

## Wstęp

W poniższym raporcie pochylimy się nad rozwiązywaniem liniowych równań różniczkowych drugiego rzędu przy pomocy metody Milne'a. Jest to metoda wielokrokowa, a więc potrzebne będą wartości początkowe  $y_1, y_2, y_3$ , które wyznaczymy korzystając z metody jednokrokowej Rungego-Kutty rzędu 4-go ("3/8"). Metoda ta okazała się być bardzo efektywna, jednakże nie zawsze stabilna dla niektórych równań różniczkowych.

## Opis metody Milne'a

Rozpatrzmy funkcję  $y' = f(x, y)$  na przedziale  $[a, b]$ , na  $n$  punktach, ze stałym krokiem  $h := \frac{b-a}{n}$ , dla której znamy wartości  $y(x_i), y(x_{i-1}), y(x_{i-2})$  oraz  $y(x_{i-3})$ .

Metoda Milne'a dzieli się na dwa etapy: predyktor oraz korektor

### Predyktor

Predyktor opiera się na otwartej metodzie Newtona-Cotesa drugiego rzędu [3].

Łatwo można zauważyć, że zachodzi następująca równość

$$y(x_{i+1}) = y(x_{i-3}) + \int_{x_{i-3}}^{x_{i+1}} f(x, y) dx.$$

stosując otwartą metodę Newtona-Cotesa drugiego rzędu dla powyższej całki otrzymamy

$$y^{(p)}(x_{i+1}) = y(x_{i-3}) + \frac{4h}{3}(2f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) - f(x_i, y(x_i)) + 2f(x_{i+1}, y^{(p)}(x_{i+1}))).$$

Co po podstawieniu da nam przewidywaną wartość  $y^{(p)}(x_{i+1})$

### Korektor

mając przewidywaną wartość  $y^{(p)}(x_{i+1})$  możemy zauważyć, że nasza funkcja musi spełniać równanie

$$y(x_{i+1}) = y(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y) dx.$$

Przybliżając całkę z powyższego wzoru metodą Simpsona [1, str. 35] otrzymamy równanie

$$y^{(c)}(x_{i+1}) = y(x_{i-1}) + \frac{h}{3}(f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + 4f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y^{(p)}(x_{i+1}))),$$

które poprawia nasze oszacowanie  $y(x_{i+1})$ .

## Równania drugiego rzędu

Dla równań drugiego rzędu będziemy postępować analogicznie, z tą różnicą, że tym razem będziemy mieli funkcje  $y'' = f(x, y, y')$ , a więc będziemy stosować metodę Milne'a do wyznaczenia  $y(x_{i+1})$  oraz  $y'(x_{i+1})$  zapisując nasze równanie różniczkowe w układ równań pierwszego rzędu, analogicznie jak dla metody Rungego - Kutty [2, str. 50 - 52].

## Eksperymenty numeryczne

Łatwo można zauważyć, że po obliczeniu maksymalnej wartości błędu  $e_1$  dla rozwiązania naszego równania na zadanym przedziale dla jakiegoś kroku  $h_1$  oraz analogicznie wyliczając maksymalną wartość błędu  $e_k$  dla kroku  $h_k = \frac{h_1}{k}, k \in \mathbb{Z}_+$  możemy spróbować oszacować rząd globalny naszej metody. Zakładając, że  $e_1 = \mathcal{O}(h_1^r)$  a  $e_k = \mathcal{O}(h_k^r)$ , gdzie  $r$  to rząd naszej metody dostajemy równanie

$$\frac{e_1}{e_k} \simeq \left(\frac{h_1}{h_k}\right)^r = k^r,$$

wtedy obustronnie logarytmując równanie stronami otrzymujemy oszacowanie naszego rzędu

$$r \simeq \log_k\left(\frac{e_1}{e_k}\right).$$

W tabeli 1 zostały zestawione ze sobą średnie wyniki oszacowań rzędu metody Milne'a oraz metody Rungego-Kutty "3/8" dla przykładowych równań różniczkowych oraz odpowiednio dobranych parametrów. Przedstawione oszacowanie jest średnią arytmetyczną z wyliczonych oszacowań dla  $e_1$  oraz  $e_k$ , gdzie  $k = 2, 3, \dots, 10$ .

