Теория вероятностей

Власов Павел Александрович

2019

Оглавление

Глава 1

Двойной интеграл

1.1 Площадь плоской фигуры

Пусть D - фигура на плоскости.

Как ввести понятие площади фигуры D?

Если D является треугольником (или прямоугольником) понятие площади очевидно.

Если D является многоугольником, то ее можно разбить на треугольники, а площадь области D определить как сумму состовляющих ее треугольников.

Что делать если D - произвольная фигура

а) Рассмотрим множество многоугольников M, каждый из которых целиком содержится в D.
Обозначим $S_* = \sup S(m)$, где m - многоугольники, $S(m)$ - площадь многоугольника

б) Рассмотрим множество многоугольников M, каждый из которых содержит в себе D.
Обозначим $S^* = \text{suf}\ S(M)$

Определение 1.1. *Область D на плоскости называется **квадрируемой**, если $\exists$ конечные значения S_*, S^* причем $S_* = S^*$. При этом число $S = S_* = S^*$ называется **площадью области** D*

Определение 1.2. *Говорят, что множество D точек плоскости имеет площадь **нуль**, если D можно целиком заключить в многоугольник, сколь угодной площади, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ многоугольник M площади ε такой, что $D \leq M$*

Пример:

1) $D = \{A\}$, A - точка

2) $D = \{AB\}$, AB - отрезок

3) Спрямленная (с конечной длиной) кривая

Теорема 1.1. *Пусть D - замкнутая плоская область. Тогда D - квадрируемая граница области Δ. $\Leftrightarrow$ имеет площадь 0.* ■

Теорема 1.2. *Пусть α - плоская спрямленная кривая. Тогда α - имеет площадь нуль.* ■

Следствие Пусть 1) D - область на плоскости, 2) D ограничена конечным числом спрямленных кривых. Тогда D - квадрируема.

Замечание 1.1. *В дальнейшем мы будем рассматривать только квадрируемые области*

1.2 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

I. **Задача об объеме цилиндрического тела**

Пусть D - область плоскости Oxy

$f\colon D \to R$ - функция определенная на множестве D

$$f(x,y) \geq 0 \quad (x,y) \in D$$

Рассмотрим тело T, которое ограничено плоскостью Oxy, графиком функции $z = f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью, направляющая которой совпадает с гранью D, а образующие параллельны Oz

1) Разобьем область D на пересекающиеся части

$$D = \overset{n}{\underset{i=1}{U}} D_i$$

$$\text{int } D_i \cap \text{int } D_j = \varnothing, \text{ при } i \neq j \ (*)$$

$$\text{int } D_j - \text{множество внутренних точек области } D_i$$

Условие (*) означает, что различные элементы разбиения не имеют общих внутренних точек

2) Выберем точку $M_i \in D_i$ $i = \overline{1;n}$
3) Считая, что размеры подобласти D_i малы, примем $\Delta V_i \approx f(M_i)\Delta S_i$, где $\Delta S_i = S(D_i)$, ΔV_i - объем той части тела T, которая рассматривается под D_i

Тогда объем тела T:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

Эта формула тем точнее, чем меньше размеры D_i, поэтому естественно перейти к пределу

$$V = \lim_{\max\limits_{i=\overline{1,n}} \text{diam}(D_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i,$$

$$\text{diam}(D) = \sup_{M,N \in D} \|\overline{MN}\| - \text{диаметр множества } D$$

II. **Задача о вычислении массы пластины**

Пусть:

1) Пластина занимает область D на плоскости
2) $T(x,y) \geq 0$ - плоскость поверхности материала пластины в точке $M(x,y)$

Нужно найти массу m этой частички

1) Разобьем область D на непересекающей части

$$D = \overset{n}{\underset{i=1}{U}} D_i$$

$$\text{int } D_i \cap \text{int } D_j = \varnothing, i \neq j$$

2) В пределах D_i выберем точку $M_i, i = \overline{1,n}$

3) Считая, что размеры D_i малы, можно принять, что в пределах каждой из оластей D_i плотность пластины меняется незначительно, поэтому во всех точках области D_i плотность $\approx f(M_i)$

Тогда масса части $D_i:$ $\Delta m_i \approx f(M_i)\Delta S_i$, где $\Delta S_i = S(D_i)$, $i = \overline{1,m}$

4) **Тогда масса всей пластины**

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta S_i$$

Полученная формула тем точнее, чем меньше размеры D_i, поэтому собственно

$$m = \lim_{\max\limits_{i=\overline{1,n}} \operatorname{diam}(D_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta S_i$$

