

Анализ алгоритмов

Ульянов Михаил Васильевич

2019

Оглавление

1	Исторический очерк	2
2	Схема выбора алгоритмического обеспечения	3
3	1936 год Э.Л. Пост "Финитные комбинаторные процессы - формулировка 1"	4
3.1	Терминология	4
3.2	Общая проблема	4
3.3	Пространство символов	4
3.4	Работник (процессор)	4
3.5	Примеры	4
3.6	Гипотеза Поста	5
3.7	1984 Муравей Лэнгтона	5
4	Терминология	6
4.1	Вход алгоритма	6
4.2	Длина входа	6
4.3	Трудоемкость	6
4.4	D_n	6
4.5	Переход к n	6
4.6	Память	7
5	Примеры	8
5.1	Умножение матриц	8
5.2	Мах	8
5.3	Степень	8
6	Классификация алгоритмов по типу трудоемкости	10
6.1	Класс N - количественно-зависимые алгоритмы	10
6.2	Класс PR - параметрически-зависимые алгоритмы	10
6.3	Класс NPR	10
6.4	Декомпозиция f в NPR	10
6.5	Асимптотическая иерархия функций	11
6.6	Подклассы в NPR	11
6.6.1	Подклассы NPR(Low)	11
6.6.2	NPRE (Eq)	11
6.6.3	NPRH	11
6.6.4	TSP	12
7	Метод классов эквивалентности	13
7.1	Математические сведения	13
7.2	Идея метода	13
7.2.1	Реализация	14
7.3	Сортировка $3x$ чисел по методу	14
7.3.1	Модификация	14
7.4	Анализ мах	14
8	Метод математических ожиданий	16
8.1	Сведения теории вероятности	16
8.2	Идея метода	16

Глава 1

Исторический очерк

1. 1900

Д. Гильберт - 23 проблемы 1931 - К. Гедель доказал теорему о неполноте

2. 1936

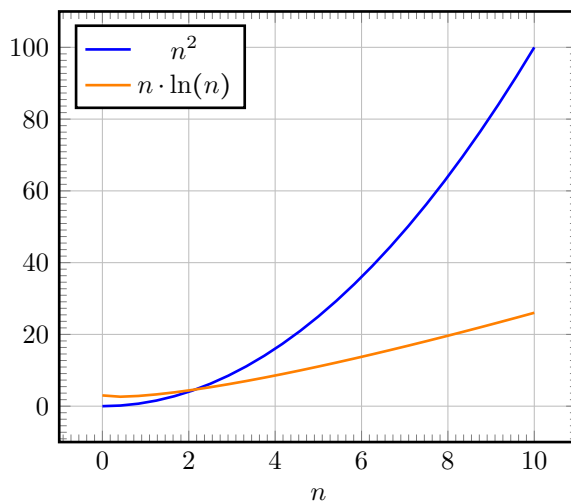
А.Тьюринг, Э.Л.Пост - Теория алгоритмов (начало)

- формализация понятия
- общие свойства
- обнаружение алгоритмически неразрешимых задач

3. 1960е

Теория сложности вычислений NPC

$O(n^2)$ $O(n \cdot \ln(n))$



4. Начало 1970х

Практический анализ алгоритмов Д.Э. Кнут

Глава 2

Схема выбора алгоритмического обеспечения

Нет:

А. Новый (метод разработки)

В. Комбинированные элементы ($A_1 + A_2 + A_3$)

$$Q(q_1, \dots, q_m) = \sum \alpha_i q_i \rightarrow R^1 - \text{комплексные оценки}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$a + ib = (c + id) =^{det} (ac - bd) + i(bc + ad)$$

Глава 3

1936 год Э.Л. Пост "Финитные комбинаторные процессы - формулировка 1"

3.1 Терминология

Общая проблема = задача

Конкретная проблема = индивидуальная задача

3.2 Общая проблема

Общая \rightarrow множество всех конкретных

Решение общей \rightarrow решение каждой конкретной

3.3 Пространство символов

\leftarrow							\rightarrow
--------------	--	--	--	--	--	--	---------------

	Помечен, не помечен	
--	---------------------	--

Конкретная проблема задается внешней силой путем пометки конечного числа символов.

