«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет: Информатика и системы управления

Кафедра: ИУ7

Моделирование

Студент группы ИУ7-63,

Степанов Александр Олегович

Преподаватель:

Градов Владимир Михайлович

2020 г.

Оглавление

1 Общие понятия. Вводные замечания

Моделирование – это методология разработки и изучения объекта, основанная на замене этого объекта моделью и работе в дальнейшем с этой моделью. Под объектом понимается система, процесс, явление, собственно объект (материальная или нематериальная сущность).

Модель – представление объекта в виде, отличном от облика или формы его реального существования или функционирования (упрощение).

1.1 Классификация моделей

Все модели можно разделить на три группы

1. **Натурные (материальные)** – это модели, которые воспроизводят процессы в натуральном виде
   — физические модели;
   — геометрические модели;
   — аналоговые модели и др.
2. **Абстрактные (идеальные)**
   — символьные модели;
   — интуитивные модели и др.
3. **Модели суждения (отношение к реалиям)**

Математическая модель – это представление объекта в виде уравнений, логических соотношений, формул. Математическое моделирование – это методология изучения объекта, путем замены его математической моделью.

1.2 Классификация математических моделей

— **Иммитационные** – это модели типа массового обслуживания

— **Функциональные (регулярные)**

— **Модели идентификации**

Предмет курса – изучение эффективных алгоритмов решения вычислительных задач, возникающих при исследовании математических моделей.

1.3 Требования к моделям

1. Адекватность (соответствие процессу или объекту и его требованиям)
2. Универсальность (описание не одного процесса, а группы)
3. Точность (модель должна удовлетворять требованиям точности результата)
4. Экономичность (соотношение цена/качество)

1.4 Области деятельности, в которых оправданно мат. моделирование

1. Прогнозирование событий
2. Исследование объектов, которые при каждом своем взаимодействии уничтожаются
3. Дорогостоющие объекты с длительными сроками разработки
4. Отсутствие объекта-оригинала
5. Исследование длительной по времени эволюции процесса

1.5 Лабораторная работа 1

Тема: Приближенный аналитический метод Пикара в сравнении с численными методами

$$\begin{cases} u'(x) = f(x,u) \\ u(\xi) = y \end{cases}$$

$$y^{(s)}(x) = \eta + \int_0^x f(t, y^{(s-1)}(t))dt$$

$$y^{(0)} = \eta$$

$$\begin{cases} u'(x) = x^2 + u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

$$y^{(1)} = 0 + \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$$

$$y^{(2)} = 0 + \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3}\right)^2\right]dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{7 \cdot 9} = \frac{t^3}{3}\left[1 + \frac{t^4}{21}\right]$$

1.5.1 Численный метод

Отрезок разбивается с каким-то шагом

Явная схема

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

h – шаг

$$f(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2$$

Неявная схема

$$y_{n+1} = y_n + h(f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot (x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2) \text{ – квадратное уравнение}$$

x	Пикар (любое приближение)	Явная схема	Неявная схема

До какого x вы добрались

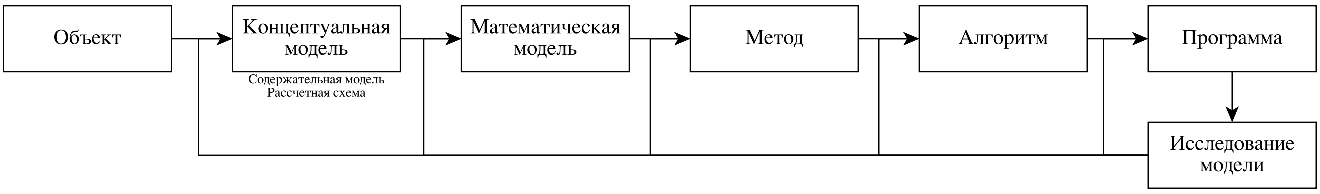
Тема для отчета: ОДУ. Задача Коши. Приближенный метод Пикара. Численный метод Эйлера.

