

# Теория вероятностей

Власов Павел Александрович

2019

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Двойной интеграл</b>	<b>2</b>
1.1	Площадь плоской фигуры . . . . .	2
1.2	Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла . . . . .	3
1.3	Определение свойства двойного интеграла . . . . .	4
1.4	Повторный интеграл . . . . .	6
1.5	Вычисление двойного интеграла . . . . .	6
1.6	Замена переменных в двойном интеграле . . . . .	7
1.7	Приложения двойного интеграла . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Тройной интеграл</b>	<b>9</b>
2.1	Понятие кубической области . . . . .	9
2.2	Задача о вычислении массы тела . . . . .	9
2.3	Определение тройного интеграла . . . . .	10
2.3.1	Свойства тройного интеграла . . . . .	10
2.4	Вычисление тройного интеграла . . . . .	10
2.5	Замена переменных в тройном интеграле . . . . .	11
2.5.1	Связь цилиндрической и декартовой СК . . . . .	11
2.5.2	Связь сферической и декартовой СК . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Определения вероятности</b>	<b>12</b>
3.1	Случайный эксперимент . . . . .	12
3.2	Операции над событиями . . . . .	13
3.2.1	Свойства операций над событиями . . . . .	13
3.3	Классическое определение вероятности . . . . .	13

# Глава 1

## Двойной интеграл

### 1.1 Площадь плоской фигуры

Пусть  $D$  - фигура на плоскости.

Как ввести понятие площади фигуры  $D$ ?

Если  $D$  является треугольником (или прямоугольником) понятие площади очевидно.

Если  $D$  является многоугольником, то ее можно разбить на треугольники, а площадь области  $D$  определить как сумму составляющих ее треугольников.

Что делать если  $D$  - произвольная фигура

а) Рассмотрим множество многоугольников  $M$ , каждый из которых целиком содержится в  $D$ .

Обозначим  $S_* = \sup S(m)$ , где  $m$  - многоугольники,  $S(m)$  - площадь многоугольника

б) Рассмотрим множество многоугольников  $M$ , каждый из которых содержит в себе  $D$ .

Обозначим  $S^* = \inf S(M)$

**Определение 1.1.** Область  $D$  на плоскости называется **квадрируемой**, если  $\exists$  конечные значения  $S_*$ ,  $S^*$  причем  $S_* = S^*$ . При этом число  $S = S_* = S^*$  называется **площадью области**  $D$

**Определение 1.2.** Говорят, что множество  $D$  точек плоскости имеет площадь **нуль**, если  $D$  можно целиком заключить в многоугольник, сколь угодно площади, т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  многоугольник  $M$  площади  $\varepsilon$  такой, что  $D \subseteq M$

**Пример:**

1)  $D = \{A\}$ ,  $A$  - точка

2)  $D = \{AB\}$ ,  $AB$  - отрезок

3) Спряженная (с конечной длиной) кривая

**Теорема 1.1.** Пусть  $D$  - замкнутая плоская область. Тогда  $D$  - квадрируемая граница области  $\Delta$ .  $\Leftrightarrow$  имеет площадь 0. ■

**Теорема 1.2.** Пусть  $\alpha$  - плоская спряженная кривая. Тогда  $\alpha$  - имеет площадь нуль. ■

Следствие Пусть 1)  $D$  - область на плоскости, 2)  $D$  ограничена конечным числом спряженных кривых. Тогда  $D$  - квадрируема.

**Замечание 1.1.** В дальнейшем мы будем рассматривать только квадрируемые области

## 1.2 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

### I. Задача об объеме цилиндрического тела

Пусть  $D$  - область плоскости  $Oxy$

$f: D \rightarrow R$  - функция определенная на множестве  $D$

$$f(x, y) \geq 0 \quad (x, y) \in D$$

Рассмотрим тело  $T$ , которое ограничено плоскостью  $Oxy$ , графиком функции  $z = f(x, y)$  и цилиндрической поверхностью, направляющая которой совпадает с гранью  $D$ , а образующие параллельны  $Oz$

1) Разобьем область  $D$  на пересекающиеся части

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$$

$$\text{int } D_i \cap \text{int } D_j = \emptyset, \text{ при } i \neq j \quad (*)$$

