

# 多項式函數與方程

沈威宇

2025 年 1 月 26 日

# 目錄

第一節 多項式函數與方程 (Polynomial Functions and Equations)	1
一、 方程組	1
二、 多項式	1
三、 最高次項次數定理	1
四、 商式極限	1
五、 近似	1
六、 除法定理	1
(一) 餘式定理	1
(二) 因式定理	2
七、 線性變換	2
(一) 平移	2
(二) 伸縮	2
八、 零函數	2
九、 一元一次函數	2
(一) 一般式 (斜截式)	2
(二) 點斜式	2
十、 一元二次函數	2
(一) 一般式	2
(二) 標準式	2
(三) 判別式	3
(四) 根	3
(五) 圖形特徵	3
(六) 根數	3
(七) 根與係數的關係	3
十一、 一元三次函數	3
(一) 一般式	3

(二) 標準式 . . . . .	4
(三) 判別式 . . . . .	4
(四) 根 . . . . .	4
(五) 圖形特徵 . . . . .	5
(六) 根與係數的關係 . . . . .	5
十二、 平面上的直線 . . . . .	5
(一) 一般式 . . . . .	5
(二) 截距式 . . . . .	5
(三) 斜截式 . . . . .	6
(四) 點斜式 . . . . .	6
(五) 參數式 . . . . .	6
(六) 平面上兩個直線關係 . . . . .	6
十三、 直線與其他圖形的關係 . . . . .	7
(一) 半空間 . . . . .	7
(二) 直線與點距離 . . . . .	7
(三) 直線間距離 . . . . .	7
(四) 直線到點最短向量 . . . . .	7
(五) 平行直線之間公垂向量 . . . . .	7
十四、 Polynomial Interpolation (多項式插值法). . . . .	7
(一) Newton's Polynomial (牛頓插值法) . . . . .	8
(二) Lagrange Polynomial (拉格朗日插值法) . . . . .	8

# 第一節 多項式函數與方程 (Polynomial Functions and Equations)

## 一、 方程組

- 相容方程組：一組方程組有解，則稱其為相容方程組。
- 相依方程組：一組方程組中，其中一者成立則其他者均成立，則稱其為相容方程組。
- 矛盾方程組：一組方程組無法同時成立，則稱其為矛盾方程組。

## 二、 多項式

多項式指由多個項 (term) 組成的代數表達式，每個項是常數（稱該項係數）與零或正整數（為零是該項稱常數項）個變數的非負整數幕次的乘積。

領導係數指最高次項係數。

令有多項式  $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $q(x)$ 、 $r(x)$ 。

## 三、 最高次項次數定理

$$\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$$

## 四、 商式極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0, \deg(f(n)) < \deg(g(n)) \\ \frac{f(x) \text{ 領導係數}}{g(x) \text{ 領導係數}}, \deg(f(n)) = \deg(g(n)) \\ \text{不存在}, \deg(f(n)) > \deg(g(n)) \end{cases}$$

## 五、 近似

$f(x)$  在  $x = a$  的  $n$  次近似 ( $n \leq \deg(f(x))$ ) =  $f(x)$  之泰勒級數最低次  $n$  項

## 六、 除法定理

恰有一組  $q(x)$ 、 $r(x)$  滿足：

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

$$\deg(r(x)) < \deg(g(x)) \vee r(x) = 0$$

若  $r(x) = 0$  則稱  $q(x)$  為  $f(x)$  之因式。

### (一) 餘式定理

若  $q(x) = ax + b$  則  $r(x) = f\left(\frac{b}{a}\right)$ 。

## (二) 因式定理

$f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$  若且惟若  $ax + b$  為  $f(x)$  的因式。

## 七、 線性變換

### (一) 平移

對於任意函數  $f(x)$ ， $y = f(x)$  右移  $h$  單位，上移  $k$  單位，得  $y = f(x - h) + k$ 。

### (二) 伸縮

對於任意函數  $f(x)$ ， $y = f(x)$  以  $x$  軸為基準線鉛直伸縮為原來的  $a$  倍，以  $y$  軸為基準線水平伸縮為原來的  $b$  倍，得  $y = af\left(\frac{x}{b}\right)$ 。