Цель работы: Изучить методы решения задачи Коши для ОДУ, применив приближенный аналитический метод Пикара и численный метод Эйлера в явном и неявном вариантах.

Задание: Решить уравнение, не имеющее аналитического решения

1.6 Схема вычислительного эксперимента

Эксперимент с программой на нашем компьютере.



1.7 Методы получения модели

1. На основе фундаментальных законов природы (сымый хороший)
2. На основе вариационных принципов
3. Построение иерархии моделей (снизу вверх и сверху вниз)
4. Метод аналогий

1.8 Источники погрешности при вычислении

1. Погрешность модели
2. Погрешность исходных данных (неустранимая)
3. Погрешность метода

1.9 Понятие о корректности постановке задачи

Задача называется **корректно поставленной**, если ее решение существует единственно и устойчиво по входным данным. Устойчивость по входных данным означает, что малое изменение входных данных приводит к малому изменению результата. Если это не так, то тогда задача неустойчива.

Задача, в которых формально устойчивы, то есть при большом C с небольшими изменениями δx большие изменения результата. $\delta y = C\delta x$

2 Математические модели основанные на ОДУ

Дифференциальное уравнение – это уравнение, в которое входят производные функции, которые надо найти. Порядок du определяется наивысшим порядком производной. ДУ называется **обыкновенным**, если функция зависит только от одного переменного.

2.1 Сведение дифференциального уравнения n-го порядка к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$u^{(n)} = f(x, u, u', u'', ..., u^{(n-1)})$$

$$u' = u_1$$

$$u'' = u_2$$

$$u_k' = (u^{(k)})' = u^{(k+1)} = u_{k+1}$$

$$\begin{cases} u' = u_1 \\ u_1' = u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1}' = f(x, u, u_1, u_2..u_{n-1}) \end{cases}$$

Система уравнений первого порядка выглядит следующим образом

$$u_k'(x) = f_k(x, u_1, u_2, ..., u_n), k = \overline{1, n}$$

Уравнение n-го порядка содержит n производных констант. Решение с этими константами определяет общее решение. Для выделение частного решения, константы должны быть определены, для этого ставятся дополнительные условия. Если все условия ставятся в одной точке, то это называется **задача Коши**. Если все условия заданы в разных точках, то называется **краевая задача**.

2.2 Задача Коши для ОДУ

2.2.1 Методы решения

1. **Точный метод** – в ряде случаев представляет из себя неявную функцию, тогда для получения зависимости $u(x)$ необходимо применять численные методы (например, поовинного деления).

2. **Приближенный математический метод** – например, метод Пикара.

3. **Численный метод** – универсальный, подходит для тех, у кого нет аналитического решения и для тех, у кого его нет. Получаем только частные решения.

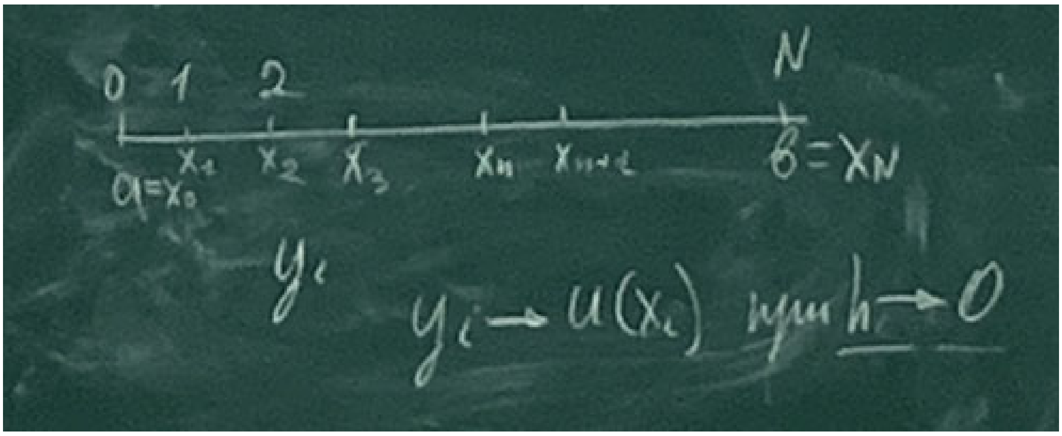
2.2.2 Численные методы решения

Предварительные замечания

Рассматриваем уравнение первого порядка

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(\xi) = \eta \\ a \le x \le b \end{cases}$$

