Теория вероятностей

Власов Павел Александрович

2019

Оглавление

Глава 1

Двойной интеграл

1.1 Площадь плоской фигуры

Пусть D - фигура на плоскости.

Как ввести понятие площади фигуры D?

Если D является треугольником (или прямоугольником) понятие площади очевидно.

Если D является многоугольником, то ее можно разбить на треугольники, а площадь области D определить как сумму состовляющих ее треугольников.

Что делать если D - произвольная фигура

а) Рассмотрим множество многоугольников M, каждый из которых целиком содержится в D.
Обозначим $S_* = \sup S(m)$, где m - многоугольники, $S(m)$ - площадь многоугольника

б) Рассмотрим множество многоугольников M, каждый из которых содержит в себе D.
Обозначим $S^* = \text{suf } S(M)$

Определение 1.1. *Область D на плоскости называется* ***квадрируемой****, если $\exists$ конечные значения S_*, S^* причем $S_* = S^*$. При этом число $S = S_* = S^*$ называется* ***площадью области*** *D*

Определение 1.2. *Говорят, что множество D точек плоскости имеет площадь* ***нуль****, если D можно целиком заключить в многоугольник, сколь угодной площади, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ многоугольник M площади ε такой, что $D \leq M$*

Пример:

1) $D = \{A\}$, A - точка
2) $D = \{AB\}$, AB - отрезок
3) Спрямленная (с конечной длиной) кривая

Теорема 1.1. *Пусть D - замкнутая плоская область. Тогда D - квадрируемая граница области Δ. $\Leftrightarrow$ имеет площадь 0.* ■

Теорема 1.2. *Пусть α - плоская спрямленная кривая. Тогда α - имеет площадь нуль.* ■

Следствие Пусть 1) D - область на плоскости, 2) D ограничена конечным числом спрямленных кривых. Тогда D - квадрируема.

Замечание 1.1. *В дальнейшем мы будем рассматривать только квадрируемые области*

1.2 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

I. **Задача об объеме цилиндрического тела**

Пусть D - область плоскости Oxy

$f\colon D \to R$ - функция определенная на множестве D

$$f(x,y) \geq 0 \quad (x,y) \in D$$

Рассмотрим тело T, которое ограничено плоскостью Oxy, графиком функции $z = f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью, направляющая которой совпадает с гранью D, а образующие параллельны Oz

1) Разобьем область D на пересекающиеся части

$$D = \overset{n}{\underset{i=1}{U}} D_i$$

$$\text{int } D_i \cap \text{int } D_j = \varnothing, \text{ при } i \neq j \ (*)$$

$$\text{int } D_j - \text{множество внутренних точек области } D_i$$

Условие (*) означает, что различные элементы разбиения не имеют общих внутренних точек

2) Выберем точку $M_i \in D_i$ $i = \overline{1;n}$
3) Считая, что размеры подобласти D_i малы, примем $\Delta V_i \approx f(M_i)\Delta S_i$, где $\Delta S_i = S(D_i)$, ΔV_i - объем той части тела T, которая рассматривается под D_i

Тогда объем тела T:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

Эта формула тем точнее, чем меньше размеры D_i, поэтому естественно перейти к пределу

$$V = \lim_{\max\limits_{i=\overline{1,n}} \text{diam}(D_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i,$$

$$\text{diam}(D) = \sup_{M,N \in D} \|\overline{MN}\| - \text{диаметр множества } D$$

II. **Задача о вычислении массы пластины**

Пусть:

1) Пластина занимает область D на плоскости
2) $T(x,y) \geq 0$ - плоскость поверхности материала пластины в точке $M(x,y)$

Нужно найти массу m этой частички

1) Разобьем область D на непересекающей части

$$D = \overset{n}{\underset{i=1}{U}} D_i$$

$$\text{int } D_i \cap \text{int } D_j = \varnothing, i \neq j$$

2) В пределах D_i выберем точку $M_i, i = \overline{1,n}$

3) Считая, что размеры D_i малы, можно принять, что в пределах каждой из оластей D_i плотность пластины меняется незначительно, поэтому во всех точках области D_i плотность $\approx f(M_i)$
Тогда масса части $D_i:$ $\Delta m_i \approx f(M_i)\Delta S_i$, где $\Delta S_i = S(D_i)$, $i = \overline{1,m}$

4) **Тогда масса всей пластины**

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

Полученная формула тем точнее, чем меньше размеры D_i, поэтому собственно

$$m = \lim_{\max\limits_{i=\overline{1,n}} \operatorname{diam}(D_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

1.3 Определение свойства двойного интеграла

Пусть D - квадратичная замкнутая плоская область

Определение 1.3. ***Разбиение области*** *D называется множество $R = \{D_1, ...D_n\}$, где*