1.3 Определение свойства двойного интеграла

Пусть D - квадратичная замкнутая плоская область

Определение 1.3. ***Разбиение области*** *D называется множество $R = \{D_1, ...D_n\}$, где*

1) $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$

2) *$int\ D_i \cap int\ D_j = \varnothing$, при $i \neq j$*

3) *D_i - квадрируема, $i = \overline{1,n}$*

Определение 1.4. ***Диаметром разбиения*** *$R = \{D_1, ...D_n\}$ называется число*

$$d(R) = \max_{i=\overline{1,n}} diam(D_i)$$

Пусть D - квадратичная замкнутая область на плоскости Oxy, $f : D \to R$ (f является функцией двух переменных, т.к. D - область на плоскости)

Определение 1.5. ***Двойным интегралом функции*** *f* ***по области*** *D называется число*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{d(R)\to 0} \sum f(n_i) \Delta S_i, \text{ где}$$

$$R = \{D_1, ...D_n\} \text{ - разбиение области } D$$

$$M_i \in D_i,\ i = \overline{1,n} \text{ - отмеченные точки}$$

$$\Delta S_i = S(D_i)$$

Определение 1.6. *В определении подразумевается, что указанный предел существует, конечен и не зависит от разбиения R области D и способа выбора отмеченных точек*

Определение 1.7. *Функции f, для которых существует $\iint_\Delta f dxdy$, называются* ***интегрируемыми в*** *D*

Свойства двойного интеграла:

1) $\iint_D 1dxdy = S(D)$

2) Линейность

   Если f, g - интегрируемы в D функции, то

   а) $f \pm g$ интегрируема в D, $\iint_D (f \pm g)dxdy = \iint_D fdxdy \pm \iint_D gdxdy$

   б) $c \cdot f, c = \text{const}$ - интегрируема, $\iint_D c \cdot fdxdy = c \iint_D fdxdy$

3) Аддитивность

   Пусть

   1. D_1, D_2 - плоские квадратичные области
   2. f интегрируема в D_1 и D_2
   3. $\text{int } D_1 \cap \text{int } D_2 = \varnothing$

Тогда f интегрируема в $D = D_1 \cup D_2$

$$\iint\limits_D f dxdy = \iint\limits_{D_1} f dxdy + \iint\limits_{D_2} f dxdy$$

4) О сохранении интегралом знака функции
   Пусть

   1. $F(x,y) \geq 0$ в D
   2. f - интегрируема в D

   тогда

$$\iint\limits_D F(x,y) dxdy \geq 0$$

5) Пусть

   1. $f(x,y) \geq g(x,y)$
   2. f, g - интегрируемы в D

   тогда

$$\iint\limits_D f dxdy \geq \iint\limits_D g dxdy$$

6) Теорема об оценке модуля двойного интеграла
   Пусть f интегрируема в D, тогда $|f|$ - интегрируем в D

$$|\iint\limits_D f dxdy| \leq \iint\limits_D |f| dxdy$$

7) Теорема об оценке двойного интеграла (обобщенная теорема)
   Пусть

   1. f, g - интегрируемы в D
   2. $m \leq f(x,y) \leq M$
   3. $g(x,y) \geq 0$

   тогда

$$m \iint\limits_D g(x,y) dxdy \leq \iint\limits_D f(x,y) dxdy \leq M \iint\limits_D g(x,y) dxdy$$

   Следствие Если $g(x,y) \equiv 1$ в D, то получаем "просто"теорема об оценке двойного интеграла

$$m \cdot S \leq \iint\limits_D f(x,y) dxdy \leq M \cdot S, \text{ где} S = S(D)$$

8) Теорема о среднем значении

   Определение 1.8. ***Средним значением функции*** f ***в плоскости*** D *называется*

$$< f >= \frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x,y) dxdy$$

   Свойство Пусть

   1. D - линейно связная замкнутая область (т.е. граница D является связным множеством)
   2. f - непрерывна в D

Тогда существует $M_0 \in D$, такая что $f(M_0) = < f >$

9) Обобщенная теорема о среднем значении

   Пусть

   1. f - непрерывна в D
   2. g - интегрируема в D
   3. g - знакопостоянна
   4. D - линейно связанной множество (если f - непрерывна в D, то f - интегрируема в D)