## 八、 零函數

$$f(x) = 0$$

## 九、 一元一次函數

$$a \neq 0$$

### (一) 一般式（斜截式）

$$f(x) = ax + b$$

其中  $a$  稱斜率， $b$  稱  $y$  截距。

### (二) 點斜式

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

零函數與一元一次函數合稱線性函數。

## 十、 一元二次函數

$$a \neq 0$$

### (一) 一般式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

### (二) 標準式

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

其中  $(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

### (三) 判別式

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

### (四) 根

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} e^{k\pi i}}{2a}, \text{ where } k = 0, 1 \\&= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\end{aligned}$$

### (五) 圖形特徵

- 拋物線。
- 頂點、極值點、最值點： $(h, k)$ 。
- 對稱軸： $x = h$ 。
- 開口： $a$  為正，開口向上，反之向下。 $|a|$  愈大，開口愈小。

### (六) 根數

- $a > 0$  且  $\Delta < 0$ ：函數恆正，無實根，有二共軛複根。
- $a < 0$  且  $\Delta > 0$ ：函數恆負，無實根，有二共軛複根。
- $a > 0$  且  $\Delta = 0$ ：函數不負，一重實根。
- $a < 0$  且  $\Delta = 0$ ：函數不正，一重實根。
- $\Delta < 0$ ：函數與  $x$  軸有二交點，二實根。

### (七) 根與係數的關係

令根  $\alpha, \beta$

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta &= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

## 十一、一元三次函數

$a \neq 0$

### (一) 一般式

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

## (二) 標準式

$$f(x) = a(x - h)^3 + p(x - h) + k$$

$$\text{其中 } (h, p, k) = \left( -\frac{b}{3a}, c - \frac{b^2}{3a}, \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d \right)$$

## (三) 判別式

$$\Delta = \left( \frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} \right)^2 + \left( \frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2} \right)^3$$

## (四) 根

1. 直接公式：

$$x = -\frac{b}{3a} + e^{\frac{2k\pi i}{3}} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left( \frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} \right)^2 + \left( \frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2} \right)^3}} \\ + e^{\frac{2(3-k)\pi i}{3}} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}}, \text{ where } k = 0, 1, 2$$

2. 三解分開公式：

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left( \frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} \right)^2 + \left( \frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2} \right)^3}} \\ + \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} \\ x_2 = -\frac{b}{3a} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left( \frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} \right)^2 + \left( \frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2} \right)^3}} \\ + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}} \\ x_3 = -\frac{b}{3a} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left( \frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} \right)^2 + \left( \frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2} \right)^3}} \\ + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a}}$$

3. 卡迪諾公式 (Cardano's formula)：

令：

$$h = -\frac{b}{3a}$$

$$s = c - \frac{b^2}{3a}$$

$$k = \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d$$

$$q = \frac{k}{a}$$

$$p = \frac{s}{a}$$

$$u = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$C = \sqrt[3]{ue^{\frac{2k\pi i}{3}}}, \quad \text{where } k = 0, 1, 2$$

則：

$$x = C - \frac{p}{3C} + h$$

## (五) 圖形特徵

- 頂點、二階旋轉對稱點： $(h, k)$ 。
- 極值： $ap < 0$  若且惟若存在二個極值點， $p = 0$  若且惟若存在一個極值點（圖形單調遞增或減）， $ap > 0$  若且惟若不存在極值點（圖形嚴格遞增或減）。
- 拐點（兩側凹性不同）： $ap < 0$  則  $(h, k)$ ，否則無。
- 最值點：不存在。

## (六) 根與係數的關係

令根  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

# 十二、 平面上的直線

## (一) 一般式

$$ax + by + c = 0$$

## (二) 截距式

若  $ab \neq 0$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

其中  $p = -\frac{c}{a}$ 、 $q = -\frac{c}{b}$  分別為  $x$ 、 $y$  截距。



### (三) 斜截式

若  $b \neq 0$ ，即  $y$  為  $x$  的函數

$$y = f(x) = mx + q$$

其中  $m$  稱斜率。

### (四) 點斜式

若  $b \neq 0$ ，即  $y$  為  $x$  的函數

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

### (五) 參數式

設相異兩點  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ：

直線  $\overleftrightarrow{AB}$  的參數式：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

射線  $\overrightarrow{AB}$  的參數式：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad t \geq 0$$