В области интегрирования от a до b вводится сетка



$$\omega = \{x_i : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < x_N\}$$

$$x_n - x_{n-1} = h_n - \text{ шаг}$$
$$h_n = \text{const}$$
$$w_h = \{x_i : x_i = a + i \cdot h, i = \overline{0, N}\}$$

Функция, полученная на выбранной сетке в результате применения численного метода называется **сеточная функция**

Понятие сходимости

Фиксируется некий x.

$$x_{ij}, h \to 0, i \to \infty$$
$$x_i = a + ih$$
$$|y_i - u(x_i)| \to 0, h \to 0$$
$$|y_i - u(x_i)| = O(h^p), h \to 0$$

Сеточная функция имеет p-й порядок точности, если абсолютная величина разности – шаг в степери p.

Как найти решение численным методом

Разложим ряд Тейлора

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{1!}u'_n + \frac{h^2}{2!}u''_n + \frac{h^3}{3!}u'''_n + \dots$$

$$u'_n = f(x_n, u_n)$$

$$u''_n = (u'_n) = \frac{df}{dx}(x,u)\Big|_{x=x_n} = f'_x(x_n, u_n) + f'_u f\Big|_{x=x_n}$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, u_n) - \text{ метод Эйлера}$$

Получим формулы второго порядка точности методом Рунге-Кутта.

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n) + \frac{h_n^2}{2!}u''_n \tag{2.1}$$

$$u''_m = (u_n)' = \frac{df(x,u)}{dx}\Big|_{x_n} = f'_x(x_n, y_n) + f'_y(x_n, y_n) \cdot f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \cdot f(x_n, y_n) + \frac{h_n^2}{2}\Big[f'_x(x_n, y_n) + f'_y(x_n, y_n) \cdot f(x_n, y_n)\Big] \tag{2.2}$$

$$u''_n = \frac{df}{dx} = \frac{f(x_n + \gamma h_n, y_n d\delta h_n) - f(x_n, y_n)}{\Delta x}$$

Подставим в 2.1

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n) + \frac{h_n^2}{2!}\left[\frac{f(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n) - f(x_n, y_n)}{\Delta x}\right] =$$

$$= y_n + h_n\Big[\beta f(x_n, y_n) + \alpha f(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n)\Big] \tag{2.3}$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n\Big\{\beta f(x_n, y_n + \alpha\big[f(x_n, y_n) + f'_x \gamma h_n + f'_y \delta h_n\big]\Big\}$$

$$= y_n + h_n(\alpha + \beta) f(x_n, y_n) + \alpha\gamma h_n^2 f'_x + \alpha\delta y h_n^2 \tag{2.4}$$

Сравним 2.4 и 2.2. Видим

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\gamma = \frac{1}{2} \\ \alpha\delta = \frac{1}{2} f(x_n, y_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ \gamma = \frac{1}{2\alpha} \\ \delta = \frac{1}{2\alpha} f(x_n, y_n) \end{cases}$$

Кончательно подставляя найденные параметры в 2.4 получим рассчетную формулу.

