

函數

沈威宇

2025 年 1 月 7 日

目錄

第一節 函數 (Functions)	1
一、 Definition	1
二、 Denotation	1
第二節 函數性質	1
一、 單射 (Injection) / 一對一 (One-to-one)	1
二、 多對一 (Many-to-one)	1
三、 滿射/蓋射 (Surjection, Onto)	1
四、 對射 (Bijection)	1
五、 光滑 (Smooth)	2
六、 遞增及遞減	2
七、 分段函數 (Piecewise Function)	2
八、 合成函數 (Composite Function)	2
九、 反函數 (Inverse Function)	2

第一節 函數 (Functions)

一、 Definition

A function is formed by three sets, the domain (定義域) X , the codomain (對應域) Y , and the graph, R that satisfy the three following conditions.

$$R \subseteq \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

$$\forall x \in X, \exists y \in Y, (x, y) \in R$$

$$(x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \implies y = z$$

二、 Denotation

A function f is defined by

$$R \subseteq \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

$$\forall x \in X, \exists y \in Y, (x, y) \in R$$

$$(x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \implies y = z$$

We denote X as D_f , define range (值域), denoted as R_f or $f(X)$, as

$$R_f = f(X) = \{y \mid x \in X \wedge (x, y) \in R\}$$

and denote f as $f : D_f \rightarrow R_f$.

If

$$x \in X \wedge (x, y) \in R$$

, we call x independent variable, call y dependent variable, denote $y = f(x)$, and call $f(x)$ functional value.

第二節 函數性質

一、 單射 (Injection) /一對一 (One-to-one)

$$\text{函數 } f : V \rightarrow W \text{ 為單射函數} \iff \forall x_1, x_2 \in V \text{ s.t. } f(x_1) = f(x_2) : x_1 = x_2$$

二、 多對一 (Many-to-one)

$$\text{函數 } f : V \rightarrow W \text{ 為多對一函數} \iff \exists x_1, x_2 \in V \wedge x_1 \neq x_2 \text{ s.t. } f(x_1) = f(x_2)$$

三、 滿射/蓋射 (Surjection, Onto)

$$\text{函數 } f : V \rightarrow W \text{ 為滿射函數} \iff f(V) = W$$

四、 對射 (Bijection)

$$\text{函數 } f \text{ 為對射函數} \iff \text{函數 } f \text{ 為單射且滿射}$$

五、 光滑 (Smooth)

函數 $f(x) : V \rightarrow W$ 為光滑函數，即 $C^\infty \iff \forall a \in V \forall n \in \mathbb{N} \exists \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$

六、 遞增及遞減

函數 f 為遞增 (Increasing) 函數 $\iff \forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$

函數 f 為遞減 (Decreasing) 函數 $\iff \forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

函數 f 為嚴格遞增 (Strictly Increasing) 函數 $\iff \forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$

函數 f 為嚴格遞減 (Strictly Decreasing) 函數 $\iff \forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

函數 f 在 I 上遞增 (Increasing) $\iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$

函數 f 在 I 上遞減 (Decreasing) $\iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

函數 f 在 I 上嚴格遞增 (Strictly Increasing) $\iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$

函數 f 在 I 上嚴格遞減 (Strictly Decreasing) $\iff \forall x_1, x_2 \in I \subset D_f : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

七、 分段函數 (Piecewise Function)

$$\text{分段函數 : } f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{if } x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{if } x \in A_2 \\ \vdots \\ f_n(x), & \text{if } x \in A_n \end{cases}$$

其中 A_1, A_2, \dots, A_n 是 D_f 的子集，且 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = D_f$ 。

八、 合成函數 (Composite Function)

合成函數： $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

其中 $g(x)$ 的定義域 D_g 與 f 的定義域 D_f 必須滿足 $g(D_g) \subseteq D_f$ 。

九、 反函數 (Inverse Function)

反函數： $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$

其中 f 必須是雙射，且反函數的定義域為 f 的值域，值域為 f 的定義域。