Теория вероятностей

Власов Павел Александрович

2019

Оглавление

Глава 1

Двойной интеграл

1.1 Площадь плоской фигуры

Пусть D - фигура на плоскости.

Как ввести понятие площади фигуры D?

Если D является треугольником (или прямоугольником) понятие площади очевидно.

Если D является многоугольником, то ее можно разбить на треугольники, а площадь области D определить как сумму состовляющих ее треугольников.

Что делать если D - произвольная фигура

а) Рассмотрим множество многоугольников M, каждый из которых целиком содержится в D.

Обозначим $S_* = \sup S(m)$, где m - многоугольники, $S(m)$ - площадь многоугольника

б) Рассмотрим множество многоугольников M, каждый из которых содержит в себе D.

Обозначим $S^* = \text{suf } S(M)$

Определение Область D на плоскости называется **квадрируемой**, если $\exists$ конечные значения S_*, S^* причем $S_* = S^*$. При этом число $S = S_* = S^*$ называется **площадью области** D

Определение Говорят, что множество D точек плоскости имеет площадь **нуль**, если D можно целиком заключить в многоугольник, сколь угодной площади, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ многоугольник M площади ε такой, что $D \leq M$

Пример:

1) $D = \{A\}$, A - точка

2) $D = \{AB\}$, AB - отрезок

3) Спрямленная (с конечной длиной) кривая

Теорема Пусть D - замкнутая плоская область. Тогда D - квадрируемая граница области Δ. $\Leftrightarrow$ имеет площадь 0. ■

Теорема Пусть α - плоская спрямленная кривая. Тогда α - имеет площадь нуль. ■

Следствие Пусть 1) D - область на плоскости, 2) D ограничена конечным числом спрямленных кривых. Тогда D - квадрируема.

Замечание: В дальнейшем мы будем рассматривать только квадрируемые области

1.2 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

I. **Задача об объеме цилиндрического тела**

Пусть D - область плоскости Oxy

$f\colon D \to R$ - функция определенная на множестве D

$$f(x,y) \geq 0 \quad (x,y) \in D$$

Рассмотрим тело T, которое ограничено плоскостью Oxy, графиком функции $z = f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью, направляющая которой совпадает с гранью D, а образующие параллельны Oz

1) Разобьем область D на пересекающиеся части

$$D = \underset{i=1}{\overset{n}{U}} D_i$$

$$\text{int } D_i \cap \text{int } D_j = \varnothing, \text{ при } i \neq j \ (*)$$

$$\text{int } D_j - \text{множество внутренних точек области } D_i$$

Условие (*) означает, что различные элементы разбиения не имеют общих внутренних точек

2) Выберем точку $M_i \in D_i$ $i = \overline{1;n}$
3) Считая, что размеры подобласти D_i малы, примем $\Delta V_i \approx f(M_i)\Delta S_i$, где $\Delta S_i = S(D_i)$, ΔV_i - объем той части тела T, которая рассматривается под D_i

Тогда объем тела T:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

Эта формула тем точнее, чем меньше размеры D_i, поэтому естественно перейти к пределу

$$V = \lim_{\substack{\max \operatorname{diam}(D_i) \to 0 \\ i=\overline{1,n}}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta S_i,$$

$$\operatorname{diam}(D) = \sup_{M,N \in D} \|\overline{MN}\| - \text{диаметр множества } D$$

II. **Задача о вычислении массы пластины**

Пусть:

1) Пластина занимает область D на плоскости
2) $T(x,y) \geq 0$ - плоскость поверхности материала пластины в точке $M(x,y)$

Нужно найти массу m этой частички

1) Разобьем область D на непересекающей части

$$D = \overset{n}{\underset{i=1}{U}} D_i$$

$$\operatorname{int} D_i \cap \operatorname{int} D_j = \varnothing, i \neq j$$

2) В пределах D_i выберем точку $M_i, i = \overline{1,n}$

3) Считая, что размеры D_i малы, можно принять, что в пределах каждой из оластей D_i плотность пластины меняется незначительно, поэтому во всех точках области D_i плотность $\approx f(M_i)$

   Тогда масса части $D_i: \ \Delta m_i \approx f(M_i)\Delta S_i$, где $\Delta S_i = S(D_i), \ i = \overline{1,m}$

