

圓錐曲線

沈威宇

2025 年 1 月 16 日

目錄

第一節 圓錐曲線	1
一、 定義	1
二、 符號與關係	1
三、 自由度	1
四、 圓錐曲線一般式	1
五、 圓錐曲線的標準式	1
(一) 標準位向橢圓標準式	1
(二) 標準位向拋物線標準式	2
(三) 標準位向雙曲線標準式	2
(四) 反比例函數雙曲線標準式	2
六、 標準圓錐曲線的參數式	3
(一) 標準位向橢圓參數式	3
(二) 標準位向拋物線參數式	3
(三) 標準位向雙曲線參數式	3
(四) 反比例函數雙曲線參數式	3
七、 標準圓錐曲線的一般式	3
(一) 標準方向任意位置橢圓一般式	3
八、 判別式	3
(一) 圖形判別式	3
(二) 退化判別式	4
(三) 旋轉方向	4
九、 圓	4
(一) 圓的直徑式	4
(二) 圓的判別式	4
(三) 圓與直線集合關係的代數判定	5

第一節 圓錐曲線

一、 定義

設 F 為定點， l 為定直線， e 為正常數， P' 為 l 上的動點且滿足 $|PP'| \perp l$ ，稱滿足 $\frac{|PF|}{|Pl|} = e$ 的動點的軌跡為圓錐曲線，其中 F 為其焦點 (Focus)， l 為其準線 (Directrix)， e 為其離心率 (Eccentricity)。即：當一個圓錐曲線上的每一點到一固定點（焦點）的距離與該點到一定直線（準線）的距離之比為常數（離心率）時，就可以確定該曲線的形狀和位置。

二、 符號與關係

離心率 e 、半焦距 c 、半正焦弦 ℓ 、焦點準線距離 p 。

$$\ell = pe$$

$$c = ae$$

$$p + c = \frac{a}{e}$$

三、 自由度

- 不考慮位置、方向、大小，圓錐曲線的圖形有一個自由度。
- 不考慮位置、方向，但考慮大小，圓錐曲線的圖形有兩個自由度。
- 不考慮位置，但考慮方向、大小，圓錐曲線的圖形有三個自由度。
- 不考慮方向，但考慮位置、大小，圓錐曲線的圖形有四個自由度。
- 考慮位置、方向、大小，圓錐曲線的圖形有五個自由度。

四、 圓錐曲線一般式

$$Ax^2 + Bx^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

其中： A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 為常數； $ABC \neq 0$ ，否則為圓錐曲線之退化。

五、 圓錐曲線的標準式

(一) 標準位向橢圓標準式

$$ab \neq 0 \quad a \geq b$$

a ：半長軸

b ：半短軸

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\ell = \frac{b^2}{a}$$

$$p = \begin{cases} \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, & a > b \\ \infty, & a = b \end{cases}$$

當 $a = b$ ，圖形為圓形， $e = c = 0, \ell = a, p = \infty$

$$\text{當 } a > b, \text{ 準線方程: } x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

(二) 標準位向拋物線標準式

$$y^2 = 4ax$$

$$e = 1$$

$$c = \infty$$

$$\ell = 2a$$

$$p = 2a$$

$$\text{準線方程: } x = -a$$

(三) 標準位向雙曲線標準式

$$ab \neq 0$$

a : 半實/主軸

b : 半共軛軸

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\ell = \frac{b^2}{a}$$

$$p = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\text{準線方程: } x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(四) 反比例函數雙曲線標準式

$$y = \frac{k}{x}$$

$$k = \frac{c^2}{2}$$

六、標準圓錐曲線的參數式

(一) 標準位向橢圓參數式

$$(a \cos(\theta), b \sin(\theta)), 0 \leq \theta < 2\pi$$

(二) 標準位向拋物線參數式

$$(at^2, 2at), t \in \mathbb{R}$$

(三) 標準位向雙曲線參數式

$$(a \sec(\theta), b \tan(\theta)), 0 \leq \theta < 2\pi$$

(四) 反比例函數雙曲線參數式

$$(kt, \frac{k}{t}), \text{ where } k = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

