三角形與三角函數公式定理

沈威宇

2024 年 11 月 2 日

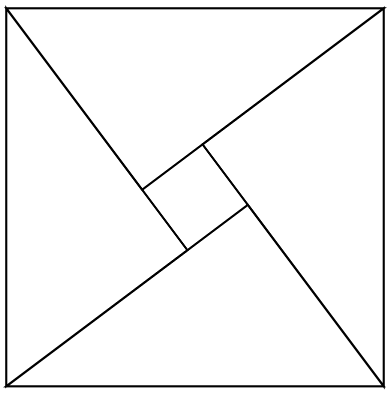
第一章　三角形公式定理

令圖形體積（或面積、長度）之代號同其自身。金有一三角形 ΔABC，其中：$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長分別為 a、b、c；$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 又記作 A、B、C；外接圓 O 圓心 O 即外心（**Circumcenter**）、半徑 R；內接圓 I 圓心 I 即內心（**Incenter**）、半徑 r；重心（**Centroid**）G；垂心（**Orthocenter**）H；$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊中點分別為 M_a、M_b、M_c；A 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 的垂足為 h_a，B 在 $\overleftrightarrow{CA}$ 的垂足為 h_b，C 在 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂足為 h_c；$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$；$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的角平分線與對邊之交點分別為 $\mathscr{B}_a$、$\mathscr{B}_b$、$\mathscr{B}_c$；九點圓 $\mathscr{O}$ 圓心 $\mathscr{O}$、半徑 $\mathscr{R}$；與 A、B、C 的兩鄰邊延長線與對邊皆相切的旁切圓分別為 E_a、E_b、E_c，其圓心（旁心）各同其圓名。

一、　勾股/畢氏/商高定理

$$(\angle C=90^\circ) \iff (a^2+b^2=c^2)$$

Proof. 趙爽勾股圓方圖證明法：



其中四個三角形的短股為 a、長股為 b、斜邊為 c。

$$4\frac{ab}{2}+(b-a)^2=c$$

$$a^2+b^2=c^2$$

□

二、　三角形全等與 SSA 型性質：

令：已知兩三角形一對應位置之邊長相等稱 S，已知兩三角形一對應位置之角之角度相等稱 A，S 相鄰表示鄰邊，A 相鄰表示鄰角，S 與 A 相鄰表示邊與其一側的角，當 A 為直角得稱 R，R 之鄰邊得稱 H。

1. 三角形的全等性質有 SSS、SAS、AAS、ASA、RHS，當兩三角形符合以上任一條件時，知兩三角形全等。

2. SSA 型的討論：若已知 a、b、$\angle A$。

- $\angle A$ 為銳角，令 C 到 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離為 $h=b\sin A$，則：
  - b<h: 無解

– b=h: 唯一解

– b>h: 兩解

- $\angle A$ 為鈍角，則：

  – a b: 無解

  – a>b: 唯一解

三、 九點圓與歐拉線

$$M_a,\, M_b,\, M_c,\, h_a,\, h_b,\, h_c,\, \frac{A+H}{2},\, \frac{B+H}{2},\, \frac{B+H}{2}\text{必共圓，該圓稱九點圓}$$

$$\text{對於九點圓圓周 } \mathscr{O} \text{ 與圓心 } \mathscr{O} \text{ 均符合：} \mathscr{O} = \frac{O+H}{2}$$

$$\mathscr{O},\, O,\, G,\, H\text{共線，該線稱歐拉線}$$

$$\Delta ABC\text{是等腰三角形} \iff I\text{在歐拉線上}$$

費爾巴哈定理（Feuerbach's theorem）：九點圓與三個旁切圓均外切，與內切圓內切（內切圓在內）。

$$\mathscr{O} = \frac{O}{2}$$

四、 正弦定理

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

Proof.

$$\sin A = \frac{\overline{Ch_c}}{a}$$

$$\sin B = \frac{\overline{Ch_c}}{b}$$

□

$$2R\sin A = a$$

Proof. 作 O。若 ΔABC 為直角三角形，觀察可證。
若 ΔABC 非直角三角形，以 BC 為一股，令斜邊在 $\overleftrightarrow{BO}$ 上，作一直角三角形 BCD，其中 $D = 2O - B$。
若 ΔABC 為銳角三角形，根據圓周定理可知，$\angle D = \angle BAC$，得證。
若 ΔABC 為鈍角三角形，根據根據圓內接四邊形對角互補定理可知，$\angle D = \pi - \angle A$，得證。 □

$$\text{凸四邊形面積} = \frac{1}{2}\text{ 對角線相乘 } \times \sin \text{ 兩對角線夾角}$$

五、 投影定理

$$a = b\cos C + c\cos B$$

六、　餘弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Proof. 根據投影定理：

$$c = a\cos B + b\cos A$$

兩邊同乘 c：

$$c^2 = ac\cos B + bc\cos A$$

同理：

$$a^2 = ac\cos B + ab\cos C$$

$$c^2 = bc\cos A + ab\cos C$$

$$c^2 = a^2 - ab\cos C + b^2 - ab\cos C = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

□

平行四邊形定理：平行四邊形四邊長平方和等於兩對角線平方和

三角形中線公式：$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM_a}^2 + \overline{BM_a}^2\right)$

七、　三角形面積定理

$$\begin{aligned}
\Delta ABC &= \frac{1}{2}a\cdot\overline{Ah_a} \\
&= \frac{1}{2}ab\sin C \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{（海龍（Heron）公式）} \\
&= \frac{abc}{4R} \\
&= rs \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}} \\
&= \frac{2}{3}\overline{BM_b}\cdot\overline{CM_c}\sqrt{\left|\frac{1-\left(\overline{AM_a}^2+\overline{BM_b}^2+\overline{CM_c}^2\right)^2}{4\overline{BM_b}^2\overline{CM_c}^2}\right|} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|
\end{aligned}$$