3.4 Работник (процессор)

1. \rightarrow (R)
2. \leftarrow (L)
3. \checkmark Поставить метку, если пусто
4. ξ Стереть, если есть
5. ? $\xrightarrow{\text{да}} N^o$ строки
 $\xrightarrow{\text{нет}} N^o$ строки
6. stop

3.5 Примеры

	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	...	\checkmark	
--	--------------	--------------	--------------	--------------	-----	--------------	--

1. ξ
2. \rightarrow

3. $\begin{matrix} \text{да} \\ \rightarrow 1 \\ \text{нет} \\ \rightarrow 4 \end{matrix}$
4. stop

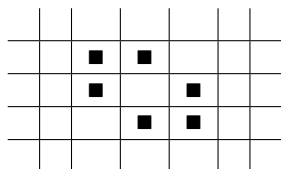
3.6 Гипотеза Поста

- a) Программа применима к общей, если \forall конкретной нет коллизий в операциях 3,4
- b) программа заканчивается, если stop
- c) Если \forall конкретной внеш сила распознает правильный ответ, то Ф1П есть 1-решение общей
- d) Мы вправе рассматривать все более и более широкие формулы

пространство символов
 алфавита логически сводимы к формуле 1
 набор инструкций

$a + b =$ Финитный 1 процесс

3.7 1984 Муравей Лэнгтона



$$W \rightarrow (B, R)$$

$$B \rightarrow (W, L)$$

Глава 4

Терминология

4.1 Вход алгоритма

Конкретная проблема \Rightarrow индивидуальная задача \Rightarrow Вход $D = \{d_i | i = 1, m\}$

4.2 Длина входа

$n \rightarrow |D|?$

$$\mu_z(D) \rightarrow g(|D|)$$

$$\mu_{sort}(D) = |D| - 1$$

Умножение матриц $n \times n$

$$|D| = 2n^2 + 1$$

$$\mu_z(D) = n = \sqrt{\frac{|D| - 1}{2}}$$

4.3 Трудоемкость

$f_A(D)$ - число элементарных операций принятой модели вычислений заданных алгоритмом A на входе D

$$f_{A_1}(D) < f_{A_2}(D)$$

4.4 D_n

$$D_n = \{D | \mu_z(D) = n\}$$

$$\beta = 16 \quad |D_{10}| = 2^{160}$$

4.5 Переход к n

$$f_A^\vee(n) \stackrel{def}{=} \min_{D \in D_n} f_A(D) - \text{лучший случай}$$

$$f_A^\wedge(n) \stackrel{def}{=} \max_{D \in D_n} f_A(D) - \text{худший случай}$$

$$\bar{f}_A(n) = \sum_{D \in D_n} p(D) - f_A(D)$$

$$p(D) = \frac{1}{|D_n|}$$

4.6 Память

$$V(D) = \underset{\text{Вход}}{|D|} + \underset{\text{Результат}}{|R|} + V_{\text{дополнительно памяти}}(D) + V_{\text{программы}}$$

$$V_A(D) = V_{\text{доп}}(D) | V^{\vee}(n), V^{\vee}(n), \dots$$

Глава 5

Примеры

5.1 Умножение матриц

```
1 MultM(A,B,n;C)
2   for i ← 1 to n
3     for j ← 1 to n
4       s ← 0
5       for k ← 1 to n
6         s ← s + A[i,k] * B[k,j]
7       c[i,j] ← s
8 End
```

$$f_A^\vee(n) = f_A^\wedge(n) = f_A(n) = 1 + n(3 + 1 + n(3 + 2 + n(3 + 7) + 3)) = 10n^3 + 8n^2 + 4n + 1$$