七、標準圓錐曲線的一般式

(一) 標準方向任意位置橢圓一般式

$$ab \neq 0$$

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = 1$$

其中： $a = \sqrt{\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B} - F}$ 為其 x 軸方向的半徑， $b = \sqrt{\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B} - F}$ 為其 y 軸方向的半徑， $h = \frac{D}{2A}$ ， $k = \frac{E}{2B}$ ， (h, k) 為橢圓的中心點

八、判別式

(一) 圖形判別式

註：圖形判別式並不總是記作 Δ_P ，也不總是稱作圖形判別式，惟此處為之。有時以此處定義之 $-\frac{1}{4}$ 倍作為圖形判別式，判斷上變號即可。

$$\begin{aligned}\Delta_P &= -4 \begin{vmatrix} A & \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} & B \end{vmatrix} \\ &= C^2 - 4AB\end{aligned}$$

圖形判別式不論虛實，只論圖形。

- 若圖形不退化，且 $\Delta_P > 0$ ，圖形是橢圓。特別地，當 $A = B$ 且 $C = 0$ 時，圖形是圓。
- 若圖形不退化，且 $\Delta_P = 0$ ，圖形是拋物線。
- 若圖形不退化，且 $\Delta_P < 0$ ，圖形是雙曲線。

- 若圖形退化，且 $\Delta_P > 0$ ，圖形是一對重合的直線或一點。
- 若圖形退化，且 $\Delta_P = 0$ ，圖形是一對重合的直線（在退化前拋物線的對稱軸）或一條直線（與退化前拋物線的對稱軸垂直於退化前拋物線的頂點）。
- 若圖形退化，且 $\Delta_P < 0$ ，圖形是一對交叉或平行或重合的直線。

(二) 退化判別式

註：退化判別式並不總是記作 Δ_Q ，也不總是稱作退化判別式，惟此處為之。

$$\Delta_Q = \begin{vmatrix} A & \frac{C}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{C}{2} & B & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\Delta_P}{4}F - \frac{AE^2 + BD^2}{4}$$

- 如果 $\Delta_Q < 0$ ，圖形為虛圖形，即不存在實數平面上。
- 如果 $\Delta_Q = 0$ ，圖形為退化圖形。
- 如果 $\Delta_Q > 0$ ，圖形存在於實數平面上。

(三) 旋轉方向

僅 C 可影響旋轉方向，但 C 不只影響方向。

九、 圓

(一) 圓的直徑式

若 $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$ ，則以 \overline{PQ} 為直徑的圓的方程式為：

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

(二) 圓的判別式

因為是圓，故知： $A = B$ ， $C = 0$ 。將兩判別式簡化後得圓的判別式：

$$\Delta_c = D^2 + E^2 - 4F$$

- 如果 $\Delta_c > 0$ ，圖形為圓，圓心 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ ，半徑， $\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_c}$
- 如果 $\Delta_c = 0$ ，圖形退化為一點 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$
- 如果 $\Delta_c < 0$ ，圖形為虛圓，圓心 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ ，半徑， $\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_c}$

(三) 圓與直線集合關係的代數判定

已知圓 $C: x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 與直線 $L: ax + by + c = 0$ 。

將 L 化為 $y = f(x)$ (或 $x = g(y)$) 代入 C ，消去 y (或 x) 得 $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (或 $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$)。

令 $\Delta_L = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ ：

- 如果 $\Delta_L > 0$ ，圓 C 與直線 L 相交於相異二點 (相割)。
- 如果 $\Delta_L = 0$ ，圓 C 與直線 L 相交於一點 (相切)。
- 如果 $\Delta_L < 0$ ，圓 C 與直線 L 沒有交點 (相離)。