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Big[(1-\alpha) f(x_n, y_n) + \alpha f\Big(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n)\Big) \Big] \tag{2.5}$$

Семейство однопараметрических формул Рунге-Кутта второго порядка

Обычно на практике $\alpha = 1$ или $\frac{1}{2}$, $O(\max h_n^2)$, $O(h^2)$

$\underline{\alpha = 1}$

$$y_{n+1} = y_n + h_n f\Big(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n)\Big)$$

1. $y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n)$
2. $y'_{n+\frac{1}{2}} = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}})$
3. $y_{n+1} = y_n + h_n \cdot y'_{n+\frac{1}{2}}$

2.2.3 Метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h_n f(x_n + \frac{h_2}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h_n f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h_n f(x_n + h_n, y_n + k_3)$$

Обощение формулы на случай двух переменных

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u, v) + y \\ v'(x) = u(x, u, v) + z \\ v(\xi) = v_0 \\ u(\xi) = u_0 \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6},$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4}{6}$$

где

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n, z_n), q_1 = h_n \varphi(x_n, y_n, z_n)$$

$$k_2 = h_n f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{q_1}{2}), q_2 = h_n \varphi(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{q_1}{2})$$

$$k_3 = h_n f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{q_2}{2}), q_3 = h_n \varphi(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{q_2}{2})$$

$$k_4 = h_n f(x_n + h_n, y_n + k_3, z_n + q_3, q_4 = h_n \varphi(x_n + h_n, y_n + k_3, z_n + q_3)$$

2.2.4 Приемущества метода Рунге-Кутта

— Они явные. Для перехода из n в $n+1$ узел надо строго фиксированное количество операций

— Формулы достаточно точные

— Формулы позволяют вести подсчеты с переменным шагом

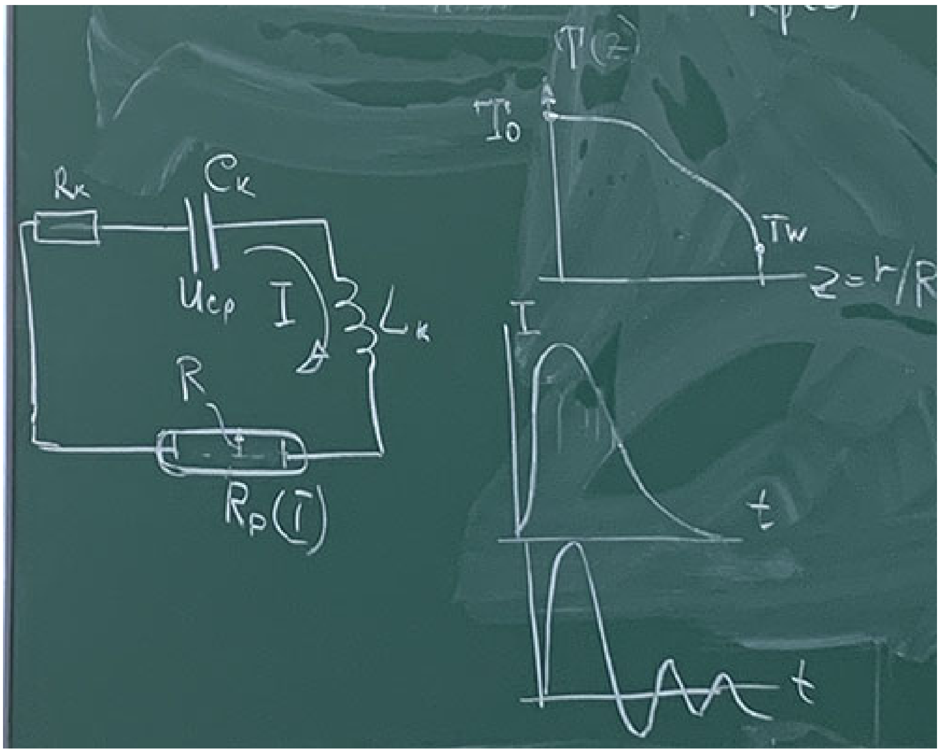
2.2.5 Лабораторная работа 2

Тема: ОДУ. Задача Коши для системы из двух уравнений

Имеется разрядный контур $(R_к, C_к, L_к)$

Начальный заряд конденсатора $U_{0к}$

$$R_p(I) = \frac{l_э}{2\pi R^2 \int_0^1 \sigma(T(z)) z dz}$$



Система уравнений

$$\begin{cases} L_к \frac{dI}{dt} + (R_к + R_p)I - U_c = 0 \\ C_к \frac{dU_c}{dt} = -I \end{cases}$$

$$t = 0, I = I_0, U_c = U_{c0}$$

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{1}{L_к}(U_c ...) \\ \frac{dU_c}{dt} = -\frac{T}{C_к} \end{cases}$$

