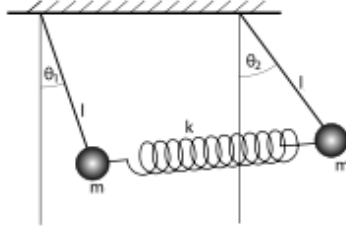


SOLUCIÓN DEL PENDULO DOBLE

David Santiago Merchan Leon 2190719
Wilson David Baez Florez 2220655

31 de agosto de 2024

Considere el caso de dos péndulos de igual masa m y que cuelgan, respectivamente, de dos varillas sin masa y de longitud l . Estos péndulos están acoplados por un resorte de constante elástica k



1. Encuentre las ecuaciones de Movimiento del sistema.

Para este problema encontramos dos grados de libertad, los cuales son θ_1 y θ_2 . Para hallar las ecuaciones de movimiento primero debemos establecer algunas relaciones que nos van a servir a la hora de definir las posiciones de nuestro sistema, en las energías.

$$\begin{aligned}y_1 &= \ell_1 \cos \theta_1 & \dot{y}_1 &= \ell_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\y_2 &= \ell_2 \cos \theta_2 & \dot{y}_2 &= -\ell_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\x_1 &= x_{1e} + \ell_1 \sin \theta_1 & \dot{x}_1 &= \ell_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\x_2 &= x_{2e} + \ell_2 \sin \theta_2 & \dot{x}_2 &= \ell_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \\d_{ix} &= x_{2e} - x_{1e}\end{aligned}$$

Teniendo estas relaciones, vamos a hallar nuestras energías cinética (T) y potencial (V):

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(\ell_1^2 \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \ell_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\ell_2^2 \cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \ell_2^2 \sin^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2) \quad (2)$$

Usando la identidad trigonométrica $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$T = \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\ell_2^2\dot{\theta}_2^2 \quad (3)$$

Ahora vamos a definir la distancia entre las masas del péndulo como:

$$d(t) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = ((x_{2e} - x_{1e}) + (\ell_2 \sin\theta_2 - \ell_1 \sin\theta_1))^2 + (\ell_1 \cos\theta_1 - \ell_2 \cos\theta_2)^2 \quad (4)$$

Recordando que $d_{ix} = x_{2e} - x_{1e}$

$$d(t)^2 = d_{ix}^2 + 2d_{ix}(\ell_2 \sin\theta_2 - \ell_1 \sin\theta_1) - 2\ell_1\ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (5)$$

A partir de esto, tenemos que la elongación del resorte X_k está definida como:

$$(X_k)^2 = d^2(t) - (d_i)^2 \quad (6)$$

Siendo d_i la longitud del resorte en el equilibrio, se tiene entonces que la elongación (X_k) está definida por la ecuación:

$$(X_k)^2 = d_{ix}^2 + 2d_{ix}(\ell_2 \sin\theta_2 - \ell_1 \sin\theta_1) - 2\ell_1\ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - (d_i)^2 \quad (7)$$

A partir de esto definamos la energía potencial como

$$V = m_1g(\ell_1 \cos\theta_1) + m_2g(\ell_2 \cos\theta_2) + \frac{1}{2}k(X_k^2) \quad (8)$$

Y usando la definición de lagrangiano

$$L = T - V \quad (9)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\ell_2^2\dot{\theta}_2^2 - (m_1g(-\ell_1 \cos\theta_1) + m_2g(-\ell_2 \cos\theta_2) + \frac{1}{2}k(X_k^2)) \quad (10)$$

Desarrollando las ecuaciones de euler-lagrange llegamos a la siguiente expresión para θ_1 y para θ_2 , para el caso en que $\ell_1 = \ell_2 = \ell$

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g \sin\theta_1}{\ell} + \frac{k(d_{ix} \cos\theta_1 + \ell \sin(\theta_1 - \theta_2))}{m_1 \ell} \quad (11)$$

