

Segunda Asignación

Para empezar a desarrollar esta asignación vamos a observar como afecta el apantallamiento en el potencial de Coulomb

Para empezar, el potencial apantallado es de la forma:

$$V(r) = \frac{k}{r} e^{-\alpha r} \quad (1)$$

donde α es un parametro que controla la rapidez de decaimiento de dicho potencial.

$V \approx \frac{k}{r}$ para el caso cuando $r \ll \frac{1}{\alpha}$ ya que esto genera que $e^{-\alpha r} \approx 1$ por lo que el potencial aproxima al potencial de Coulomb, las interacciones siguen siendo fuertes entre particulas.

Cuando $r \gg \frac{1}{\alpha}$ el potencial tiende a cero rapidamente de manera exponencial lo que hace que el potencial sea insignificante, por lo que las particulas a grandes distancias apenas sienten el efecto del potencial, anulando las interacciones a largo alcance.

Por lo tanto, para las colisiones en donde las particulas se acercan mucho entre si, las trayectorias siguen siendo parecidas a las del potencial de Coulomb. Mientras que para particulas que interactuan a distancias mas grandes, la influencia de las fuerzas atractivas o repulsivas disminuye, cambiando las trayectorias y reduciendo la desviacion de las particulas.

1. Ecuaciones Clásicas de Trayectoria para el Potencial de Coulomb y Apantallado

1.1. Potencial de Coulomb

El potencial de Coulomb que afecta a una particula de carga q generado por una carga Q que se encuentre a una distancia r es:

$$V(r) = \frac{k}{r}$$

Donde $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Qq$. La fuerza asociada es:

$$F(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{k}{r^2}$$

La ecuación de movimiento radial es:

$$m\ddot{r} = -\frac{k}{r^2}$$

Donde m es la masa de la particula y r es la distancia radial. En un sistema central, el momento angular $L = mr^2\dot{\theta}$ se conserva, lo que nos permite reducir el problema a una dimensión usando la siguiente ecuación de la fuerza efectiva:

$$m\ddot{r} = \frac{k}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3}$$

1.2. Potencial de Coulomb Apantallado (Yukawa)

El potencial de Coulomb apantallado está dado por:

$$V(r) = \frac{k}{r} e^{-\alpha r}$$

Donde α es el parámetro de apantallamiento. La fuerza correspondiente es:

$$F(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = \frac{k}{r^2} e^{-\alpha r} (1 + \alpha r)$$

La ecuación de movimiento radial es:

$$m\ddot{r} = \frac{k}{r^2} e^{-\alpha r} (1 + \alpha r)$$

Conservando el momento angular, tenemos la ecuación de movimiento efectiva:

$$m\ddot{r} = \frac{k}{r^2} e^{-\alpha r} (1 + \alpha r) + \frac{L^2}{mr^3}$$

2. Demostración de la Sección Transversal Diferencial

La sección transversal diferencial, $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, describe la relación entre el ángulo de dispersión θ y la probabilidad de que una partícula sea dispersada en esa dirección. Comenzamos definiendo el parámetro de impacto b , que es la distancia mínima entre la trayectoria no perturbada de la partícula y el centro del potencial.

Para una dispersión de Coulomb clásica, se relaciona el ángulo de dispersión θ con el parámetro de impacto b y la energía cinética E de la partícula incidente mediante:

$$b = \frac{k}{2E} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Donde $k = Z_1 Z_2 e^2$ es la constante del potencial de Coulomb. Utilizando esta expresión, podemos calcular la *sección transversal diferencial* a partir de la relación entre el parámetro de impacto y el ángulo de dispersión:

$$d\sigma = 2\pi b db$$

Al diferenciar $b(\theta)$, obtenemos:

$$db = -\frac{k}{2E} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula de la sección transversal, llegamos a:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{k}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Esta es la *sección transversal diferencial* para un potencial de Coulomb puro.

