圓錐曲線

沈威宇

2025 年 1 月 7 日

目錄

第一節　圓錐曲線

一、　定義

設 F 為定點，l 為定直線，e 為正常數，P' 為 l 上的動點且滿足 $|PP'| \perp l$，稱滿足 $\dfrac{|PF|}{|Pl|} = e$ 的動點的軌跡為圓錐曲線，其中 F 為其焦點（Focus），l 為其準線（Directrix），e 為其離心率（Eccentricity）。即：當一個圓錐曲線上的每一點到一固定點（焦點）的距離與該點到一定直線（準線）的距離之比為常數（離心率）時，就可以確定該曲線的形狀和位置。

二、　代號與關係

1. 本文均使用笛卡爾坐標
2. 離心率 e
3. 半焦距 c
4. 半正焦弦 ℓ
5. 焦點準線距離 p

$$\ell = pe$$

$$c = ae$$

$$p + c = \frac{a}{e}$$

三、　自由度

1. 不考慮位置、方向、大小，圓錐曲線的圖形有一個自由度。
2. 不考慮位置、方向，但考慮大小，圓錐曲線的圖形有兩個自由度。
3. 不考慮位置，但考慮方向、大小，圓錐曲線的圖形有三個自由度。
4. 不考慮方向，但考慮位置、大小，圓錐曲線的圖形有四個自由度。
5. 考慮位置、方向、大小，圓錐曲線的圖形有五個自由度。

四、　圓錐曲線一般式

$$Ax^2 + Bx^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

其中：A、B、C、D、E、F 為常數。$ABC \neq 0$，否則為圓錐曲線之退化

五、 圓錐曲線的標準式

(一) 標準位向橢圓標準式

$$ab \neq 0 \quad a \geq b$$

a： 半長軸

b： 半短軸

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$c = \sqrt{a^b - b^2}$$

$$\ell = \frac{b^2}{a}$$

$$p = \begin{cases} \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, a \neq b \\ \infty, a = b \end{cases}$$

當 $a = b$，圖形為圓形，$e = c = 0, \ell = a, p = \infty$

準線方程：$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

(二) 標準位向拋物線標準式

$$y^2 = 4ax$$

$$e = 1$$

$$c = \infty$$

$$\ell = 2a$$

$$p = 2a$$

準線方程：$x = -a$

(三) 標準位向雙曲線標準式

$$ab \neq 0$$

a： 半貫/主軸

b： 半共軛軸

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$c = \sqrt{a^b + b^2}$$

$$\ell = \frac{b^2}{a}$$

$$p = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\text{準線方程：} x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(四)　反比例函數雙曲線標準式

$$y = \frac{k}{x}$$

$$k = \frac{c^2}{2}$$

六、　標準圓錐曲線的參數式

(一)　標準位向橢圓參數式

$$(a\cos(\theta),\ b\sin(\theta),\ 0 \le \theta < 2\pi$$

(二)　標準位向拋物線參數式

$$(at^2,\ 2at),\ t \in \mathbb{R}$$

(三)　標準位向雙曲線參數式

$$(a\sec(\theta),\ b\tan(\theta)), 0 \le \theta < 2\pi$$

(四)　反比例函數雙曲線參數式

$$(kt,\ \frac{k}{t}),\ \text{where } k = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

七、　標準圓錐曲線的一般式

(一)　標準方向任意位置橢圓一般式

$$ab \ne 0$$

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = 1$$

其中：$a = \sqrt{\dfrac{\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B} - F}{A}}$ 為其 x 軸方向的半徑，$b = \sqrt{\dfrac{\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B} - F}{B}}$ 為其 y 軸方向的半徑，$h = \dfrac{D}{2A}$，$k = \dfrac{E}{2B}$，$(h,\ k)$ 為橢圓的中心點

八、 判別式

(一) 圖形判別式

註：圖形判別式並不總是記作 Δ_P，也不總是稱作圖形判別式，惟此處為之。

註：有時以此處定義之 $-\frac{1}{4}$ 倍作為圖形判別式，判斷上變號即可。

$$\begin{aligned}\Delta_P &= -4\begin{vmatrix} A & \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} & B \end{vmatrix} \\ &= C^2 - 4AB\end{aligned}$$

註：圖形判別式不論虛實，只論圖形。

1. **若圖形不退化，且 $\Delta_P > 0$，圖形是橢圓。特別地，當 $A = B$ 且 $C = 0$ 時，圖形是圓。**
2. **若圖形不退化，且 $\Delta_P = 0$，圖形是拋物線。**
3. **若圖形不退化，且 $\Delta_P < 0$，圖形是雙曲線。**
4. **若圖形退化，且 $\Delta_P > 0$，圖形是一對重合的直線或一點。**
5. **若圖形退化，且 $\Delta_P = 0$，圖形是一對重合的直線（在退化前拋物線的對稱軸）或一條直線（與退化前拋物線的對稱軸垂直於退化前拋物線的頂點）。**
6. **若圖形退化，且 $\Delta_P < 0$，圖形是一對交叉或平行或重合的直線。**

(二) 退化判別式

註：退化判別式並不總是記作 Δ_Q，也不總是稱作退化判別式，惟此處為之。

$$\begin{aligned}\Delta_Q &= \begin{vmatrix} A & \frac{C}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{C}{2} & B & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\Delta_P}{4}F - \frac{AE^2 + BD^2}{4}\end{aligned}$$

1.　如果 $\Delta_Q < 0$，圖形為虛圖形，即不存在實數平面上。

2.　如果 $\Delta_Q = 0$，圖形為退化圖形。

3.　如果 $\Delta_Q > 0$，圖形存在於實數平面上。

(三)　旋轉方向

僅 C 可影響旋轉方向，但 C 不只影響方向。

九、　圓

(一)　圓的直徑式

若 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$，則以 $\overline{PQ}$ 為直徑的圓的方程式為：

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

(二)　圓的判別式

1.　因為是圓，故知：$A = B$，$C = 0$

2.　將兩判別式簡化後得圓的判別式：

$$\Delta_c = D^2 + E^2 - 4F$$

3.　如果 $\Delta_c > 0$，圖形為圓，圓心 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$，半徑，$\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_c}$

4.　如果 $\Delta_c = 0$，圖形退化為一點 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$

5.　如果 $\Delta_c < 0$，圖形為虛圓，圓心 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$，半徑，$\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_c}$

(三)　圓與直線集合關係的代數判定

1.　已知圓 C： $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 與直線 L： $ax + by + c = 0$。

2.　將 L 化為 $y = f(x)$ (或 $x = g(y)$) 代入 C，消去 y (或 x) 得 $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (或 $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$)。

3.　令 $\Delta_{\mathrm{L}} = \beta^2 - 4\alpha\gamma$：

(1)　如果 $\Delta_{\mathrm{L}} > 0$，圓 C 與直線 L 相交於相異二點（相割）。

(2)　如果 $\Delta_{\mathrm{L}} = 0$，圓 C 與直線 L 相交於一點（相切）。

(3)　如果 $\Delta_{\mathrm{L}} < 0$，圓 C 與直線 L 沒有交點（相離）。