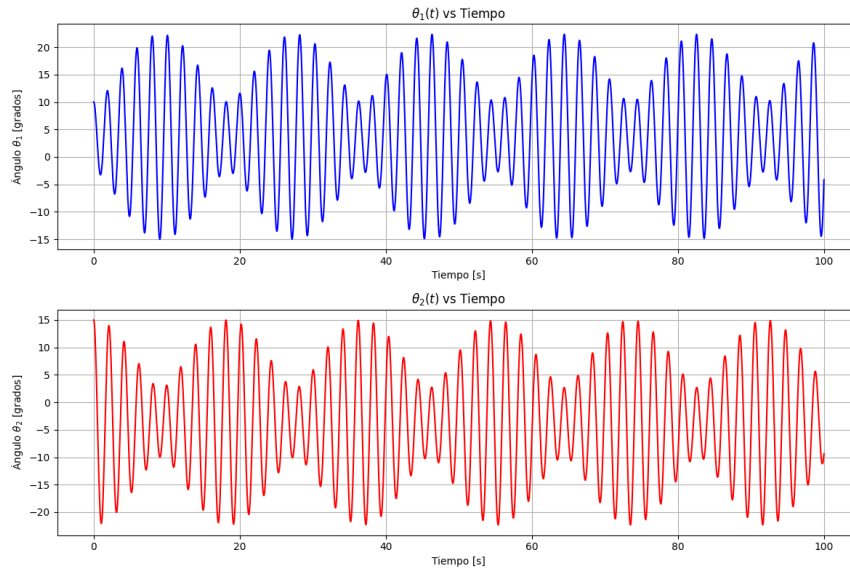
$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g \sin\theta_2}{\ell} - \frac{k(d_{ix} \cos\theta_2 + \ell \sin(\theta_1 - \theta_2))}{m_2 \ell} \quad (12)$$

2. Integre numéricamente el sistema de ecuaciones e identifique los parámetros que condicionan el sistema.

Habiendo obtenido las ecuaciones 11 y 12 deberemos hallar una solución numérica a este sistema de ecuaciones diferenciales, ya que no es posible llegar a una solución general para θ_1 y θ_2 , para ello en este caso decidimos usar el método de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar las soluciones en cada paso de tiempo a partir de ciertas condiciones iniciales especificadas por el mismo usuario.

Los parámetros que condicionan este sistema son las masas de los péndulos, m_1 y m_2 las cuales afectan a la inercia del sistema, la longitud del péndulo ℓ , que afecta directamente el periodo de oscilación del sistema y que para este caso ya establecimos $\ell_1 = \ell_2$, la aceleración g , ya que esta no va a ser la misma dependiendo de la ubicación geográfica, la constante de acoplamiento K del resorte, d_{ix} que es la distancia en equilibrio de las masas en x , y las condiciones iniciales proporcionadas para $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1 = w_1(f_{angular1})$ y para $\dot{\theta}_2 = w_2(f_{angular2})$

Figura 1: Solución numérica para θ_1 y para θ_2 . Gráfico de Angulo vs Tiempo



Para esta solución se usaron los siguientes parámetros:

$$m_1 = m_2 = 1\text{kg}$$

$$\ell_1 = \ell_2 = 1\text{m}$$

$$K = 1,0\text{N/m}$$

$$\theta_2 = 10^\circ$$

$$d_{ix} = 0,5\text{m}$$

$$g = -9,81\text{m/s}^2$$

$$\theta_1 = 5^\circ$$

$$w_1 = w_2 = 0$$

El código utilizado para esta solución se encuentra en el siguiente link anexo ¹.

¹<https://github.com/WilsonBaezD/Wilson-Baez-Repository/commit/>

Justamente el resultado obtenido en la Figura 1 ilustra el comportamiento dinámico de un sistema de péndulos que se encuentran acoplados. A partir de los parámetros como m_1 , m_2 , K , d_{ix} , su comportamiento en la amplitud, en su frecuencia o en su patrón va a ser diferente.

