Теория вероятностей

Власов Павел Александрович

2019

Оглавление

Глава 1

Двойной интеграл

1.1 Площадь плоской фигуры

Пусть D - фигура на плоскости.

Как ввести понятие площади фигуры D?

Если D является треугольником (или прямоугольником) понятие площади очевидно.

Если D является многоугольником, то ее можно разбить на треугольники, а площадь области D определить как сумму состовляющих ее треугольников.

Что делать если D - произвольная фигура

а) Рассмотрим множество многоугольников M, каждый из которых целиком содержится в D. Обозначим $S_* = \sup S(m)$, где m - многоугольники, $S(m)$ - площадь многоугольника

б) Рассмотрим множество многоугольников M, каждый из которых содержит в себе D. Обозначим $S^* = \text{suf } S(M)$

Определение 1.1. *Область D на плоскости называется **квадрируемой**, если $\exists$ конечные значения S_*, S^* причем $S_* = S^*$. При этом число $S = S_* = S^*$ называется **площадью области** D*

Определение 1.2. *Говорят, что множество D точек плоскости имеет площадь **нуль**, если D можно целиком заключить в многоугольник, сколь угодной площади, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ многоугольник M площади ε такой, что $D \leq M$*

Пример:

1) $D = \{A\}$, A - точка

2) $D = \{AB\}$, AB - отрезок

3) Спрямленная (с конечной длиной) кривая

Теорема 1.1. *Пусть D - замкнутая плоская область. Тогда D - квадрируемая граница области Δ. $\Leftrightarrow$ имеет площадь 0.* ■

Теорема 1.2. *Пусть α - плоская спрямленная кривая. Тогда α - имеет площадь нуль.* ■

Следствие Пусть 1) D - область на плоскости, 2) D ограничена конечным числом спрямленных кривых. Тогда D - квадрируема.

Замечание 1.1. *В дальнейшем мы будем рассматривать только квадрируемые области*

1.2 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

I. **Задача об объеме цилиндрического тела**

Пусть D - область плоскости Oxy

$f\colon D \to R$ - функция определенная на множестве D

$$f(x,y) \geq 0 \quad (x,y) \in D$$

Рассмотрим тело T, которое ограничено плоскостью Oxy, графиком функции $z = f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью, направляющая которой совпадает с гранью D, а образующие параллельны Oz

1) Разобьем область D на пересекающиеся части

$$D = \overset{n}{\underset{i=1}{U}} D_i$$

$$\text{int } D_i \cap \text{int } D_j = \varnothing, \text{ при } i \neq j \ (*)$$

$$\text{int } D_j - \text{множество внутренних точек области } D_i$$

Условие (*) означает, что различные элементы разбиения не имеют общих внутренних точек

2) Выберем точку $M_i \in D_i$ $i = \overline{1;n}$

3) Считая, что размеры подобласти D_i малы, примем $\Delta V_i \approx f(M_i)\Delta S_i$, где $\Delta S_i = S(D_i)$, ΔV_i - объем той части тела T, которая рассматривается под D_i

Тогда объем тела T:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

Эта формула тем точнее, чем меньше размеры D_i, поэтому естественно перейти к пределу

$$V = \lim_{\max\limits_{i=\overline{1,n}} \text{diam}(D_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i,$$

$$\text{diam}(D) = \sup_{M,N \in D} \|\overline{MN}\| - \text{диаметр множества } D$$

II. **Задача о вычислении массы пластины**

Пусть:

1) Пластина занимает область D на плоскости
2) $T(x,y) \geq 0$ - плоскость поверхности материала пластины в точке $M(x,y)$

Нужно найти массу m этой частички

1) Разобьем область D на непересекающей части

$$D = \overset{n}{\underset{i=1}{U}} D_i$$

$$\text{int } D_i \cap \text{int } D_j = \varnothing, i \neq j$$

2) В пределах D_i выберем точку $M_i, i = \overline{1,n}$

3) Считая, что размеры D_i малы, можно принять, что в пределах каждой из оластей D_i плотность пластины меняется незначительно, поэтому во всех точках области D_i плотность $\approx f(M_i)$

Тогда масса части $D_i:$ $\Delta m_i \approx f(M_i)\Delta S_i$, где $\Delta S_i = S(D_i)$, $i = \overline{1,m}$

4) **Тогда масса всей пластины**

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

Полученная формула тем точнее, чем меньше размеры D_i, поэтому собственно

$$m = \lim_{\max\limits_{i=\overline{1,n}} \operatorname{diam}(D_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

1.3 Определение свойства двойного интеграла

Пусть D - квадратичная замкнутая плоская область

Определение 1.3. ***Разбиение области*** *D называется множество $R = \{D_1, ...D_n\}$, где*

1) $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$

2) $int\ D_i \cap int\ D_j = \varnothing$, при $i \neq j$

3) D_i - квадрируема, $i = \overline{1,n}$

Определение 1.4. ***Диаметром разбиения*** *$R = \{D_1, ...D_n\}$ называется число*

$$d(R) = \underset{i=\overline{1,n}}{max}\, diam(D_i)$$

Пусть D - квадратичная замкнутая область на плоскости Oxy, $f : D \to R$ (f является функцией двух переменных, т.к. D - область на плоскости)