線段  $\overline{AB}$  的參數式：

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

### (六) 平面上兩個直線關係

平面上直線  $L_1 : ax + by + c = 0$ 、 $L_2 : dx + ey + f = 0$ ：

•

$$ae = bd \iff L_1 / L_2$$

•

$$ad + be = 0 \iff L_1 \perp L_2$$

若  $L_1$ 、 $L_2$  存在斜率  $m_1$ 、 $m_2$  則：

•

$$m_1 = m_2 \iff L_1 / L_2$$

•

$$m_1 m_2 = -1 \iff L_1 \perp L_2$$

### 十三、 直線與其他圖形的關係

#### (一) 半空間

在  $\mathbb{R}^n$  空間中，假設有  $L: f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ 。點  $P$  滿足  $f(P) > 0$  若且惟若  $P$  在  $L$  的正方向半空間；點  $P$  滿足  $f(P) = 0$  若且惟若  $P$  在  $L$  上；點  $P$  滿足  $f(P) < 0$  若且惟若  $P$  在  $L$  的負方向半空間。

對於  $f = \sum_{i=1}^n c_i x_i$  者，當  $c_i > 0$ ，正方向半空間之  $x_i$  大於其他自變數不變下  $L$  之  $x_i$ ，負方向半空間之  $x_i$  小於其他自變數不變下  $L$  之  $x_i$ ；當  $c_i < 0$ ，正方向半空間之  $x_i$  小於其他自變數不變下  $L$  之  $x_i$ ，負方向半空間之  $x_i$  大於其他自變數不變下  $L$  之  $x_i$ 。

#### (二) 直線與點距離

在  $\mathbb{R}^n$  空間中，假設有  $L: f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ，且  $f$  為一次函數，且  $f$  的係數（即法向量）為  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，且  $f$  的常數項為  $c$ 。點  $P$  到  $L$  的距離為：

$$d(P, L) = \frac{|f(P)|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}.$$

#### (三) 直線間距離

在  $\mathbb{R}^n$  空間中，假設有  $L_1: f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ 、 $L_2: g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ，且  $f$ 、 $g$  為一次函數，且  $f$ 、 $g$  的係數均為  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，且  $f$ 、 $g$  的常數項分別為  $c$ 、 $d$ 。  $L_1$  到  $L_2$  的距離為：

$$d(L_1, L_2) = \frac{|c - d|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}.$$

#### (四) 直線到點最短向量

在  $\mathbb{R}^n$  空間中，假設有  $L: f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ，且  $f$  為一次函數，且  $f$  的係數為  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，且  $f$  的常數項為  $c$ 。  $L$  上距離點  $P$  最近的點到點  $P$  的向量為：

$$\mathbf{v} = \frac{f(P)}{\sum_{i=1}^n a_i^2} (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

#### (五) 平行直線之間公垂向量

在  $\mathbb{R}^n$  空間中，假設有  $L_1: f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ 、 $L_2: g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ，且  $f$ 、 $g$  為一次函數，且  $f$ 、 $g$  的係數均為  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，且  $f$ 、 $g$  的常數項分別為  $c$ 、 $d$ 。  $L_1$  上任意點  $P$  到  $L_2$  上距離點  $P$  最近的點的向量為：

$$\mathbf{v} = \frac{c - d}{\sum_{i=1}^n a_i^2} (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

### 十四、 Polynomial Interpolation (多項式插值法)

Polynomial interpolation is a method of constructing a polynomial that passes through a given set of points. Given  $n + 1$  data points  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , the goal is to find a polynomial  $p(x)$  of degree at most  $n$  such that:

$$p(x_i) = y_i \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, n.$$

## (一) Newton's Polynomial (牛頓插值法)

Newton's polynomial interpolation uses the concept of divided differences to construct the polynomial in a recursive form. The Newton interpolating polynomial can be written as:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

where the coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$  are obtained using divided differences. The divided differences are recursively computed as follows:

$$\begin{aligned} f[x_i] &= y_i \\ f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_k] &= \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_k] - f[x_i, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_i} \end{aligned}$$

The Newton polynomial can be succinctly written as:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

## (二) Lagrange Polynomial (拉格朗日插值法)

Lagrange polynomial interpolation expresses the polynomial as a linear combination of basis polynomials. The Lagrange form of the interpolating polynomial is given by:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

where  $L_i(x)$  are the Lagrange basis polynomials, defined as:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Each  $L_i(x)$  is a polynomial that is 1 at  $x = x_i$  and 0 at all other  $x_j$  ( $j \neq i$ ).

### Barycentric Form (重心形式) of Lagrange Interpolation:

The Barycentric form is a more efficient and numerically stable way to compute the Lagrange interpolation polynomial. The Barycentric form of the interpolating polynomial is:

$$p(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{w_i y_i}{x - x_i}}{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i}}$$

where  $w_i$  are the barycentric weights, defined as:

$$w_i = \frac{1}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)}$$