   тогда существует $M_0 \in D$ такая, что

$$\iint\limits_d f(x,y)g(x,y)dxdy = f(M_0)\iint\limits_d g(x,y)dxdy$$

<u>Замечание</u> Свойство (8) является частным случаем свойства (9) для $g(x,y) = 1$

1.4 Повторный интеграл

Определение 1.9. *Повторным интегралом называется выражение* $\int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$, *значение* $I_{повт}$ *которого определяется правилом* $I_{повт} = \int_a^b F(x)dx$, *где* $F(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$, $x \in [a,b], x = const$

Вычислить

$$I_{\text{повт}} = \int_1^{\ln(2)} dx \int_1^{\frac{1}{x}} xe^{xy}dy$$

$$\text{а)} F(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} xe^{xy}dy = e^{xy}\Big|_{y=1}^{y=\frac{1}{x}} = e - e^x$$

$$\text{б)} I_{\text{повт}} = \int_1^{\ln(2)} F(x)dx = \int_1^{\ln(2)} (e - e^x)dx = e(\ln(2) - 1) - e^x\Big|_1^{\ln(2)} = e\ln(2) - 2$$

1.5 Вычисление двойного интеграла

Определение 1.10. *Область D на плоскости Oxy называется y - прав., если любая прямая, параллельная Oy, пересекает границу D не более, чем в двух точках, либо содержит участок границы области D целиком*

Замечание 1.2. *1. y-прав. можно задать в следующем виде:*

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi)2(x)\}$$

2. x - прав. определеяется аналогично

Теорема 1.3. *Пусть*

1. $\exists \iint_D f(x,y)dxdy = I$

2. D является y-прав. и задается соотношением (*)

3. $\forall x \in [a;b] \exists \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy = F(x)$

Тогда

1. $\exists$ повторный интеграл

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) = I_{повт}$$

2. $I = I_{повт}$

Замечание 1.3. *Если область D не является правильной в направлении какой-нибудь из координатных осей, то ее можно разбить на правильные части и воспользоваться свойством аддитивности двойного интеграла*

1.6 Замена переменных в двойном интеграле

Пусть

1. $I = \iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$
2. $\Phi : D_{uv} \to D_{xy}$

$$\Phi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Теорема 1.4. *О замене переменных в двойном инетеграле*
Пусть

1. $D_{xy} = \Phi(D_{uv})$

2. Φ *биективно*

3. Φ *непрерывна и непрерывано дифф. в* D_{uv}

4. $I_\Phi \neq 0$ *в* D_{uv}*, где*

5. f *- интегрируема в* D_{xy}

Тогда

1. $f(x(u,v), y(u,v))|I_\Phi(u,v)|$ *- истина в* D_{uv}

2. $\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v), y(y,v)) \cdot |I_\Phi(u,v)|dudv$

Замечание 1.4. *1. Теорема остается справедливой и в том случае, если условия 2,3,4 нарушаются в отдельных точках области* D_{uv} *или вдоль отдельных кривых, лежащих в* D_{uv} *и имеющих площадь нуль*

1.7 Приложения двойного инетграла

I. **Вычисление площади плоской фигуры**

$$S(D) = \iint_D 1dxdy$$

II. **Вычисление массы пластины**

Пусть

1) Пластина занимает обалсть D на плоскости Oxy
2) $f(x,y)$ - значение плотности материала пластины

Тогда масса пластины

$$M = \iint_D f(x,y)dxdy$$

III. **Вычисление оъема тела**

Пусть

1) Тело T: $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$

Тогда объем тела T можно найти по формуле

$$V(T) = \iint\limits_{D_{xy}} \big[z_2(x, y) - z_1(x, y)\big] dxdy$$

Глава 2

Тройной интеграл

2.1 Понятие кубируемой области

Рассмотрим область $G \subseteq R^3$

Как ввести понятие объема тела, которое занимает эту область? Понятие объема легко ввести для параллелепипеда или, более общо, многогранника в R^3. Что делать, если $G \subseteq R^3$ - произвольная область?

