

三角比與三角函數

沈威宇

2024 年 9 月 16 日

第一章 弧度與角度

1. 弧度 (radian)：又稱徑、徑度。指圓周上一段弧長與其對應半徑的比值。物理上無因次。單位同其名或通常省略。
2. 角度 (degree)：一個完整的圓被平分為 360° 。物理上無因次。

$$\frac{1\text{徑}}{1^\circ} = \frac{\pi}{180} \approx 57.3 \approx \frac{1}{0.0175}$$

第二章 廣義角

指將角從 $[0, 2\pi)$ 的普通角擴展到任意實數。

同界角： α 、 β 為同界角 $\iff \frac{\alpha - \beta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$

第三章 極坐標系 (Polar Coordinate System)

一種二維坐標系，用於表示平面上的點，其位置由一對數值（距離 r 和角度 θ ）來確定。與直角坐標系 (Cartesian Coordinate System) 不同。

1. 距離 r ：從極點（通常是坐標原點 O ）到點 P 的距離。 $r \geq 0$ 。
2. 角度 θ ：從極軸（通常是水平的正 x 軸）逆時針旋轉到點 P 所在的射線的角度。角度可以用弧度或度數表示。
3. 點 P 的極坐標表示為 $[r, \theta]$ 。
4. 從極坐標到直角坐標的轉換：

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

5. 從直角坐標到極坐標的轉換：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

第四章 三角測量

1. 仰角：仰視目標時，視線與水平線的夾角。
2. 俯角：俯視目標時，視線與水平線的夾角。
3. 方位角（地理）：以正北為 0° ，順時針為正。
4. 象限角（地理）：以東南西北某一方位（通常為正北或正南）為基準，加上向相鄰方位轉向的度數與該相鄰方位，如北 35° 西代表方位角 325° 、南 30° 西代表方位角 210° 。

第五章 銳角三角比（Trigonometric Ratios）

1. 正弦（Sine，sin）：正弦值是對應角的對邊與斜邊之比，即：

$$\sin \theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$$

2. 餘弦（Cosine，cos）：餘弦值是對應角的鄰邊與斜邊之比，即：

$$\cos \theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$$

3. 正切（Tangent，tan）：正切值是對應角的對邊與鄰邊之比，即：

$$\tan \theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$$

4. 餘切（Cotangent，cot）：

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

5. 正割（Secant，sec）：

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

6. 餘割（Cosecant，csc）：

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

第六章 廣義角三角比/三角函數幾何定義

在單位圓中，令角度的測量方式是從正 x 軸開始，逆時針方向為正角，順時針方向為負角，且角度數值可以是任何實數。任意角度的三角函數值可以表示為：

1. 正弦 (Sine, \sin)：角 θ 的正弦值是單位圓上對應點的 y 坐標，即：

$$\sin \theta = y$$

。為奇函數，定義域 \mathbb{R} ，值域 $[-1, 1]$ ，週期 2π ，振幅 1，線對稱於 $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}$ ，點對稱於 $((n\pi, n \in \mathbb{Z}), 0)$ 。

2. 餘弦 (Cosine, \cos)：角 θ 的餘弦值是單位圓上對應點的 x 坐標，即：

$$\cos \theta = x$$

。為偶函數，定義域 \mathbb{R} ，值域 $[-1, 1]$ ，週期 2π ，振幅 1，線對稱於 $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ ，點對稱於 $\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}\right), 0$ ， $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 。

3. 正切 (Tangent, \tan)：角 θ 的正切值是正弦值與餘弦值的比，即：

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x}$$

。為奇函數，定義域 $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \nmid \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ ，值域 \mathbb{R} ，週期 π ，點對稱於 $\left(\left(\frac{n}{2}\pi, n \in \mathbb{Z}\right), 0\right)$ 。

4. 餘切 (Cotangent, \cot)：

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

。為奇函數，定義域 $\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \nmid x\}$ ，值域 \mathbb{R} ，週期 π ，點對稱於 $\left(\left(\frac{n}{2}\pi, n \in \mathbb{Z}\right), 0\right)$ ， $\cot(x) = -\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 。

