Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 2

Дисциплина	Математическая статистика.
Тема	Интервальные оценки.
Студент	Степанов А. О.
Группа	ИУ7-63Б
Оценка (баллы)	
Преподаватель	Власов П.А.

Москва, 2020 г.

ФОРМУЛЫ

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до вектора $\vec{\theta} = \left(\theta_1, ..., \theta_r\right)$ неизвестных параметров. Для упрощения рассуждений будем считать, что $r = 1$ и

$$\vec{\theta} = \left(\theta_1\right) = \left(\theta\right) \in \mathbb{R}^1$$

то есть закон распределения случайной величины X зависит от одного скалярного неизвестного параметра.

Пусть $\vec{X}$ – случайная выборка объема n из генеральной совокупности X. Тогда $\vec{x}$ – любая реализация случайной выборки $\vec{X}$.

γ-доверительный интервал

Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}\left(\vec{X}\right)$ и $\overline{\theta}\left(\vec{X}\right)$ таких, что

$$P\left\{\underline{\theta}\left(\vec{X}\right) < \theta < \overline{\theta}\left(\vec{X}\right)\right\} = \gamma$$

Доверительным интервалом с коэффициентом доверия γ (γ-доверительным интервалом) параметра θ называют интервал $\left(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x})\right)$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}\left(\vec{X}\right)$ и $\overline{\theta}\left(\vec{X}\right)$.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала

Пусть генеральная совокупность X распределена по нормальному закону с параметрами μ и σ^2.

Тогда оценка математического ожидания

$$\underline{\mu}\left(\vec{X}\right) = \overline{X} - \frac{S\left(\vec{X}\right) t_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X})t_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$$

где

- $\overline{X}$ – оценка математического ожидания;
- n – число опытов;
- $S(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии случайной выборки $\vec{X}$;
- $t_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $1-\alpha$ для распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы;
- $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$.

Оценка для дисперсии

$$\underline{\sigma^2}(\vec{X}) = \frac{S(\vec{X})(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha}}$$

$$\overline{\sigma^2}(\vec{X}) = \frac{S(\vec{X})(n-1)}{\chi^2_{\alpha}}$$

где

- n – объем выборки;
- $S(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии случайной выборки $\vec{X}$;
- χ^2_α – квантиль уровня α для распределения χ^2 с $n-1$ степенями свободы;
- $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$.