5.2 Max

```
1 Max(A,n;M)
2   M ← A[1]
3   for j ← 2 to n
4     if M < A[j]
5       M ← A[j]
6 End
```

$$f_A^\vee(n) = 2 + 1 + (n - 1)(3 + 2) = 5n - 2$$

$$f_A^\wedge(n) = 2 + 1 + (n_1)(3 + 2 + 2) = 7n - 4$$

5.3 Степень

```
1 Pow(x,k;y)
2   ...
3   y → 1
4   for j → 1 to k
5     y → y * x
6 End
```

$$D \in D_2$$

$$M_z(D) = 2$$

$$f_A(k) \equiv 2 + 5k$$

$$e^x=e^{\lfloor x\rfloor}\cdot e^{\{x\}}$$

$$e^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}, 0\leq \alpha<1, \frac{\alpha^k}{k!}>\sum_{k+1}^{\infty}(.)$$

$$\text{Exp}(x,eps,y)\Rightarrow k^*=g(eps)\quad k^*:\frac{\alpha^{k^*}}{k^{*}!}$$

Глава 6

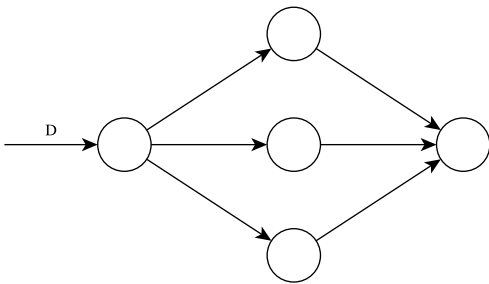
Классификация алгоритмов по типу
трудоемкости

6.1 Класс N - количественно-зависимые алгоритмы

$$f_A(D) = f_A(\mu_Z(D)) = f_A(n)$$

$$f^{\vee} = f^{\wedge}!$$

!Матрично-векторные операции



Гипотеза П.Леви

$$R^n \; \overline{a} = (..., [-1, 1], ...)$$

6.2 Класс PR - параметрически-зависимые алгоритмы

$$f_A(D) = f_A(P + 1, ..., p + k) \neq f(n)$$

$$li(x0) = \int_2^x \frac{1}{\ln x} dx$$

6.3 Класс NPR

$$f_A(D) = f_A(n, pr)$$

6.4 Декомпозиция f в NPR

$$f_A(D) = f_n(n) + g_{PR}(D)$$

$$f_A^{\wedge}(n) = f_n(\underset{10}{n}) + g_{PR}^{\wedge}(n)$$

6.5 Асимптотическая иерархия функций

$$a < b$$

$$f(x) \Rightarrow f(\cdot)$$

$$f(x) < g(x)$$

$$<: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\ln x < \sqrt{x} < x^{\frac{1}{2}} < e^{\lambda x} < x^x$$

$$f(x) \asymp g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} \neq 0$$

6.6 Подклассы в NPR

$$f_A^\wedge(n) = f_n(n) + g^\wedge(n)$$

6.6.1 Подклассы NPR(Low)