3. a) ¿Hace diferencia si el resorte conecta a las masas o si se encuentra atado a media altura de las varillas?
 - b) ¿cómo influye la relación m_1/m_2 si consideramos que las masas son diferentes?
 - c) ¿cómo influye la relación l_1/l_2 si consideramos que el largo de las varillas es diferente?
- a) Para determinar la elongación del resorte a lo largo del movimiento, se halló que la relación entre la elongación y las coordenadas generalizadas (los ángulos de movimiento de cada uno de los péndulos) estaba definida por la ecuación:

$$X_k^2 = d_{ix}^2 + 2d_{ix}(\ell_2 \sin \theta_2 - \ell_1 \sin \theta_1) - 2\ell_1 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - (d_i)^2$$

En forma reducida (considerando ℓ iguales):

$$X_k^2 = d_{ix}^2 + 2d_{ix}\ell(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - 2\ell^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - (d_i)^2$$

Para simplificar los cálculos, asumiremos que la distancia inicial de las masas en x (d_{ix}) es la longitud de elongación en equilibrio del resorte (d_i); lo que nos dejaría la siguiente ecuación para la elongación del resorte:

$$X_k^2 = 2d_{ix}\ell(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - 2\ell^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Como se puede observar en esta ecuación, la elongación del resorte y por lo tanto, la fuerza que el resorte le realiza a cada uno de los péndulos, depende directamente de la altura a la que se mide la elongación, esta relación es cuadrática en una de las dos expresiones y si se colocara el resorte en el centro de la varilla, se tendría una libertad de movimiento mucho menor para el resorte y eso se muestra en la siguiente comparación de ecuaciones:

Para $\frac{\ell}{2}$ tenemos:

$$X_k^2\left(\frac{\ell}{2}\right) = 2d_{ix}\frac{\ell}{2}(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - 2\frac{\ell^2}{4}\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Simplificando:

$$X_k^2\left(\frac{\ell}{2}\right) = d_{ix}\ell(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - \frac{\ell^2}{2}\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Si se comparan las dos ecuaciones reducidas que representan el caso donde el resorte está ubicado en la mitad de las varillas y en el extremo del péndulo, tenemos que:

20f15babccce69263695b02cd18eef3f56b97867c

$$2d_{ix}\ell(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) - 2\ell^2\cos(\theta_1 - \theta_2) > d_{ix}\ell(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) - \frac{\ell^2}{2}\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$X_k^2(\ell) > X_k^2\left(\frac{\ell}{2}\right)$$

¿Qué efecto tiene una elongación menor del resorte en el movimiento del sistema de péndulos? Se sabe que la ecuación que nos representa la energía cinética generada por el péndulo se escribe como:

$$U = \frac{1}{2}kX_k^2$$

Utilizando la misma lógica de antes, se puede observar la diferencia de energías cinéticas en ambos casos, entonces:

$$U(\ell) = \frac{1}{2}kX_k^2(\ell)$$

$$U\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{2}kX_k^2\left(\frac{\ell}{2}\right)$$

Así,

$$U(\ell) > U\left(\frac{\ell}{2}\right)$$

La energía potencial elástica cuando el resorte se coloca más arriba del extremo del péndulo es menor, por lo tanto, restringirá menos el movimiento porque la fuerza que realizará el resorte sobre los péndulos al moverse será menor.

Esta afirmación se ve a la perfección si analizamos nuestras ecuaciones diferenciales [11](#) y [12](#) pues tienen la forma:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{\ell}(-g\sin\theta_1 + \frac{k(d_{ix}\cos\theta_1 + \ell\sin(\theta_1 - \theta_2))}{m_1}) \quad (13)$$

Que relaciona las aceleraciones inversamente proporcionales a la longitud ℓ , por lo tanto, entre más corta sea la longitud ℓ , las aceleraciones aumentarán en magnitud, por lo tanto, su movimiento será menos restringido por las fuerzas realizadas por el resorte.

