Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 4

Дисциплина	Моделирование.
Тема	Программно-алгоритмическая реализация моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями II и III рода.
Студент	Степанов А. О.
Группа	ИУ7-63Б
Оценка (баллы)	
Преподаватель	Градов В.М.

Москва, 2020 г.

Цель работы: Получение навыков разработки алгоритмов решения смешанной краевой задачи при реализации моделей, построенных на квазиинейном уравнении параболического типа.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Задана математическая модель

Уравнение для функции $T(x,t)$ (формула 1).

$$c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{2}{R}\alpha(x)T + \frac{2T_0}{R}\alpha(x) \tag{1}$$

Краевые условия

$$\begin{cases} t = 0, T(x,0) = T_0 \\ x = 0, -k\big(T(0)\big)\frac{\partial T}{\partial x} = F_0 \\ x = l, -k\big(T(l)\big)\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_N\big(T(l) - T_0\big) \end{cases}$$

Функция $\alpha(x)$

$$\alpha(x) = \frac{c}{x-d}$$

, где

$$c = -\alpha_0 d = \frac{\alpha_0\alpha_N l}{\alpha_0 - \alpha_N}$$

$$d = \frac{\alpha_N l}{\alpha_N - \alpha_0}$$

Разностная схема

Систему квазилинейных растностных уравнений видно на формуле 2.

$$\begin{cases} \widehat{K}_0 \widehat{y}_0 + \widehat{M}_0 \widehat{y}_1 = \widehat{P}_0 \\ \widehat{A}_n \widehat{y}_{n-1} - \widehat{B}_n \widehat{y}_n + \widehat{D}_n \widehat{y}_{n+1} = -\widehat{F}_n, \quad 1 \le n \le N-1 \\ \widehat{K}_N \widehat{y}_N + \widehat{M}_{N-1} \widehat{y}_{N-1} = \widehat{P}_N \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\widehat{A}_n = \widehat{\chi}_{n-\frac{1}{2}} \tfrac{\tau}{h} \\ &\widehat{B}_n = \widehat{A}_n + \widehat{D}_n + \widehat{c}_n h + p_n h\tau \\ &\widehat{D}_n = \widehat{\chi}_{n+\frac{1}{2}} \tfrac{\tau}{h} \\ &\widehat{F}_n = f_n h\tau + \widehat{c}_n y_n h \end{aligned}$$

Краевые условия

Обозначим:

$$\begin{aligned} &F = -k(T)\tfrac{\partial T}{\partial x} \\ &p(x) = \tfrac{2}{R}\alpha(x) \\ &f(x) = \tfrac{2T_0}{R}\alpha(x) \end{aligned}$$

Разностный аналог краевого условия при $x = 0$

$$\left(\frac{h}{8}\widehat{c}_{\frac{1}{2}} + \frac{h}{4}\widehat{c}_0 + \widehat{\chi}_{\frac{1}{2}}\frac{\tau}{h} + \frac{\tau h}{8}p_{\frac{1}{2}} + \frac{\tau h}{4}p_0\right)\widehat{y}_0 + \left(\frac{h}{8}\widehat{c}_{\frac{1}{2}} - \widehat{\chi}_{\frac{1}{2}}\frac{\tau}{h} + \frac{\tau h}{8}p_{\frac{1}{2}}\right)\widehat{y}_1 = \\ = \frac{h}{8}\widehat{c}_{\frac{1}{2}}\left(y_0 + y_1\right) + \frac{h}{4}\widehat{c}_0 y_0 + \widehat{F}\tau + \frac{\tau h}{4}\left(\widehat{f}_{\frac{1}{2}} + \widehat{f}_0\right) \tag{3}$$

Получим разностный аналог краевого условия $x = l$. Проинтегрируем уравнение 1 на отрезке $[x_{N-\frac{1}{2}}, x_N]$ и на временном интервале $[t_m, t_{m+1}]$.

$$\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} c(u)\frac{\partial u}{\partial t}dt = -\int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} \frac{\partial F}{\partial x}dx - \\ - \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x)u\,dt + \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(u)dt$$

$$\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} \overset{\frown}{c} \, (\overset{\frown}{u} - u)dx = -\int_{t_m}^{t_{m+1}} \left(F_N - F_{N-\frac{1}{2}}\right)dt - \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} p \, \overset{\frown}{u} \, \tau dx + \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} \overset{\frown}{f} \, \tau dx$$

$$\frac{h}{4}\Big[\overset{\frown}{c}_N \, (\overset{\frown}{y}_N - y_N)+ \overset{\frown}{c}_{N-\frac{1}{2}} \, (\overset{\frown}{y}_{N-\frac{1}{2}} - y_{N-\frac{1}{2}})\Big] = -(\overset{\frown}{F}_N - \overset{\frown}{F}_{N-\frac{1}{2}})\tau -$$
$$- \left(p_N \, \overset{\frown}{y}_N + p_{N-\frac{1}{2}} \, \overset{\frown}{y}_{N-\frac{1}{2}} \right)\tau\frac{h}{4} + (\overset{\frown}{f}_N + \overset{\frown}{f}_{N-\frac{1}{2}})\tau\frac{h}{4}$$