1) $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$

2) $int\ D_i \cap int\ D_j = \varnothing$, при $i \neq j$

3) D_i - квадрируема, $i = \overline{1,n}$

Определение 1.4. ***Диаметром разбиения*** *$R = \{D_1, ...D_n\}$ называется число*

$$d(R) = \max_{i=\overline{1,n}} diam(D_i)$$

Пусть D - квадратичная замкнутая область на плоскости Oxy, $f : D \to R$ (f является функцией двух переменных, т.к. D - область на плоскости)

Определение 1.5. ***Двойным интегралом функции*** *f* ***по области*** *D называется число*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{d(R)\to 0} \sum f(n_i)\Delta S_i, \text{ где}$$

$$R = \{D_1, ...D_n\} \text{ - разбиение области } D$$

$$M_i \in D_i,\ i = \overline{1,n} \text{ - отмеченные точки}$$

$$\Delta S_i = S(D_i)$$

Определение 1.6. *В определении подразумевается, что указанный предел существует, конечен и не зависит от разбиения R области D и способа выбора отмеченных точек*

Определение 1.7. *Функции f, для которых существует $\iint_\Delta f dxdy$, называются* ***интегрируемыми в*** *D*

Свойства двойного интеграла:

1) $\iint_D 1dxdy = S(D)$

2) Линейность

   Если f, g - интегрируемы в D функции, то

   а) $f \pm g$ интегрируема в D, $\iint_D (f \pm g)dxdy = \iint_D fdxdy \pm \iint_D gdxdy$

   б) $c \cdot f, c = \text{const}$ - интегрируема, $\iint_D c \cdot fdxdy = c\iint_D fdxdy$

3) Аддитивность

   Пусть

   1. D_1, D_2 - плоские квадратичные области
   2. f интегрируема в D_1 и D_2
   3. $\text{int } D_1 \cap \text{int } D_2 = \varnothing$

Тогда f интегрируема в $D = D_1 \cup D_2$

$$\iint\limits_{D} f dxdy = \iint\limits_{D_1} f dxdy + \iint\limits_{D_2} f dxdy$$

4) О сохранении интегралом знака функции

   Пусть

   1. $F(x,y) \geq 0$ в D
   2. f - интегрируема в D

   тогда

$$\iint\limits_{D} F(x,y) dxdy \geq 0$$

5) Пусть

   1. $f(x,y) \geq g(x,y)$
   2. f, g - интегрируемы в D

   тогда

$$\iint\limits_{D} f dxdy \geq \iint\limits_{D} g dxdy$$

6) Теорема об оценке модуля двойного интеграла

   Пусть f интегрируема в D, тогда $|f|$ - интегрируем в D

$$|\iint\limits_{D} f dxdy| \leq \iint\limits_{D} |f| dxdy$$

7) Теорема об оценке двойного интеграла (обобщенная теорема)

   Пусть

   1. f, g - интегрируемы в D
   2. $m \leq f(x,y) \leq M$
   3. $g(x,y) \geq 0$

   тогда

$$m \iint\limits_{D} g(x,y) dxdy \leq \iint\limits_{D} f(x,y) dxdy \leq M \iint\limits_{D} g(x,y) dxdy$$

   Следствие Если $g(x,y) \equiv 1$ в D, то получаем "просто"теорема об оценке двойного интеграла

$$m \cdot S \leq \iint\limits_{D} f(x,y) dxdy \leq M \cdot S, \text{ где} S = S(D)$$

8) Теорема о среднем значении

   Определение 1.8. ***Средним значением функции*** f ***в плоскости*** D *называется*

$$< f >= \frac{1}{S(D)} \iint\limits_{D} f(x,y) dxdy$$

   Свойство Пусть

   1. D - линейно связная замкнутая область (т.е. граница D является связным множеством)
   2. f - непрерывна в D

Тогда существует $M_0 \in D$, такая что $f(M_0) = < f >$

9) Обобщенная теорема о среднем значении

   Пусть

   1. f - непрерывна в D
   2. g - интегрируема в D
   3. g - знакопостоянна
   4. D - линейно связанной множество (если f - непрерывна в D, то f - интегрируема в D)

   тогда существует $M_0 \in D$ такая, что

$$\iint\limits_{d} f(x,y)g(x,y)dxdy = f(M_0)\iint\limits_{d} g(x,y)dxdy$$

Замечание Свойство (8) является частным случаем свойства (9) для $g(x,y) = 1$

1.4 Повторный интеграл

Определение 1.9. *Повторным интегралом называется выражение $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, значение $I_{повт}$ которого определяется правилом $I_{повт} = \int_a^b F(x)dx$, где $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, $x \in [a,b], x = const$*

Вычислить

$$I_{\text{повт}} = \int_1^{\ln(2)} dx \int_1^{\frac{1}{x}} xe^{xy}dy$$

$$\text{а)}F(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} xe^{xy}dy = e^{xy}\Big|_{y=1}^{y=\frac{1}{x}} = e - e^x$$

$$\text{б)}I_{\text{повт}} = \int_1^{\ln(2)} F(x)dx = \int_1^{\ln(2)} (e - e^x)dx = e(\ln(2) - 1) - e^x\Big|_1^{\ln(2)} = e\ln(2) - 2$$