$\text{int } D_j$  - множество внутренних точек области  $D_i$

Условие  $(*)$  означает, что различные элементы разбиения не имеют общих внутренних точек

2) Выберем точку  $M_i \in D_i \quad i = \overline{1; n}$

3) Считая, что размеры подобласти  $D_i$  малы, примем  $\Delta V_i \approx f(M_i) \Delta S_i$ , где  $\Delta S_i = S(D_i)$ ,  $\Delta V_i$  - объем той части тела  $T$ , которая рассматривается под  $D_i$

Тогда объем тела  $T$ :

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$$

Эта формула тем точнее, чем меньше размеры  $D_i$ , поэтому естественно перейти к пределу

$$V = \lim_{\substack{\max_{i=\overline{1, n}} \text{diam}(D_i) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i,$$

$$\text{diam}(D) = \sup_{M, N \in D} \|\overline{MN}\| - \text{диаметр множества } D$$

### II. Задача о вычислении массы пластины

Пусть:

1) Пластина занимает область  $D$  на плоскости

2)  $T(x, y) \geq 0$  - плоскость поверхности материала пластины в точке  $M(x, y)$

Нужно найти массу  $m$  этой частички

1) Разобьем область  $D$  на непересекающей части

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$$

$$\text{int } D_i \cap \text{int } D_j = \emptyset, i \neq j$$

2) В пределах  $D_i$  выберем точку  $M_i, i = \overline{1, n}$

3) Считая, что размеры  $D_i$  малы, можно принять, что в пределах каждой из областей  $D_i$  плотность пластины меняется незначительно, поэтому во всех точках области  $D_i$  плотность  $\approx f(M_i)$

Тогда масса части  $D_i$ :  $\Delta m_i \approx f(M_i) \Delta S_i$ , где  $\Delta S_i = S(D_i), i = \overline{1, n}$

4) Тогда масса всей пластины

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$$

Полученная формула тем точнее, чем меньше размеры  $D_i$ , поэтому собственно

$$m = \lim_{\max_{i=1,n} \text{diam}(D_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$$

### 1.3 Определение свойства двойного интеграла

Пусть  $D$  - квадратичная замкнутая плоская область

**Определение 1.3.** Разбиение области  $D$  называется множеством  $R = \{D_1, \dots, D_n\}$ , где

- 1)  $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$
- 2)  $\text{int } D_i \cap \text{int } D_j = \emptyset$ , при  $i \neq j$
- 3)  $D_i$  - квадратируема,  $i = \overline{1, n}$

**Определение 1.4.** Диаметром разбиения  $R = \{D_1, \dots, D_n\}$  называется число

$$d(R) = \max_{i=1,n} \text{diam}(D_i)$$

Пусть  $D$  - квадратичная замкнутая область на плоскости  $Oxy$ ,  $f: D \rightarrow R$  ( $f$  является функцией двух переменных, т.к.  $D$  - область на плоскости)

**Определение 1.5.** Двойным интегралом функции  $f$  по области  $D$  называется число

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{d(R) \rightarrow 0} \sum f(n_i) \Delta S_i, \text{ где}$$

$R = \{D_1, \dots, D_n\}$  - разбиение области  $D$

$M_i \in D_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  - отмеченные точки

$$\Delta S_i = S(D_i)$$

**Определение 1.6.** В определении подразумевается, что указанный предел существует, конечен и не зависит от разбиения  $R$  области  $D$  и способа выбора отмеченных точек

**Определение 1.7.** Функции  $f$ , для которых существует  $\iint_D f dx dy$ , называются **интегрируемыми в  $D$**

**Свойства двойного интеграла:**

1)  $\iint_D 1 dx dy = S(D)$

2) Линейность

Если  $f, g$  - интегрируемы в  $D$  функции, то

а)  $f \pm g$  интегрируема в  $D$ ,  $\iint_D (f \pm g) dx dy = \iint_D f dx dy \pm \iint_D g dx dy$

б)  $c \cdot f$ ,  $c = \text{const}$  - интегрируема,  $\iint_D c \cdot f dx dy = c \iint_D f dx dy$

