集合論

沈威宇

2025 年 2 月 4 日

目錄

第一節　集合論（Set theory） 1

一、　基本定義 1

(一) 集合（Set） 1

二、　勢、基數或計數（Cardinality） 1

(一) 子集合 1

(二) 交集（Intersection） 1

(三) 聯集（Union） 1

(四) 差集（Complement） 1

(五) 笛卡爾積（Cartesian product） 1

(六) 冪集合（Power set） 2

三、　ZFC 公理系統 2

(一) 外延公理（Axiom of extensionality） 2

(二) 正則公理（Axiom of regularity） 2

(三) 分類公理（Axiom of separation）/規範公理模式（Axiom schema of specification） 2

(四) 配對公理（Pairing Axiom） 2

(五) 聯集公理（Union Axiom） 2

(六) 替代公理模式（Axiom schema of replacement） 2

(七) 無窮公理（Axiom of Infinity） 3

(八) 冪集公理（Power Set Axiom） 3

(九) 選擇公理（Axiom of choice）/良序公理（Axiom of well-ordering） 3

四、　宇集（Universe） 3

(一) 舊定義 3

(二) 今定義 3

(三) 補集/餘集 3

五、　集合的笛摩根定律（De Morgan’s Law） 3

六、　一一對應（One-to-one correspondence, also known as bijection）原理 3

七、　加法原理 3

八、　乘法原理 4

九、　交集、聯集的交換律、結合律、分配律 4

十、　補集相關原理 4
十一、　冪集計數原理 4
十二、　排容原理/取捨原理（Principle of inclusion-exclusion, PIE） 4
(一) 以元素證明 5
(二) 以數學歸納法證明 5
十三、　Set scalar arithmetic operation 5
(一) Kernel (核) of a family of sets 6
十四、　Partially ordered set (poset) (偏序集) 6
十五、　Upward closure 6

第一節　集合論（Set theory）

一、　基本定義

(一)　集合（Set）

- 集合是指一組互不相同的物件的集合體，其中的物件稱元素（Element）。即集合由確定的元素組成，且每個元素都是唯一的。
- 集合以一個 $\{\}$ 中包含所有元素表示，或以 $\{x \mid \text{ condition of } x\}$ 表示，其中 | 有時記作：。
- a 是集合 A 的一個元素記作 $a \in A$。
-
$$(a \notin A) \Leftrightarrow (\neg(a \in A))$$

二、　勢、基數或計數（Cardinality）

是對集合的大小的度量，記作 $|A|$ 或 $n(A)$。若可在兩集合的元素間建立一一對應，則兩者之勢相同。對於有限 (Finite) 集合，勢即其元素數。與 $\mathbb{N}$ 同勢的集合，稱可數無限 (Countable infinite)，其勢為可數無限勢（Cardinality of countable infinity）$\aleph_0$。與實數同勢的集合，稱不可數無限（Uncountable infinite），其勢為連續勢（Cardinality of continuity）$\mathfrak{c}$。

(一)　子集合

$$(z \subseteq x) \iff (\forall q(q \in z \implies q \in x))$$

(二)　交集（Intersection）

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i := \{x \mid \bigwedge_{i=1}^{n} x \in A_i\}$$

(三)　聯集（Union）

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i := \{x \mid \bigvee_{i=1}^{n} x \in A_i\}$$

(四)　差集（Complement）

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(五)　笛卡爾積（Cartesian product）

$$A \times B := \{(a,\, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

(六) 冪集合（Power set）

$$2^A := \{B \mid B \subseteq A\}$$

三、 ZFC 公理系統

ZFC 公理系統指 Zermelo-Fraenkel 公理系統（ZF 公理系統）加上選擇公理（AC）。最常用的集合論公理系統為 ZFC 公理系統或 ZF 公理系統，分別記作 $\vdash_{ZFC}$ 和 $\vdash_{ZF}$，或均記作 $\vdash$。

(一) 外延公理（Axiom of extensionality）

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y]$$

(二) 正則公理（Axiom of regularity）

$$\forall x\, (x \neq \varnothing \Rightarrow \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \varnothing))$$