- b) Para saber cómo influye la relación entre las masas de cada uno de los péndulos, se puede realizar un análisis mediante las ecuaciones [11](#) y [12](#):

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g\sin\theta_1}{\ell} + \frac{k(d_{ix}\cos\theta_1 + \ell\sin(\theta_1 - \theta_2))}{m_1\ell}$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g\sin\theta_2}{\ell} - \frac{k(d_{ix}\cos\theta_2 + \ell\sin(\theta_1 - \theta_2))}{m_2\ell}$$

Al despejar las m_1 y m_2 de estas ecuaciones, obtenemos la siguiente relación entre las masas y las aceleraciones:

$$m_1 = \frac{k(d_{ix}\cos\theta_1 + \ell\sin(\theta_1 - \theta_2))}{\ddot{\theta}_1\ell + g\sin\theta_1}$$

$$m_2 = -\frac{k(d_{ix}\cos\theta_2 + \ell\sin(\theta_1 - \theta_2))}{\ddot{\theta}_2\ell + g\sin\theta_2}$$

Ahora, hallando la relación $\frac{m_1}{m_2}$, tenemos que:

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{k(d_{ix}\cos\theta_2 + \ell\sin(\theta_1 - \theta_2))(\ddot{\theta}_2\ell + g\sin\theta_2)}{k(d_{ix}\cos\theta_1 + \ell\sin(\theta_1 - \theta_2))(\ddot{\theta}_1\ell + g\sin\theta_1)}$$

Esta relación de masas nos muestra que si la masa uno es mayor que la masa dos, la relación entre las aceleraciones $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$ muestran un comportamiento inverso, es decir, entre mayor sea la masa 1 con respecto a la masa 2, más pequeña será $\ddot{\theta}_2$ con respecto a $\ddot{\theta}_1$. Si se analiza este comportamiento de las relaciones a través de la relación de las energías potenciales y las energías cinéticas en las que interviene la masa.

Se conoce que la energía cinética y potencial gravitatoria de una masa es:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U = mgh$$

Se puede observar que un cuerpo con mayor masa tiene mayor energía potencial y mayor energía cinética, por lo tanto, el momentum máximo que puede alcanzar un cuerpo de cualquiera de los péndulos dependerá directamente de su masa y, sus momentums, al estar entrelazados mediante la fuerza del resorte, se verán descritos a través de la relación entre las aceleraciones de ambos péndulos.

- c) Si consideramos el largo de cada varilla diferente, como fue estudiado en la ecuación ?? y ??, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g\sin\theta_1}{\ell_1} + \frac{k(d_{ix}\cos\theta_1 + \ell\sin(\theta_1 - \theta_2))}{m_1\ell_1}$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g\sin\theta_2}{\ell_2} - \frac{k(d_{ix}\cos\theta_2 + \ell\sin(\theta_1 - \theta_2))}{m_2\ell_2}$$

En este sentido, la simplificación hecha en 13 deja más clara las relaciones entre ℓ_1 y ℓ_2 así:

$$\ell_1 = \frac{1}{\ddot{\theta}_1}(-g\sin\theta_1 + \frac{k(d_{ix}\cos\theta_1 + \ell\sin(\theta_1 - \theta_2))}{m_1})$$

$$\ell_2 = \frac{1}{\ddot{\theta}_2} \left(-g \sin \theta_2 - \frac{k(d_{ix} \cos \theta_2 + \ell \sin(\theta_1 - \theta_2))}{m_2} \right)$$

Con esto, se puede analizar que la relación $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ es:

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = -\frac{\ddot{\theta}_2}{\ddot{\theta}_1} \frac{m(k(d_{ix} \cos \theta_1 + \ell \sin(\theta_1 - \theta_2)))}{m(k(d_{ix} \cos \theta_2 + \ell \sin(\theta_1 - \theta_2)))}$$

Y simplificando esta relación:

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = -\frac{\ddot{\theta}_2}{\ddot{\theta}_1} \frac{d_{ix} \cos \theta_1 + \ell \sin(\theta_1 - \theta_2)}{d_{ix} \cos \theta_2 + \ell \sin(\theta_1 - \theta_2)}$$

