

多項式函數與方程

沈威宇

2025 年 1 月 12 日

目錄

第一節 多項式函數與方程 (Polynomial Functions and Equations)	1
一、 方程組	1
二、 多項式	1
三、 最高次項次數定理	1
四、 商式極限	1
五、 近似	1
六、 除法定理	1
(一) 餘式定理	1
(二) 因式定理	2
七、 線性變換	2
(一) 平移	2
(二) 伸縮	2
八、 側與距離	2
(一) 側	2
(二) 直線與點距離	2
(三) 直線間距離	2
(四) 直線到點最短向量	2
(五) 平行直線之間公垂向量	2
九、 零函數	3
十、 一元一次函數	3
(一) 一般式 (斜截式)	3
(二) 點斜式	3
十一、 一元二次函數	3
(一) 一般式	3
(二) 標準式	3
(三) 判別式	3

(四) 根	3
(五) 圖形特徵	4
(六) 根數	4
(七) 根與係數的關係	4
十二、 一元三次函數	4
(一) 一般式	4
(二) 標準式	4
(三) 判別式	4
(四) 根	5
(五) 圖形特徵	6
(六) 根與係數的關係	6
十三、 平面上的直線	6
(一) 一般式	6
(二) 截距式	6
(三) 斜截式	6
(四) 點斜式	7
(五) 參數式	7
(六) 特性	7
十四、 Polynomial Interpolation (多項式插值法).	7
(一) Newton's Polynomial (牛頓插值法)	7
(二) Lagrange Polynomial (拉格朗日插值法)	8

第一節 多項式函數與方程 (Polynomial Functions and Equations)

一、 方程組

- 相容方程組：一組方程組有解，則稱其為相容方程組。
- 相依方程組：一組方程組中，其中一者成立則其他者均成立，則稱其為相容方程組。
- 矛盾方程組：一組方程組無法同時成立，則稱其為矛盾方程組。

二、 多項式

多項式指由多個項 (term) 組成的代數表達式，每個項是常數與零或正整數個變數的乘積，且每個變數的指數必須是非負整數。

令有多項式 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $q(x)$ 、 $r(x)$ 。

三、 最高次項次數定理

$$\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$$

四、 商式極限

領導係數指最高次項係數

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0, \deg(f(n)) < \deg(g(n)) \\ \frac{f(x) \text{ 領導係數}}{g(x) \text{ 領導係數}}, \deg(f(n)) = \deg(g(n)) \\ \text{不存在}, \deg(f(n)) > \deg(g(n)) \end{cases}$$

五、 近似

$f(x)$ 在 $x = a$ 的 n 次近似 ($n \leq \deg(f(x))$) = $f(x)$ 之泰勒級數最低次 n 項

六、 除法定理

恰有一組 $q(x)$ 、 $r(x)$ 滿足：

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

$$\deg(r(x)) < \deg(g(x)) \vee r(x) = 0$$

若 $r(x) = 0$ 則稱 $q(x)$ 為 $f(x)$ 之因式。

(一) 餘式定理

若 $q(x) = ax + b$ 則 $r(x) = f(\frac{b}{a})$ 。

(二) 因式定理

$f(\frac{b}{a}) = 0$ 若且惟若 $ax + b$ 為 $f(x)$ 的因式。

七、 線性變換

(一) 平移

對於任意函數 $f(x)$ ， $y = f(x)$ 右移 h 單位，上移 k 單位，得 $y = f(x - h) + k$ 。

(二) 伸縮

對於任意函數 $f(x)$ ， $y = f(x)$ 以 x 軸為基準線鉛直伸縮為原來的 a 倍，以 y 軸為基準線水平伸縮為原來的 b 倍，得 $y = af(\frac{x}{b})$ 。

八、 側與距離

(一) 側

在 \mathbb{R}^n 空間中，假設有 $\mathbf{L} : (f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0)$ 。點 P 滿足 $f(P) > 0$ 若且惟若 P 在 \mathbf{L} 的正側。點 P 滿足 $f(P) = 0$ 若且惟若 P 在 \mathbf{L} 上。點 P 滿足 $f(P) < 0$ 若且惟若 P 在 \mathbf{L} 的負側。