Метод решения Рунге-Кутт 2-го порядка

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left[(1-\alpha)f(x_n, y_n) + \alpha f(x_n + \frac{h_n}{2\alpha}, y_n + \frac{h_n}{2\alpha} f(x_n, y_n) \right], \alpha = 1 or \frac{1}{2}$$

Метод решения Рунге-Кутт 4-го порядка

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}, z_{n+1} = z_n + \frac{q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4}{6}$$

$$k_i, q_i, i = \overline{1;4} - \text{известные}$$

Входные данные

$T_w = 2000K$

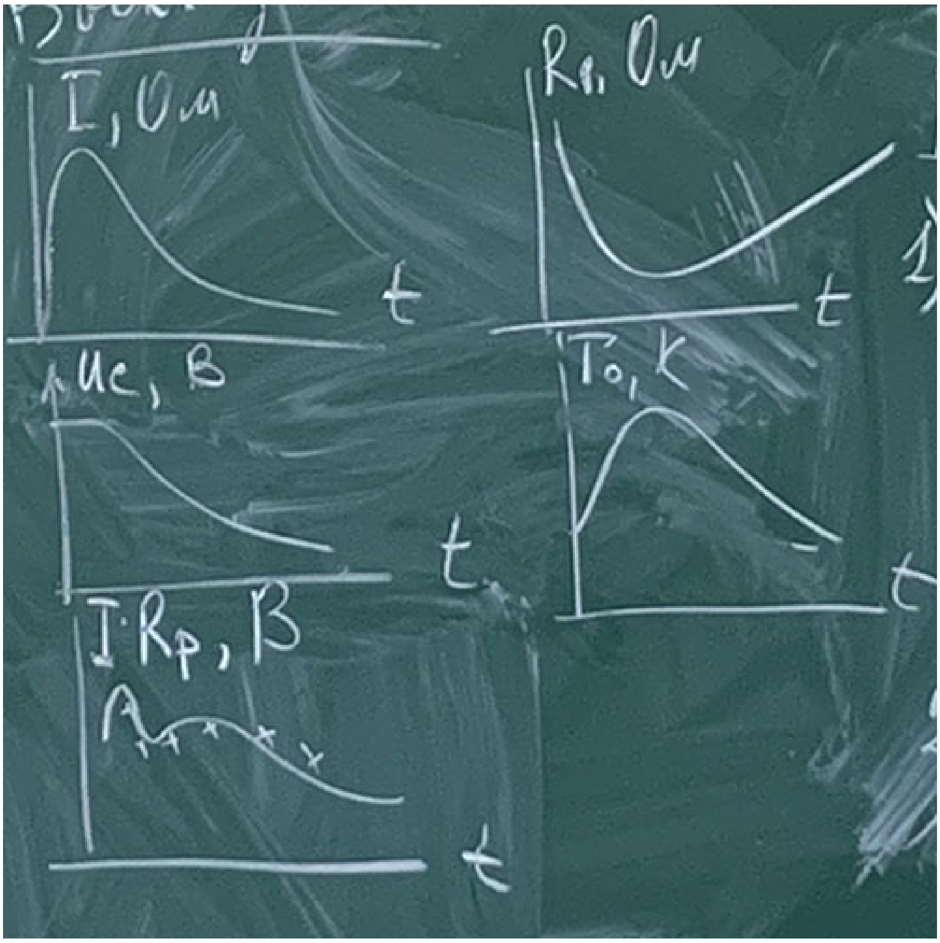
I, A	T_0, K	m
0.5	6400	0.4

T, K	σ, $\frac{1}{\text{О}\cdot\text{см}}$
4000	0.031

$$R =$$
$$L_{э} =$$
$$L_{к} = 187 \cdot 10^{-6}\text{Гн}$$
$$R_{к} = 0.25\text{Ом}$$
$$U_{c0} =$$
$$I_0 = 0.5...3\text{А}$$
$$\tau - \text{Шаг} \sim 1 \cdot 10^{-6}\text{с}$$
$$t_p - \text{Полное время импульса}$$