Подставим 4, 5, 6 и 7.

$$\overset{\frown}{y}_{N-\frac{1}{2}} = \frac{\overset{\frown}{y}_{N-1} + \overset{\frown}{y}_N}{2} \tag{4}$$

$$y_{N-\frac{1}{2}} = \frac{y_{N-1} + y_N}{2} \tag{5}$$

$$\overset{\frown}{F}_N = \alpha_N\left(\overset{\frown}{y}_N - T_0\right) \tag{6}$$

$$\overset{\frown}{F}_{N-\frac{1}{2}} = \overset{\frown}{\chi}_{N-\frac{1}{2}} \, \frac{\overset{\frown}{y}_{N-1} - \overset{\frown}{y}_N}{h} \tag{7}$$

Получим

$$\overset{\frown}{y}_N \left(\frac{h}{4} \, \overset{\frown}{c}_N + \frac{h}{8} \, \overset{\frown}{c}_{N-\frac{1}{2}} + \alpha_N\tau + \overset{\frown}{\chi}_{N-\frac{1}{2}} \, \frac{\tau}{h} + p_N\frac{\tau h}{4} + p_{N-\frac{1}{2}}\frac{\tau h}{8}\right) +$$
$$+ \overset{\frown}{y}_{N-1} \left(\frac{h}{8} \, \overset{\frown}{c}_{N-\frac{1}{2}} - \overset{\frown}{\chi}_{N-\frac{1}{2}} \, \frac{\tau}{h} + p_{N-\frac{1}{2}}\frac{\tau h}{8}\right) =$$
$$= \frac{h}{4} \, \overset{\frown}{c}_N \, y_N + \frac{h}{8} \, \overset{\frown}{c}_{N-\frac{1}{2}} \, y_{N-1} + \frac{h}{8} \, \overset{\frown}{c}_{N-\frac{1}{2}} \, y_N + T_0\alpha_N\tau + (\overset{\frown}{f}_N + \overset{\frown}{f}_{N-\frac{1}{2}})\frac{\tau h}{4} \tag{8}$$

С помощью формул 2 и 3 получим коэффициенты $\overset{\frown}{K}_0, \overset{\frown}{M}_0, \overset{\frown}{P}_0$, а с помощью 2 и 8 – $\overset{\frown}{K}_N, \overset{\frown}{M}_{N-1}, \overset{\frown}{P}_N$.

Метод простых итераций

Для решения системы 2 используется метод простых итераций. Обозначим текущую итерацию за s, тогда предыдущая – $s-1$. С данными обозначениями итерационный процесс организуется следующим образом

$$A_n^{s-1} y_{n+1}^s - B_n^{s-1} y_n^s + D_n^{s-1} y_{n-1}^s = -F_n^{s-1}$$

Решение данной схемы осуществляется методом прогонки. Итерации прекращаются при условии

$$\max \left| \frac{y_n^s - y_n^{s-1}}{y_n^s} \right| \leq \varepsilon, n = \overline{0; N}$$

Значения параметров для отладки

$$\begin{aligned}
&k(T) = a_1(b_1 + c_1 T^{m_1}), \tfrac{\text{Вт}}{\text{см К}},\\
&c(T) = a_2 + b_2 T^{m_2} - \tfrac{c_2}{T^2}, \tfrac{\text{Дж}}{\text{см}^3\text{К}},\\
&a_1 = 0.0134,\ b_1 = 1,\ c_1 = 4.35 \cdot 10^{-4},\ m_1 = 1,\\
&a_2 = 2.049,\ b_2 = 0.563 \cdot 10^{-3},\ c_2 = 0.528 \cdot 10^5,\ m_2 = 1\\
&\alpha(x) = \tfrac{c}{x-d},\\
&\alpha_0 = 0.05\ \tfrac{\text{Вт}}{\text{см}^2\text{К}},\\
&\alpha_N = 0.01\ \tfrac{\text{Вт}}{\text{см}^2\text{К}},\\
&l = 10\ \text{см},\\
&T_0 = 300\ \text{К},\\
&R = 0.5\ \text{см}\\
&F(t) = 50 \tfrac{\text{Вт}}{\text{см}^2}.
\end{aligned}$$

ЛИСТИНГИ