1.5 Вычисление двойного интеграла

Определение 1.10. *Область D на плоскости Oxy называется y - прав., если любая прямая, параллельная Oy, пересекает границу D не более, чем в двух точках, либо содержит участок границы области D целиком*

Замечание 1.2. *1. y-прав. можно задать в следующем виде:*

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi)2(x)\}$$

2. x - прав. определеяется аналогично

Теорема 1.3. *Пусть*

1. $\exists \iint_D f(x,y)dxdy = I$

2. D является y-прав. и задается соотношением (*)

3. $\forall x \in [a;b] \exists \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = F(x)$

Тогда

1. $\exists$ повторный интеграл

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) = I_{повт}$$

2. $I = I_{повт}$

Замечание 1.3. *Если область D не является правильной в направлении какой-нибудь из координатных осей, то ее можно разбить на правильные части и воспользоваться свойством аддитивности двойного интеграла*

1.6 Замена переменных в двойном интеграле

Пусть

1. $I = \iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$
2. $\varphi : D_{uv} \to D_{xy}$

$$\varphi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Теорема 1.4. *О замене переменных в двойном инетеграле*
Пусть

1. $D_{xy} = \varphi(D_{uv})$
2. φ *биективно*
3. φ *непрерывна и непрерывано дифф. в* D_{uv}
4. $I_\varphi \neq 0$ *в* D_{uv}*, где*
5. f *- интегрируема в* D_{xy}

Тогда

1. $f(x(u,v),y(u,v))|I_\varphi(u,v)|$ *- истина в* D_{uv}
2. $\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(y,v)) \cdot |I_\varphi(u,v)|dudv$

Замечание 1.4. *1. Теорема остается справедливой и в том случае, если условия 2,3,4 нарушаются в отдельных точках области* D_{uv} *или вдоль отдельных кривых, лежащих в* D_{uv} *и имеющих площадь нуль*

1.7 Приложения двойного инетграла

I. **Вычисление площади плоской фигуры**

$$S(D) = \iint\limits_D 1dxdy$$

II. **Вычисление массы пластины**

Пусть

1) Пластина занимает обалсть D на плоскости Oxy
2) $f(x,y)$ - значение плотности материала пластины

Тогда масса пластины

$$M = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

III. **Вычисление оъема тела**

Пусть

1) Тело T: $T = \{(x,y,z) : (x,y) \in D_{xy}, z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)\}$

Тогда объем тела T можно найти по формуле

$$V(T) = \iint\limits_{D_{xy}} \big[z_2(x,y) - z_1(x,y)\big] dxdy$$

Глава 2

Тройной интеграл

2.1 Понятие кубируемой области

Рассмотрим область $G \subseteq R^3$

Как ввести понятие объема тела, которое занимает эту область? Понятие объема легко ввести для параллелепипеда или, более общо, многогранника в R^3. Что делать, если $G \subseteq R^3$ - произвольная область?

1. Рассмотрим множество многогранников q, целиком содеожащихся в G, и обозначим
$$V_* = \sup_q V(q)$$
2. Рассмотрим множество многогранников Q, целико содержащих в себе G, и обозначим
$$V^* = \inf_Q fV(Q)$$

Определение 2.1. *Трехмерная область G называется кубируемой, если $\exists$ конечные значения V_*, V^*, причем $V_* = V^*$. При этом значение $V = V_* = V^*$ называется бъемом области G*

Определение 2.2. *Говорят, что множество точек в R^3 имеет объем нуль, если все точки этого множества можно заключить в многогранник сколь угодно малого объема.*

2.2 Задача о вычислении массы тела

Пусть

1. Тело T занимает область $G \subset R^3$
2. $f(x,y,z) \geq 0$ - значение плотности материала этого тела в точке (x,y,z)

Требуется: Найти массу $m(T)$ тела T

1. Разобьем область G на части:
$$G = U_{i=1}^n G_i,\ \text{int } G_i \cap \text{int } G_j = 0,\ \text{при } i \neq j$$
2. В пределах кажддой из подобластей выберем отмеченную точку $M_i \in G_i,\ i = \overline{1;n}$
3. Считая, что размеры G_i малы:
$$\Delta m_i = m(G_i) \approx f(M_i)\Delta V_i,\ \text{где } \Delta V_i = V(G_i)$$
масса тела, занимающего подобласть G_i
4. Масса тела T тогда:
$$m(T) = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta V_i$$

5. Эта формула тем точнее, чем меньше размеры G_i, поэтому естественно перейти к пределу:

$$m(T) = \lim_{\max\limits_{i} \text{diam} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$$

