圓錐曲線

沈威宇

2025 年 3 月 30 日

目錄

第一節　圓錐曲線/圓錐截痕（conic section, quadratic curve）

位置表示依賴於座標時使用笛卡爾座標系統。

一、　圓錐曲線定義

(一)　圓錐曲線的等價定義

- 圓錐曲線指三維空間中一雙葉圓錐（double-napped cone）與一平面的截線。稱兩個同時與圓錐與該平面相切的球為丹德林球（Dandelin spheres）或焦球（focal spheres），其一的球心可以在無限遠處（即拋物線）；稱該二丹德林球與該平面的切點為焦點。
- 圓錐曲線指平面上距兩不一定相異的定點（稱焦點（Focus））的距離和或差為一定值（兩倍半主軸）的所有點的集合，其中一定點可在某方向無限遠處。（兩焦點重合者為圓，其距離和為直徑、距離差為零；距兩相異非無限遠處焦點距離和為一定值者為橢圓，其距離和為兩倍半主軸；距兩相異非無限遠處焦點距離差為一定值者為雙曲線，其距離差為兩倍半主軸；一焦點在無限遠處者為拋物線，其距離和為無限大即兩焦點距離加上兩倍中心準線距、距離差為無限大即兩焦點距離。）
- 圓錐曲線指笛卡爾座標平面上，$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的圖形，且該方程有實數解，且 $ABC \neq 0$。
- 對於 $0 \leq \varepsilon \leq 1$ 的離心率/偏心率（Eccentricity）ε，圓錐曲線指平面上距一定點（稱焦點）的距離與距一定直線（稱準線（Directrix））的距離之比值為離心率的所有點的集合，其中準線可在無限遠處（即圓）；對於 $\varepsilon > 1$（即雙曲線），圓錐曲線指前述集合及和該集合繞其兩漸近線交點旋轉 π 所得之集合的聯集。

(二)　參數與相關圖形定義

- 離心率 ε：圓錐曲線上的點與焦點的距離與其與準線的距離之比值。
- 焦距（focal length）/線性離心率（linear eccentricity）c：兩個焦點的距離之一半，或對於拋物線特指非無限遠處的焦點與中心的距離但不用代號 c。
- 中心（center）：對於圓和橢圓為幾何中心；對於拋物線為頂點；對於雙曲線為兩漸近線的交點。
- 焦點準線距/焦點參數（focal parameter）p：與某準線較近的焦點與該準線的距離。
- 中心準線距 d：中心與準線的距離。
- 主軸（major axis）：通過中心與兩焦點的直線或線段。
- 半主軸（semi-major axis）a：中心與兩焦點的距離的算數平均。
- 焦弦（focal chord）：過焦點連接一條圓錐曲線（即不可是兩共軛雙曲線）上的兩點的線段。
- 正焦弦（latus rectum）：垂直主軸的焦弦。
- 半正焦弦（semi-latus rectum）ℓ：正焦弦長度的一半。
- 半次軸（semi-minor axis）b：$b = a\sqrt{|1 - \varepsilon^2|}$。

- 次軸（minor axis）：垂直主軸於中心的直線，或垂直主軸於中心且長度為兩倍半次軸且以中心為中點的線段。

(三) 性質

$\ell = p\varepsilon$

$c = a\varepsilon$

$p + c = \dfrac{a}{\varepsilon}$

次軸平行正焦弦平行準線垂直主軸。

正焦弦是最短的焦弦。

中心與兩焦點必共線，該線即主軸。

必存在一個直角三角形使得其三邊長為半主軸、半次軸與焦距且半次軸必為一股長（含一邊長為零另二邊等

不論位置、方向，只論形狀，圓錐曲線有兩個自由度。

二、 圓（circle）

(一) 定義

$\varepsilon = 0$ 的圓錐曲線。

(二) 性質

主軸、次軸、焦弦：任意過圓心直線

a, b： 半徑

$a = b$

$2a, 2b$： 直徑

$\varepsilon = 0$

$c = 0$

$\ell = a = b$

$p = d = \infty$

圓上一點距焦點的距離為半徑。

任一過焦點的直線為對稱軸。

若某點在一圓上，則其以任意過圓心直線為線對稱軸的對稱點亦在該圓上。

(三) 圓

- 標準式：

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{a}\right)^2 = 1$$

- 準線方程：任意無限遠處直線

- 中心/圓心：(h, k)