ТЕКСТ ПРОГРАММЫ

Листинг 1: Текст программы

```
function lab2()
    X = [...
        -7.50,-6.61,-7.85,-7.72,-8.96,-6.55,-7.82,-6.55,-6.87,-5.95,...
        -5.05,-4.56,-6.14,-6.83,-6.33,-7.67,-4.65,-6.30,-8.01,-5.88,...
        -5.38,-7.06,-6.85,-5.53,-7.83,-5.89,-7.57,-6.76,-6.02,-4.62,...
        -8.55,-6.37,-7.52,-5.78,-6.12,-8.82,-5.14,-7.68,-6.14,-6.48,...
        -7.14,-6.25,-7.32,-5.51,-6.97,-7.86,-7.04,-6.24,-6.41,-6.00,...
        -7.46,-6.00,-6.06,-5.94,-5.39,-5.06,-6.91,-8.06,-7.24,-6.42,...
        -8.73,-6.20,-7.35,-5.90,-5.02,-5.93,-7.56,-7.49,-6.26,-6.06,...
        -7.35,-5.10,-6.52,-7.97,-5.71,-7.62,-7.33,-5.31,-6.21,-7.28,...
        -7.99,-4.65,-7.07,-7.31,-7.72,-5.22,-7.00,-7.17,-6.64,-7.00,...
        -6.12,-6.57,-6.07,-6.65,-7.60,-6.92,-6.78,-6.85,-7.90,-7.40,...
        -5.32,-6.58,-6.71,-5.07,-5.80,-4.87,-5.90,-7.43,-7.03,-6.67,...
        -7.72,-5.83,-7.49,-6.68,-6.71,-7.31,-7.83,-7.92,-5.97,-6.34 ...
    ];

    gamma = 0.9;

    [Mu, S2] = pointEstimate(X);
    fprintf("Mu␣=␣%.2f\n", Mu);
    fprintf("S^2␣=␣%.2f\n", S2);

    [bottomMu, topMu] = bordersMu(X, gamma);
    fprintf("mu␣in␣(%.2f;␣%.2f)\n", bottomMu, topMu);

    [bottomS, topS] = bordersS(X, gamma);
    fprintf("sigma␣in␣(%.2f;␣%.2f)\n", bottomS, topS);

    graph(X, gamma, @mean, @bordersMu, ...
        'Mu(N)', 'Mu(n)', 'Bottom␣Mu(n)', 'Top␣Mu(n)');
    graph(X, gamma, @var, @bordersS, ...
        'Sigma(N)', 'Sigma(n)', 'Bottom␣Sigma(n)', 'Top␣Sigma(n)');
end

% Точечные оценки
% [in] X - генеральная совокупность
% [out] Mu - точечная оценка математического ожидания
% [out] S2 - точечная оценка дисперсии
function [Mu, S2] = pointEstimate(X)
```

```
    Mu = mean(X);
    S2 = var(X);
end

% Границы доверительного интервала для математического ожидания
% [in] X - генеральная совокупность
% [in] gamma - уровень доверительного интервала
% [out] bottom - нижняя граница доверительного интервала
% [out] top - верхняя граница доверительного интервала
function [bottom, top] = bordersMu(X, gamma)
    n = length(X);
    average = mean(X);
    S = sqrt(var(X));
    alpha = (1 + gamma) / 2;
    interval = S / sqrt(n) * tinv(alpha, n - 1);

    bottom = average - interval;
    top    = average + interval;
end

% Границы доверительного интервала для дисперсии
% [in] X - генеральная совокупность
% [in] gamma - уровень доверительного интервала
% [out] bottom - нижняя граница доверительного интервала
% [out] top - верхняя граница доверительного интервала
function [bottom, top] = bordersS(X, gamma)
    n = length(X);
    S2 = var(X);

    bottom = (n - 1) * S2 / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
    top    = (n - 1) * S2 / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
end

% Построение графиков
% [in] X - генеральная совокупность
% [in] gamma - уровень доверительного интервала
% [in] pointEst - функция точечной оценки
% [in] borders - функция нахождения границ доверительного интервала
% [in] label1 - подпись к графику точечной оценки от N
% [in] label2 - подпись к графику точечной оценки от n
% [in] label3 - подпись к графику верхней границы от n
% [in] label4 - подпись к графику нижней границы от n
```

```
function graph(X, gamma, pointEst, borders, label1, label2, label3, label4)
    n = length(X);

    figure
    plot([1, n], [pointEst(X), pointEst(X)]);
    hold on;
    grid on;

    arr = zeros(1, n);
    arrBottom = zeros(1, n);
    arrTop = zeros(1, n);

    for i = 1:n
        arr(i) = pointEst(X(1:i));
        [arrBottom(i), arrTop(i)] = borders(X(1:i), gamma);
    end

    plot(1:n, arr);
    plot(1:n, arrBottom);
    plot(1:n, arrTop);

    legend(label1, label2, label3, label4);
    hold off;
end
```

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

$$\hat{\mu}(\vec{x}_n) = -6.65$$
$$\hat{S}^2(\vec{x}_n) = 0.95$$
$$\mu(\vec{x}_n) \in \big(-6.80; -6.50\big)$$
$$\sigma(\vec{x}_n) \in \big(0.78; 1.19\big)$$