2.3 Определение тройного интеграла

Пусть

1. $G \subseteq R^3$ - тело
2. $f : G \to R$ - функция

Разоьем область G на части так, как это было сделано в задаче о вычислении массы тела
Обозначим: $R = \{G_1, ..., G_n\}$ - разбиение тела G

Определение 2.3. *Диаметром разбиения R тела G называется число*

$$d(R) = \max_{i=\overline{1;n}} diam\ G_i$$

Определение 2.4. *Тройным интегралом по функции $f(x, y, z)$ по области G называется число*

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \lim_{d(R)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$$

, где $M_i, \Delta V_i$ имеют тот же смысл, что и в задаче о вычислении массы тела

Замечание 2.1. *Если указанный в определении тройного интеграла предел $\exists$ и конечен, то функция f называется интегрируемой в области*

2.3.1 Свойства тройного интеграла

Эти свойства полностью аналогичны свойствам 1 - 9 двойного интеграла; при их записи нужно вместо $f(x, y) \mapsto f(x, y, z)$, $\iint_D f(x, y)dxdy \mapsto \iiint_G f(x, y, z)dxdydz$ $D \mapsto G$.

2.4 Вычисление тройного интеграла

Основная идея - сведение к повторному интегралу

Определение 2.5. *Область $G \subseteq R^3$ называется z-правильной, если любая прямая, параллельная Oz, пересекает границу G не более чем в двух точках или содержит участок границы целиком.*

z-правильная область G можно задать в виде:

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \le z \le Z_2(x, y)\}$$

Теорема 2.1. *Пусть*

1. $\exists \iiint_G f(x, y, z)dxdydz$
2. *G является z-прав и задается (*)*
3. *Для каждой фиксированной точки $(x, y) \in D_{xy}$*

$$\exists \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz = F(x, y)$$

Тогда

1. *$\exists$ повторный интеграл*

$$I_{повт} = \iint\limits_{D_{xy}} F(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

2. и $I_{повт} = I$

Замечание 2.2. *Если в условии * сформулированной теоремы область D_{xy} является y-правильной и задается в виде:*

$$D_{xy} = \{(x, y) : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdyd = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

2.5 Замена переменных в тройном итеграле

Теорема 2.2. *Пусть*

1. $G_{xyz} = \varphi(G_{uv\omega})$
2. $\varphi : G_{uv\omega} \to G_{xyz}$

$$\varphi : \begin{cases} x = x(u, v, \omega) \\ y = y(u, v, \omega) \\ z = z(u, v, \omega) \end{cases}$$

3. *Отображение φ биективно*
4. *φ непрерывно и непрырывно дифференцируемо в $G_{uv\omega}$*
5. $$J_\varphi(u, v, \omega) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_\omega \\ y'_u & y'_v & y'_\omega \\ z'_u & z'_v & z'_\omega \end{vmatrix} \ne 0$$
6. *$f(x, y, z)$ интегрируема в G_{xyz}*

Тогда

$$\iiint\limits_{G_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G_{uv\omega}} f(x(u,v,\omega), y(u,v,\omega), z(u,v,\omega))|J_\varphi(u,v,\omega)|dudvd\omega$$

2.5.1 Связь цилиндрической и декартовой СК

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\varphi) \\ y = \rho\sin(\varphi) \\ z = z \end{cases}$$

$$J_{\text{цил}} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \rho\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

2.5.2 Связь сферической и декартовой СК

$$\begin{cases} x = r\cos(\Theta)\cos(\varphi) \\ y = r\cos(\Theta)\sin(\varphi) \\ z = r\sin(\Theta) \end{cases}$$

$$|J_{\text{сф}}| = \dots = r^2\cos(\Theta)$$

Глава 3

Определения вероятности

3.1 Случайный эксперимент

Определение 3.1. *Случайным называется эксперимент, результат которого невозможно предсказать.*

1. Подброс монетки

$$\Omega = \{\Gamma, \mathrm{P}\}$$

$$|\Omega| = 2$$

2. Бросают игральную кость

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$|\Omega| = 6$$

3. Бросают монету до первого появления герба

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$|\Omega| = \aleph_0$$

   Омега является счетным множеством, т.е. в нем столько же элементов, сколько существует натуральных чисел.

4. Производят стрельбу по плоской мишени размеры которой 1м х 1м (координаты - точки попадания)

$$\Omega = \{(x, y) : |x| \leq \frac{1}{2}; |y| \leq \frac{1}{2}\}$$

$$|\Omega| = c$$

   Омега имеет можность континуума

Определение 3.2. *Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называется пространством элементов исхода*

Замечание 3.1. *При рассматривании пространства элементов исходов предполагается, что*

1. *Каждый элемент исхода неделим, т.е. не может быть "разложен"на более мелкие исходы*
2. *В результате случайного эксперимента всегда происходит ровно один элемент исхода из Ω*

Определение 3.3. *(Нестрогое) Событием называется (любое) подмножество множества* Ω

Определение 3.4. *Говорят, что в результате случайного эксперимента происходит событие* A*, если в результате этого эксперимента произошел один из входящих в* A *элементов исхода.*