3) Аддитивность

Пусть

1.  $D_1, D_2$  - плоские квадратичные области

2.  $f$  интегрируема в  $D_1$  и  $D_2$

3.  $\text{int } D_1 \cap \text{int } D_2 = \emptyset$

Тогда  $f$  интегрируема в  $D = D_1 \cup D_2$

$$\iint_D f dx dy = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy$$

4) О сохранении интегралом знака функции

Пусть

1.  $F(x, y) \geq 0$  в  $D$
2.  $f$  - интегрируема в  $D$

тогда

$$\iint_D F(x, y) dx dy \geq 0$$

5) Пусть

1.  $f(x, y) \geq g(x, y)$
2.  $f, g$  - интегрируемы в  $D$

тогда

$$\iint_D f dx dy \geq \iint_D g dx dy$$

6) Теорема об оценке модуля двойного интеграла

Пусть  $f$  интегрируема в  $D$ , тогда  $|f|$  - интегрируем в  $D$

$$|\iint_D f dx dy| \leq \iint_D |f| dx dy$$

7) Теорема об оценке двойного интеграла (обобщенная теорема)

Пусть

1.  $f, g$  - интегрируемы в  $D$
2.  $m \leq f(x, y) \leq M$
3.  $g(x, y) \geq 0$

тогда

$$m \iint_D g(x, y) dx dy \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \iint_D g(x, y) dx dy$$

Следствие Если  $g(x, y) \equiv 1$  в  $D$ , то получаем "просто" теорема об оценке двойного интеграла

$$m \cdot S \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot S, \text{ где } S = S(D)$$

8) Теорема о среднем значении

**Определение 1.8.** Средним значением функции  $f$  в плоскости  $D$  называется

$$\langle f \rangle = \frac{1}{S(D)} \iint_D f(x, y) dx dy$$

Свойство Пусть

1.  $D$  - линейно связная замкнутая область (т.е. граница  $D$  является связным множеством)
2.  $f$  - непрерывна в  $D$

Тогда существует  $M_0 \in D$ , такая что  $f(M_0) = \langle f \rangle$

#### 9) Обобщенная теорема о среднем значении

Пусть

1.  $f$  - непрерывна в  $D$
2.  $g$  - интегрируема в  $D$
3.  $g$  - знакопостоянна
4.  $D$  - линейно связанное множество (если  $f$  - непрерывна в  $D$ , то  $f$  - интегрируема в  $D$ )

тогда существует  $M_0 \in D$  такая, что

$$\iint_D f(x, y)g(x, y)dx dy = f(M_0) \iint_D g(x, y)dx dy$$

Замечание Свойство (8) является частным случаем свойства (9) для  $g(x, y) = 1$

## 1.4 Повторный интеграл

**Определение 1.9.** Повторным интегралом называется выражение  $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$ , значение  $I_{\text{повт}}$  которого определяется правилом  $I_{\text{повт}} = \int_a^b F(x)dx$ , где  $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $x = \text{const}$

Вычислить

$$I_{\text{повт}} = \int_1^{\ln(2)} dx \int_1^{\frac{1}{x}} xe^{xy} dy$$

$$\text{а) } F(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} xe^{xy} dy = e^{xy} \Big|_{y=1}^{y=\frac{1}{x}} = e - e^x$$

$$\text{б) } I_{\text{повт}} = \int_1^{\ln(2)} F(x)dx = \int_1^{\ln(2)} (e - e^x)dx = e(\ln(2) - 1) - e^x \Big|_1^{\ln(2)} = e \ln(2) - 2$$

## 1.5 Вычисление двойного интеграла

**Определение 1.10.** Область  $D$  на плоскости  $Oxy$  называется  $y$  - прав., если любая прямая, параллельная  $Oy$ , пересекает границу  $D$  не более, чем в двух точках, либо содержит участок границы области  $D$  целиком

**Замечание 1.2.** 1.  $y$ -прав. можно задать в следующем виде:

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

2.  $x$  - прав. определяется аналогично

**Теорема 1.3.** Пусть

1.  $\exists \iint_D f(x, y)dx dy = I$
2.  $D$  является  $y$ -прав. и задается соотношением (\*)
3.  $\forall x \in [a; b] \exists \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy = F(x)$