4) **Тогда масса всей пластины**

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta S_i$$

Полученная формула тем точнее, чем меньше размеры D_i, поэтому собственно

$$m = \lim_{\substack{\max \operatorname{diam}(D_i) \to 0 \\ i=\overline{1,n}}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta S_i$$

1.3 Определение свойства двойного интеграла

Пусть D - квадратичная замкнутая плоская область

Определение **Разбиение области** D называется множество $R = \{D_1, ...D_n\}$, где

1) $D = \overset{n}{\underset{i=1}{U}} D_i$

2) $\operatorname{int} D_i \cap \operatorname{int} D_j = \varnothing$, при $i \neq j$

3) D_i - квадрируема, $i = \overline{1,n}$

Определение **Диаметром разбиения** $R = \{D_1, ...D_n\}$ называется число

$$d(R) = \max_{i=\overline{1,n}} \operatorname{diam}(D_i)$$

Пусть D - квадратичная замкнутая область на плоскости Oxy, $f : D \to R$ (f является функцией двух переменных, т.к. D - область на плоскости)

Определение **Двойным интегралом функции f по области D** называется число

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{d(R)\to 0} \sum f(n_i)\Delta S_i, \text{ где}$$

$$R = \{D_1, ...D_n\} \text{ - разбиение области } D$$

$$M_i \in D_i,\ i = \overline{1,n} \text{ - отмеченные точки}$$

$$\Delta S_i = S(D_i)$$

Замечание В определении подразумевается, что указанный предел существует, конечен и не зависит от разбиения R области D и способа выбора отмеченных точек

Определение Функции f, для которых существует $\iint_\Delta f dxdy$, называются **интегрируемыми в D**

Свойства двойного интеграла:

1) $\iint_D 1dxdy = S(D)$

2) Линейность

   Если f, g - интегрируемы в D функции, то

   а) $f \pm g$ интегрируема в D, $\iint_D (f \pm g)dxdy = \iint_D f dxdy \pm \iint_D g dxdy$

   б) $c \cdot f, c = \text{const}$ - интегрируема, $\iint_D c \cdot f dxdy = c \iint_D f dxdy$

3) Аддитивность

   Пусть

   1. D_1, D_2 - плоские квадратичные области
   2. f интегрируема в D_1 и D_2
   3. $\operatorname{int} D_1 \cap \operatorname{int} D_2 = \varnothing$

   Тогда f интегрируема в $D = D_1 \cup D_2$

$$\iint\limits_D f dxdy = \iint\limits_{D_1} f dxdy + \iint\limits_{D_2} f dxdy$$

4) О сохранении интегралом знака функции

Пусть

1. $F(x,y) \geq 0$ в D
2. f - интегрируема в D

тогда

$$\iint\limits_D F(x,y)dxdy \geq 0$$

5) Пусть

1. $f(x,y) \geq g(x,y)$
2. f, g - интегрируемы в D

тогда

$$\iint\limits_D f dxdy \geq \iint\limits_D g dxdy$$

6) Теорема об оценке модуля двойного интеграла

Пусть f интегрируема в D, тогда $|f|$ - интегрируем в D

$$|\iint\limits_D f dxdy| \leq \iint\limits_D |f| dxdy$$

7) Теорема об оценке двойного интеграла (обобщенная теорема)

Пусть

1. f, g - интегрируемы в D
2. $m \leq f(x,y) \leq M$
3. $g(x,y) \geq 0$

тогда

$$m \iint\limits_D g(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq M \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

Следствие Если $g(x,y) \equiv 1$ в D, то получаем "просто"теорема об оценке двойного интеграла

$$m \cdot S \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq M \cdot S, \text{ где} S = S(D)$$

8) Теорема о среднем значении

Определение **Средним значением функции** f **в плоскости** D называется

$$< f >= \frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

Свойство Пусть

1. D - линейно связная замкнутая область (т.е. граница D является связным множеством)
2. f - непрерывна в D

Тогда существует $M_0 \in D$, такая что $f(M_0) =< f >$

9) Обобщенная теорема о среднем значении

Пусть

1. f - непрерывна в D
2. g - интегрируема в D
3. g - знакопостоянна
4. D - линейно связанной множество (если f - непрерывна в D, то f - интегрируема в D)

тогда существует $M_0 \in D$ такая, что

$$\iint\limits_d f(x,y)g(x,y)dxdy = f(M_0) \iint\limits_d g(x,y)dxdy$$

Замечание Свойство (8) является частным случаем свойства (9) для $g(x,y) = 1$