1. Рассмотрим множество многогранников q, целиком содеожащихся в G, и обозначим

$$V_* = \sup_q V(q)$$

2. Рассмотрим множество многогранников Q, целико содержащих в себе G, и обозначим

$$V^* = \inf_Q V(Q)$$

Определение 2.1. *Трехмерная область G называется кубируемой, если $\exists$ конечные значения V_*, V^*, причем $V_* = V^*$. При этом значение $V = V_* = V^*$ называется бъемом области G*

Определение 2.2. *Говорят, что множество точек в R^3 имеет объем нуль, если все точки этого множества можно заключить в многогранник сколь угодно малого объема.*

2.2 Задача о вычислении массы тела

Пусть

1. Тело T занимает область $G \subset R^3$
2. $f(x, y, z) \geq 0$ - значение плотности материала этого тела в точке (x, y, z)

Требуется: Найти массу $m(T)$ тела T

1. Разобьем область G на части:

$$G = U_{i=1}^n G_i, \ \text{int } G_i \cap \text{int } G_j = 0, \ \text{при } i \neq j$$

2. В пределах кажддой из подобластей выберем отмеченную точку $M_i \in G_i, \ i = \overline{1; n}$
3. Считая, что размеры G_i малы:

$$\Delta m_i = m(G_i) \approx f(M_i)\Delta V_i, \ \text{где } \Delta V_i = V(G_i)$$

масса тела, занимающего подобласть G_i

4. Масса тела T тогда:

$$m(T) = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$$

5. Эта формула тем точнее, чем меньше размеры G_i, поэтому естественно перейти к пределу:

$$m(T) = \lim_{\max\limits_i \text{diam} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$$

2.3 Определение тройного интеграла

Пусть

1. $G \subseteq R^3$ - тело
2. $f : G \to R$ - функция

Разоьем область G на части так, как это было сделано в задаче о вычислении массы тела
Обозначим: $R = \{G_1, ..., G_n\}$ - разбиение тела G

Определение 2.3. *Диаметром разбиения R тела G называется число*

$$d(R) = \max_{i=\overline{1;n}} diam\ G_i$$

Определение 2.4. *Тройным интегралом по функции $f(x,y,z)$ по области G называется число*

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \lim_{d(R)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$$

, где $M_i, \Delta V_i$ имеют тот же смысл, что и в задаче о вычислении массы тела

Замечание 2.1. *Если указанный в определении тройного интеграла предел $\exists$ и конечен, то функция f называется интегрируемой в области*

2.3.1 Свойства тройного интеграла

Эти свойства полностью аналогичны свойствам 1 - 9 двойного интеграла; при их записи нужно вместо $f(x,y) \mapsto f(x,y,z)$, $\iint_D f(x,y)dxdy \mapsto \iiint_G f(x,y,z)dxdydz$ $D \mapsto G$.

2.4 Вычисление тройного интеграла

Основная идея - сведение к повторному интегралу

Определение 2.5. *Область $G \subseteq R^3$ называется z-правильной, если любая прямая, параллельная Oz, пересекает границу G не более чем в двух точках или содержит участок границы целиком.*

z-правильная область G можно задать в виде:

$$G = \{(x,y,z) : (x,y) \in D_{xy}, z_1(x,y) \le z \le Z_2(x,y)\}$$

Теорема 2.1. *Пусть*

1. $\exists \iiint_G f(x,y,z)dxdydz$
2. *G является z-прав и задается (*)*
3. *Для каждой фиксированной точки $(x,y) \in D_{xy}$*

$$\exists \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = F(x,y)$$

Тогда

1. *$\exists$ повторный интеграл*

$$I_{повт} = \iint\limits_{D_{xy}} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

2. и $I_{повт} = I$

Замечание 2.2. *Если в условии * сформулированной теоремы область D_{xy} является y-правильной и задается в виде:*

$$D_{xy} = \{(x, y) : a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$$

то

$$\iiint\limits_G f(x, y, z) dxdyd = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz$$

2.5 Замена переменных в тройном итеграле

Теорема 2.2. *Пусть*

1. $G_{xyz} = \Phi(G_{uv\omega})$
2. $\Phi : G_{uv\omega} \to G_{xyz}$

$$\Phi : \begin{cases} x = x(u, v, \omega) \\ y = y(u, v, \omega) \\ z = z(u, v, \omega) \end{cases}$$

3. *Отображение* Φ *биективно*
4. Φ *непрерывно и непрырывно дифференцируемо в* $G_{uv\omega}$
5. $$J_\Phi(u, v, \omega) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_\omega \\ y'_u & y'_v & y'_\omega \\ z'_u & z'_v & z'_\omega \end{vmatrix} \ne 0$$
6. $f(x, y, z)$ *интегрируема в* G_{xyz}

Тогда

$$\iiint\limits_{G_{xyz}} f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_{G_{uv\omega}} f(x(u, v, \omega), y(u, v, \omega), z(u, v, \omega)) |J_\Phi(u, v, \omega)| dudvd\omega$$