- 焦點：(h, k)
- 主、次軸方程：任意互相垂直於 (h, k) 的一組直線。
- 參數式：

$$(a\cos(t), a\sin(t)), \quad 0 \le t < 2\pi$$

- 一般式形式：

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Dy + F = 0, \quad \text{有實數解}$$

(四) 直徑式

令兩點 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$，則以 $\overline{PQ}$ 為直徑的圓的方程式為：

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

三、 橢圓（ellipse）

(一) 定義

$0 < \varepsilon < 1$ 的圓錐曲線。

(二) 性質

主軸：長軸

次軸：短軸

a： 半長軸

b： 半短軸

$ab \neq 0, \quad a > b$

$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$\ell = \frac{b^2}{a}$

$p = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

$d = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

稱橢圓與主/長軸和次/短軸的四個交點為頂點。

橢圓上一點距兩焦點的距離和為兩倍半長軸。

主/長軸和次/短軸為對稱軸。

若某點在一橢圓上，則其以長軸或短軸為線對稱軸的對稱點亦在該橢圓上。

(三) 標準方向橢圓

- 方向：主軸平行 x 軸

- 標準式：

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2+\left(\frac{y-k}{b}\right)^2=1$$

- 準線方程：

$$x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}+h$$

- 中心/圓心：(h, k)
- 焦點：$(h\pm\sqrt{a^2-b^2}, k)$
- 主/長軸方程：

$$y=k$$

- 次/短軸方程：

$$x=h$$

- 頂點：$(h\pm a, 0)$ 與 $(0, k\pm b)$
- 參數式：

$$(a\cos(t)+h, b\sin(t)+k),\quad 0\leq t<2\pi$$

- 一般式形式：

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0,\quad AC>0\wedge|A|<|C|\wedge\text{有實數解}$$

(四) 兩焦點式

- 兩焦點式：

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}+\sqrt{(x-\gamma)^2+(y-\delta)^2}=2a$$

- 焦點：(α, β) 與 (γ, δ)
- 中心：$\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}, \frac{\beta+\delta}{2}\right)$
- 主/長軸方程：

$$(\alpha-\gamma)(y-\beta)=(\beta-\delta)(x-\alpha$$

四、 拋物線（parabola）

(一) 定義

$\varepsilon=1$ 的圓錐曲線。

(二) 性質

主軸：對稱軸、軸

次軸：頂點切線

$c = a = \infty$

$\ell = p = 2d$

$b = 0$

特稱非無限遠處的焦點為焦點、頂點與該焦點距離 d 為焦距。

(三) 標準方向拋物線

- 方向：開口向 x 軸正方向
- 標準式：

$$(y-k)^2 = 4d(x-h)$$

- 準線方程：

$$x = -d + h$$

- 中心/頂點：(h, k)
- 焦點：$(h+d, k)$（與 (∞, k)）
- （主/對稱）軸方程：

$$y = k$$

- 次軸方程：

$$x = h$$

- 參數式：

$$(dt^2, 2dt), \quad t \in \mathbb{R}$$

- 一般式形式：

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad AE \neq 0$$

(四) 焦點-準線式

- 焦點-準線式：

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \frac{|mx+ny+r|}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

- 焦點：(α, β)
- 準線方程：$mx + ny + r$
- 中心/頂點：

$$\left(\alpha - \frac{m(m\alpha + n\beta + r)}{2(m^2+n^2)}, \beta - \frac{n(m\alpha + n\beta + r)}{2(m^2+n^2)}\right)$$

- （主/對稱）軸方程：

$$n(x-\alpha) = m(y-\beta)$$

五、 雙曲線（hyperbola）

(一) 定義

$\varepsilon > 1$ 的圓錐曲線。

(二) 性質

主軸：貫軸

次軸：共軛軸

a： 半貫軸

b： 半共軛軸

$ab \neq 0$

$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\ell = \frac{b^2}{a}$

$p = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$d = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