Определение 1.5. ***Двойным интегралом функции f по области*** *D называется число*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{d(R)\to 0} \sum f(n_i)\Delta S_i, \ \text{где}$$

$$R = \{D_1, ...D_n\} \text{ - разбиение области } D$$

$$M_i \in D_i, \ i = \overline{1,n} \text{ - отмеченные точки}$$

$$\Delta S_i = S(D_i)$$

Определение 1.6. *В определении подразумевается, что указанный предел существует, конечен и не зависит от разбиения R области D и способа выбора отмеченных точек*

Определение 1.7. *Функции f, для которых существует $\iint_\Delta f dxdy$, называются* ***интегрируемыми в*** *D*

Свойства двойного интеграла:

1) $\iint_D 1 dxdy = S(D)$

2) Линейность

   Если f, g - интегрируемы в D функции, то

   а) $f \pm g$ интегрируема в D, $\iint_D (f \pm g)dxdy = \iint_D f dxdy \pm \iint_D g dxdy$

   б) $c \cdot f, c = \text{const}$ - интегрируема, $\iint_D c \cdot f dxdy = c \iint_D f dxdy$

3) Аддитивность

   Пусть

   1. D_1, D_2 - плоские квадратичные области
   2. f интегрируема в D_1 и D_2
   3. $\text{int } D_1 \cap \text{int } D_2 = \varnothing$

Тогда f интегрируема в $D = D_1 \cup D_2$

$$\iint\limits_D f dxdy = \iint\limits_{D_1} f dxdy + \iint\limits_{D_2} f dxdy$$

4) О сохранении интегралом знака функции

   Пусть

   1. $F(x,y) \geq 0$ в D
   2. f - интегрируема в D

   тогда

$$\iint\limits_D F(x,y)dxdy \geq 0$$

5) Пусть

   1. $f(x,y) \geq g(x,y)$
   2. f, g - интегрируемы в D

   тогда

$$\iint\limits_D f dxdy \geq \iint\limits_D g dxdy$$

6) Теорема об оценке модуля двойного интеграла

   Пусть f интегрируема в D, тогда $|f|$ - интегрируем в D

$$|\iint\limits_D f dxdy| \leq \iint\limits_D |f| dxdy$$

7) Теорема об оценке двойного интеграла (обобщенная теорема)

   Пусть

   1. f, g - интегрируемы в D
   2. $m \leq f(x,y) \leq M$
   3. $g(x,y) \geq 0$

   тогда

$$m \iint\limits_D g(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq M \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

   Следствие Если $g(x,y) \equiv 1$ в D, то получаем "просто"теорема об оценке двойного интеграла

$$m \cdot S \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq M \cdot S, \text{ где} S = S(D)$$

8) Теорема о среднем значении

   Определение 1.8. ***Средним значением функции*** f ***в плоскости*** D *называется*

$$< f >= \frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

   Свойство Пусть

   1. D - линейно связная замкнутая область (т.е. граница D является связным множеством)
   2. f - непрерывна в D

Тогда существует $M_0 \in D$, такая что $f(M_0) =< f >$

9) Обобщенная теорема о среднем значении

   Пусть

   1. f - непрерывна в D
   2. g - интегрируема в D
   3. g - знакопостоянна
   4. D - линейно связанной множество (если f - непрерывна в D, то f - интегрируема в D)

   тогда существует $M_0 \in D$ такая, что

$$\iint\limits_d f(x,y)g(x,y)dxdy = f(M_0)\iint\limits_d g(x,y)dxdy$$

Замечание Свойство (8) является частным случаем свойства (9) для $g(x,y) = 1$

1.4 Повторный интеграл

Определение 1.9. *Повторным интегралом называется выражение* $\int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$, *значение* $I_{повт}$ *которого определяется правилом* $I_{повт} = \int_a^b F(x)dx$, *где* $F(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$, $x \in [a,b], x = const$

Вычислить

$$I_{\text{повт}} = \int_1^{\ln(2)} dx \int_1^{\frac{1}{x}} xe^{xy}dy$$

$$\text{а)}F(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} xe^{xy}dy = e^{xy}|_{y=1}^{y=\frac{1}{x}} = e - e^x$$

$$\text{б)}I_{\text{повт}} = \int_1^{\ln(2)} F(x)dx = \int_1^{\ln(2)} (e - e^x)dx = e(\ln(2) - 1) - e^x|_1^{\ln(2)} = e\ln(2) - 2$$

1.5 Вычисление двойного интеграла

Определение 1.10. *Область D на плоскости Oxy называется y - прав., если любая прямая, параллельная Oy, пересекает границу D не более, чем в двух точках, либо содержит участок границы области D целиком*

