Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Домашняя работа № 1

Вариант 23

Дисциплина Математическая статистика.
Тема

Студент Степанов А. О.
Группа ИУ7-63Б
Оценка (баллы)
Преподаватель Власов П.А.

Москва, 2020 г.

ЗАДАЧА 1

Вероятность некоторого случайного события равна 0.9. Какова вероятность того, что после 64 000 независимых испытаний наблюденная частота этого события лежит в интервале 0.9±0.01? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра-Лапласа

Неравенство Чебышева

Пусть

— X - случайная величина

— $\exists MX,\ \exists DX$

$$\forall \varepsilon > 0, P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Решение

— Пусть k_n – число успехов в серии испытаний по схеме Бернулли ($p = 0.9$)

— $M[K_n] = np = 64000 \cdot 0.9 = 57600$

— $D[K_n] = npq = 64000 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 5760$

$$P\{0.89 \leq r_{\text{н}} \leq 0.91\} = P\{0.89 \leq \frac{k_n}{n} \leq 0.91\} = P\{56960 \leq k_n \leq 58240\} =$$
$$= P\{-640 \leq k_n - M[K_n] \leq 640\} = P\{\left|k_n - M[K_n]\right| \leq 640\} \geq 1 - \frac{D[K_n]}{\varepsilon^2} =$$
$$= 1 - \frac{5760}{640^2} = 1 - 0.014 = 0.986$$

Ответ: $P\{0.89 \leq r_{\text{н}} \leq 0.91\} \geq 0.986$

Теорема Муавра-Лапласа

Решение

Имеем схему испытаний Бернулли

— $n = 64000 \gg 1$

— $p = 0.9$

— $q = 1 - p = 0.1$

$$P\{0.89 \le r_{\text{н}} \le 0.91\} = P\{0.89 \le \frac{k_n}{n} \le 0.91\} = P\{56960 \le k_n \le 58240\} \approx$$
$$\approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1) \approx 2\Phi_0(8.4327) \approx 2 \cdot 0.49999 \approx 0.99998$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{56960 - 64000 \cdot 0.9}{\sqrt{64000 \cdot 0.9 \cdot 0.1}} \approx \frac{-640}{75.89} \approx -8.4327$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{58240 - 64000 \cdot 0.9}{\sqrt{64000 \cdot 0.8 \cdot 0.1}} \approx \frac{640}{75.89} \approx 8.4327$$

Ответ: $P\{0.89 \le r_{\text{н}} \le 0.91\} \approx 0.99998$.

ЗАДАЧА 2

С использованием метода моментов для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения.

Закон распределения

$$f_X(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}, x > 0$$

Решение

1. Неизвестный параметр $\theta \Rightarrow r = 1 \Rightarrow$ найдем моменты до первого порядка

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} x\theta^2 x e^{-\theta x}dx = \theta^2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\theta x}dx =$$

$$= \theta^2 \cdot \left(-\frac{1}{\theta}\right) \int_0^{+\infty} x^2 de^{-\theta x} = \underbrace{-\theta x^2 e^{-\theta x}\Big|_0^{+\infty}}_{0} + 2\theta \int_0^{+\infty} x e^{-\theta x}dx =$$

$$= -2\int_0^{+\infty} x de^{-\theta x} = \underbrace{-2x e^{-\theta x}\Big|_0^{+\infty}}_{0} + 2\int_0^{+\infty} e^{-\theta x}dx = -\frac{2}{\theta}e^{-\theta x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\theta}$$

2. Приравняем теоретические моменты к их выборочным аналогам

$$\frac{2}{\theta} = \overline{X} \Rightarrow \theta = \frac{2}{\overline{X}}$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Ответ: $\theta = \frac{2}{\overline{X}}$

ЗАДАЧА 3

С использованием метода максимального правдоподобия для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки параметров заданного закона распределения. Вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки $\vec{x}_5 = (x_1, ..., x5)$.

Закон распределения

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-x/\theta}, x > 0$$

Выборка $\vec{x}_5$

$$(4, 12, 6, 7, 9)$$

Решение

$$L(\vec{X},\theta) = f(X_1,\theta)\cdot\ldots\cdot f(X_n,\theta) = \frac{1}{\theta^{2n}}\cdot\Big(X_1\cdot\ldots\cdot X_n\Big)\cdot\Big(e^{-X_1/\theta}\cdot\ldots\cdot e^{-X_n/\theta}\Big)$$

$$\ln L = -2n\ln\theta + \ln\Big(X_1\cdot\ldots\cdot X_n\Big) - \frac{X_1+\ldots+X_n}{\theta}$$

Необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta} = \frac{-2n}{\theta} + \frac{X_1+\ldots+X_n}{\theta^2} = 0$$

$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{\theta} = 2n \Rightarrow \theta = \frac{X_1+..+X_n}{2n} = \frac{\overline{X}}{2}$$

Достаточное условие экстремума

$$\frac{\partial^2\ln L}{\partial^2\theta} = \frac{2n}{\theta^2} - 2\frac{X_1+\ldots+X_n}{\theta^3} = \frac{2n}{\theta^2} - \frac{2n\overline{X}}{\theta^3} = \frac{8n}{\overline{X}^2} - \frac{16n}{\overline{X}^2} < 0$$

$$\theta = \frac{\overline{X}}{2} \text{ – точка локального максимума}$$

Подставим выборку $\vec{x}_5$

$$\theta = \frac{4+12+6+7+9}{2\cdot 5} = \frac{38}{10} = 3.8$$

Ответ: $\theta = \frac{\overline{X}}{2} = 3.8$.

ЗАДАЧА 4

При помощи вольтметра, точность которого характеризуется средним квадратичным отклонением $\sigma = 0.2$ В, произведено $n = 10$ измерений напряжения бортовой батареи, в результате которых получено $\overline{X}_n = 50.2$ В. Считая распределение контролируемого признака нормальным, построить для него доверительный интервал уровня $\gamma = 0.95$.

Решение

Из условия следует, что $X \sim N(m,\sigma^2)$, где $\sigma = 0.2$.

$$g\left(\vec{X}, m\right) = \frac{m - \overline{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2} = 0.025$$

$$\gamma = P\left\{u_{\alpha_1} < \frac{m - \overline{X}}{\sigma}\sqrt{n} < u_{1-\alpha_2}\right\} = P\left\{\overline{X} - \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\right\}$$

В качестве нижней границы γ-доверительного интервала для m можно использовать статистику

$$\underline{m}\left(\vec{X}\right) = \overline{X} - \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

В качестве верхней границы – статистику

$$\overline{m}\left(\vec{X}\right) = \overline{X} + \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

Из таблицы квантилей получаем

$$u_{\frac{1+\gamma}{2}} = u_{0.975} = 1.9599$$

$$\frac{\sigma \cdot u_{0.975}}{\sqrt{n}} = \frac{0.2 \cdot 1.9599}{\sqrt{10}} \approx 0.124$$

$$\underline{m}\left(\vec{X}\right) \approx 50.2 - 0.124 \approx 50.076, \quad \overline{m}\left(\vec{X}\right) \approx 50.2 + 0.124 \approx 50.324$$

Ответ: $m \in (50.076; 50.324)$.