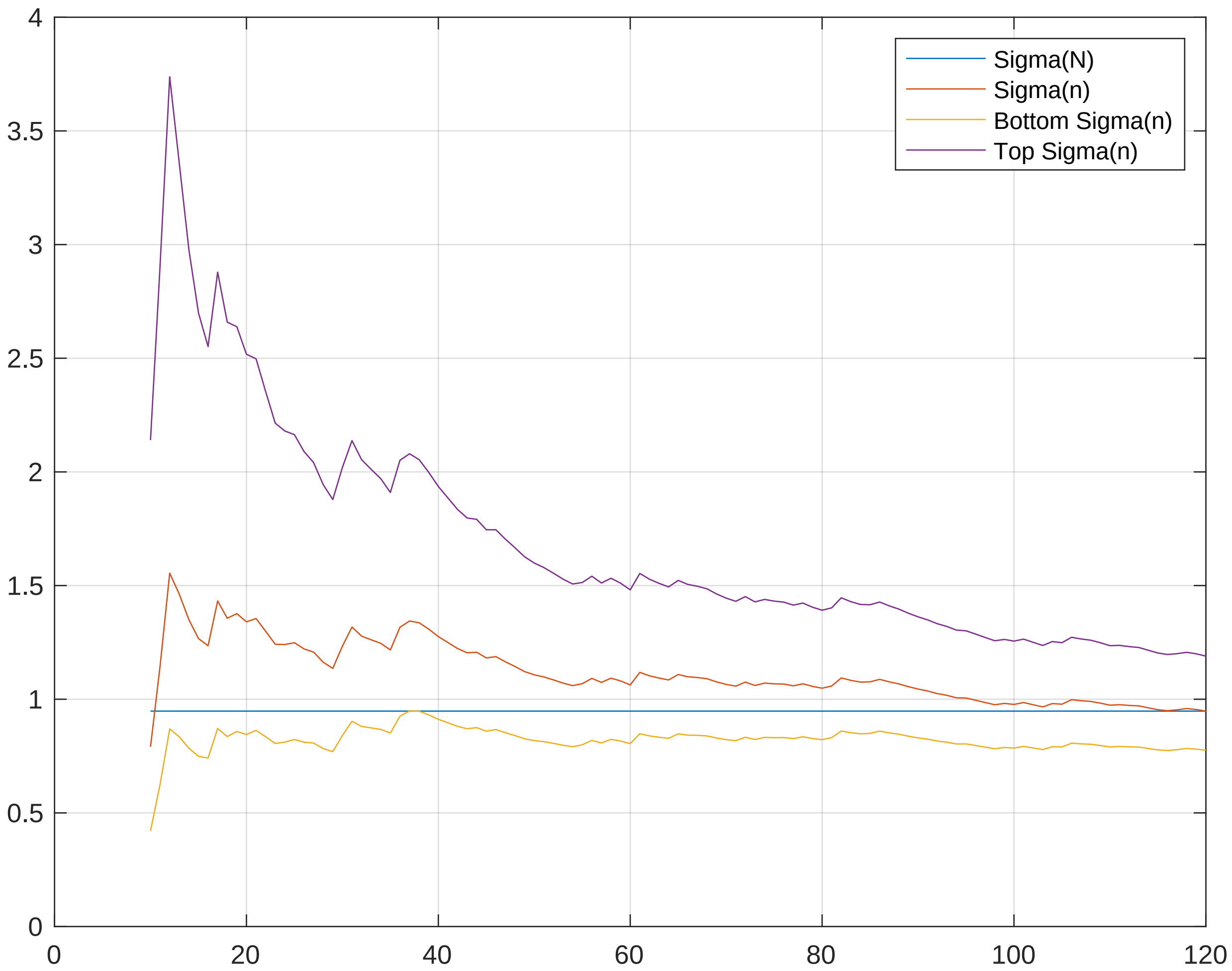

Рис. 1: Графики оценки математического ожидания