В интерфейс: $L_{к}, R_{к}, U_{c0}, I_0, \tau, t_p$

Выходные данные



Общий вид задачи

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u, v) \\ v'(t) = \varphi(t, u, v) \end{cases}$$

2.2.6 Оценим погешность методов

Методы второго порядка

$$u'(x) = f(x)$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{fu}{dx} dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$$

$$u_{n+1} = u_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$$

$\alpha = 1$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2})$$

$$R = \frac{x_N - x_0}{24} \cdot h^2 \max_{x_0 \le x \le x_N} |f''(x)|$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big[f(x_n) + f(x_n + h)\Big]$$

$$R = \frac{x_N - x_0}{12} \cdot h^2 \max_{x_0 \le x \le x_N} |f''(x)|$$

Методы четвертого порядка

$$u'(x) = f(x)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left[f(x_n) + 4f(x_n + \frac{h}{2} + f(x_n + h)\right]$$

$$R = \frac{x_N - x_0}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 \max_{x_0 \le x \le x_N} |f^{IV}(x)| = \frac{x_N - x_0}{2880} h^4 \max_{x_0 \le x \le x_N} |f^{IV}(x)|$$

2.2.7 Многошаговые методы (метод Адамса)

Для перехода из x_n в x_{n+1} используются предыдущие шаги $\{x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}...\}$

В качестве примера рассмотрим **метод Адамса**

К некоторому моменту известно $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3}$ (применен метод Рунге-Кутта)

$$u'(x) = f(x, \underbrace{u(x)}_{\text{интегральная кривая}}) \equiv F(x)$$

$$F(x) = F(x_n) + (x - x_n)F(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \\ + (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3})$$

Например,

$$F(x_n, x_{n-1}) = \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = \frac{f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Интегральная форма дифференциального уравнения

$$u_{n+1} = u_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, u(x))dx = u_n + \int_{x_n}^{x_{n+2}} F(x)dx$$

Подставляя $F(x)$, представленного полиномом Ньютона, получим

$$y_{n+1} = y_n + h_n F(x_n) + \frac{1}{2}h_n^2 F(x_n, x_{n+1}) + \frac{1}{6}h_n^2(2h_n + 3h_{n-1})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \\ + \frac{1}{12}h_n^2(3h_n^2 + 8h_n h_{n-1} + 4h_n h_{n-2} + 6h_{n-1}^2 + 6h_{n-1}h_{n-2})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3})$$

где $h_n = x_{n+1} - x_n$, $h_{n-2} = x_{n-1} - x_{n-2}$

Это формула Адамса, у нее четвертый порядок точности. Если $h_n = \mathrm{const} = h$, формула упрощается. Порядок погрешности при постоянном шаге:

$$R \sim \frac{251}{750} h^4 \sim \frac{h^4}{3}$$

Преимущество метода Адамса в том, что для перехода в следующий узел правая часть вычисляется один раз. В то время, как в методе Рунге-Кутта того же порядка точности правую часть надо вычислять 4 раза. Это преимущество нивелируется, тем, что точность метода Адамса ниже. Оценка погрешности показывает, что последняя в 960 раз больше в методе Адамса, чем в методе Рунге-Кутта, поэтому шаг в методе Рунге-Кутта может быть в 5 - 5.5 раз больше. Начальный участок, необходимо посчитать другим методом (то есть надо менять метод).

