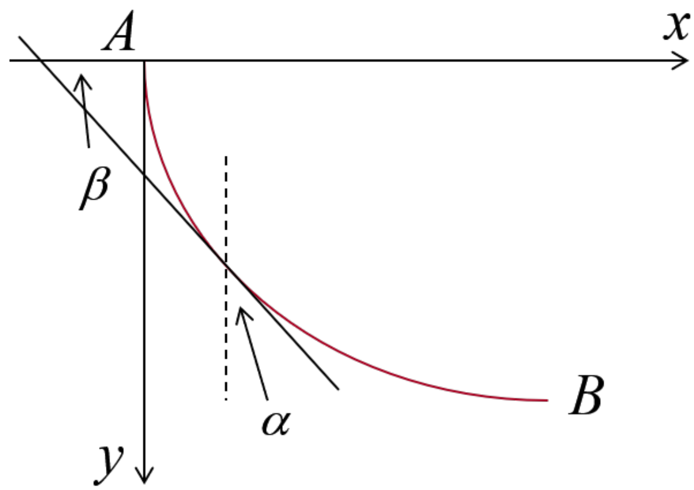
109 學年度數學模型期末書面報告
最速降線問題 Brachistochrone Problem

學校:東海大學 系級:應數三
組員姓名:溫宏岳 陳慕恩 胡家宏 陳曦

摘要

我們假設一個物體在重力作用下，以速率為零開始，求曲線使得物體沿著此曲線由 A 點滑下至 B 點時(B 點在 A 點下方，但不在正下方)，所花費時間最短(不考慮摩擦力)。令上方的點 A 為原點 $A(0,0)$ 且座標如下圖所示，下方的點 B 為 (x_0, y_0)。如果路徑是直線的話，物體移動的距離是最短的。但如果路徑是凹向上的話，物體受到的加速度就會較多，這樣雖然路徑較長，但感覺可以更快到達 B 點。凹向上的曲線也有很多不同的種類，像是圓弧、拋物線、圓錐曲線等，但哪一條才是我們要的**最速降線**呢？ 伽利略認為最速降線必是圓弧，但約翰·白努利不覺得如此，為了解決這個問題，約翰·白努利開創了變分學這門學問。證明此最速降線為函數 $y = y(x)$ 滿足以下微分方程，其中 k 是某待定常數:

$$(1 + (\frac{dy}{dx})^2)y = k^2 \tag{1}$$



1 (a) 對以上方程式求解 $\dfrac{dy}{dx}$ ($以y,k表示$)為什麼要取根號前為正?

這需要用到(d)的斯乃爾定律(Snell's Law)，也就是入射角與折射角成比例($\dfrac{sin\theta_2}{sin\theta_1} = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{n_1}{n_2}$)，由於 $0 \leq$ 入射角 $= \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$， $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$，則 $0 \leq sin\alpha, sin\beta \leq 1$ 且 $0 \leq cos\alpha, cos\beta \leq 1$。又 $0 \leq sin\alpha = cos\beta = \dfrac{1}{sec\beta} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+tan^2\beta}} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx})^2}}$，這裡應該取正 $\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx})^2}} \Rightarrow \dfrac{sin\beta}{cos\beta} = tan\beta \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = tan\beta \geq 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{k^2}{y} - 1}$$

2 (b) 定義另一變數 t 滿足

$$y = k^2 sin^2 t \tag{2}$$

證明 (a) 小題的解滿足

$$2k^2 sin^2 t \; dt = dx \tag{3}$$

先將(1)做整理 $\Rightarrow$ $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{k^2}{y} - 1}$，再將方程式 $y = k^2 sin^2 t$ 左右同時微分 $\Rightarrow$ dy = k^2($2sintcost$) dt，接著將(2)帶入(a)右側且將 $dy = k^2(2sintcost)\; dt$ 帶入(a)左側

$$\Rightarrow \frac{k^2(2sintcost)dt}{dx} = \sqrt{\frac{k^2}{k^2sin^2t} - 1} = \sqrt{csc^2t - 1} = \frac{1}{tant}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{k^2(2sintcost)dt} = tant = \frac{sint}{cost}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{k^2(2sintcost) \cdot sint}{cost} = 2k^2sin^2t$$

$$\Rightarrow \; \frac{dx}{dt} = 2k^2sin^2t$$

3 **(c) 令 $\theta = 2t$ 證明若方程的解滿足當 $y = 0$ 時，$x = 0$ ，則**

$$x = \frac{1}{2}k^2(\theta - sin\theta),\ y = \frac{1}{2}k^2(1 - cos\theta) \qquad (4)$$

(3)為方程(1)的解，稱為擺線(cycloid)

將(b)左右同時積分 $\Rightarrow$

$\int dx = \int 2k^2 sin^2 t\ dt \Rightarrow$ x = 2k$^2 \int sin^2 t\ dt = 2k^2 \int \dfrac{1 - cos2t}{2}\ dt =$

$k^2 \int 1 - cos2t\ dt = k^2(t - \dfrac{1}{2}sin2t) = \dfrac{1}{2}k^2(2t - sin2t)$

令 $\theta = 2t$ 帶入上式 $\Rightarrow$ x = $\dfrac{1}{2}k^2(\theta - sin\theta)$

由(2) $\Rightarrow$ y = k$^2(\dfrac{1 - cos2t}{2}) = \dfrac{1}{2}k^2(1 - cos2t)$

令 $\theta = 2t$ 帶入上式 $\Rightarrow$ y = $\dfrac{1}{2}k^2(1 - cos\theta)$

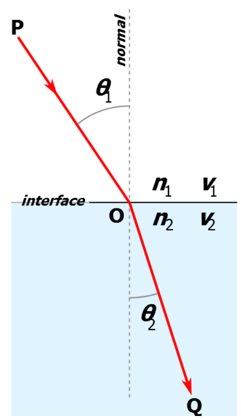
4 (d)請解釋方程(1)如何得出?