Бросают игральную кость

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Если выпало 2 очко, то наступило A

Определение 3.5. *Событие* A *называется следствием события* B*, если наступление события* B *влечет наступление события* A*, т.е.* $B \subseteq A$

Замечание 3.2. *Любое множество* Ω *содержит в качестве подмножеств* $\varnothing$ *и* Ω *соответствующие события называются невозможным* ($\varnothing$) *и достоверным* (Ω)*. Оба этих события называют несобственными. Все остальные события называют собственными.*

В урне находится 2 красных и 3 синих шара. Из урны извлекают 1 шар

$$A = \{\text{извлеченный шар - зеленый}\} = \varnothing$$

$$B = \{\text{извлеченный шар - красный или синий}\} = \Omega$$

3.2 Операции над событиями

События - множества (подмножества множества Ω) $\Rightarrow \cup, \cap, \overline{a}, \setminus, \Delta$

Определение 3.6. *Суммой событий* $A, B \subseteq \Omega$ *называют событие*

$$A + B = A \cup B$$

Определение 3.7. *Произведением событий* $A, B \subseteq \Omega$ *называют событие*

$$A \cdot B = A \cap B$$

Определение 3.8. $A \backslash B$ *называется разностью событий* A *и* B

Определение 3.9. $\overline{A}$ *называется событием, противоположным* A

3.2.1 Свойства операций над событиями

Смотреть теоретико-множеств. тождества (осно.)

Определение 3.10. *События* $A, B \in \Omega$ *называются несовместными, если* $AB = \varnothing$*. В противоположном случае события* A *и* B *называются совместными.*

Определение 3.11. *События* $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *называются попарнонесовместимимы, если* $A_i A_j = \varnothing, i \neq j$ *- несовместимыми в совокупности* $A_1 \cdot \cdots \cdot A_n = \varnothing$

3.3 Классическое определение вероятности

Пусть

1. $|\Omega| = N < \infty$
2. по условиям сложности эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной исход остальных (в этом случае говорят, что все элементы исхода равновозможны)
3. $A \subseteq \Omega,\ |A| = N_A$

Определение 3.12. *Вероятностью осуществления события A называют число*

$$P\{A\} = \frac{N_A}{N}$$

2 раза бросают игральную кость

$$A = \{\text{сумма выпавших очков}\}$$

$$P(A) = ?$$

Решение:
Исход: (x_1, x_2), где x_i - количество выпавших при i-м броске

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\}$$

$$|\Omega| = 36 = N$$

$$A = \{(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

$$N_A = |A| = 3$$

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

3.3.1 Свойства вероятности (в соответствии с классическим определением)

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Если $AB = \varnothing$, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Доказательство. 1. $P(A) = \frac{N_A}{N} \geq 0$

2. $P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$
3. $|A+B| = |A| + |B| - |AB|$ (формула включений и исключений).
   По условию $|AB| = 0 \Rightarrow N_{A+B} = N_A + N_B$

$$P(A) = \frac{N_{A+B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B)$$

□

Замечание 3.3. *Недостатки классического определения вероятности:*

1. *Неприменимо в случае, когда $|\Omega| = \infty$*
2. *Неприменимо, если вектор исхода является "более возможным чем другие*

3.4 Геометрическое определенеие вероятности

является обобщением классического опредеения на случай бесконечного Ω, когда $\Omega \subseteq R^n$
Пусть

1. $\Omega \subseteq R^n$
2. $\mu(\Omega) < \infty$, где мю - мера множества ($n = 1$ - длина, $n = 2$ - площадь)
3. Возможность принадлежности исхода эксперимента некоторого события пропорциональна мере этого события и не язависит от его (события) формы и расположения внутри Ω.

Определение 3.13. *Вероятностью осуществления события A называется число*

$$P\{A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Задача о встрече

Два человека договорились встретиться в условленном месте в промежутке от 12 до 14 часов. При этом если один из них придет раньше другого, то он ждет 15 минут, после чего уходит. Какова вероятность того, что они встретятся, если появления каждого из них равновероятно в любой момент между 12 и 13 часами?

Решение

1. Исход

$$(x_1, x_2)$$

где $x_i \in [0, 1], i = 1, 2$ - появление i-го человека после 12 часов

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_i \in [0; 1]\} = [0; 1] \times [0; 1]$$

2. $A = \{$эти два человека встретились$\}$

$$A = \{(x_1, x_2) : |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{4}\}$$

3. В соотвествии с геометрическим определением

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\mu(\Omega) - 2\mu(\Delta)}{\mu(\Omega)} = 1 - 2\frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

Замечание 3.4. *1. Очевидно, что из геометрического определения следуют те же свойства вероятности, что и из классического определения*

2. Недостатком геометрического определения является то, что оно не учитывает возможность того, что некоторые области внутри Ω могут быть более предпочтительными, чем другие области той же меры. Например, если в разобранном примере появление каждого из этих двух человек было более вероятным в середине часа, то геометрическое определение дало бы неудовлетворительный результат.