2.1. Modificación por Apantallamiento

Cuando introducimos el apantallamiento (potencial de Yukawa), el potencial se modifica con un término exponencial $e^{-\alpha r}$, lo que introduce un decaimiento adicional en la interacción a grandes distancias. Este término afecta la amplitud de la sección transversal diferencial en ángulos grandes, ya que el potencial decae más rápidamente.

La sección transversal modificada por el apantallamiento se expresa como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{k}{4E} \right)^2 \frac{e^{-2\alpha r}}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Donde el factor $e^{-2\alpha r}$ introduce la corrección debido al apantallamiento. En este caso, el parámetro α controla la magnitud del apantallamiento. A medida que α aumenta, el rango efectivo del potencial se reduce, lo que disminuye la sección transversal para ángulos grandes.

Representando este modelo en python ¹ para distintos valores de α , en un grafico que muestra la probabilidad de dispersion contra angulo. Los resultados obtenidos se encuentran en el siguiente grafico:

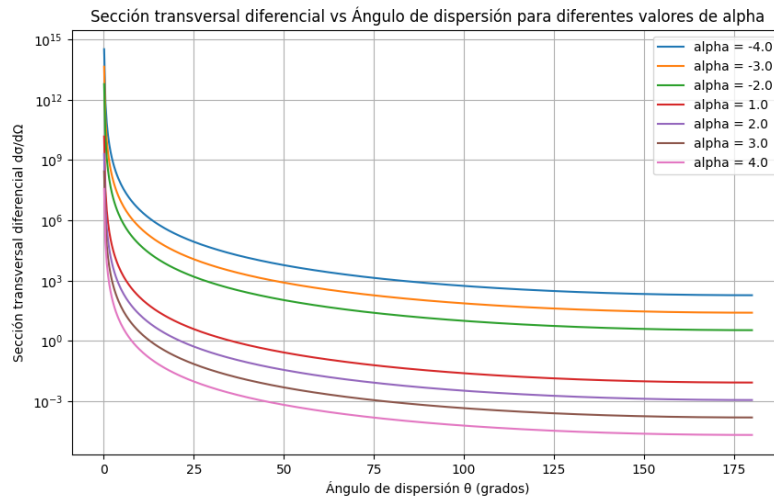


Figura 1: Grafico de probabilidad de dispersion bajo el potencial de yukawa para distintos valores de α

A partir del grafico es notable el hecho de que conforme aumenta el angulo de dispersion θ la sección transversal disminuye para todos los valores de α , esto debido a la dependencia de $\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Para valores altos de α (como 4.0) corresponden a un apantallamiento más fuerte, lo que resulta en una caída más pronunciada de la sección transversal en ángulos grandes. Esto refleja que un mayor apantallamiento reduce el rango efectivo de la interacción, haciendo que las partículas se desvíen menos en ángulos amplios. Para valores negativos de α , el apantallamiento es más débil, lo que

¹https://github.com/WilsonBaezD/Wilson-Baez-Repository/blob/main/Alphas_i

permite una mayor interacción en distancias más largas y, por lo tanto, una mayor probabilidad de dispersión en ángulos grandes. Para todos los valores, se observa un pico en ángulos pequeños, donde la dispersión es más probable, seguido de una rápida disminución.

3. Angulo de dispersión bajo un potencial de Coulomb

Para hallar el angulo de dispersión (angulo de desviación de la trayectoria de una partícula incidente debido a la interacción con otra partícula) tenemos en cuenta la siguiente expresion, necesaria para calcular este angulo maximo de dispersion:

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2V(r)}{E}}}$$

ahora reemplazamos el potencial de Coulomb en esta expresión, sustituyendo obtenemos:

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2K}{Er}}}$$

A partir de esta integral se puede llegar a una expresión para el potencial de Coulomb, que está en terminos del parametro b (Impacto de choque), E (energia), y K. Dicha expresión es de la siguiente forma:

$$b = \frac{K}{2E} \cot \frac{\theta}{2}$$

y despejando para θ obtenemos

$$\theta = 2 \cot^{-1} \left(\frac{2bE}{K} \right)$$

3.1. Angulo de dispersión bajo un potencial de Yukawa

Bajo un potencial de Yukawa ahora, vamos a volver a usar la expresion para el angulo de dispersión