(二) 直線與點距離

在 \mathbb{R}^n 空間中，假設有 $\mathbf{L} : (f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0)$ ，且 f 為一次函數，且 f 的係數為 a_1, a_2, \dots, a_n ，且 f 的常數項為 c 。點 P 到 \mathbf{L} 的距離 $d(P, \mathbf{L}) = \frac{|f(P)|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$ 。

(三) 直線間距離

在 \mathbb{R}^n 空間中，假設有 $\mathbf{L}_1 : (f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0)$ 、 $\mathbf{L}_2 : (g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0)$ ，且 f 、 g 為一次函數，且 f 、 g 的係數均為 a_1, a_2, \dots, a_n ，且 f 、 g 的常數項分別為 c 、 d 。 \mathbf{L}_1 到 \mathbf{L}_2 的距離 $d(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2) = \frac{|c - d|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$ 。

(四) 直線到點最短向量

在 \mathbb{R}^n 空間中，假設有 $\mathbf{L} : (f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0)$ ，且 f 為一次函數，且 f 的係數為 a_1, a_2, \dots, a_n ，且 f 的常數項為 c 。 \mathbf{L} 上距離點 P 最近的點到點 P 的向量 $\vec{v} = \frac{f(P)}{\sum_{i=1}^n a_i^2} (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

(五) 平行直線之間公垂向量

在 \mathbb{R}^n 空間中，假設有 $\mathbf{L}_1 : (f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0)$ 、 $\mathbf{L}_2 : (g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0)$ ，且 f 、 g 為一次函數，且 f 、 g 的係數均為 a_1, a_2, \dots, a_n ，且 f 、 g 的常數項分別為 c 、 d 。 \mathbf{L}_1 上任意點 P 到 \mathbf{L}_2 上距離點 P 最近的點的向量 $\vec{v} = \frac{c - d}{\sum_{i=1}^n a_i^2} (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

九、 零函數

$$f(x) = 0$$

十、 一元一次函數

$$a \neq 0$$

(一) 一般式 (斜截式)

$$f(x) = ax + b$$

其中 a 稱斜率， b 稱 y 截距。

(二) 點斜式

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

零函數與一元一次函數合稱線性函數。

十一、 一元二次函數

$$a \neq 0$$

(一) 一般式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(二) 標準式

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

$$\text{其中 } (h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$$

(三) 判別式

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

(四) 根

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} e^{k\pi i}}{2a}, \text{ where } k = 0, 1 \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

(五) 圖形特徵

- 拋物線。
- 頂點 V 、極值點： (h, k) 。
- 對稱軸： $x = h$ 。
- 開口： a 為正，開口向上，反之向下。 $|a|$ 愈大，開口愈小。

(六) 根數

- $a > 0$ 且 $\Delta < 0$ ：函數恆正，無實根，有二共軛複根。
- $a < 0$ 且 $\Delta > 0$ ：函數恆負，無實根，有二共軛複根。
- $a > 0$ 且 $\Delta = 0$ ：函數不負，一重實根。
- $a < 0$ 且 $\Delta = 0$ ：函數不正，一重實根。
- $\Delta < 0$ ：函數與 x 軸有二交點，二實根。

(七) 根與係數的關係

令根 α 、 β

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$
$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

十二、一元三次函數

$a \neq 0$

(一) 一般式

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

(二) 標準式

$$f(x) = a(x - h)^3 + p(x - h) + k$$

$$\text{其中 } (h, p, k) = \left(\frac{b}{3a}, c - \frac{b^2}{3a}, \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d \right)$$

(三) 判別式

$$\Delta = \left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2} \right)^3$$

(四) 根

1. 直接公式：

$$x = -\frac{b}{3a} + e^{\frac{2k\pi i}{3}} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} + e^{\frac{2(3-k)\pi i}{3}} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}}, \text{ where } k = 0, 1, 2$$

2. 三解分開公式：

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} \\ &\quad + \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} \\ x_2 &= -\frac{b}{3a} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} \\ &\quad + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} \\ x_3 &= -\frac{b}{3a} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} \\ &\quad + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} \end{aligned}$$

3. 卡迪諾公式 (Cardino's formula)：

令：

$$h = \frac{b}{3a}$$

$$p = c - \frac{b^2}{3a}$$

$$k = \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d$$

$$r = \frac{p}{a}$$

$$s = \frac{k}{a}$$

$$u = -\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{r^3}{27}} e^{\frac{2k\pi i}{2}}, \text{ where } k = 0, 1$$

$$C = \sqrt[3]{u} e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \text{ where } k = 0, 1, 2$$