- 費馬原理(Fermat Principle)

  光傳播的路徑是光程取極值的路徑。這個極值可能是最大值、最小值，甚至是函數的拐點。最初提出時，又名「最短時間原理」：光線傳播的路徑是需時最少的路徑。

- 斯乃爾定律(Snell's Law)

  入射角和折射角的正弦之比等於兩種介質中相速度之比，或者等於折射率之比的倒數: $\dfrac{sin\theta_2}{sin\theta_1} = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{n_1}{n_2}$

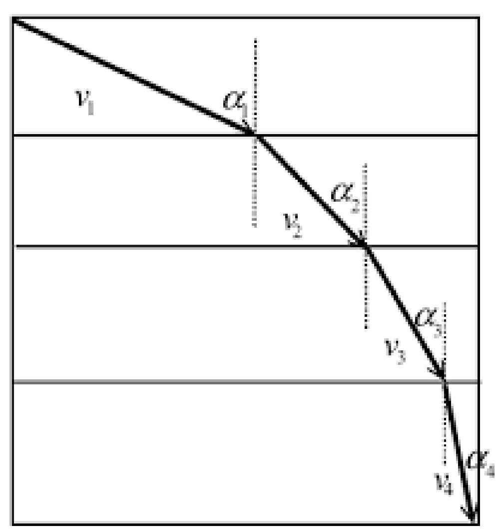


- 約翰·白努利(Johann Bernoulli)的觀點

  約翰·伯努利用了光學中的費馬原理(費馬原理告訴我們，光線一定會用沿著一條需時最少的路徑走)，那麼如果我們把質點想像成光，光線從點 A 移動到點 B 的路徑正就

是我們想尋找的「最速降線」。所以問題變成光從 A 到 B 的路線會怎麼走:

1. 根據能量守恆定律($\frac{1}{2}mv^2 = mgy$)得出物體在向下走了 y 時的時候速度 $v = \sqrt{2gy}$。
2. 利用光學中的斯乃爾定律，我們得知光線的入射角的正弦與光速成正比，如果我們把質點想像成光線，就可以得出 $\dfrac{sin\alpha}{v}$ = 常數。(因為費馬最小時間定理：光線進入連續變化密度的介質，光線不再以直線進行，而是以曲線取代直線，並滿足 $\dfrac{sin\alpha}{v}$ = 常數)



- 連續變化的介質

由於 $sin\alpha = cos\beta = \dfrac{1}{sec\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{1+tan^2\beta}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}$

(此處$\beta = \dfrac{\pi}{2-\alpha}$，$\beta$ 是與 x 軸的夾角切線斜率 $\dfrac{dy}{dx} = tan\beta$)

所以與約翰·白努利(2)觀點結合 $\Rightarrow$ c $= \dfrac{sin\alpha}{v} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{dy}{dx}}}}{\sqrt{2gy}}$

$$\Rightarrow \text{c} = \frac{1}{\sqrt{(2gh)(1+(\frac{dy}{dx})^2)}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c\sqrt{2g}} = \sqrt{y(1+(\frac{dy}{dx})^2)}$$

$$\Rightarrow \text{y}(1+(\frac{dy}{dx})^2) = \frac{1}{2gc^2} = k$$

5 結論

由十七世紀最速降線的研究到二十世紀廣義相對論的發表，都離開不了變分學，但我們無法在短時間去理解這更高深的理論，因此在這裡介紹我們能理解最速降線的方式讓大家了解。由上述我們可解出了一個路徑的參數式:

$$\Gamma = \begin{cases} x = & \frac{1}{2}k^2(\theta - \sin\theta) \\ y = & \frac{1}{2}k^2(1 - \cos\theta) \end{cases} \tag{5}$$

Γ 的部分圖形

此路徑就是一個物體從 A 點滑落到 B 點所需時間最短的路徑，也就是一條擺線。這題數學題除了很有數學的意義外，也教了我們「最短的路不一定最好最快的，最重要是選一條適合自己的路」!

參考文獻

[1] Brachistochrone Problem - Wolfram MathWorld

[2] L. A. Lyusternik著; 趙景霖譯，最短線(ISBN 957-603-223-7)

[3] Markus Grasmair BASICS OF CALCULUS OF VARIATIONS(PDF)

[4] 李柏堅，變分法上的最速降線之研究(九十二年度中華技術學院論文發表研討會中華民國 92 年 4 月 23 日) *cust.edu.tw/mathmet/brachistochrone*(PDF)

[5] *blog.csdn.net/zhouchangyu1221/article/details/104242324*

[6] *drstanford.blogspot.com/2017/07/blog-post$_2$2.html*

[7] *zh.wikipedia.org/wiki/*最速降線問題

表 1: 組員貢獻表

項目	溫宏岳	陳慕恩	胡家宏	陳曦
參與第一次討論2020/12/18	√	√	√	√
參與第二次討論2021/01/04	√	√	√	√
參與第三次討論2021/01/06	√		√	√
參與第四次討論2021/01/07	√	√	√	√
解題	√	√(協助)		
口頭報告			√	√(協助)
書面報告	√	√(協助)		
PPT				√