(三) 分類公理（Axiom of separation）/規範公理模式（Axiom schema of specification）

Let φ be any formula in the language of ZFC with all free variables among $x, z, w_1, \ldots, w_n$ so that y is not free in φ. Then:

$$\forall z \forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_n \exists y \forall x [x \in y \Leftrightarrow ((x \in z) \wedge \varphi(x, w_1, w_2, ..., w_n, z))]$$

This axiom can be used to prove the existence of the empty set, denoted as $\varnothing$ or $\varnothing$.
空集公理（Axiom of empty set）：

$$\exists x, \forall y, (y \notin x)$$

The $\varnothing$ is defined as the x above.

(四) 配對公理（Pairing Axiom）

$$\forall x \forall y \exists z ((x \in z) \wedge (y \in z))$$

(五) 聯集公理（Union Axiom）

$$\forall \mathcal{F}\, \exists A\, \forall Y\, \forall x [(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F}) \Rightarrow x \in A]$$

Although this formula doesn't directly assert the existence of $\cup\mathcal{F}$, the set $\cup\mathcal{F}$ can be constructed from A in the above using the axiom schema of specification:

$$\cup\mathcal{F} = \{x \in A \mid \exists Y (x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F})\}$$

(六) 替代公理模式（Axiom schema of replacement）

Let φ be any formula in the language of ZFC with all free variables among $x, z, w_1, \ldots, w_n$ so that B is not free in φ. Then:

$$\forall A \forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_n \big[\forall x (x \in A \Rightarrow \exists! y\, \varphi) \Rightarrow \exists B\, \forall x \big(x \in A \Rightarrow \exists y (y \in B \wedge \varphi)\big)\big]$$

(七) 無窮公理（Axiom of Infinity）

$$\exists X\,[\exists e(\forall z\,\neg(z\in e)\wedge e\in X)\wedge\forall y(y\in X\Rightarrow S(y)\in X)]$$

(八) 冪集公理（Power Set Axiom）

$$\forall A\exists P(A)\forall x(x\in P(A)\leftrightarrow x\subseteq A)$$

The $P(A)$ above is called power set (冪集) and is denoted as 2^A.

(九) 選擇公理（Axiom of choice）/良序公理（Axiom of well-ordering）

$$\forall X\left[\varnothing\notin X\implies\exists f:X\to\bigcup_{A\in X}A\quad\forall A\in X\,(f(A)\in A)\right]$$

四、 宇集（Universe）

(一) 舊定義

過去，宇集有時定義為 $U=\{z\mid z\text{ is a set}\}$。但可以證明，ZH 公理系統下 $U=\{z\mid z\text{ is a set}\}$ 不是一個集合。*Statement.* $\vdash\nexists U=\{z\mid z\text{ is a set}\}$.

Proof.
Assume that $\exists U=\{z\mid z\text{ is a set}\}$. Let $A=\{x\in U\mid x\notin x\}$. $A\in A\iff(A\in U\wedge A\notin A)$, but $A\in A\iff\neg A\notin A$, so $A\notin A$, so $\neg(A\in U\wedge A\notin A)$, so $A\notin U$. A is a set, so $A\in U$. $\Rightarrow\Leftarrow$. $\square$

(二) 今定義

宇集今常定義為「當所探討的集合都是某個給定集合的子集，這個給定的集合稱為宇集，記作 U。」

(三) 補集/餘集

若集合 A 為給定宇集 U 的一個子集合，則 A 在 U 的補集定義為 $U\setminus A$，記作 A' 或 $\overline{A}$ 或 A^C。

五、 集合的笛摩根定律（De Morgan’s Law）

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$

六、 一一對應（One-to-one correspondence, also known as bijection）原理

$$\big(\forall a_1,a_2\in A\,(f(a_1)=f(a_2)\implies a_1=a_2)\big)\wedge(\forall b\in B\,(\exists a\in A\,(f(a)=b)))\iff|A|=|B|$$

七、 加法原理

$$\big(\forall i\neq j,\,0<i\leq n,\,0<j\leq n,\,i,\,j\in\mathbb{N}:\,A_i\cap A_j=\varnothing\big)$$
$$\implies\left(\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|\right)$$