八、　重心相關定理

G 為三中線交點

$$\overline{AG} = 2\overline{GM_A}$$

$$G = \frac{A+B+C}{3}$$

九、　外心相關定理

$$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=R$$
$$O=\frac{a^2A+b^2B+c^2C}{a^2+b^2+c^2}$$
$$O\text{ 為三邊中垂線交點}$$

$$\Delta OAB:\Delta OBC:\Delta OCA=\sin 2C:\sin 2A:\sin 2B$$
$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$$
$$\frac{1}{2}\angle AOB=\angle C\vee\pi-\angle C$$

十、　內心相關定理

$$I\text{ 與三邊均相切}$$

$$I\text{ 為三角角平分線交點}$$
$$I=\frac{a}{a+b+c}A+\frac{b}{a+b+c}B+\frac{c}{a+b+c}C$$
$$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$$

十一、　垂心相關定理

$$H\text{ 為三高交點}$$
$$H=\frac{\tan A\cdot A+\tan B\cdot B+\tan C\cdot C}{\tan A+\tan B+\tan C}$$
$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2\right)$$
$$\text{在複數平面上：}\det\begin{pmatrix}1 & A & A^2 & \overline{A}\\ 1 & B & B^2 & \overline{B}\\ 1 & C & C^2 & \overline{C}\\ 1 & H & H^2 & \overline{H}\end{pmatrix}=0$$
$$\frac{\overline{Hh_a}}{\overline{Ah_a}}+\frac{\overline{Hh_b}}{\overline{Bh_b}}+\frac{\overline{Hh_c}}{\overline{Ch_c}}=1$$

十二、　西瓦定理（**Ceva theorem**）

令西瓦線段指各頂點與其對邊或對邊延長線連接而成的直線段。

三角形 ΔABC 的西瓦線段 $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$：

$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$ 交於一點 $\iff\ \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=1\ \implies\ D$、$E$、$F$中有零或二個點不在$\Delta ABC$ 邊上

口訣：頂分頂分頂分頂

十三、　孟氏定理（**Menelaus' theorem**）

一直線與 ΔABC 的邊 BC、CA、AB 或其延長線分別交於 L、M、N：

$$\iff \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1 \implies L、M、N\text{中有一或三數個點不在}\Delta ABC\text{ 邊上}$$

口訣：頂分頂分頂分頂

十四、　角平分線定理

已知：ΔABC 中 $\angle B<\angle C$；D 在 $\overline{BC}$ 上；E 在 $\overrightarrow{BC}$ 上且不在 $\overline{BC}$ 上。

內角平分線定理及逆定理：$\angle BAD = \angle DAC \Leftrightarrow \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

外角平分線定理及逆定理：$\angle CAE = \pi - \angle BAE \Leftrightarrow \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{AC}$

十五、　角平分線長定理

$$\overline{A\mathscr{B}_a} = \frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

第二章　三角函數公式定理

一、　尤拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

二、　正切萬能公式

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$
$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$
$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

三、　二倍角公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 1 - 2\sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\end{aligned}$$

四、 半角公式與平方化倍角公式

$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= \frac{1-\cos 2\theta}{2}\\ \cos^2\theta &= \frac{1+\cos 2\theta}{2}\\ \tan^2\theta &= \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan\frac{\theta}{2} &= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\\ &= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\\ &= \frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\\ &= \csc\theta-\cot\theta\end{aligned}$$

五、 三倍角公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

六、 和差角公式

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{-\cot\alpha+\cot\beta}$$

$$\sec(\alpha+\beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta\csc\alpha\csc\beta}{-\sec\alpha\sec\beta+\csc\alpha\csc\beta}$$

$$\sec(\alpha-\beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta\csc\alpha\csc\beta}{\sec\alpha\sec\beta+\csc\alpha\csc\beta}$$

$$\csc(\alpha+\beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta\csc\alpha\csc\beta}{\sec\alpha\sec\beta+\csc\alpha\csc\beta}$$

$$\csc(\alpha-\beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta\csc\alpha\csc\beta}{\sec\alpha\sec\beta-\csc\alpha\csc\beta}$$

七、　平方關係

$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = 1-\cos^2\theta\\ \cos^2\theta &= \frac{1}{1+\tan^2\theta} = 1-\sin^2\theta\\ \tan^2\theta &= \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}\end{aligned}$$

八、　三角形內角正弦公式

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \iff \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$$

九、　正餘弦函數疊合公式定理

$$(a\sin\theta+b\cos\theta)^2 \le a^2+b^2, \quad a,\, b\in\mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}&a\sin x+b\cos x\\ &\qquad= \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)\\ &\qquad= \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right)\end{aligned}$$

十、　和差化積

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \sin\alpha-\sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}$$

十一、　積化和差

$$\begin{aligned}2\sin\alpha\cos\beta &= \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\ 2\cos\alpha\sin\beta &= \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\\ 2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\ 2\sin\alpha\sin\beta &= -\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

十二、　單位圓定理

$$0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1,\, x^2+y^2=a,\, \theta=\sin^{-1}x+\sin^{-1}y,\, \phi=\cos^{-1}x+\cos^{-1}y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a>1 \iff \theta>\dfrac{\pi}{2} \iff \phi>\dfrac{\pi}{2}\\ a=1 \iff \theta=\dfrac{\pi}{2} \iff \phi=\dfrac{\pi}{2}\\ a<1 \iff \theta<\dfrac{\pi}{2} \iff \phi<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

十三、 高次方降次

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\cos^2\theta$$

$$\sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta$$

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\cos^2\theta$$