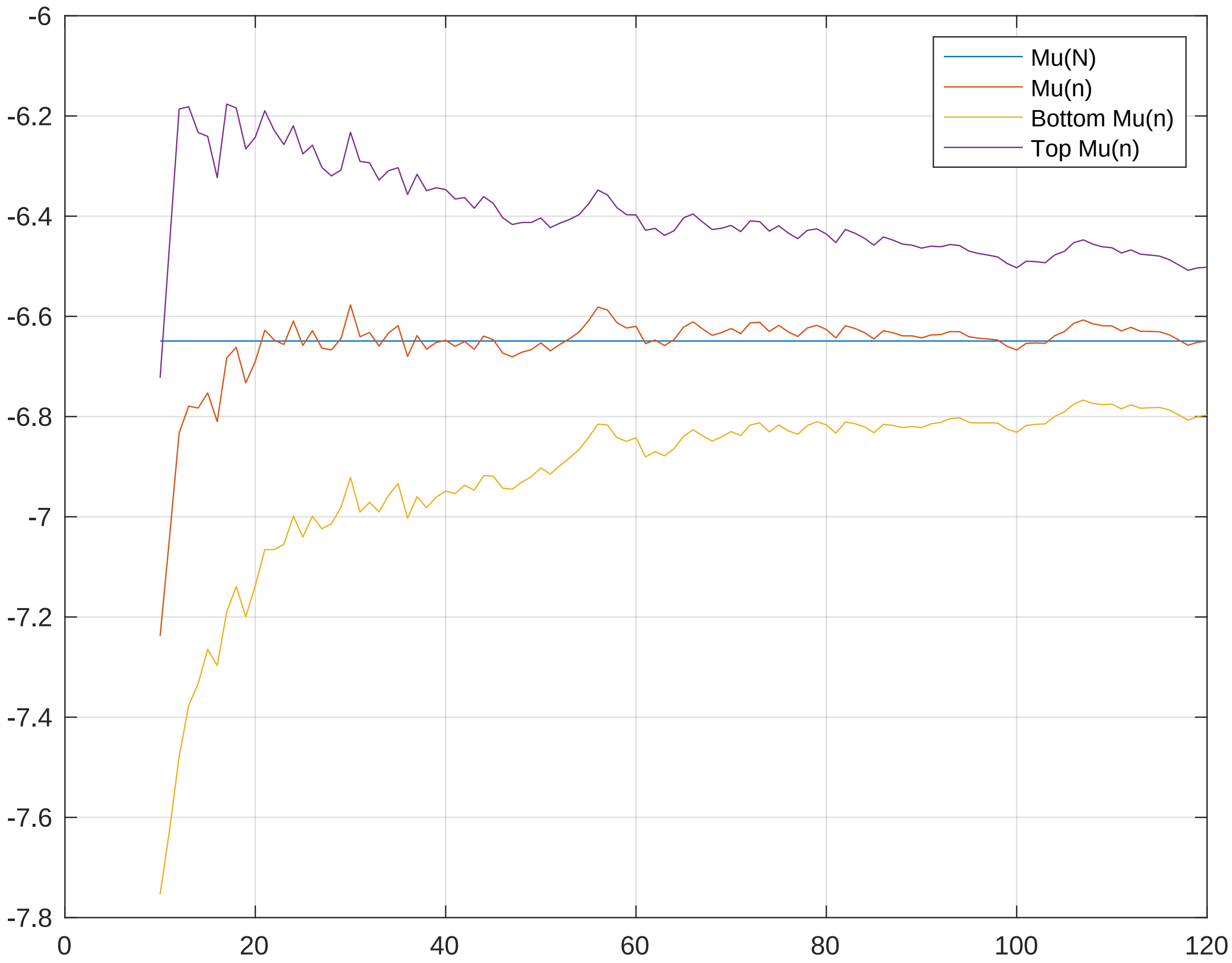

Рис. 2: Графики оценки дисперсии