2.2.8 Оценка погрешности расчета с использованием формулы Рунге-Кутта

Расчет проводится на двух сетках с отличающимся шагом h, mh. Расчет можно провести на узлах, которые совпадают. Проведя расчеты в двух сетках, можно оценить абсолютную погрешность:

$$\Delta y = \frac{y(x,h) - y(x,mh)}{m^p - 1}$$

где p – порядок метода, m – различие сетки

— $p = 1$ – метод Эйлера

— $p = 2$ – метод Рунге-Кутта

— $p = 4$ – метод Рунге-Кутта

— $p = 4$ – метод Адамса

$m > 1$ – разряжение сетки, $m < 1$ – сгущение сетки

Сгущая или разряжая сетку и применяя формулу Рунге-Кутта можно оценить погрешность.

2.2.9 Неявные методы

Метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \qquad + O(h)$$

Метод Трапеций

$$u_{n+1} = u_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, u(x))dx$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\Big] \qquad + O(h)$$

Методы Гира

$$\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \qquad + O(h^2)$$

$$\frac{11}{6}y_{n+1} - 3y_n + \frac{3}{2}y_{n-1} - \frac{1}{3}y_{n-2} = hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \qquad + O(h^3)$$

Метод последовательных приближений

$$\varphi(y) = 0$$

$$y_{n+1}^{(1+1)} = \Psi(y_{n+1}^{(1)})$$

$$y^{(0)} = y_n, |\Psi'| < 1$$

2.3 ОДУ. Краевые задачи

2.3.1 Постановка в общем виде

$$u_k'(x) = f_k(x, u_1, u_2, ..., u_n)$$

$$\varphi_k(u_1(\xi_k), u_2(\xi_k), ..., u_n(\xi_k), k = \overline{1; n}$$

2.3.2 Классификация методов

— Аналитические

— Приближенно-аналитические

  – Коллокаций

  – Галеркина

  – Наименьших квадратов

— Численные

  – Разностные

  – Проекционно-сеточные

2.3.3 Разностный метод. Существование, единственность, сходимость разностного решения к точному

$$u''(x) - p(x)u(x) = f(x)$$

$p(x), f(x)$ – заданные функции. Пусть $p(x) > 0$

$$u(a) = \alpha$$

$$u(b) = \beta$$

$$a \le x \le b$$

$$\omega_n = \{x_n : x_n = a + nh, n = \overline{0, N}\}$$

Получим простейшую разностную схему методом разнстной апроксимации.

$$u''_n = \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} - \frac{1}{12}h^2 u^{IV}(\xi)$$

$$x_{n-1} \le \xi \le x_{n+1}$$

$$\frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} - p_n y_n = f_n,$$

$$p_n = p(x_n), f_n = f(x_n)$$

$$y_0 = \alpha$$
$$y_N = \rho$$

$$n = \overline{1, N-1}$$

$$y_{n-1} - (2 + h^2 p_n) y_n + y_{n+1} = h^2 f_n \tag{2.6}$$

$$z_n = y_n - u_n$$

Покажем, что выписанная разностная схема имеет второй порядок точности. То есть погрешность сеточной функции стремится к нулю

$$O(h^2) \text{ при } h \to 0$$

Получим

$$\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} - \frac{1}{12}h^2 u^{IV}(\xi) - p_n u_n = f_n$$

$$u_{n-1} - (2 + h^2 p_n)u_n + u_{n+1} = \frac{1}{12}h^4 u^{IV}(\xi) + f_n h^2 \tag{2.7}$$

Из 2.6 вычтем 2.7

$$z_{n-1} - (2 + h^2 p_n)z_n + z_{n+1} = -\frac{1}{12}h^4 u^{IV}(\xi)$$

$$\left|(2 + h^2 p_n)z_n\right| = \left|z_{n-1} + z_{n+1} + \frac{1}{12}h^4 u^{IV}(\xi)\right|$$

$$\left|(2 + h^2 p_n)z_n\right| \le \left|z_{n-1}\right| + \left|z_{n+1}\right| + \frac{h^4}{12}\left|u^{IV}(\xi)\right|$$

$$\left|(2 + h^2 p_n)z_m\right| \le 2\left|z_m\right| + \frac{h^4}{12}\left|u^{IV}(\xi)\right|$$

$$\left|z_m\right| \le \frac{h^2}{12|p_n|}\left|u^{IV}(xi)\right| = O(h^2), h \to 0$$

$$\left|z_n\right| \to 0, \text{ при } h \to 0$$

Таким образом разностное решение, полученное по схеме 2.7 при $h \to 0$ сходится к точному решению.