La relación entre $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ transmite la información de una proporcionalidad inversa entre las longitudes de las varillas y las aceleraciones de cada péndulo; en este sentido, como fue explicado en el inciso (a), una varilla más corta disminuye el rango de movimiento del péndulo y por ende, la aceleración angular del mismo pues, como se puede ver también en la energía potencial relacionada a la masa del péndulo;

$$U = mgl$$

La longitud de la varilla genera que al tener una masa más energía potencial que la otra, el movimiento del péndulo con más energía cinética le transferirá más momento al resorte que el péndulo con la varilla menor; haciendo así que la aceleración del péndulo con menor longitud disminuya cuando la aceleración del péndulo con mayor longitud aumenta.

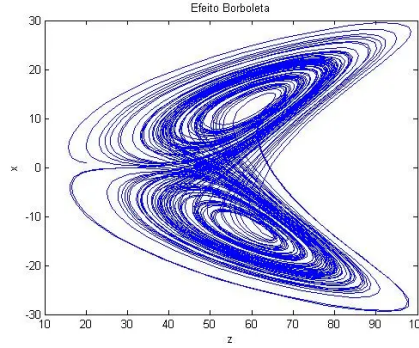
4. ¿Cuándo y por qué el sistema muestra el comportamiento caótico? Discuta el espacio de condiciones iniciales para el cual el sistema presenta ese comportamiento caótico.

Un sistema muestra comportamiento caótico bajo condiciones específicas de fuertes interacciones como por ejemplo lo puede ser un valor grande de k , también cuando se presentan grandes ángulos iniciales y grandes velocidades angulares. Este comportamiento es característico de sistemas no lineales donde la energía del sistema y la interacción entre las variables que se estudian tienen un enorme grado de importancia a la hora de determinar las trayectorias. En nuestro caso, estamos trabajando con una ecuación no lineal, y esto es un indicador de que nuestro sistema puede ser caótico.

Pero ¿cómo podemos comprobar que nuestro sistema es caótico? a partir de la sensibilidad del sistema ante cambios mínimos en alguno de sus parámetros. Al mismo tiempo es muy útil estudiar el espacio de fase de nuestro sistema, ya que comportamientos como el de la Figura 2 describen sistemas caóticos.

Al experimentar un poco con el código producido para llevar a cabo esta comparación, se pudo observar que las condiciones iniciales presentan comportamientos caóticos a partir de $\theta_2 > 10^\circ$ ya que en este caso el ángulo que estamos variando es θ_2 .

Figura 2: Muestra de un espacio de fase para un sistema caotico



Tambien se observó que para frecuencias $w \leq 3\frac{grad}{s}$ el sistema se comporta de manera normal, por lo que debemos variar este parametro tambien. Por ultimo, y no menos importante, la constante k debe tener un valor $k \geq 1$ para que se vea un comportamiento caotico, debido a que aumentan las interacciones entre los cuerpos.

Para mostrar el comportamiento de nuestro sistema se usaron los siguientes parametros, en donde se varió el valor de θ_2 en un grado unicamente, para demostrar que el sistema se comporta de maneras muy distintas para estos pequeños cambios:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= m_2 = 1kg & \ell_1 &= \ell_2 = 1m \\
 K &= 2N/m & g &= -9,81m/s^2 \\
 \theta_1 &= 30^\circ & \theta_2 &= [28^\circ, 27^\circ, 26^\circ] \\
 w_1 &= w_2 = 3,5\frac{grad}{s} & d_{ix} &= 2m
 \end{aligned}$$

El codigo a partir del que se obtuvieron las siguientes graficas para el espacio de fase, se encuentra en el link adjunto ².

