指數與對數

沈威宇

2024 年 11 月 7 日

第一章　指數（Exponent）與對數（Logarithm）

一、　指數

(一)　名稱

a^n 中 a 稱底數，n 稱指數。

(二)　實數域定義

a^n 的定義域 $\{(a,\, n)\} = (\mathbb{R},\, \mathbb{N}) \cup (\mathbb{R}\setminus\{0\},\, \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{R}_{>0},\, \mathbb{R})$。對於有定義的 a^n 且 $n \in \mathbb{N}$，定義 $a^n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a$。對於有定義的 a^n 且 $n = \dfrac{1}{p}$，其中 $p \in \mathbb{N}$，定義 $a^n = \sqrt[p]{a}$。對於有定義的 a^n 且 $n = 0$，定義 $a^n = 1$。對於有定義的 a^n 且 $n < 0$，定義 $a^n = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n} a}$。對於有定義的 a^n 且 $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，以逼近法定義 a^n。

(三)　複數域定義

z^w 的定義域 $\{(z,\, w)\} = (\mathbb{C},\, \mathbb{C})$。令 $z = re^{i\theta}$、$w = a + bi$。a^n 定義為：

$$\begin{aligned}
z^w &= \left(re^{i\theta}\right)^{a+bi} \\
&= \left(re^{i\theta}\right)^{a+bi} = \left(re^{i\theta}\right)^{a} \cdot \left(re^{i\theta}\right)^{bi} \\
&= r^a \cdot e^{ia\theta} \cdot e^{ib\ln(r)} \cdot e^{-b\theta} \\
&= r^a \cdot e^{i(a\theta + b\ln(r) - b\theta)}
\end{aligned}$$

定義域為複數域。

(四)　負數根號

$w > 0,\, y$ 為正奇數，則定義 $\sqrt[y]{-w} = -\sqrt[y]{w}$，但 $(-w)^y$ 無意義。

(五)　指數函數

$f(x) = a^x$ 稱以 a 為底的指數函數。定義域 $\mathbb{R}$，值域 $\{y \mid y > 0\}$。

(六)　科學記號

$a \times 10^n$，其中：$1 \le a < 10$，$n \in \mathbb{Z}$。

(七)　指數成長

指 $f'(x) = kf(x)$ 之 $f(x)$。

(八)　指數律

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

(九) 尤拉數（**Euler's number**）

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(十) 泰勒展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(十一) 微積分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x$$
$$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$$

二、 對數

(一) 名稱

$\log_a(b)$ 中 a 稱底數，b 稱真數。

(二) 實數域定義

$\log_a(b)$ 的定義域 $\{(a,\, b)\} = (\mathbb{R}_{>0 \wedge \neq 1},\, \mathbb{R}_{>0})$。對於有定義的 $\log_a(b)$，定義 $x = \log_a(b) \equiv a^x = b$

三、 複數域定義

定義：$\ln(z)$ 的定義域 $\{z\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$。令 $z = x + yi$，$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 為 z 的模長，$\arg(z) = \arg(x + yi) = \operatorname{atan2}(y,\, x)$ 為 z 的輻角主值。$\ln(z)$ 定義為：

$$\ln(z) = \ln(\|z\|) + i \arg(z)$$

定義域實部不為零之複數。

(一) 常用（**Common**）對數

$$\log(b) = \log_{10}(b)$$

(二) 自然（**Natural**）對數

$$\ln(b) = \log_e(b)$$

(三) 對數律

$$\log_a(r) + \log_a(s) = \log_a(rs)$$
$$\log_a(r) - \log_a(s) = \log_a\left(\frac{r}{s}\right)$$
$$\log_{a^m}(r^n) = \frac{n}{m} \log_a(r)$$
$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c a}$$

(四)　泰勒展開

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < \Re x \le 1$$

(五)　微積分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int_0^x \ln(x) \, \mathrm{d}x = x \ln(x) - x$$

(六)　首數與尾數

小數，其整數部分稱首數（Characteristic），小數部分稱尾數（Mantissa）。