$$g^\wedge(n) < f_n(n)$$

6.6.2 NPRE (Eq)

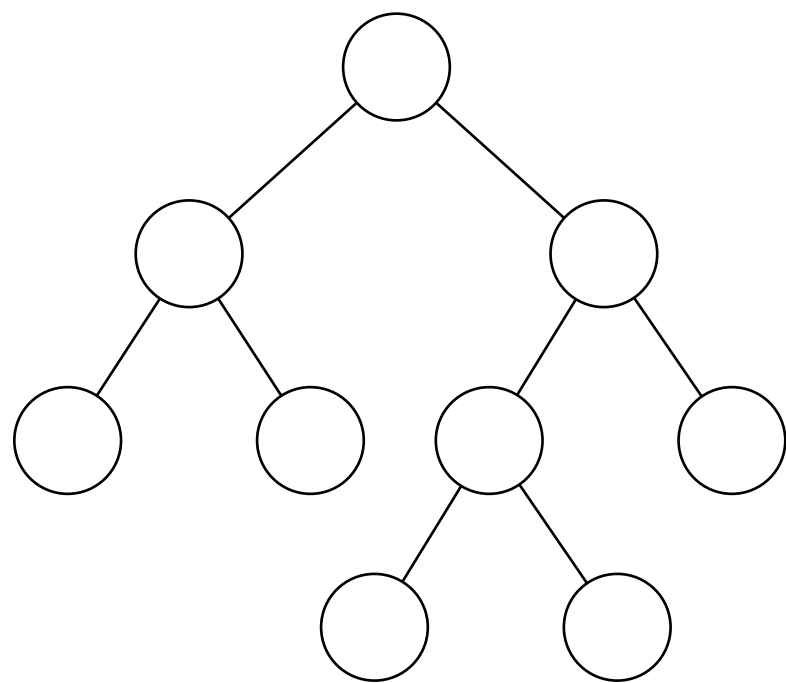
$$g^\wedge(n) \asymp f_n(n)$$

6.6.3 NPRH

$$f_n(n) < g^\wedge(n)$$

$$!g^\wedge \rightarrow \bar{g}$$

6.6.4 TSP



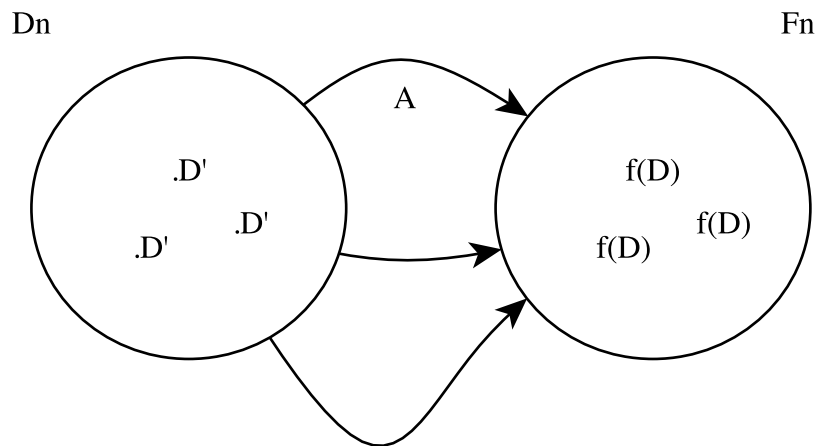
Глава 7

Метод классов эквивалентности

7.1 Математические сведения

1. Отношение R на A $R \subset A \times A$
2. Если R - отношения эквивалентности:
 - (a) $(a, a) \in R$ - рефлекс
 - (b) $(a, a') \in R \Rightarrow (a', a) \in R$ - симметричность
 - (c) $(a, a') \in R, (a', a'') \in R \Rightarrow (a, a'') \in R$ - транзитивность
3. Принцип Дирихле P.G.L. Dirichle