Los resultados obtenidos para esos parametros, en un desplazamiento pequeño del parametro θ_2 están mostrados en la figura 3

A partir de las gráficas obtenidas, se puede concluir que el sistema presenta un comportamiento caótico. Esta naturaleza caótica se debe principalmente a la no linealidad inherente en las ecuaciones que describen el sistema. Observamos en el espacio de fases que, a pesar de que las variaciones en el ángulo inicial θ_2 son pequeñas, las trayectorias resultantes en el espacio de fases exhiben comportamientos significativamente diferentes. Esta sensibilidad a las condiciones iniciales es una característica fundamental del caos, lo que confirma que nuestro sistema es efectivamente caótico.

²<https://github.com/WilsonBaezD/Wilson-Baez-Repository/blob/main/PhaseSpaceCode>

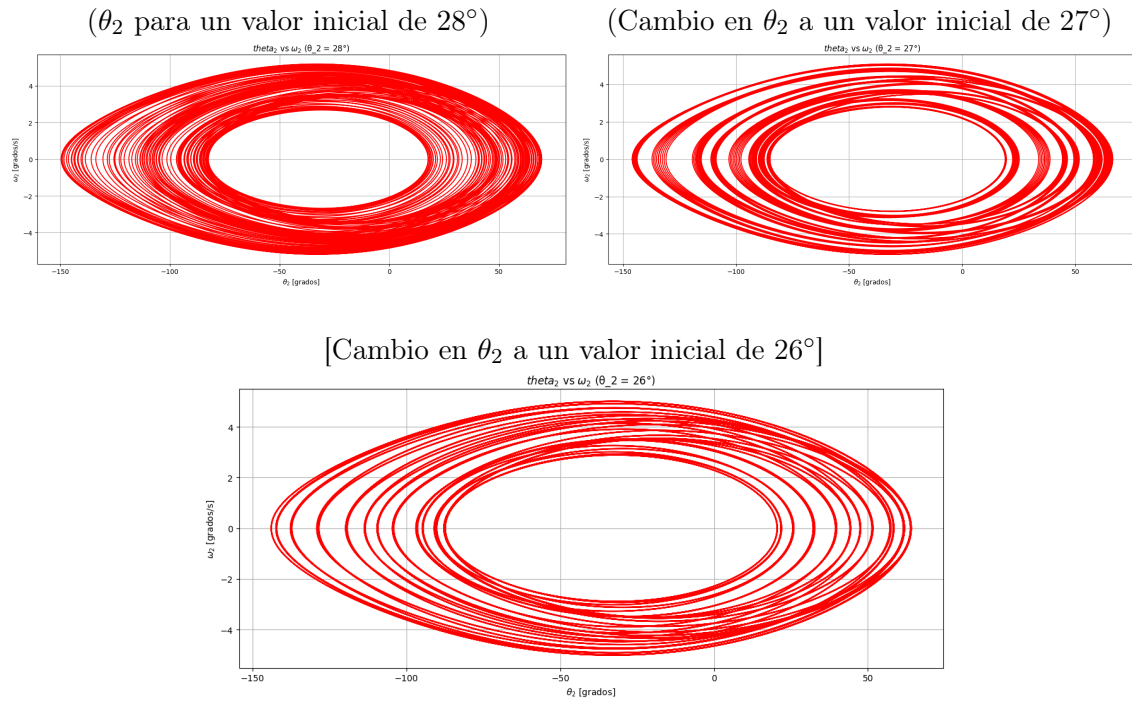


Figura 3: Espacio de fase para tres configuraciones de θ_2 ligeramente distintas

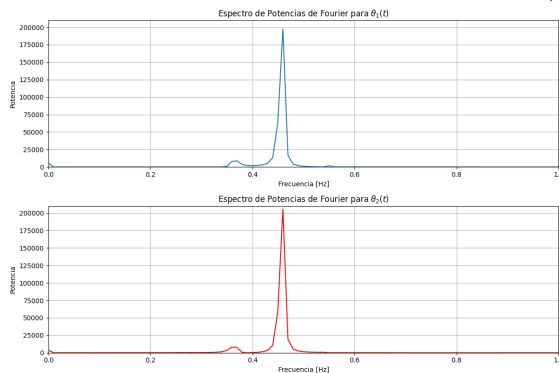
- Analice el comportamiento de su señal en términos de un espectro de potencias de Fourier y de la huella en un espectrograma, para grandes y pequeñas amplitudes. ¿qué puede concluir de ambos comportamientos?

