David Santiago Merchan León - 2190719
Wilson David Baez Florez - 2220655

Problemas semana #2 - 16/08/2024

1) a) Debido a que el atleta cae libremente sometido a la aceleración de la gravedad, podemos calcular la velocidad con que el atleta entra al agua

$V_f = \sqrt{2gh}$ donde h es 10 m

$V_f = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 10} \approx 14\ m/s$

Ahora, cuando el nadador ingresa al agua, se genera una resistencia debido al fluido que genera una desaceleración

$F_{resistencia} = \frac{1}{2}(Cd)(\rho)(A)(v^2)$

- Cd → coeficiente de arrastre del cuerpo
- ρ → densidad del agua
- A → Area del objeto frente al agua
- V → Velocidad del objeto

Para determinar el cd del nadador encontramos que tan vertical y controlada sea la entrada al agua, el cd varía sin embargo, el valor para un cuerpo humano en posición de clavado está entre 0,6 y 1 en este caso tomaremos un valor intermedio $Cd \approx 0{,}8$

$\rho_{agua} \rightarrow 1000\ Kg/m^3$

Para el área en contacto con el agua, se debe considerar que en posición de clavado, las manos son lo primero en entrar pero, al tener un área tan pequeña en las manos, tomaremos el área del torso, tomándolo como uno promedio, tendríamos un cilindro de diametro 0,35 con un área trasversal de

$A = \pi\left(\frac{0{,}35}{2}\right)^2 \approx 0{,}095\ m^2$

Ahora calculamos

$F_{res} = \frac{1}{2}(0{,}8)(1000)(0{,}096)(14)$

$F_{res} = 7526{,}4\ N$

$F_{res} = m\,a$

$a = \frac{7526{,}4}{70}$ → Teniendo en cuenta una masa promedio de 70 Kg

$a = -107{,}52\ m/s^2$

$a_t = -107{,}52 + 9{,}8 = -97{,}72\ m/s^2$ → aceleración total

Ahora, para revisar la distancia a la que se detiene

$V_F = V_i + at$ → $t = \frac{V_i}{a}$

$0 = 14 - 97{,}72\,t$

$t = \frac{14}{97{,}72}$

$t = 0{,}143$ segundos

Y sabemos que

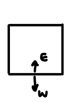
$d_{mín} = V_i t - \frac{1}{2} a t^2$

$d_{mín} = 14\,(0{,}143) + \frac{1}{2}\,97{,}72 \times (0{,}143)^2$

$d_{mín} = 3{,}011\ m$

La distancia a la que el nadador se habría detenido es aproximadamente 3 metros y, teniendo en cuenta que la altura promedio de una persona ronda entre 1 50 y 2 metros, el tamano de la piscina debe ser entre los 4 50 y 5 metros

b)



$F_{neta} = F_{empuje} - Peso$

$F_{empuje} = (\rho_{agua})(V_{corcho})(gravedad)$

$V_{corcho} = \frac{4}{3}\pi r^3$ $r = 0{,}025\ m$ → 5 cm de diametro

$F_{empuje} = (1000\ Kg/m^3)(6{,}545 \times 10^{-5}\ m^3)(9{,}8\ m/s^2)$

$F_{empuje} = 0{,}64\ N$

densidad Prom de un corcho $\rho = 256{,}77\ Kg/m^3$

$Peso = (\rho_{corcho})(V_{corcho})(gravedad)$

$Peso = 0{,}164\ N$

$F_{neta} = 0{,}64\ N - 0{,}164\ N$

$F_{neta} = 0{,}477$

$F = m\,a \rightarrow a = \frac{F}{m} = 28{,}38\ m/s^2$

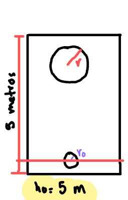
Y, suponiendo que el corcho parte del reposo

$V_{final} = \sqrt{2ad}$ d = 5 metros

$V_{final} = \sqrt{2(28{,}38)(5)} = 16{,}846\ m/s$

El corcho llega a la superficie a una velocidad de 16,846 m/s

c) Una burbuja de un gas ideal se deforma debido a la presion externa, por lo tanto, conforme sube a la superficie, disminuye la presión que recibe y la burbuja se hace más grande

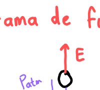


Asumiremos el tamaño inicial de la burbuja con $r_o = 0{,}025\ m$

$\rho g h \frac{4}{3}\pi r^3 = \rho g h_o \frac{4}{3}\pi r_o^3$

$r = \sqrt[3]{\frac{h}{5}}\ 0{,}025$

Diagrama de fuerzas



$F_r = 6\pi\, r\, n\, v$ n = viscosidad v = velocidad (Ley de stokes)

Ahora, según el principio de arquimedes

$$E = \rho g \frac{4}{3}\pi r^3$$

Como es un gas ideal, la masa del gas es despreciable

$$E - F_r = ma \simeq 0$$

$$\rho g \frac{4}{3}\pi r^3 - 6\pi \cdot r n \frac{dh}{dt} = 0$$

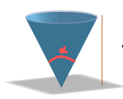
Se utiliza esa profundidad porque es la profundidad exacta donde la burbuja sale del agua