Тогда

1.  $\exists$  повторный интеграл

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy = I_{\text{повт}}$$

**Замечание 1.3.** Если область  $D$  не является правильной в направлении какой-нибудь из координатных осей, то ее можно разбить на правильные части и воспользоваться свойством аддитивности двойного интеграла

## 1.6 Замена переменных в двойном интеграле

Пусть

1.  $I = \iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy$
2.  $\varphi : D_{uv} \rightarrow D_{xy}$

$$\varphi : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

**Теорема 1.4.** О замене переменных в двойном интеграле

Пусть

1.  $D_{xy} = \varphi(D_{uv})$
2.  $\varphi$  биективно
3.  $\varphi$  непрерывна и непрерывно дифф. в  $D_{uv}$
4.  $I_\varphi \neq 0$  в  $D_{uv}$ , где
5.  $f$  - интегрируема в  $D_{xy}$

Тогда

1.  $f(x(u, v), y(u, v)) |I_\varphi(u, v)|$  - истина в  $D_{uv}$
2.  $\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |I_\varphi(u, v)| du dv$

**Замечание 1.4.** 1. Теорема остается справедливой и в том случае, если условия 2, 3, 4 нарушаются в отдельных точках области  $D_{uv}$  или вдоль отдельных кривых, лежащих в  $D_{uv}$  и имеющих площадь нуль

## 1.7 Приложения двойного интеграла

### I. Вычисление площади плоской фигуры

$$S(D) = \iint_D 1 dx dy$$

### II. Вычисление массы пластины

Пусть

- 1) Пластина занимает область  $D$  на плоскости  $Oxy$
- 2)  $f(x, y)$  - значение плотности материала пластины

Тогда масса пластины

$$M = \iint_D f(x, y) dx dy$$

### III. Вычисление объема тела

Пусть



1) Тело  $T$ :  $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$

Тогда объем тела  $T$  можно найти по формуле

$$V(T) = \iint_{D_{xy}} [z_2(x, y) - z_1(x, y)] dx dy$$

## Глава 2

# Тройной интеграл

### 2.1 Понятие кубируемой области

Рассмотрим область  $G \subseteq R^3$

Как ввести понятие объема тела, которое занимает эту область? Понятие объема легко ввести для параллелепипеда или, более общо, многогранника в  $R^3$ . Что делать, если  $G \subseteq R^3$  - произвольная область?

1. Рассмотрим множество многогранников  $q$ , целиком содеожащихся в  $G$ , и обозначим

$$V_* = \sup_q V(q)$$

2. Рассмотрим множество многогранников  $Q$ , целиком содержащих в себе  $G$ , и обозначим

$$V^* = \inf_Q V(Q)$$

**Определение 2.1.** Трехмерная область  $G$  называется кубируемой, если  $\exists$  конечные значения  $V_*, V^*$ , причем  $V_* = V^*$ . При этом значение  $V = V_* = V^*$  называется бъемом области  $G$

**Определение 2.2.** Говорят, что множество точек в  $R^3$  имеет бъем нуль, если все точки этого множества можно заключить в многогранник сколь угодно малого объема.

### 2.2 Задача о вычислении массы тела

Пусть

1. Тело  $T$  занимает область  $G \subset R^3$
2.  $f(x, y, z) \geq 0$  - значение плотности материала этого тела в точке  $(x, y, z)$

Требуется: Найти массу  $m(T)$  тела  $T$

1. Разобьем область  $G$  на части:

$$G = \bigcup_{i=1}^n G_i, \text{ int } G_i \cap \text{int } G_j = \emptyset, \text{ при } i \neq j$$

2. В пределах каждой из подобластей выберем отмеченную точку  $M_i \in G_i, i = \overline{1; n}$
3. Считая, что размеры  $G_i$  малы:

$$\Delta m_i = m(G_i) \approx f(M_i) \Delta V_i, \text{ где } \Delta V_i = V(G_i)$$