Para este análisis, exploraremos el comportamiento de la señal angular de nuestro sistema utilizando un código en python para pequeñas y grandes amplitudes. El espectro de potencias de Fourier nos permitirá identificar las frecuencias dominantes presentes en la señal y cómo la energía se distribuye entre ellas. Por otro lado, el espectrograma proporcionará una representación dinámica de cómo estas frecuencias evolucionan a lo largo del tiempo, mostrándonos la huella temporal. Al comparar estos espectros para grandes y pequeñas amplitudes, podremos inferir diferencias en la dinámica del sistema y cómo la amplitud afecta la distribución de energía en el dominio de las frecuencias.

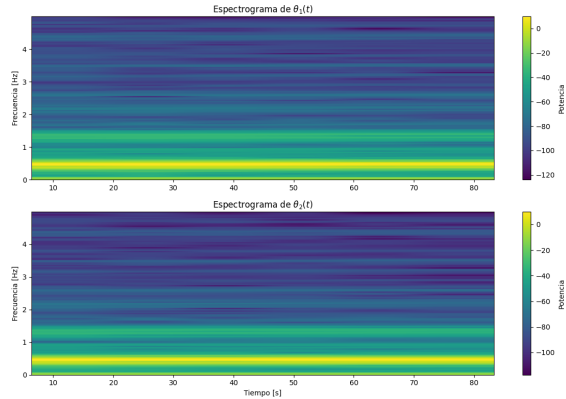
Cuando las amplitudes son pequeñas [5](#), el sistema se comporta de manera sencilla y predecible. En el espectro de Fourier, observamos un pico claro en una sola frecuencia, lo que indica que el sistema oscila principalmente en un solo ritmo, sin desviarse a otros patrones más complejos. Adelante veremos que esto es debido a que a partir de pequeñas oscilaciones, el sistema se comporta de manera lineal.

El espectrograma también confirma esto, mostrando que la frecuencia se mantiene constante

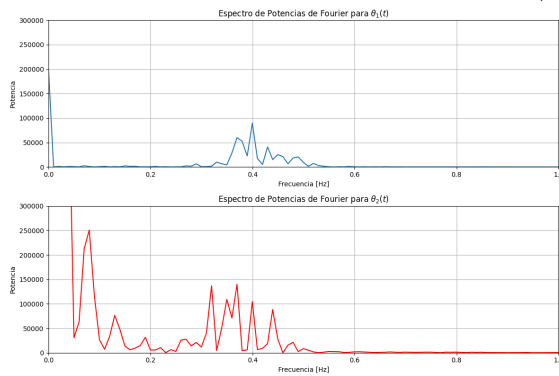
(Espectro de potencias de fourier para amplitudes pequeñas. Grafico para θ_1 y θ_2)



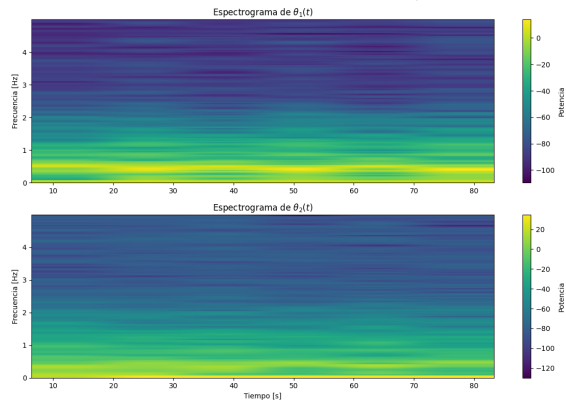
(Espectrograma para amplitudes pequeñas. Grafico para θ_1 y θ_2)



(Espectro de potencias de fourier para amplitudes grandes. Grafico para θ_1 y θ_2)



(Espectrograma para amplitudes grandes. Grafico para θ_1 y θ_2)



a lo largo del tiempo, sin cambios significativos. Basicamente, para pequeñas amplitudes, el sistema sigue un patrón de oscilación regular y estable, sin señales de comportamiento caótico.