Замечание 1.2. *1. y-прав. можно задать в следующем виде:*

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi)2(x)\}$$

2. x - прав. определеяется аналогично

Теорема 1.3. *Пусть*

1. $\exists \iint_D f(x,y)dxdy = I$

2. D является y-прав. и задается соотношением (*)

3. $\forall x \in [a;b] \exists \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy = F(x)$

Тогда

1. ∃ повторный интеграл

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) = I_{повт}$$

2. $I = I_{повт}$

Замечание 1.3. *Если область D не является правильной в направлении какой-нибудь из координатных осей, то ее можно разбить на правильные части и воспользоваться свойством аддитивности двойного интеграла*

1.6 Замена переменных в двойном интеграле

Пусть

1. $I = \iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$
2. $\Phi : D_{uv} \to D_{xy}$

$$\Phi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Теорема 1.4. *О замене переменных в двойном инетеграле*

Пусть

1. $D_{xy} = \Phi(D_{uv})$

2. Φ *биективно*

3. Φ *непрерывна и непрерывано дифф. в* D_{uv}

4. $I_\Phi \neq 0$ *в* D_{uv}, *где*

5. f *- интегрируема в* D_{xy}

Тогда

1. $f(x(u,v),y(u,v))|I_\Phi(u,v)|$ *- истина в* D_{uv}

2. $\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(y,v)) \cdot |I_\Phi(u,v)|dudv$

Замечание 1.4. *1. Теорема остается справедливой и в том случае, если условия 2,3,4 нарушаются в отдельных точках области* D_{uv} *или вдоль отдельных кривых, лежащих в* D_{uv} *и имеющих площадь нуль*

1.7 Приложения двойного инетграла

I. **Вычисление площади плоской фигуры**

$$S(D) = \iint_D 1dxdy$$

II. **Вычисление массы пластины**

Пусть

1) Пластина занимает обалсть D на плоскости Oxy

2) $f(x,y)$ - значение плотности материала пластины

Тогда масса пластины

$$M = \iint_D f(x,y)dxdy$$

III. **Вычисление оъема тела**

Пусть

1) Тело T: $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$

Тогда объем тела T можно найти по формуле

$$V(T) = \iint\limits_{D_{xy}} \big[z_2(x, y) - z_1(x, y)\big] dxdy$$

Глава 2

Тройной интеграл

2.1 Понятие кубируемой области

Рассмотрим область $G \subseteq R^3$

Как ввести понятие объема тела, которое занимает эту область? Понятие объема легко ввести для параллелепипеда или, более общо, многогранника в R^3. Что делать, если $G \subseteq R^3$ - произвольная область?

1. Рассмотрим множество многогранников q, целиком содеожащихся в G, и обозначим

$$V_* = \sup_q V(q)$$

2. Рассмотрим множество многогранников Q, целико содержащих в себе G, и обозначим

$$V^* = \underset{Q}{inf} V(Q)$$

Определение 2.1. *Трехмерная область G называется кубируемой, если $\exists$ конечные значения V_*, V^*, причем $V_* = V^*$. При этом значение $V = V_* = V^*$ называется бъемом области G*

Определение 2.2. *Говорят, что множество точек в R^3 имеет объем нуль, если все точки этого множества можно заключить в многогранник сколь угодно малого объема.*

2.2 Задача о вычислении массы тела

Пусть

1. Тело T занимает область $G \subset R^3$
2. $f(x,y,z) \geq 0$ - значение плотности материала этого тела в точке (x,y,z)

Требуется: Найти массу $m(T)$ тела T

1. Разобьем область G на части:

$$G = U_{i=1}^n G_i, \text{ int } G_i \cap \text{int } G_j = 0, \text{ при } i \neq j$$

2. В пределах кажддой из подобластей выберем отмеченную точку $M_i \in G_i, \; i = \overline{1;n}$
3. Считая, что размеры G_i малы:

$$\Delta m_i = m(G_i) \approx f(M_i)\Delta V_i, \text{ где } \Delta V_i = V(G_i)$$

масса тела, занимающего подобласть G_i

4. Масса тела T тогда:

$$m(T) = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta V_i$$

5. Эта формула тем точнее, чем меньше размеры G_i, поэтому естественно перейти к пределу:

$$m(T) = \lim_{\max\limits_i \text{diam}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$$

2.3 Определение тройного интеграла

Пусть

1. $G \subseteq R^3$ - тело
2. $f : G \to R$ - функция

Разоьем область G на части так, как это было сделано в задаче о вычислении массы тела
Обозначим: $R = \{G_1, ..., G_n\}$ - разбиение тела G

Определение 2.3. *Диаметром разбиения R тела G называется число*

$$d(R) = \underset{i=\overline{1;n}}{max}\, diam\ G_i$$

Определение 2.4. *Тройным интегралом по функции $f(x, y, z)$ по области G называется число*

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \lim_{d(R)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$$

, где $M_i, \Delta V_i$ имеют тот же смысл, что и в задаче о вычислении массы тела

Замечание 2.1. *Если указанный в определении тройного интеграла предел $\exists$ и конечен, то функция f называется интегрируемой в области*