масса тела, занимающего подобласть  $G_i$

4. Масса тела  $T$  тогда:

$$m(T) = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta V_i$$

5. Эта формула тем точнее, чем меньше размеры  $G_i$ , поэтому естественно перейти к пределу:

$$m(T) = \lim_{\max_i \text{diam} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta V_i$$

## 2.3 Определение тройного интеграла

Пусть

1.  $G \subseteq R^3$  - тело
2.  $f: G \rightarrow R$  - функция

Разобьем область  $G$  на части так, как это было сделано в задаче о вычислении массы тела  
Обозначим:  $R = \{G_1, \dots, G_n\}$  - разбиение тела  $G$

**Определение 2.3.** Диаметр разбиения  $R$  тела  $G$  называется числом

$$d(R) = \max_{i=1;n} \text{diam } G_i$$

**Определение 2.4.** Тройным интегралом по функции  $f(x, y, z)$  по области  $G$  называется число

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{d(R) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta V_i$$

, где  $M_i, \Delta V_i$  имеют тот же смысл, что и в задаче о вычислении массы тела

**Замечание 2.1.** Если указанный в определении тройного интеграла предел  $\exists$  и конечен, то функция  $f$  называется интегрируемой в области

### 2.3.1 Свойства тройного интеграла

Эти свойства полностью аналогичны свойствам 1 - 9 двойного интеграла; при их записи нужно вместо  $f(x, y) \mapsto f(x, y, z)$ ,  $\iint_D f(x, y) dx dy \mapsto \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$   $D \mapsto G$ .

## 2.4 Вычисление тройного интеграла

Основная идея - сведение к повторному интегралу

**Определение 2.5.** Область  $G \subseteq R^3$  называется  $z$ -правильной, если любая прямая, параллельная  $Oz$ , пересекает границу  $G$  не более чем в двух точках или содержит участок границы целиком.

$z$ -правильная область  $G$  можно задать в виде:

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

**Теорема 2.1.** Пусть

1.  $\exists \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$
2.  $G$  является  $z$ -прав и задается (\*)
3. Для каждой фиксированной точки  $(x, y) \in D_{xy}$

$$\exists \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = F(x, y)$$

Тогда

1.  $\exists$  повторный интеграл

$$I_{\text{повт}} = \iint_{D_{xy}} F(x, y) dx dy = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

2. и  $I_{\text{нов}} = I$

**Замечание 2.2.** Если в условии \* сформулированной теоремы область  $D_{xy}$  является у-правильной и задается в виде:

$$D_{xy} = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

то

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

## 2.5 Замена переменных в тройном интеграле

**Теорема 2.2.** Пусть

1.  $G_{xyz} = \varphi(G_{uvw})$

2.  $\varphi : G_{uvw} \rightarrow G_{xyz}$

$$\varphi : \begin{cases} x = x(u, v, \omega) \\ y = y(u, v, \omega) \\ z = z(u, v, \omega) \end{cases}$$

3. Отображение  $\varphi$  биективно

4.  $\varphi$  непрерывно и непрерывно дифференцируемо в  $G_{uvw}$

5.

$$J_\varphi(u, v, \omega) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_\omega \\ y'_u & y'_v & y'_\omega \\ z'_u & z'_v & z'_\omega \end{vmatrix} \neq 0$$

6.  $f(x, y, z)$  интегрируема в  $G_{xyz}$

Тогда

$$\iiint_{G_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G_{uvw}} f(x(u, v, \omega), y(u, v, \omega), z(u, v, \omega)) |J_\varphi(u, v, \omega)| du dv d\omega$$

### 2.5.1 Связь цилиндрической и декартовой СК

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\varphi) \\ z = z \end{cases}$$

$$J_{\text{цил}} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

### 2.5.2 Связь сферической и декартовой СК

$$\begin{cases} x = r \cos(\Theta) \cos(\varphi) \\ y = r \cos(\Theta) \sin(\varphi) \\ z = r \sin(\Theta) \end{cases}$$

$$|J_{\text{сф}}| = \dots = r^2 \cos(\Theta)$$

## Глава 3

# Определения вероятности

### 3.1 Случайный эксперимент

**Определение 3.1.** *Случайным называется эксперимент, результат которого невозможно предсказать.*

1. Подброс монетки

$$\Omega = \{\Gamma, P\}$$

$$|\Omega| = 2$$

2. Бросают игральную кость

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$|\Omega| = 6$$

3. Бросают монету до первого появления герба

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$|\Omega| = \aleph_0$$

Омега является счетным множеством, т.е. в нем столько же элементов, сколько существует натуральных чисел.