Para amplitudes grandes, el sistema muestra un comportamiento significativamente más complejo y no lineal. Esto se ve reflejado en el espectro de potencias de Fourier como una dispersión de la energía entre múltiples frecuencias, indicando la presencia de varios modos de oscilación. En el espectrograma, la energía no se concentra en bandas de frecuencia constantes, sino que muestra una mayor dispersión y variación a lo largo del tiempo, lo que es indicativo de la complejidad dinámica causada por las amplitudes grandes. Este comportamiento es

característico de sistemas no lineales que presentan comportamientos caóticos.³

6. Simplifique las ecuaciones suponiendo pequeñas oscilaciones. Esto es: considere $\theta_1 \ll 1$, $\theta_1 \ll 1$ y $\theta_1^2 \sim \theta_1^2 \sim 0$, sen $\theta_1 \sim \theta_1$, sen $\theta_2 \sim \theta_2$, cos $\theta_1 \sim 1$ y cos $\theta_2 \sim 1$. Repita el análisis anterior, en los puntos 2, 3, 4 y 5.

Para el planteamiento de este movimiento, entonces tendríamos que:

$$\begin{aligned} y_1 &= \ell_1 & \dot{y}_1 &= 0 \\ y_2 &= \ell_2 & \dot{y}_2 &= 0 \\ x_1 &= x_{1e} + \ell_1 \theta_1 & \dot{x}_1 &= \ell_1 \dot{\theta}_1 \\ x_2 &= x_{2e} + \ell_2 \theta_2 & \dot{x}_2 &= \ell_2 \dot{\theta}_2 \\ d_{ix} &= x_{2e} - x_{1e} \end{aligned}$$

Teniendo entonces esas relaciones, podemos escribir las energías cinética(T) y potencial (V):

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (14)$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(\ell_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\ell_2 \dot{\theta}_2)^2 \quad (15)$$

$$V = -mg(\ell_2 + \ell_1) + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \quad (16)$$

$$V = -mg(\ell_2 + \ell_1) + \frac{1}{2}k(\ell_2 \theta_2 - \ell_1 \theta_1)^2 \quad (17)$$

Y usando la definición del langrangiano:

$$L = T - V \quad (18)$$

$$L = \frac{1}{2}m_1(\ell_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\ell_2 \dot{\theta}_2)^2 + mg(\ell_2 + \ell_1) - \frac{1}{2}k(\ell_2 \theta_2 - \ell_1 \theta_1)^2 \quad (19)$$

Desarrollando las ecuaciones de euler-lagrange obtenemos las relaciones:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{k(\ell_1^2 \theta_1 - \ell_1 \ell_2 \theta_2)}{m_1 \ell_1^2} \quad (20)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{k(\ell_2^2 \theta_2 - \ell_2 \ell_1 \theta_1)}{m_2 \ell_2^2} \quad (21)$$

Sin embargo, para el caso donde $\ell_2 = \ell_1 = \ell$

³<https://github.com/WilsonBaezD/Wilson-Baez-Repository/blob/main/EspectroFourier>

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{k}{m_1}(\theta_1 - \theta_2) \quad (22)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{k}{m_2}(\theta_2 - \theta_1) \quad (23)$$

REFERENCIAS

- de Grado para acceder al, T. de F. (s/f). LA TEORÍA DEL CAOS. Unican.es. <http://surl.li/vmfgyu>
- (S/f-b). Astropt.org. <https://www.astropt.org/2013/10/02/teoria-do-caos-2/>
- Guzev, M., Dmitriev, A. (2016). Stability analysis of two coupled oscillators. Mathematics and Mechanics of Complex Systems, 4(2), 139-152
- (S/f-c). <http://https://ucscphysicsdemo.sites.ucsc.edu/physics-5a6a/coupled-pendulum/>