則：

$$x = C - \frac{r}{3C} + h$$

4. 一般化卡迪諾公式：

令：

$$\Delta_0 = b^2 - 3ac$$

$$\Delta_1 = 2b^3 - 9abc + 27a^2d$$

$$u = \Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3} e^{\frac{2k\pi i}{2}}, \text{ where } k = 0, 1$$

$$C = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + u}{2}} e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \text{ where } k = 0, 1, 2$$

則：

$$x = -\frac{1}{3a} \left(b + C + \frac{\Delta_0}{C} \right)$$

(五) 圖形特徵

- 頂點 $V : (h, k)$ 。
- 二階旋轉對稱點、拐點（一階導數為零，二次導數為零）： $(h, f(h))$ 。
- 鞍點（非極值的駐點，駐點指一階導數為零）： $ap < 0$ 若且惟若存在二個鞍點， $p = 0$ 若且惟若存在一個鞍點（圖形單調遞增或減）， $ap > 0$ 若且惟若不存在鞍點（圖形嚴格遞增或減）。
- 極值：不存在。

(六) 根與係數的關係

令根 α, β, γ

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

十三、 平面上的直線

(一) 一般式

$$ax + by + c = 0$$

(二) 截距式

若 $ab \neq 0$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

其中 $p = -\frac{c}{a}$ 、 $q = -\frac{c}{b}$ 分別為 x 、 y 截距。

(三) 斜截式

若 $b \neq 0$ ，即 y 為 x 的函數

$$y = f(x) = mx + q$$

其中 m 稱斜率。

(四) 點斜式

若 $b \neq 0$ ，即 y 為 x 的函數

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

(五) 參數式

設相異兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ：

直線 \overleftrightarrow{AB} 的參數式：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

射線 \overrightarrow{AB} 的參數式：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad t \geq 0$$

線段 \overline{AB} 的參數式：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(六) 特性

- 平面上直線 $L_1: ax + by + c = 0$ 、 $L_2: dx + ey + f = 0$ ： $ae = bd$ 若且惟若 L_1/L_2 ； $ad + be = 0$ 若且惟若 $L_1 \perp L_2$ ；若 L_1 、 L_2 存在斜率 m_1 、 m_2 則： $m_1 = m_2$ 若且惟若 L_1/L_2 ， $m_1 m_2 = -1$ 若且惟若 $L_1 \perp L_2$ 。
- $L: ax + by + c$ ： $a > 0$ 則 $ax + by + c > 0$ 在 L 之右半平面； $b > 0$ 則 $ax + by + c > 0$ 在 L 之上半平面。

十四、 Polynomial Interpolation (多項式插值法)

Polynomial interpolation is a method of constructing a polynomial that passes through a given set of points. Given $n + 1$ data points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, the goal is to find a polynomial $p(x)$ of degree at most n such that:

$$p(x_i) = y_i \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, n.$$

(一) Newton's Polynomial (牛頓插值法)

Newton's polynomial interpolation uses the concept of divided differences to construct the polynomial in a recursive form. The Newton interpolating polynomial can be written as:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

where the coefficients a_0, a_1, \dots, a_n are obtained using divided differences. The divided differences are recursively computed as follows:

$$\begin{aligned} f[x_i] &= y_i \\ f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned}$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_k] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_k] - f[x_i, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_i}$$

The Newton polynomial can be succinctly written as:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

(二) Lagrange Polynomial (拉格朗日插值法)

Lagrange polynomial interpolation expresses the polynomial as a linear combination of basis polynomials. The Lagrange form of the interpolating polynomial is given by:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

where $L_i(x)$ are the Lagrange basis polynomials, defined as:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Each $L_i(x)$ is a polynomial that is 1 at $x = x_i$ and 0 at all other x_j ($j \neq i$).

Barycentric Form (重心形式) of Lagrange Interpolation:

The Barycentric form is a more efficient and numerically stable way to compute the Lagrange interpolation polynomial. The Barycentric form of the interpolating polynomial is:

$$p(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{w_i y_i}{x - x_i}}{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i}}$$

where w_i are the barycentric weights, defined as:

$$w_i = \frac{1}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)}$$