一雙曲線的兩個不同焦點的部分稱共軛（conjugate）雙曲線。

距中心距離趨近於無限大時，雙曲線趨近於一對漸近線，兩者交叉於中心且線對稱於貫軸與共軛軸，該二漸

雙曲線上一點距兩焦點的距離差為兩倍半貫軸。

主/貫軸和次/共軛軸為對稱軸。

若某點在一雙曲線上，則其以貫軸或共軛軸為線對稱軸的對稱點亦在該雙曲線上。

(三) 標準方向雙曲線

- 方向：主軸平行 x 軸
- 標準式：

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = 1$$

- 準線方程：

$$x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + h$$

- 中心：(h, k)
- 焦點：$(h \pm \sqrt{a^2+b^2}, k)$
- 主/貫軸方程：

$$y = k$$

- 次/共軛軸方程：

$$x = h \pm a$$

- 漸近線方程：

$$\frac{x-h}{a} \pm \frac{y-k}{b} = 0$$

- 參數式：

$$(a\sec(t)+h, b\tan(t)+k), \quad 0 \le t < 2\pi$$

- 一般式形式：

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad AC < 0 \wedge \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C} + F < 0 \wedge \text{有實數解}$$

(四) 兩焦點式

- 兩焦點式：

$$\left|\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} - \sqrt{(x-\gamma)^2+(y-\delta)^2}\right| = 2a$$

- 焦點：(α, β) 與 (γ, δ)
- 中心：$\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}, \frac{\beta+\delta}{2}\right)$
- 主/長軸方程：

$$(\alpha-\gamma)(y-\beta) = (\beta-\delta)(x-\alpha$$

六、 雙葉圓錐/雙重圓錐（double-napped cone）

(一) 定義

設空間中有一定直線（稱軸（axis））過一定點（稱頂點（vertex））。定義母線（generatrix）為一通過頂點並與軸夾一非零且非直角的定角度的直線，則所有母線形成的曲面稱雙葉圓錐。

(二) 標準方向雙葉圓錐

- 方向：開口向 z 軸正負向
- 標準式：

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \tan^2(\phi)(z-\gamma)^2$$

其中 α、β、γ 為常數，$0 \le \phi < \frac{\pi}{2}$，$\phi$ 是母線與軸的夾角。

- 軸：

$$(\alpha, \beta, \gamma) + (0, 0, 1)t, \quad t \in \mathbb{R}$$

- 頂點：(α, β, γ)
- 母線：任意 $0 \le s \le 1$ 的直線：

$$(\alpha, \beta, \gamma) + \left(s, \sqrt{1-s^2}, \cot^2(\phi)\right)t, \quad t \in \mathbb{R}$$

- 過 $0 \le s \le 1$ 的母線 $(\alpha,\beta,\gamma)+\left(s,\sqrt{1-s^2},\cot^2(\phi)\right)t,\quad t\in\mathbb{R}$ 切圓錐之平面：

$$s(x-\alpha)+\sqrt{1-s^2}(y-\beta)=\tan^2(\phi)(z-\gamma)$$

(三) 圓錐截痕的離心率與丹德林球

$0 \le s \le 1$ 的平面：

$$z=\cot(\theta)\left(s(x-\alpha)+\sqrt{1-s^2}(y-\beta)\right)+d+\gamma$$

截雙葉圓錐：

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\tan^2(\phi)(z-\gamma)^2$$

其中 α、β、γ 為常數，$0 \le \phi < \frac{\pi}{2}$，$\phi$ 是母線與軸的夾角，$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$，$\theta$ 是平面與軸的夾角。

離心率為：

$$\varepsilon=\frac{\cos\theta}{\cos\phi}$$

- 圓：$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\varepsilon=0$
- 橢圓：$\theta>\phi$，$0<\varepsilon<1$
- 拋物線：$\theta=\phi$，$\varepsilon=1$
- 雙曲線：$\theta<\phi$，$\varepsilon>1$

兩丹德林球為：

- 球心：

$$\left(\alpha,\beta,\frac{d\sin(\theta)}{\sin(\phi)+\sin(\theta)}+\gamma\right)$$