5. 正割 (Secant, \sec)：

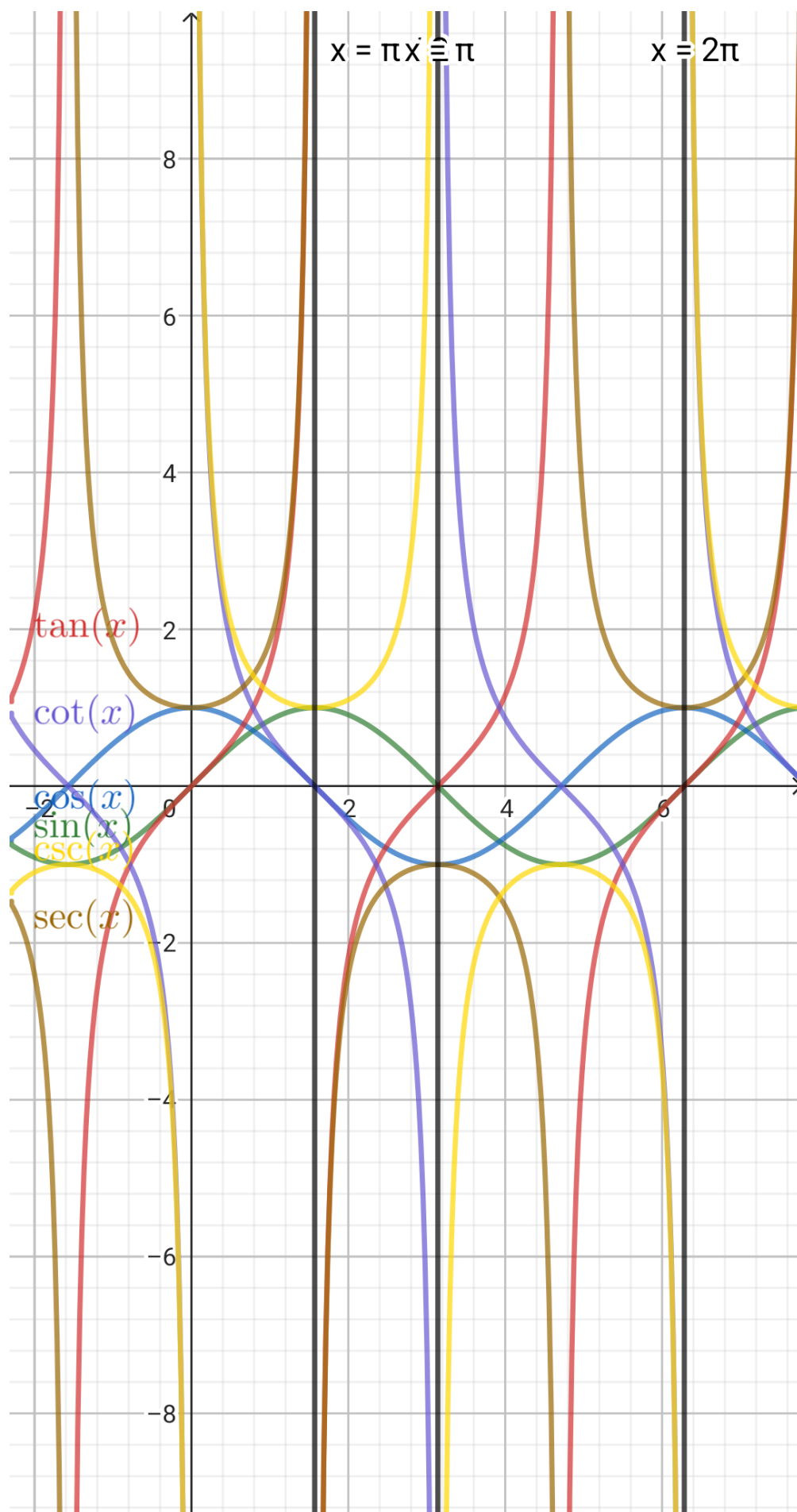
$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

。為偶函數，定義域 $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \nmid \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ ，值域 $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \vee y \leq 1\}$ ，週期 π ，線對稱於 $((n\pi, n \in \mathbb{Z}), 0)$ ，點對稱於 $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}$ 。

6. 餘割 (Cosecant, \csc)：

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

。為奇函數，定義域 $\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \nmid x\}$ ，值域 $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \vee y \leq 1\}$ ，週期 π ，線對稱於 $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}$ ，點對稱於 $((n\pi, n \in \mathbb{Z}), 0)$ ， $\csc(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 。

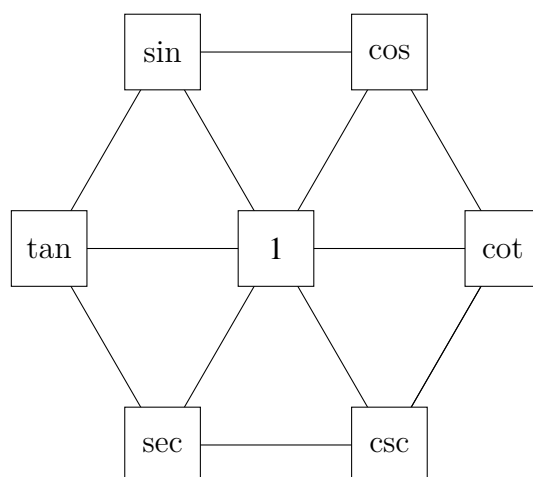


三角函数

一、 特殊角三角函數

Radian	sin	cos	tan
0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$
π	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$\frac{2\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$\frac{4\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$