3.5 Статистическое определение вероятности

Пусть

1. Ω пространство элементарных исходов случайного эксперимента
2. $A \subseteq \Omega$ - событие, связанное с этим экспериментом
3. Этот случайным эксперимент произведен n раз, при этом событие A произошло n_A раз

Определение 3.14. *Вероятностью события A называется эмпирический (то есть из опыта) предел:*

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Замечание 3.5. *1. Из статистического определения можно поучить те же свойства вероятности, что и из двух предыдущих определений*

2. Недостатки статистического определения

- *Никакой эксперимент невозможно осуществить бесконечное чтсло раз*
- *С точки зрения современной математики это определение является архаизмом, так как не дает достаточной базы для развития теории*

3.6 Сигма-алгебра событий

Для аксиматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события
Заметим, что:

- данное ранее нестрогое определение события как произврольного подмножества в Ω использовать нельзя, так как в этом случае теория будет противоречивой (смотреть парадокс Рассела)
- по этой причине событиями мы будем называть лишь те подмножества множества Ω, которые принадлежат заранее оговоренному набору подмножеств
- с точки зрения здравого смысла понятно, что если относительно событий A и B известно, наступили они в данном эксперименте или нет, то также должно быть известно, наступили ли в этом эксперименте события $\overline{A}$, $A+B$, AB, ... По этой причине указанный набор подмножеств должен быть замкнут относительно операций над событиями , $+, \cdot, \setminus$ ... Эти соображения приводят к следующему определению

Определение 3.15. *Пусть*

1. Ω *- пространство*
2. B *- набор подмножеств множества* Ω

   B *называется* σ*-алгеброй событий, если*

   (a) $B \neq \varnothing$

   (b) $A \in B \Rightarrow \overline{A} \in B$
3. *Если* $A_1, \dots, A_n, \dots \in B$, *то* $A_1 + \dots + A_n + \dots \in B$

3.6.1 Простейшие свойства сигма-алгебры событий

1. $\Omega \in B$
2. $\varnothing \in B$
3. если $A_1, \dots, A_n, \dots \in B$, то $A_1 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in B$
4. если $A, B \in B$, то $A \backslash B \in B$

Доказательство. 1. $B \neq \varnothing \Rightarrow \exists A \in B$

В соотвествии с аксиомой 2) $\overline{A} \in B$

В соответствии с 3) $\underbrace{A + \overline{A}}_{\Omega} \in B$

2. $\Omega \in B \Rightarrow \overline{\Omega} \in B$
3. $\overline{A_1} + \dots + \overline{A_n} + \dots \in B \Rightarrow \overline{\overline{A_1} + \dots + \overline{A_n} + \dots} \in B \Rightarrow A_1 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in B$
4. $A \backslash B = A\overline{B}$

   $A, B \in B \Rightarrow a, \overline{B} \in B \Rightarrow A\overline{B} \in B$

□

Замечание 3.6. *1. В дальнейшем, говоря о вероятности всегда будем предполагать, что задана некоторая сигма-алгебра событий. При этом слово "событие"всегда будет обозначать элемент этой сигма-алгебры*

2. *Если множество Ω конечно, то в качестве сигма-алгебры событий на Ω всегда будем рассматривать*

$$B = 2^{\Omega}$$

Случайно выбранного человека попросили выбрать одно из трех: камень, ножницы, бумагу

$$\Omega = \{\text{К,Н,Б}\}$$

$$B = 2^{\Omega} = \{\varnothing, \{\text{К}\}, \{\text{Н}\}, \{\text{Б}\}, \{\text{К,Н}\}, \{\text{К,Б}\}, \{\text{Н,Б}\}, \underbrace{\{\text{К,Н,Б}\}}_{\Omega}\}$$

3.7 Аксиоматическое определение вероятности

Пусть

1. Ω пространство элементов исходов некторого эксперимента
2. B - сигма-алгебра на Ω

Определение 3.16. *Вероятностью (вероятностной мерой) называется отображение*

$$P : B \to R$$

обладающее свойствами

1. $\forall A \in B P(A) \geq 0$ *(аксиома неотрицательности)*
2. $P(\Omega) = 1$ *(аксиома нормированности)*
3. *если* $A_1, ..., A_n, ... \in B$ *попарно несовместные события, то* $P(A_1 + .. + A_n + ..) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$ *(расширенная аксиома сложения)*

Определение 3.17. *Тройка* (Ω, B, P) *называется вероятностным пространством*

3.7.1 Свойства вероятности

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$
4. $\forall A \in B 0 \leq P(A) \leq 1$
5. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
6. Для любого конечного набора событий $A_1, ...A_n \in B$ справедливо

$$P(A_1 + ... + A_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}) - ... + (-1)^{n+1} P(A_1 \cdot ... \cdot A_n)$$

