, \frac{B+H}{2}, \frac{C+H}{2}$  必共圓，該圓稱九點圓。

- 九點圓圓周  $\mathcal{O}$  與圓心  $\mathcal{O}$  均符合：

$$\mathcal{O} = \frac{O+H}{2}$$

- 歐拉線： $\mathcal{O}, O, G, H$  共線，該線稱歐拉線。
- $\triangle ABC$  是等腰三角形  $\iff I$  在歐拉線上。
- 費爾巴哈定理 (Feuerbach's theorem)：九點圓與三個旁切圓均外切，與內切圓內切（內切圓在內）。

$$\mathcal{O} = \frac{O}{2}$$

## (四) 正弦定理

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

*Proof.*

$$\sin A = \frac{\overline{Ch_c}}{a}$$

$$\sin B = \frac{\overline{Ch_c}}{b}$$

□

$$2R \sin A = a$$

*Proof.*

作  $O$ 。若  $\triangle ABC$  為直角三角形，觀察可證。

若  $\triangle ABC$  非直角三角形，以  $BC$  為一股，令斜邊在  $\overrightarrow{BO}$  上，作一直角三角形  $BCD$ ，其中  $D = 2O - B$ 。

若  $\triangle ABC$  為銳角三角形，根據圓周定理可知， $\angle D = \angle BAC$ ，得證。

若  $\triangle ABC$  為鈍角三角形，根據根據圓內接四邊形對角互補定理可知， $\angle D = \pi - \angle A$ ，得證。  $\square$

$$\text{凸四邊形面積} = \frac{1}{2} \text{對角線相乘} \times \sin \text{兩對角線夾角}$$

## (五) 投影定理

$$a = b \cos C + c \cos B$$

## (六) 餘弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

*Proof.*

根據投影定理：

$$c = a \cos B + b \cos A$$

兩邊同乘  $c$ ：

$$c^2 = ac \cos B + bc \cos A$$

同理：

$$a^2 = ac \cos B + ab \cos C$$

$$c^2 = bc \cos A + ab \cos C$$

$$c^2 = a^2 - ab \cos C + b^2 - ab \cos C = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$\square$

平行四邊形定理：平行四邊形四邊長平方和等於兩對角線平方和

$$\text{三角形中線公式：} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2 \left( \overline{AM_a}^2 + \overline{BM_a}^2 \right)$$

## (七) 三角形面積定理

$$\begin{aligned}\Delta ABC &= \frac{1}{2}a \cdot \overline{Ah_a} \\&= \frac{1}{2}ab \sin C \\&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\text{海龍 (Heron) 公式}) \\&= \frac{abc}{4R} \\&= rs \\&= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}} \\&= \frac{2}{3}\overline{BM_b} \cdot \overline{CM_c} \sqrt{\left| \frac{1 - \left(\overline{AM_a}^2 + \overline{BM_b}^2 + \overline{CM_c}^2\right)^2}{4\overline{BM_b}^2\overline{CM_c}^2} \right|} \\&= \frac{1}{2}\sqrt{\overline{AB}^2\overline{AC}^2 - \left(\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right)^2} \\&= \frac{1}{2}\left\|\overline{AB} \times \overline{AC}\right\|\end{aligned}$$

## (八) 重心相關定理

$G$  為三中線交點

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM_A}$$

$$G = \frac{A + B + C}{3}$$

## (九) 外心相關定理

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$$

$$O = \frac{a^2A + b^2B + c^2C}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$O$  為三邊中垂線交點

$$\Delta OAB : \Delta OBC : \Delta OCA = \sin 2C : \sin 2A : \sin 2B$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overline{AB}^2$$

$$\frac{1}{2}\angle AOB = \angle C \vee \pi - \angle C$$

## (十) 內心相關定理

$I$  與三邊均相切

$I$  為三角角平分線交點

$$I = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$$

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

### (十一) 垂心相關定理

$H$  為三高交點

$$H = \frac{\tan A \cdot A + \tan B \cdot B + \tan C \cdot C}{\tan A + \tan B + \tan C}$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2)$$

$$\text{在複數平面上：} \det \begin{pmatrix} 1 & A & A^2 & \overline{A} \\ 1 & B & B^2 & \overline{B} \\ 1 & C & C^2 & \overline{C} \\ 1 & H & H^2 & \overline{H} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\overline{Hh_a}}{Ah_a} + \frac{\overline{Hh_b}}{Bh_b} + \frac{\overline{Hh_c}}{Ch_c} = 1$$