2.5.1 Связь цилиндрической и декартовой СК

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\phi) \\ y = \rho \sin(\phi) \\ z = z \end{cases}$$

$$J_{\text{цил}} = \begin{vmatrix} \cos(\phi) & -\rho \sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \rho \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

2.5.2 Связь сферической и декартовой СК

$$\begin{cases} x = r \cos(\Theta) \cos(\phi) \\ y = r \cos(\Theta) \sin(\phi) \\ z = r \sin(\Theta) \end{cases}$$

$$|J_{\text{сф}}| = \cdots = r^2 \cos(\Theta)$$

Глава 3

Определения вероятности

3.1 Случайный эксперимент

Определение 3.1. *Случайным называется эксперимент, результат которого невозможно предсказать.*

1. Подброс монетки

$$\Omega = \{\Gamma, \mathrm{P}\}$$

$$|\Omega| = 2$$

2. Бросают игральную кость

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$|\Omega| = 6$$

3. Бросают монету до первого появления герба

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$|\Omega| = \aleph_0$$

   Омега является счетным множеством, т.е. в нем столько же элементов, сколько существует натуральных чисел.

4. Производят стрельбу по плоской мишени размеры которой 1м x 1м (координаты - точки попадания)

$$\Omega = \{(x, y) : |x| \leq \frac{1}{2}; |y| \leq \frac{1}{2}\}$$

$$|\Omega| = c$$

   Омега имеет можность континуума

Определение 3.2. *Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называется пространством элементов исхода*

Замечание 3.1. *При рассматривании пространства элементов исходов предполагается, что*

1. *Каждый элемент исхода неделим, т.е. не может быть "разложен"на более мелкие исходы*
2. *В результате случайного эксперимента всегда происходит ровно один элемент исхода из Ω*

Определение 3.3. *(Нестрогое) Событием называется (любое) подмножество множества* Ω

Определение 3.4. *Говорят, что в результате случайного эксперимента происходит событие* A*, если в результате этого эксперимента произошел один из входящих в* A *элементов исхода.*

Бросают игральную кость

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Если выпало 2 очко, то наступило A

Определение 3.5. *Событие* A *называется следствием события* B*, если наступление события* B *влечет наступление события* A*, т.е.* $B \subseteq A$

Замечание 3.2. *Любое множество* Ω *содержит в качестве подмножеств* $\varnothing$ *и* Ω *соответствующие события называются невозможным* ($\varnothing$) *и достоверным* (Ω)*. Оба этих события называют несобственными. Все остальные события называют собственными.*

В урне находится 2 красных и 3 синих шара. Из урны извлекают 1 шар

$$A = \{\text{извлеченный шар - зеленый}\} = \varnothing$$

$$B = \{\text{извлеченный шар - красный или синий}\} = \Omega$$

3.2 Операции над событиями

События - множества (подмножества множества Ω) $\Rightarrow \cup, \cap, \overline{a}, \setminus, \Delta$

Определение 3.6. *Суммой событий* $A, B \subseteq \Omega$ *называют событие*

$$A + B = A \cup B$$

Определение 3.7. *Произведением событий* $A, B \subseteq \Omega$ *называют событие*

$$A \cdot B = A \cap B$$

Определение 3.8. $A \setminus B$ *называется разностью событий* A *и* B

Определение 3.9. $\overline{A}$ *называется событием, противоположным* A

3.2.1 Свойства операций над событиями

Смотреть теоретико-множеств. тождества (осно.)

Определение 3.10. *События* $A, B \in \Omega$ *называются несовместными, если* $AB = \varnothing$*. В противоположном случае события* A *и* B *называются совместными.*

Определение 3.11. *События* $A_1, \dots, A_n, \dots$ *называются попарнонесовместимимы, если* $A_i A_j = \varnothing, i \neq j$ *- несовместимыми в совокупности* $A_1 \cdot \dots \cdot A_n = \varnothing$

3.3 Классическое определение вероятности

Пусть

1. $|\Omega| = N < \infty$
2. по условиям сложности эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной исход остальных (в этом случае говорят, что все элементы исхода равновозможны)
3. $A \subseteq \Omega,\ |A| = N_A$

Определение 3.12. *Вероятностью осуществления события* A *называют число*

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

2 раза бросают игральную кость

$$A = \{\text{сумма выпавших очков}\}$$

$$P(A) = ?$$

Решение:
Исход: (x_1, x_2), где x_i - количество выпавших при i-м броске

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}$$

$$|\Omega| = 36 = N$$

$$A = \{(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

$$N_A = |A| = 3$$

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$