Доказательство. 1. $A + \overline{A} = \Omega$
$A\overline{A} = \varnothing \Rightarrow$ аксиома 3 $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$
$\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

2. $P(\varnothing) = P(\overline{\Omega}) =$ свойство 1 $= 1 - P(\Omega) = 0$

3. $A \subseteq B$
$B = A + (B \backslash A) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$
$\Rightarrow P(B) \geq P(A)$

4. $P(A) \geq 0$ вытекает из аксиомы 1

   Покажем, что $P(A) \leq 1$

   $A \subseteq \Omega \Rightarrow$ по свойсту

□

Замечание 3.7. *Иногда вместо расширенной аксиомы сложения 3 рассматривают следующие две аксиомы*

3') Для любых попарно несовместимых событий $A_1, \dots\ A_n P(A_1 \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$ *(аксиома сложений)*

3") Для любых несовместимых поселедовательностей событий $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$ *справедливо*

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A), \text{ где } A = A_1 + \dots A_n + \dots$$

(аксиома непрерывности)

Можно показать, что

$$3^o \Leftrightarrow \begin{cases} 3' \\ 3'' \end{cases}$$

Глава 4

Условная вероятность

4.1 Определение условной вероятности

Пусть

1. A, B - случайные события, связанные с некоторым экспериментом

2. известно, что в результате эксперимента произошло событие B

Как эта информация повлияет на вероятность того, что в результате этого эксперимента произошло событие A?

Из колоды в 36 карт случайным образом извлекли одну карту

$$A = \{\text{извлечен туз}\}$$

$$B = \{\text{извлечена картинка}\}$$

Тогда

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P_B(A) = \text{наступило В} \to \text{извлечена карта В,D,K,T} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Таким образом дополнительная информация об осуществлении события B изменила вероятность события A

Замечание 4.1. *Рассмотрим классическую схему для определения вероятности имеется N разновозможных исходов, $|A| = N_A,\ |B| = N_B$*

Так как известно, что в результате эксперимента наступило B, то вне исхода, не попавшие B, можно не рассматривать

В этом случае событие A может наступить лишь при реализации одного из исходов, входящих в AB.

$$P_B(A) = \frac{N_{AB}}{N_B} = \frac{N_{AB}/N}{N_B/N} = \frac{P(AB)}{A(B)}$$

Определение 4.1. *Пусть (Ω, β, P) - вероятностное пространство (не обязательно реализует классическую схему)*

Условная вероятность осуществления события A при условии, что произошло событие B, называют число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

Замечание 4.2. 1. *Для того, чтобы подчеркнуть разницу, "обычную"вероятность иногда будем называть безусловной*

2. *Зафиксируем некоторое событие B и будем рассматривать $P(A|B)$ как функцию события $A \in \beta$*

Теорема 4.1. *Условная вероятность $P(A|B)$ удовлетворяет трем аксиомам безусловной вероятности*

Доказательство. 1.

$$P(A|B) = \frac{P(AB) \geq 0}{P(B) > 0} \geq 0$$

2.

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

3. пусть $A_1, ..., A_n, ...$ - набор попарнонепесекающихся событий

$$P(A_1{+}A_2{+}...|B) = \frac{P((A_1 + A_2 + ...)B)}{P(B)} = \text{свойство счетной дистрибутивности} = \frac{P(A_1 B + A_2 B + ...)}{P(B)}$$

(a) $A_i \cdot A_j = \varnothing$ при $i \neq j$

(b) $A_i B \subseteq A_j$

(c) а,б $\Rightarrow (A_i, B)(A_j, B) = \varnothing \Rightarrow$ расширенная аксиома сложения для $A_1 B, A_2 B, ...$

$$= \frac{P(A_1 B) + P(A_2 B) + ...}{P(B)} = \text{множества сход. рядов} =$$

$$= \frac{P(A_1 B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 B)}{P(B)} + ... = P(A_1|B) + P(A_2|B) + ...$$

□

Следствие 4.1. *Условная вероятность $P(A|B)$ при фиксированном событии B обладает всеми свойствами безусловной вероятности:*

1. $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$
2. $P(\varnothing|B) = 0$
3. *Если* $A_1 \subseteq A_2$, *то* $P(A_1|B) \leq P(A_2|B)$
4. $0 \leq P(A|B) \leq 1$
5. $P(A_2 + A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 A_2|B)$
6. $P(A_1 + ...A_n|B) = \sum_{1\leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}|B) = \sum_{1\leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2}|B) + \sum_{1\leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} A(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}|B) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 ... A_n|B)$

Доказательство. Свойства 1-6 безусловой вероятности ялвяются следствияеми аксиом 1-3 вроятности. Так как условная вероятность удовлетворяет этим аксиомам, то для нее выполнятся и аналоги свойств 1-6. □