二、三角函數基本關係



1. 名稱：左側三者為正；右側三者為餘；上面二者為弦；中間二者為切；下面二者為割。
2. 餘角關係：以鉛直軸為對稱軸，位於線對稱位置的三角比為餘角關係，即對於銳角 θ ，左 $(\theta) =$ 右 $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ 。
3. 倒數關係：三條通過中心點的連線為倒數關係，其兩端之三角比互為倒數，相乘為 1。
4. 商數關係：六邊形周上，連續三個頂點形成的連線，其兩端之三角比相乘等於中間之三角比。
5. 平方關係：圖中有三個倒正三角形，其在上方兩頂點之二者之平方和等於在下方頂點者。

三、 奇變偶不變，正負看象限

今有函數 f ，已知其為 \sin 、 \cos 、 \tan 、 \sec 、 \csc 、 \cot 之一，且已知 $f(\theta)$ 。欲求 $f(\phi)$ ，其中 $\phi = \pm\theta \pm n\frac{\pi}{2}$ ，其中 $n \in \mathbb{Z}$ 。

方法：奇變偶不變，正負看象限。

上句：奇偶指 n 之奇偶，變指倒數，即：若 n 為奇數則令 $g(\theta) = \frac{1}{f(\theta)}$ ，否則令 $g(\theta) = f(\theta)$ ，則 $|f(\phi)| = |g(\theta)|$ 。

下句：象限指假設 $[r, \theta]$ 在第一象限時， $[r, \phi]$ 之象限。令該象限中任意角度為 ω 。令 $k = \frac{f(\phi)}{g(\theta)}$ 。則 $k = \frac{f(\omega)}{|f(\omega)|}$ ，即：

$f \backslash$ 象限	一	二	三	四
\sin	+	+	-	-
\cos	+	-	-	+
\tan	+	-	+	-
\csc	+	+	-	-
\sec	+	-	-	+
\cot	+	-	+	-

第七章 三角函數級數定義

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

第八章 三角函數微積分

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x) dx$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\ln \sec x + C$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$	$\ln \csc x - \cot x + C$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\ln \sec x + \tan x + C$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\ln \sin x + C$

第九章 反三角函數與相關函數

一、 反三角函數

名稱	常用符號	定義	定義域	值域
反正弦	$y = \arcsin x$	$x = \sin y$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
反餘弦	$y = \arccos x$	$x = \cos y$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
反正切	$y = \arctan x$	$x = \tan y$	\mathbb{R}	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
反餘切	$y = \operatorname{arccot} x$	$x = \cot y$	\mathbb{R}	$(0, \pi)$
反正割	$y = \operatorname{arcsec} x$	$x = \sec y$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$
反餘割	$y = \operatorname{arccsc} x$	$x = \csc y$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

Inverse Trigonometric Functions

二、 反正切二函數

$\operatorname{atan2}(y, x)$ 在 $x > 0$ 時返還 $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 中的解，在 $x < 0$ 、 $y \geq 0$ 時返還 $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 中的解，在 $x < 0$ 、 $y < 0$ 時返還 $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ 在 $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 中的解，在 $x = 0$ 、 $y \neq 0$ 時返還 $\frac{y}{|y|} \frac{\pi}{2}$ ，在 $x = y = 0$ 時返還值未定義。

三、 輻角 (Argument)

此處輻角用 $\arg(z)$ 代表 z 的輻角，用 $\operatorname{Arg}(z)$ 代表 z 的輻角主值，一些文獻反之。

(一) 輻角

設有非零複數 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ，記作 $z = x + yi$ ，其中的 x 和 y 為實數，那麼複數 z 的輻角 $\arg(z) = \varphi$ 指的是使下列等式：

$$z = x + yi = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

成立的任何實數 φ 。

四、 輻角主值

設有非零複數 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ，記作 $z = x + yi$ ，其中的 x 和 y 為實數，那麼複數 z 的輻角主值 $\text{Arg}(z)$ 指的是：

$$\text{Arg } z = \text{Arg } x + yi = \text{atan2}(y, x)$$

$$\arg(z) = \{\text{Arg}(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$