7.2 Идея метода



$$D_n \xrightarrow{A} F_n$$

$$f^\vee(n)$$

$$\exists D : f(D) = f^\vee + 1$$

$$R \text{ на } D_n(D, D') \in R \Leftrightarrow f_A(D) = f_A(D')$$

$$f^\vee, f^\wedge P(f(D) = f_1) = \frac{|D_{f_1}|}{|D_n|}$$

$$\overline{f_A}(n) = \sum_k f_k \cdot P(f = f_K)$$

7.2.1 Реализация

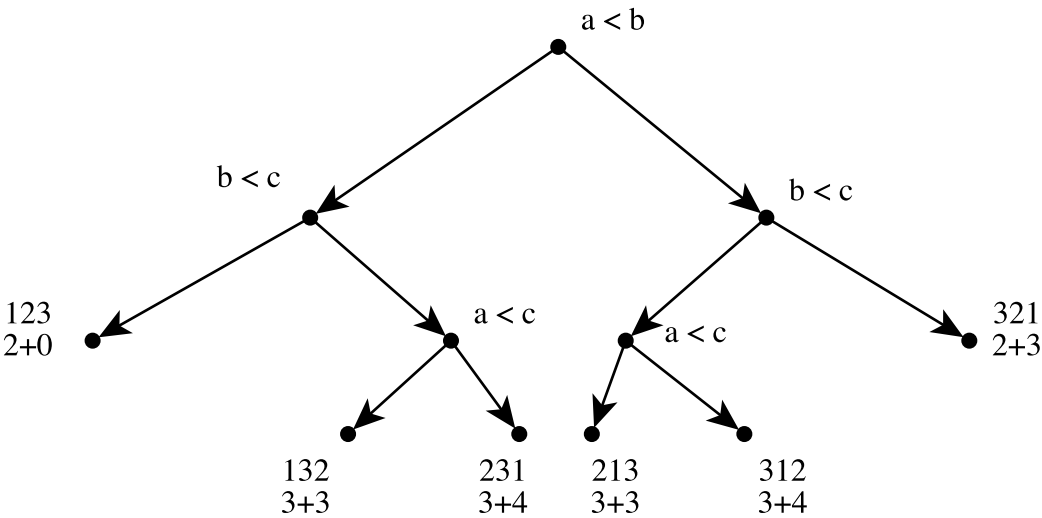
- 1. Равномощное разбиение
- 2. Объединение в классы

7.3 Сортировка 3х чисел по методу

```
1 Sort3(a,b,c) ← D3
2   if a > b
3     then a ↔ b
4   if b > c
5     then b ↔ c
6   if a > b
7     then a ↔ b
8 End
```

<i>a, b, c</i>		<i>f</i>	<i>f^v</i>
1 - min	D_{123}	3	
2 - midl	D_{132}	6	
3 - max	$\Rightarrow D_{213}$	6	$\bar{f} = 7\frac{1}{2}$
	D_{231}	9	
	D_{312}	9	
	D_{321}	12	

7.3.1 Модификация



	<i>f^v</i>
D_{123}	2
D_{132}	6
D_{213}	6
D_{231}	7
D_{312}	7
D_{321}	5

$\bar{f} = 5\frac{1}{2}$

7.4 Анализ max

```
1 M ← A[1]
2 for j ← 2 to n
3   if M < A[j]
4     then M ← A[j]
```

$$D_4 \rightarrow n = 4$$

1 - min	2 1 3 4 qqqq
2 - min2	2 1 4 3
3 - max2	2 3 1 4
4 - max	2 3 4 1

$$g_n(x)=x^{\overline{n}}$$

$$g_4(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$$

$$g_4(1)=24$$

$$g_4(x)=1\cdot x^4+6\cdot x^3+11\cdot x^2+6\cdot x$$

$$S_n^k$$

Глава 8

Метод математических ожиданий

8.1 Сведения теории вероятности

$$M_0 = \langle \Omega_0, P(\cdot) \rangle \Rightarrow M_x = \langle \Omega_x, P_x(\cdot) \rangle, \Omega_0 \xrightarrow{x} R^1, x(\omega) = \alpha$$

$$P(x = \alpha) = \sum_{\omega: x(\omega) = \alpha} P(\omega)$$

$$Y = \sum_{i=1}^m x_i; E(Y) = E(\sum x_i) = \sum (E(x_i))$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, X = \{1, 2, \dots, P(x = k) = \frac{1}{k^2} \frac{6}{\pi^2}\}$$

8.2 Идея метода

Глава 9

Сортировка вставками

9.1 Статические и потоковые алгоритмы

Стат \rightarrow вход D сразу

Поток \rightarrow по 1 числу

1	Wait(a)
2	$Midl \leftarrow \frac{Midl \cdot n + a}{n+1}$
3	$n \leftarrow n + 1$