4. Производят стрельбу по плоской мишени размеры которой 1м x 1м (координаты - точки попадания)

$$\Omega = \{(x, y) : |x| \leq \frac{1}{2}; |y| \leq \frac{1}{2}\}$$

$$|\Omega| = c$$

Омега имеет возможность континуума

**Определение 3.2.** *Множество  $\Omega$  всех исходов данного случайного эксперимента называется пространством элементов исхода*

**Замечание 3.1.** *При рассматривании пространства элементов исходов предполагается, что*

1. *Каждый элемент исхода неделим, т.е. не может быть "разложен" на более мелкие исходы*
2. *В результате случайного эксперимента всегда происходит ровно один элемент исхода из  $\Omega$*

**Определение 3.3.** (Нестрогое) Событием называется (любое) подмножество множества  $\Omega$

**Определение 3.4.** Говорят, что в результате случайного эксперимента происходит событие  $A$ , если в результате этого эксперимента произошел один из входящих в  $A$  элементов исхода.

Бросают игральную кость

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Если выпало 2 очко, то наступило  $A$

**Определение 3.5.** Событие  $A$  называется следствием события  $B$ , если наступление события  $B$  влечет наступление события  $A$ , т.е.  $B \subseteq A$

**Замечание 3.2.** Любое множество  $\Omega$  содержит в качестве подмножеств  $\emptyset$  и  $\Omega$  соответствующие события называются невозможным ( $\emptyset$ ) и достоверным ( $\Omega$ ). Оба этих события называют несобственными. Все остальные события называют собственными.

В урне находится 2 красных и 3 синих шара. Из урны извлекают 1 шар

$$A = \{\text{извлеченный шар - зеленый}\} = \emptyset$$

$$B = \{\text{извлеченный шар - красный или синий}\} = \Omega$$

## 3.2 Операции над событиями

События - множества (подмножества множества  $\Omega$ )  $\Rightarrow \cup, \cap, \bar{A}, \setminus, \Delta$

**Определение 3.6.** Суммой событий  $A, B \subseteq \Omega$  называют событие

$$A + B = A \cup B$$

**Определение 3.7.** Произведением событий  $A, B \subseteq \Omega$  называют событие

$$A \cdot B = A \cap B$$

**Определение 3.8.**  $A \setminus B$  называется разностью событий  $A$  и  $B$

**Определение 3.9.**  $\bar{A}$  называется событием, противоположным  $A$

### 3.2.1 Свойства операций над событиями

Смотреть теоретико-множеств. тождества (осно.)

**Определение 3.10.** События  $A, B \in \Omega$  называются несовместными, если  $AB = \emptyset$ . В противоположном случае события  $A$  и  $B$  называются совместными.

**Определение 3.11.** События  $A_1, \dots, A_n, \dots$  называются попарно несовместимыми, если  $A_i A_j = \emptyset, i \neq j$  - несовместимыми в совокупности  $A_1 \cdot \dots \cdot A_n = \emptyset$

## 3.3 Классическое определение вероятности

Пусть

1.  $|\Omega| = N < \infty$
2. по условиям сложности эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной исход остальных (в этом случае говорят, что все элементы исхода равновозможны)
3.  $A \subseteq \Omega, |A| = N_A$

**Определение 3.12.** Вероятностью осуществления события  $A$  называют число

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

2 раза бросают игральную кость

$$A = \{\text{сумма выпавших очков}\}$$

$$P(A) = ?$$

Решение:

Исход:  $(x_1, x_2)$ , где  $x_i$  - количество выпавших при  $i$ -м броске

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$$

$$|\Omega| = 36 = N$$

$$A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$N_A = |A| = 3$$

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$