



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический  
университет имени Н.Э. Баумана»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

---

## Лабораторная работа № 4

Дисциплина	Моделирование.
Тема	Программно-алгоритмическая реализация моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями II и III рода.
Студент	Степанов А. О.
Группа	ИУ7-63Б
Оценка (баллы)	
Преподаватель	Градов В.М.

Москва, 2020 г.

**Цель работы:** Получение навыков разработки алгоритмов решения смешанной краевой задачи при реализации моделей, построенных на квазилинейном уравнении параболического типа.

## ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

### Задана математическая модель

Уравнение для функции  $T(x, t)$  (формула 1).

$$c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{2}{R} \alpha(x) T + \frac{2T_0}{R} \alpha(x) \quad (1)$$

Краевые условия

$$\begin{cases} t = 0, T(x, 0) = T_0 \\ x = 0, -k(T(0)) \frac{\partial T}{\partial x} = F_0 \\ x = l, -k(T(l)) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_N (T(l) - T_0) \end{cases}$$

### Разностная схема

Систему квазилинейных разностных уравнений видно на формуле 2.

$$\begin{cases} \widehat{K}_0 \widehat{y}_0 + \widehat{M}_0 \widehat{y}_1 = \widehat{P}_0 \\ \widehat{A}_n \widehat{y}_{n-1} - \widehat{B}_n \widehat{y}_n + \widehat{D}_n \widehat{y}_{n+1} = -\widehat{F}_n, \quad 1 \leq n \leq N-1 \\ \widehat{K}_N \widehat{y}_N + \widehat{M}_{N-1} \widehat{y}_{N-1} = \widehat{P}_N \end{cases} \quad (2)$$

Разностный аналог краевого условия при  $x = 0$

$$\begin{aligned} \left( \frac{h}{8} \widehat{c}_{\frac{1}{2}} + \frac{h}{4} \widehat{c}_0 + \widehat{\chi}_{\frac{1}{2}} \frac{\tau}{h} + \frac{\tau h}{8} p_{\frac{1}{2}} + \frac{\tau h}{4} p_0 \right) \widehat{y}_0 + \left( \frac{h}{8} \widehat{c}_{\frac{1}{2}} - \widehat{\chi}_{\frac{1}{2}} \frac{\tau}{h} + \frac{\tau h}{8} p_{\frac{1}{2}} \right) \widehat{y}_1 = \\ = \frac{h}{8} \widehat{c}_{\frac{1}{2}} (y_0 + y_1) + \frac{h}{4} \widehat{c}_0 y_0 + \widehat{F} \tau + \frac{\tau h}{4} (\widehat{f}_{\frac{1}{2}} + \widehat{f}_0) \end{aligned} \quad (3)$$

Получим разностный аналог краевого условия  $x = l$ . Проинтегрируем уравне-

ние 1 на отрезке  $[x_{N-\frac{1}{2}}, x_N]$  и на временном интервале  $[t_m, t_{m+1}]$ .

$$\begin{aligned} \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} c(u) \frac{\partial u}{\partial t} dt = & - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} \frac{\partial F}{\partial x} dx - \\ & - \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x) u dt + \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(u) dt \end{aligned}$$

$$\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} \widehat{c} (\widehat{u} - u) dx = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} (F_N - F_{N-\frac{1}{2}}) dt - \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} p \widehat{u} \tau dx + \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} \widehat{f} \tau dx$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{4} [ \widehat{c}_N (\widehat{y}_N - y_N) + \widehat{c}_{N-\frac{1}{2}} (\widehat{y}_{N-\frac{1}{2}} - y_{N-\frac{1}{2}}) ] = & - (\widehat{F}_N - \widehat{F}_{N-\frac{1}{2}}) \tau - \\ & - (p_N \widehat{y}_N + p_{N-\frac{1}{2}} \widehat{y}_{N-\frac{1}{2}}) \tau \frac{h}{4} + (\widehat{f}_N + \widehat{f}_{N-\frac{1}{2}}) \tau \frac{h}{4} \end{aligned}$$

Подставим 4, 5, 6 и 7.

$$\widehat{y}_{N-\frac{1}{2}} = \frac{\widehat{y}_{N-1} + \widehat{y}_N}{2} \quad (4)$$

$$y_{N-\frac{1}{2}} = \frac{y_{N-1} + y_N}{2} \quad (5)$$

$$\widehat{F}_N = \alpha_N (\widehat{y}_N - T_0) \quad (6)$$

$$\widehat{F}_{N-\frac{1}{2}} = \widehat{\chi}_{N-\frac{1}{2}} \frac{\widehat{y}_{N-1} - \widehat{y}_N}{h} \quad (7)$$

Получим

$$\begin{aligned}
& \widehat{y}_N \left( \frac{h}{4} \widehat{c}_N + \frac{h}{8} \widehat{c}_{N-\frac{1}{2}} + \alpha_N \tau + \widehat{\chi}_{N-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{h} + p_N \frac{\tau h}{4} + p_{N-\frac{1}{2}} \frac{\tau h}{8} \right) + \\
& \quad + \widehat{y}_{N-1} \left( \frac{h}{8} \widehat{c}_{N-\frac{1}{2}} - \widehat{\chi}_{N-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{h} + p_{N-\frac{1}{2}} \frac{\tau h}{8} \right) = \\
& = \frac{h}{4} \widehat{c}_N y_N + \frac{h}{8} \widehat{c}_{N-\frac{1}{2}} y_{N-1} + \frac{h}{8} \widehat{c}_{N-\frac{1}{2}} y_N + T_0 \alpha_N \tau + \left( \widehat{f}_N + \widehat{f}_{N-\frac{1}{2}} \right) \frac{\tau h}{4} \quad (8)
\end{aligned}$$

С помощью формул 2 и 3 получим коэффициенты  $\widehat{K}_0, \widehat{M}_0, \widehat{P}_0$ , а с помощью 2 и 8 –  $\widehat{K}_N, \widehat{M}_{N-1}, \widehat{P}_N$ .

Значения параметров для отладки

$$\begin{aligned}
k(T) &= a_1(b_1 + c_1 T^{m_1}), \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \text{К}}, \\
c(T) &= a_2 + b_2 T^{m_2} - \frac{c_2}{T^2}, \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3 \text{К}}, \\
a_1 &= 0.0134, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 4.35 \cdot 10^{-4}, \quad m_1 = 1, \\
a_2 &= 2.049, \quad b_2 = 0.563 \cdot 10^{-3}, \quad c_2 = 0.528 \cdot 10^5, \quad m_2 = 1 \\
\alpha(x) &= \frac{c}{x-d}, \\
\alpha_0 &= 0.05 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \text{К}}, \\
\alpha_N &= 0.01 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \text{К}}, \\
l &= 10 \text{ см}, \\
T_0 &= 300 \text{ К}, \\
R &= 0.5 \text{ см} \\
F(t) &= 50 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}.
\end{aligned}$$