八、 乘法原理

$$\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

九、 交集、聯集的交換律、結合律、分配律

- 交集有交換律。
- 聯集有交換律。
- 交集對交集有結合律、分配律。
- 聯集對聯集有結合律、分配律。
- 交集對聯集有分配律。
- 聯集對交集有分配律。
- $(A \cap B) \cup C$ 不一定等於 $A \cap (B \cup C)$

十、 補集相關原理

$$(A')' = A$$

$$A \setminus B = A \cap B'$$

$$A \subseteq B \iff B' \subseteq A'$$

十一、 冪集計數原理

$$n(2^A) = 2^{n(A)}$$

十二、 排容原理/取捨原理（Principle of inclusion-exclusion, PIE）

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{a | a \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq a \leq n\}} \left((-1)^{|J|-1} \cdot \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|\right)$$

(一) 以元素證明

Proof.

$$
\begin{aligned}
&\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\varnothing \neq J \subseteq \{a|a\in\mathbb{N}\wedge 1\le a\le n\}} \left((-1)^{|J|-1}\cdot\left|\bigcap_{j\in J} A_j\right|\right) \\
&\equiv 1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\cdot \sum_{I\subseteq\{a|a\in\mathbb{N}\wedge 1\le a\le n\}\wedge|I|=k} 1_{A_I}\right) \\
&\equiv \forall\left(x\in\bigcup_{i=1}^{n} A_i, m=\sum_{i:x\in A_i} 1\right) : 1 = \sum_{k=1}^{m}\left((-1)^{k-1}\sum_{I\subset\{a|a\in\mathbb{N}\wedge 1\le a\le m\}\wedge|I|=k} 1\right) \\
&\equiv \forall\left(x\in\bigcup_{i=1}^{n} A_i, m=\sum_{i:x\in A_i} 1\right) : \binom{m}{0} = \sum_{k=1}^{m}\left((-1)^{k-1}\binom{m}{k}\right) \\
&\equiv \forall\left(x\in\bigcup_{i=1}^{n} A_i, m=\sum_{i:x\in A_i} 1\right) : (1-1)^m = 0
\end{aligned}
$$

□

(二) 以數學歸納法證明

Proof.

當 $n=2$時，$|A_1 \bigcup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2)$，排容原理成立。

設 $n=k, k\ge 2, k\in\mathbb{N}$時，排容原理成立。

當 $n=k+1$時，

$$
\begin{aligned}
&\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| \\
&= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\cup A_{k+1}\right| \\
&= \sum_{\varnothing\neq J\subseteq\{a|a\in\mathbb{N}\wedge 1\le a\le k+1\}}\left((-1)^{|J|-1}\cdot\left|\bigcap_{j\in J} A_j\right|\right)
\end{aligned}
$$

，排容原理亦成立。

由數學歸納法，得證。

□

十三、 Set scalar arithmetic operation

- If $\forall a\in A$, sa is defined, $sA := \{sa : a\in A\}$.
- If $\forall a\in A$, $a+v$ is defined, $A+v := \{a+v : a\in A\}$.

(一)　Kernel (核) of a family of sets

The kernel of a family $\mathcal{B} \neq \varnothing$ of sets is defined to be:

$$\ker(\mathcal{B}) := \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B.$$

十四、　Partially ordered set (poset) (偏序集)

A partially ordered set (poset for short) is an ordered pair $P = (X, \leq)$ consisting of a set X (called the ground set of P) and a partial order $\leq$ on X. That is, for all $a, b, c \in X$ it must satisfy:

1. Reflexivity: $a \leq a$, i.e. every element is related to itself.
2. Antisymmetry: $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$, i.e. no two distinct elements precede each other.
3. Transitivity: $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$.

When the meaning is clear from context and there is no ambiguity about the partial order, the set X itself is sometimes called a poset.

十五、　Upward closure

Let A be a subset of a poset X, the upward closure of A (denoted as $\uparrow A$) is defined to be:

$$\uparrow A := \{x \in X : \exists a \in A \text{ s.t. } a \leq x\}.$$