  半徑：

$$\left|\frac{d\sin\phi\sin\theta}{\sin\phi+\sin\theta}\right|$$

- 球心：

$$\left(\alpha,\beta,\frac{d\sin(\theta)}{-\sin(\phi)+\sin(\theta)}+\gamma\right)$$

  半徑：

$$\left|\frac{d\sin\phi\sin\theta}{\sin\phi-\sin\theta}\right|$$

七、 圓錐曲線的判別

(一) 一般式

討論一般式：

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

，其中所有係數都是實數，且 $ABC \ne 0$。

令：

$$Q=\begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} D/2 \\ E/2 \end{bmatrix}$$

又可以寫作：

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

又可以寫作：

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + N^\top \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

(二) 圖形判別式

圖形判別式 $\det(M) = AC - \frac{B^2}{4}$，圖形含實圖形與虛圖形。

- $\det(M) > 0$：不退化圖形為圓（當且僅當 $A = C$ 且 $B = 0$）或橢圓；退化圖形為一點，即中心，發生於 $F = \frac{AD^2}{4|A|^3} + \frac{CE^2}{4|C|^3}$。
- $\det(M) = 0$：不退化圖形為拋物線；退化圖形為一對平行的直線，平行於退化前拋物線的對稱軸，發生於 $AE = CD = 0$，兩直線重合於 $D^2 + E^2 = 4(A + C)F$。（$A = B = C = 0 \wedge DE \neq 0$ 與退化前拋物線相切但不屬於圓錐曲線。）
- $\det(M) < 0$：不退化圖形為雙曲線；退化圖形為一對交叉於退化前雙曲線中心的直線，發生於 $F = \frac{AD^2}{4|A|^3} + \frac{CE^2}{4|C|^3}$。

(三) 退化判別式

退化判別式 $\det(Q) = \det(M)F - \frac{AE^2 + CD^2}{4} = AC - \frac{AE^2 + CD^2 + BF^2}{4}$。

- $\det(Q) < 0$（對於拋物線即 $D^2 + E^2 > 4(A + C)F$）：圖形為實圖形。
- $\det(Q) = 0$（對於拋物線即 $D^2 + E^2 = 4(A + C)F$）：圖形為退化圖形。
- $\det(Q) > 0$（對於拋物線即 $D^2 + E^2 < 4(A + C)F$）：圖形為虛圖形。

(四) 轉軸與移軸不變性（rotation and translation invariance）

$\det(Q)$、$\det(M)$ 與 $A + C$ 在轉軸，即：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

和移軸，即：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

後不變。

(五) 中心的代數判定

令圖形的中心為 (x_0, y_0)，有：

$$(x_0, y_0)^\top = -M^{-1}N$$

對於拋物線 M^{-1} 為 M 之偽逆。

(六) 方向的代數判定

主軸極角 θ 服從：

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A-C}$$

(七) 圓的判別式

設圖形是圓，令：

$$\Delta_c = D^2 + E^2 - 4F$$

- $\Delta_c > 0$：圖形為實圓，圓心 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$，半徑 $\frac{\sqrt{\Delta_c}}{2}$。
- 如果 $\Delta_c = 0$，圖形退化為一點 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$。
- 如果 $\Delta_c < 0$，圖形為虛圓，圓心 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$，半徑 $\frac{\sqrt{\Delta_c}}{2}$。

(八) 圓與直線幾何關係的代數判定

已知圓 C：$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 與直線 **L**：$ax + by + c = 0$。

將 **L** 化為 $y = f(x)$（或 $x = g(y)$）代入 C，消去 y（或 x）得 $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$（或 $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$）。

令 $\Delta_{\mathbf{L}} = \beta^2 - 4\alpha\gamma$：

- $\Delta_{\mathbf{L}} > 0$：圓 C 與直線 **L** 相交於相異二點（相割）。
- $\Delta_{\mathbf{L}} = 0$：圓 C 與直線 **L** 相交於一點（相切）。
- $\Delta_{\mathbf{L}} < 0$：圓 C 與直線 **L** 沒有交點（相離）。