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\rho g}{n} \frac{2}{9} \left(\sqrt[3]{\frac{0{,}025}{5}}\right)^2 0{,}025^2$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1000 \cdot 9{,}8}{0{,}00105} \left(\sqrt[3]{\frac{0{,}025}{5}}\right)^2 (0{,}025)^2 \times \frac{2}{9}$$

$$V = 37{,}903 \ m/s$$

2)



$$x = r \operatorname{sen}(\varphi) \cos\theta$$
$$y = r \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}\theta$$
$$z = r \cos(\varphi)$$

Hallamos el desplazamiento

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \operatorname{sen}^2(\varphi)\, d\theta^2$$

Teniendo en cuenta que φ es constante (α)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)\, d\theta^2$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)\, d\theta^2}$$

La longitud de curva en coordenadas esféricas sería:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Ahora, para minimizarlo, usamos la ecuación de euler-Lagrange

Identidad de Beltrami $\quad F - r' \frac{\partial F}{\partial \theta} = C \qquad F(r, r', \theta) = \sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$

$$\frac{\partial F}{\partial r'} = \frac{r'}{\sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + r'^2}} \qquad \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{r \operatorname{sen}^2(\alpha)}{\sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + r'^2}}$$

Ahora, tenemos que

$$\sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} - r'\left(\frac{r'}{\sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + r'^2}}\right) = C$$

Multiplicando por F tenemos

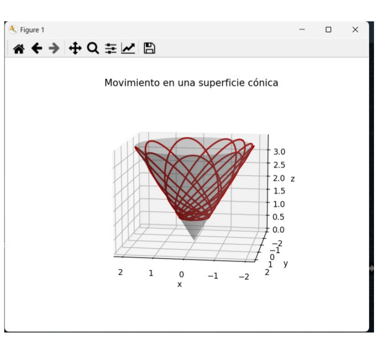
$$r^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + \cancel{(r')^2} - \cancel{(r')^2} = C \sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + (r')^2}$$

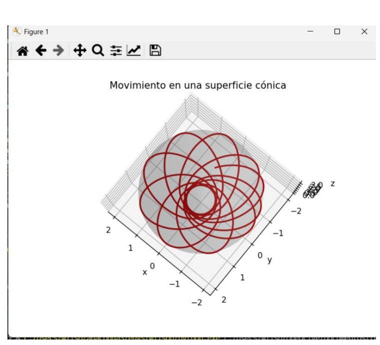
$$r \operatorname{sen}(\alpha) \sqrt{\frac{r \operatorname{sen}(\alpha)}{c} - 1} = r'$$

Esta sería la expresión completa y con los valores de r_1, r_2, θ_1 y θ_2 se puede hallar la geodésica al resolver la ecuación diferencial

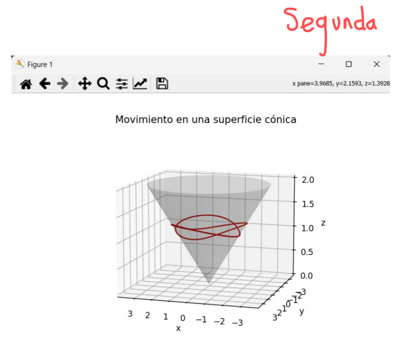
b) Luego de replicarlos, obtuvimos los siguientes resultados

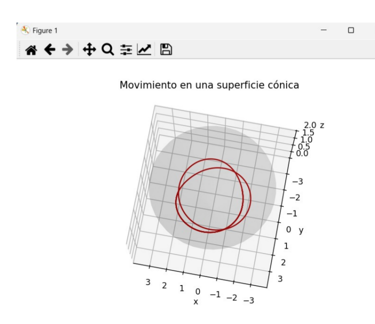
Primera parte





Segunda parte





3) Sabemos que la energía potencial es

$$U = m g y$$

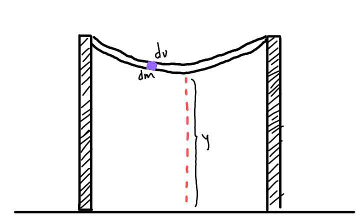
Vamos a tomar un diferencial de potencial ya que queremos la longitud

$$du = y g\, dm \rightarrow dm = \lambda\, ds$$

λ = densidad lineal
ds = segmento de longitud

$$du = y(x)\, g\, \lambda\, ds$$

$$U = g \lambda \int_{s_1}^{s_2} y(x)\, ds$$



Ahora, sabiendo que nuestro ds es

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx$$

Nuestro potencial sería

$$u = g\lambda \int_{s_1}^{s_2} y(x) \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

Buscamos minimizar una distancia por lo tanto usaremos el principio de mínima acción para encontrar la trayectoria que minimiza u y tomaremos $L = y\sqrt{1+(y')^2}$

Y, con la identidad de Beltrami, como L no depende explicitamente de nuestra variable independiente, podemos usar que

$$L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = cte$$

$$y\sqrt{1+(y')^2} - y' \frac{y' y}{\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

Multiplicando todo por $\sqrt{1+(y')^2}$

$$y + \cancel{y(y')^2} - \cancel{(y')^2 y} = C\sqrt{1+(y')^2}$$

$$\left(\frac{y}{c}\right) - (y')^2 = 1$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, tenemos que

$y = a\cosh\left(\frac{x}{c}\right) \rightarrow$ Ecuación de una calenaria

Debido a la complejidad de la ecuación diferencial, podemos tomar la ecuación de una catenaria y al reemplazarla en la ED notaríamos que sí es solución