2.3.4 Конструктивный способ

Как найти решение? Методом прогонки.

$$A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -F_n \tag{2.8}$$

$$K_0 y_0 + M_0 y_1 = P_0 \tag{2.9}$$

$$K_N y_N + M_N y_{N-1} = P_N \tag{2.10}$$

$$x = 0, -\lambda \frac{du}{dx} = \alpha$$

$$\frac{y_1 - y_0}{n} = -\frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\frac{y_n - y_{N-1}}{h} = -\frac{\alpha}{\lambda}$$

Основная прогоночная формула

$$y_n = \xi_{n+1} y_{n+1} + \eta_{n+1} \tag{2.11}$$

1 этап Прямой ход

2 этап Обратный ход

$$y_{n-1} = \xi_n y_n + \eta_n$$

Подставим в выражение 2.8.

$$A_n \xi_n y_n + A_n \eta_n - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -F_n$$

$$y_n = \frac{C_n}{B_n - A_n \xi_n} y_{n+1} + \frac{F_n + A_n \eta_n}{B_n - A_n \xi_n}$$

Полученное выражение сравниваем с 2.11.

$$\xi_{n+1} = \frac{C_n}{B_n - A_n \xi_n}, \eta_{n+1} = \frac{F_n + A_n \eta_n}{B_n - A_n \xi_n} \tag{2.12}$$

Чтобы начать вычисление по формуле 2.12 (формула рекурентная) надо знать начальные значения коэффициентов, определяем их с помощью краевого условия 2.9.

$$y_0 = -\frac{M_0}{K_0}y_1 + \frac{P_0}{K_0}$$

С другой стороны из основной прогоночной формулы 2.11

$$y_0 = \xi_1 y_1 + \eta_1$$

Сравнивая две последних формулы, видим

$$\xi_1 = -\frac{M_0}{K_0}, \eta_1 = \frac{P_0}{K_0} \tag{2.13}$$

В качестве примера: Пусть при $x = 0 = x_0, u(a) = \alpha$, то есть $y_0 = \alpha$, Тогда

$$\begin{gathered} \xi_1 = 0 \\ \eta_1 = \alpha \end{gathered}$$

Имея начальное выражение для прогоночных коэффициентов 2.13, переходим к обратному ходу

Чтобы в обратном ходе найти значение y_n надо знать y_N, найдем его.

Из 2.11:

$$\begin{cases} K_n y_n + M_N y_{N-1} = P_N \\ y_{N-1} = \xi_N y_N + \eta_N \end{cases}$$

Искомая y_{N-1}, получим

$$K_N y_N + M_N \xi_N y_N + M_N \eta_N = P_N$$

$$y_N = \frac{P_N - M_N \eta_N}{K_N + M_N \eta_N} \tag{2.14}$$

Резюмируем: метод прогонки содержит два этапа: прямой ход (вычисление коэффициентов) и обратный ход (вычисление самих неизвестных). Прямой ход по формуле 2.13 находятся начальные значения прогоночных коэффициентов, по формуле 2.12 вычисляются массивы прогоночных коэффициентов. Обратный ход: по формуле 2.14 вычисляются значения в последней точке. Далее по основной формуле 2.11 находятся все значения y_n.

2.3.5 Типы краевых условий

I рода

— I рода: $u(1) = \alpha$

— II рода: $u'(a) = \beta$

— III рода: $\gamma u'(a) + \delta u(a) = \varepsilon$

$$\gamma \underbrace{\frac{y_1 - y_0}{h}}_{O(h)} + \delta y_0 = \varepsilon$$

Берем простейшую аппроксимацию: заменяем производную разностью

$$y_0 = \xi_1 y - 1 + \eta_1$$

$$\xi_1 =$$
$$\eta_1 =$$