### (十二) 西瓦定理 (Ceva theorem)

令西瓦線段指各頂點與其對邊或對邊延長線連接而成的直線段。

三角形  $\triangle ABC$  的西瓦線段  $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{BE}$ 、 $\overrightarrow{CF}$ ：

$$\overrightarrow{AD}、\overrightarrow{BE}、\overrightarrow{CF} \text{ 交於一點} \iff \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1 \implies D、E、F \text{ 中有零或二個點不在 } \triangle ABC \text{ 邊上}$$

口訣：頂分頂分頂分頂

### (十三) 孟氏定理 (Menelaus' theorem)

一直線與  $\triangle ABC$  的邊  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  或其延長線分別交於  $L$ 、 $M$ 、 $N$ ：

$$\iff \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1 \implies L、M、N \text{ 中有一或三數個點不在 } \triangle ABC \text{ 邊上}$$

口訣：頂分頂分頂分頂

### (十四) 角平分線定理

已知： $\triangle ABC$  中  $\angle B < \angle C$ ； $D$  在  $\overline{BC}$  上； $E$  在  $\overline{BC}$  上且不在  $\overline{BC}$  上。

內角平分線定理及逆定理： $\angle BAD = \angle DAC \iff \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

外角平分線定理及逆定理： $\angle CAE = \pi - \angle BAE \iff \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$

### (十五) 角平分線長定理

$$\overline{AB_a} = \frac{bc \sin A}{(b+c) \sin \left( \frac{A}{2} \right)}$$



## 二、三角函數公式定理

### (一) 正切萬能公式

$$\sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

### (二) 二倍角公式

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$= 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

### (三) 半角公式與平方化倍角公式

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$= \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{1 + \sin \theta - \cos \theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta}$$

$$= \csc \theta - \cot \theta$$

### (四) 三倍角公式

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$$

### (五) 和差角公式

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{-\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$\sec(\alpha + \beta) = \frac{\sec \alpha \sec \beta \csc \alpha \csc \beta}{-\sec \alpha \sec \beta + \csc \alpha \csc \beta}$$

$$\sec(\alpha - \beta) = \frac{\sec \alpha \sec \beta \csc \alpha \csc \beta}{\sec \alpha \sec \beta + \csc \alpha \csc \beta}$$

$$\csc(\alpha + \beta) = \frac{\sec \alpha \sec \beta \csc \alpha \csc \beta}{\sec \alpha \sec \beta + \csc \alpha \csc \beta}$$

$$\csc(\alpha - \beta) = \frac{\sec \alpha \sec \beta \csc \alpha \csc \beta}{\sec \alpha \sec \beta - \csc \alpha \csc \beta}$$

## (六) 平方關係

$$\sin^2 \theta = \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

## (七) 三角形內角正切公式

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \iff \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma$$

## (八) 正餘弦函數疊合公式定理

$$(a \sin \theta + b \cos \theta)^2 \leq a^2 + b^2, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left( x + \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right) \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left( x - \tan^{-1} \left( \frac{a}{b} \right) \right) \end{aligned}$$

## (九) 和差化積

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

## (十) 積化和差

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

## (十一) 連加公式

$$\sum_{k=1}^n \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

$$\sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

## (十二) 變形公式

$$1 + \sin \theta = \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$1 - \sin \theta = \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}\right)^2$$

## (十三) 單位圓定理

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 = a, \theta = \sin^{-1} x + \sin^{-1} y, \phi = \cos^{-1} x + \cos^{-1} y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 1 & \Leftrightarrow \theta > \frac{\pi}{2} & \Leftrightarrow \phi > \frac{\pi}{2} \\ a = 1 & \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} & \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \\ a < 1 & \Leftrightarrow \theta < \frac{\pi}{2} & \Leftrightarrow \phi < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

## (十四) 高次方降次

$$\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2 \sin^2 \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta)$$

$$\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = -\cos(2\theta)$$

$$\sin^6 \theta + \cos^6 \theta = 1 - 3 \sin^2 \cos^2 \theta = 1 - \frac{3}{4} \sin^2(2\theta)$$