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2K}{Er} e^{-\alpha r}}}$$

Bajo la expresion anterior establecida para un potencial de Coulomb, se puede deducir la expresion para el angulo de dispersion del potencial de Yukawa, que estaria dado de la forma:

$$b = \frac{K e^{-\alpha r}}{2E} \cot \frac{\theta}{2}$$

despejando θ de esta ecuacion obtenemos:

$$\theta = 2 \cot^{-1} \left(\frac{2bE}{K e^{-\alpha r}} \right)$$

La integral para el ángulo de dispersión se resuelve numéricamente, así que dándole valores a dichos parámetros vamos a obtener los siguientes resultados

De la figura 2 se observa que a bajas energías el ángulo de dispersión es mayor, lo que es coherente con el hecho de que, a energías bajas, las partículas interactúan más fuertemente con el potencial, resultando en una mayor desviación angular. A medida que la energía aumenta, el ángulo de dispersión disminuye para todos los casos, lo que indica que las partículas más energéticas son menos desviadas, ya que atraviesan el campo de interacción de forma más rápida y tienen menos tiempo para ser influenciadas por el potencial

Para un mismo valor de E , a medida que aumenta b , el ángulo de dispersión disminuye. Esto ocurre porque un mayor parámetro de impacto implica que las partículas pasan más lejos del centro de interacción, lo que reduce el efecto del potencial. Respecto a α , cuando este parámetro aumenta, el ángulo de dispersión también disminuye. Esto es consistente con el hecho de que un valor mayor de α significa un apantallamiento más fuerte, lo que hace que el potencial decaiga más rápidamente, reduciendo su capacidad de afectar a las partículas en trayectorias más distantes.

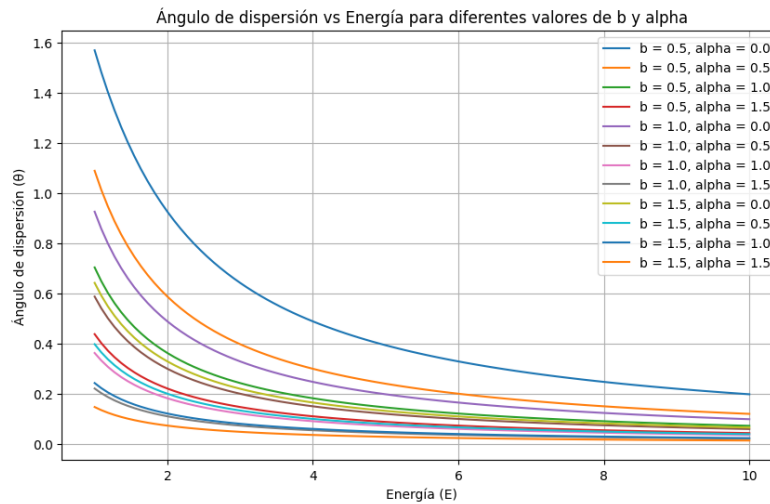


Figura 2: Ángulo de dispersión - Energía para distintos valores de b y α

4. Conclusiones

Utilizando el potencial de Yukawa, que incorpora el apantallamiento mediante un término exponencial y un parámetro como α , se evidenció que el parámetro α desempeña un papel clave en la reducción del rango de interacción. Con valores pequeños de α , el potencial se asemeja al de Coulomb, permitiendo interacciones a largas distancias. En cambio, con α grandes, el potencial decae rápidamente, limitando la interacción a distancias cortas. Esto se refleja en las ecuaciones de trayectoria y en la sección transversal diferencial, donde el apantallamiento reduce notablemente la

sección transversal en ángulos grandes, especialmente a bajas energías. Se mostró ² que las partículas de alta energía son menos afectadas por el apantallamiento, manteniendo secciones transversales grandes, mientras que las de baja energía experimentan una dispersión mucho menor debido al rápido decaimiento del potencial.

²<https://github.com/WilsonBaezD/Wilson-Baez-Repository/blob/main/AngleDisp>