Среды 15 лотерийных билетов 5 выйгрышных. Сначала 1-й игрок тянет 1 билет, затем 2-й тянет один билет.

$$A_1 = \{\text{первый игрок достал выйгрышный билет}\}$$

$$A_2 = \{\text{второй игрок достал выйгрышный билет}\}$$

$$P(A_2|A_1) =?$$

1-й способ по определению условной вероятности

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)}$$

1. Исход (x_1, x_2), где x_i - номер билета, извлеченного 2-м игроком, $x_i \in \{1, ..., 15\}$ - размещение без повторов из 15 по 2

$$N = 15 \cdot 14$$

$$(\underbrace{x_1}_{\text{выигр.}}, ?)$$

2. $N_A = 5 \cdot 14$

$$P(A_1) = \frac{5 \cdot 14}{15 \cdot 14} = \frac{1}{3}$$

3. $N_{A_1 A_2} = 5 \cdot 4 = 20$

$$(\underbrace{x_1}_{5}, \underbrace{x_2}_{4})$$

$$P(A_1 A_2) = \frac{20}{15 \cdot 14} = \frac{2}{21}$$

4. $P(A_2|A_1)$

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} = \frac{2}{7}$$

2-й способ подсчитаем $P(A_2|A_1)$, перестроив в пространство Ω

$$P(A_2|A_1) = \text{известно, что наступило } A_1 \Rightarrow \text{ осталось 14 билетов, из кот. 4 выигр.} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

4.2 Формула умножения вероятностей

Теорема 4.2. *Формула умножения вероятностей для двух событий*
Пусть

1. A_1, A_2 *- слбытия связанные с некоторым случайным экспериментом*
2. $P(A_1) > 0$

Тогда

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2|A_1)$$

Доказательство. 1. Так как $P(A_1) \neq 0$, то по определению

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 A_2}{P(A_1)} \Rightarrow P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2|A_1)$$

□

Теорема 4.3. *Формула умножения вероятностей для n событий*
Пусть

1. $A_1, ..., A_n$ *- события, связанные с некоторым случайным экспериментом*
2. $P(A_1, ..., A_n) > 0$

Тогда

$$P(A_1 \cdot A_2 ... A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1...A_{n-1})$$

Доказательство. 1. $A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1} \subseteq A_1 \cdot ... \cdot A_k$, если $k \leq n-1$

$\Rightarrow P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}) > 0$

Таким образом все входящие в правую часть формулы умножения условной вероятности определены

2. $P(\underbrace{A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}}_{A}, \underbrace{A_n}_{B}) =$ из теоремы умножения для 2-х событий =

$$= P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1})P(A_n|A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}) =$$

$$= P(A-1 \cdot ... \cdot A_{n-2})P(A_{n-1}|A_1 \cdot ... \cdot A_{n-2})P(A_n|A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}) = ... =$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1...A_{n-1})$$

□

На 7 карточках написаны буквы, составляющие слово "шоколад". Карточки перемешивают и случайным образом извлекают последовательно 3 карточки (без возвращения)

$$A = \{\text{в порядке извлечения эти карточки образуют слово "код".}\}$$

1. Обозначим

$$A_1 = \{\text{при первом извлечении появилась "к".}\}$$

$$A_2 = \{\text{при втором извлечении появилась "о".}\}$$

$$A_3 = \{\text{при третьем извлечении появилась "д".}\}$$

   Тогда

$$A = A_1A_2A_3$$

2. $$P(A) = P(A_1A_2A_3) = \underbrace{P(A_1)}_{\frac{1}{7}}\underbrace{P(A_2|A_1)}_{\frac{2}{6}=\frac{1}{3}}\underbrace{P(A_3|A_1A_2)}_{\frac{1}{5}} = \frac{1}{105}$$

4.3 Независимые события

Определение 4.2. *Пусть A и B - события, связанные с некоторым случайным экспериментом. События A и B называются независимыми, если*

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Теорема 4.4.

1. *Пусть $P(B) > 0$,*
   Тогда A, B - независимые $\Leftrightarrow P(A|B = P(A)$
2. *Пусть $P(A) > 0$,*
   Тогда A, B - независимые $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$

Доказательство. Докажем первую часть

1. $\Rightarrow$ (необходимость)

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(B)} = \text{события независимы} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

2. $\Leftarrow$ (достаточность)

$$P(AB) = P(B) > 0 \Rightarrow \text{ используем теорему умножения вероятностей} = P(B)\cdot P(A|B) =$$

$$= \text{по условию P(A|B) = P(A)} = P(A)P(B) \Rightarrow A, B \text{ - независимы}$$

$\square$

Замечание 4.3. *В качестве определения независимых событий A и B кажется более логичным выбрать условие$P(A|B) = P(A)$ или $P(B|A) = P(B)$, а не условие $P(AB) = P(A)P(B)$. Однако последнее условие работает всегда, а то время как первые два условия работают лишь при* $P(B) > 0 (P(A) > 0)$