Z wyników poniższej tabeli wynika, że testowana metoda Rungego-Kutty jest około 4 -ego rzędu, co jest zgodne z przewidywanym rezultatem. Rząd metody Milne'a również został oszacowany na około 4 co również jest zgodne z przewidywaniem, jednakże dokładne oszacowane wyniki były średnio trochę niższe od 4. Wynika z tego, że obydwie te metody wraz ze wzrostem ilości punktów powinny bardzo szybko zbiegać, do upragnionej dokładności. Metoda Milne'a by osiągnąć tę samą dokładność może dla niektórych równań wymagać trochę więcej węzłów, lecz rekompensuje to fakt, że jest ona mniej złożona obliczeniowo (W moim przypadku działa około 3 razy szybciej niż metoda Rungego-Kutty)

równanie różniczkowe	warunki początkowe	$a$	$b$	$n_0$	$ROrd$	$MOrd$
$y'' + y' - 2y = 4x$	$y(0) = 0, y'(0) = 0$	0	1	100	4.022	4.007
$y'' + y' = 2(1 - x)$	$y(0) = 2, y'(0) = 2$	0	2	100	4.014	3.873
$y'' + y = 0$	$y(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{\pi}$	0	5	100	4.025	4.102

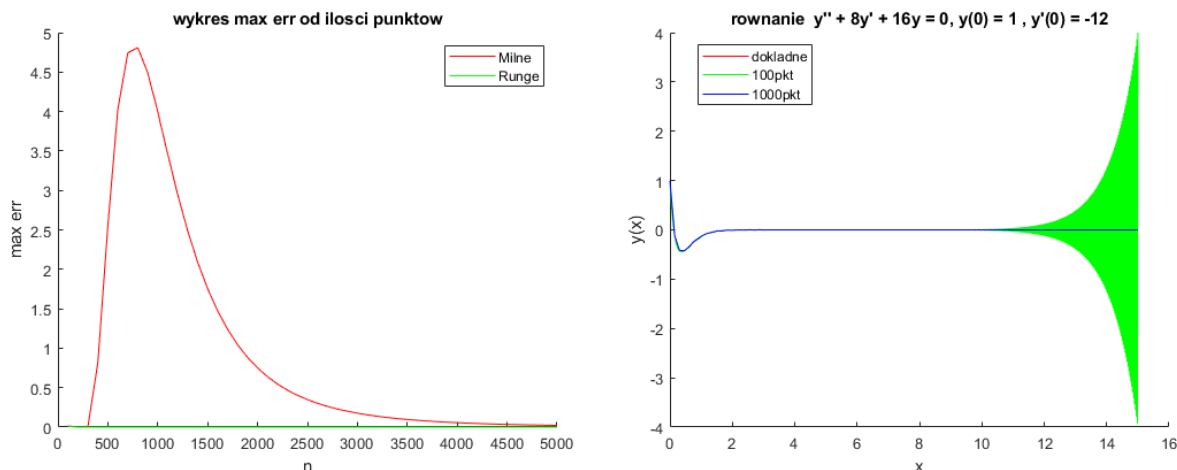
Tabela 1: Średnia oszacowana wartość rzędu metody Milne'a  $MOrd$ , Średnia oszacowana wartość rzędu metody Rungego-Kutty  $ROrd$ , bazowa ilość punktów  $n_0$ , początek przedziału  $a$ , koniec przedziału  $b$ .

Kolejnym eksperymentem, który przeprowadziłem było porównanie zmiany wartości błędu w stosunku do rosnącej ilości punktów na przedziale dla równania sztywnego drugiego rzędu. Równania sztywne są to równania różniczkowe, dla których niektóre metody numeryczne mogą być niestabilne dopóki nie weźmiemy bardzo małego kroku. Testowałem równanie:

$$y'' + 8y' + 16y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -12, \quad (1)$$

na przedziale  $[0, 15]$ , którego rozwiązaniem jest funkcja  $f(x) = e^{-4x}(1 - 8x)$ .

Z rysunku wynika, że metoda Milne'a w przeciwieństwie do Rungego-Kutty, nie jest do końca stabilna dla zadanego przykładu, wzrost liczby punktów do pewnego stopnia powodował nie spadek, a wzrost maksymalnej wartości błędu.



Rysunek 1: Kolejno od lewej: wykres maksymalnej wartości błędu od ilości punktów dla równania 1, wykres wyliczonych wartości dla 100 i 1000 węzłów dla równania 1.

## Literatura

- [1] Dr. Iwona Wróbel *Notatki do wykładu Metody Numeryczne 1.*
- [2] Dr. Paweł Keller *Metody Numeryczne 2.*
- [3] Wolphram MathWorld *Newton-Cotes Formulas.*