ejercicio #1:

a) $\mathcal{H} = \mathcal{H}\{f(p_1, q_1), p_2, p_3 \ldots, q_2, q_3 \ldots\}$ → comprobar que $f(q_1, p_1)$ es una constante de movimiento

para que f sea una constante, su parentesis de poisson con $\mathcal{H}$ debe dar 0

$\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} - \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1}$ → como f solo de p_1 y q_1 así quedan sus parciales

$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1}$; $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1}$

Remplazamos:

$\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial p_1}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$ → f es una constante de movimiento

b) $V = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$ con $\vec{a} = a_z\hat{z}$ siendo un vector constante

$V = \frac{\vec{a}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{a_z\cos\theta}{r^2}$

construimos el lagrangiano:

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{a_z\cos\theta}{r^2}$

Pasandolo a esféricas:

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) - \frac{a_z\cos\theta}{r^2}$ → $L_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \text{ctte}$

ya que φ no está explícitamente en el lagrangiano, es una coordenada cíclica, por ende construimos un $\mathcal{L}'$ que no dependa de φ

$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{a_z\cos\theta}{r^2}$

Hacemos la transformada de legendre

$P_r = m\dot{r}$; $P_\theta = mr^2\dot{\theta}$

$\mathcal{H} = \frac{P_r^2}{m} + \frac{P_\theta^2}{mr^2} - \mathcal{L}' = \frac{P_r^2}{m} + \frac{P_\theta^2}{mr^4} - \frac{1}{2}\frac{P_r^2}{m} - \frac{1}{2}\frac{P_\theta^2}{mr^2} + \frac{a_z\cos\theta}{r^2}$

$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}P_r^2 + \frac{1}{2mr^2}P_\theta^2 + \frac{a_z\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{2m}P_r^2 + \frac{1}{r^2}\left[\frac{P_\theta^2}{2m} + a_z\cos\theta\right]$

$\frac{P_\theta^2}{2m} + a_z\cos\theta = f(\theta, P_\theta) = \text{ctte}$ → si se hacen los parentesis de poisson da 0

$E = \text{ctte}$

2) $H = \frac{1}{2}(p^2 - q^2)$ // $f_1 = pq - 2Ht$ // $Q = aq \quad P = p/a$

Hay que demostrar que f_1 es una constante de movimiento
Para eso hacemos

$$\{f_1, H\} = \frac{\partial f_1}{\partial q} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f_1}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q}$$

$$= p \cdot p - q \cdot \frac{1}{q^3}$$

$$= p^2 - \frac{1}{q^2} = 2H$$

$\{F_1, H\} = 2H$

→ Sabemos que H es una constante de movimiento, por lo tanto

$\{f_1, H\} = \text{cte}$

y, como el teorema de poisson nos dice que

$\{a, b\} = \text{cte}$, si a y b son constantes de mov

Quedaría comprobado que f_1 es una cte de mov

b) Para demostrar que la transformación es canónica:

$$\{Q, \mathcal{P}\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q}$$

$$= a \frac{1}{a} - 0$$

$\{Q, \mathcal{P}\} = 1$ → es canónica

Ahora, su generador infinitesimal sería

$Q = aq$
$dQ = a\,dq$

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \qquad F = \int p\,dq \qquad F = qp + C$$

$$\mathcal{P} = \frac{\partial F}{\partial Q} \rightarrow F = \int \mathcal{P}\,a\,dq \rightarrow F = q\mathcal{P}a + C \rightarrow F = q \cdot p$$

c) Sabemos que la generatriz es

$F = pq$ y $f_1 = pq - 2Ht$ la constante de movimiento

Lo que nos dice que

$f_1 = F - 2Ht$

3. a)

El hamiltoniano es

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

Con $V(\vec{r}) = \frac{a \cdot \vec{r}}{r^3}$

Para calcular $\{\vec{r}\cdot\vec{p}, H\} = \{\vec{r}\cdot\vec{p}, \frac{\vec{p}^2}{2m}\} + \{\vec{r}\cdot\vec{p}, V(\vec{r})\}$

$$\Rightarrow \{\vec{r}\cdot\vec{p}, \frac{\vec{p}^2}{2m}\} = \sum_{i=1} \left(\frac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}{\partial q_i} \frac{\partial \frac{\vec{p}^2}{2m}}{\partial p_i} - \frac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}{\partial p_i} \frac{\partial \frac{p^2}{2m}}{\partial q_i} \right).$$

$$\{\vec{r}\cdot\vec{p}, \frac{\vec{p}^2}{2m}\} = \frac{\vec{p}^2}{m}$$

$\{\vec{r}\cdot\vec{p}, V(\vec{r})\} \rightarrow$ Con $V(\vec{r}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$; $a = a_z \hat{z}$

$$\nabla V(\vec{r}) = \nabla\left(\frac{a_z z}{r^3}\right) \rightarrow \nabla V(\vec{r}) = a_z \nabla\left(\frac{z}{r^3}\right)$$

$$\nabla\left(\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{3xz}{r^5}\hat{x} - \frac{3yz}{r^5}\hat{y} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)\hat{z}$$

$$\nabla(V(\vec{r})) = a_z\left(-\frac{3xz}{r^5}\hat{x} - \frac{3yz}{r^5}\hat{y} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^5}z^2\right)\hat{z}\right)$$

$$\{\vec{r}\cdot\vec{p}, V(r)\} = -\vec{r}\cdot\nabla V(\vec{r})$$

$$\{\vec{r}\cdot\vec{p}, V(r)\} = -\vec{r}\cdot\left[a_z\left(-\frac{3xz}{r^5}\hat{x} - \frac{3yz}{r^5}\hat{y} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)\hat{z}\right)\right]$$

$$\{\vec{r}\cdot\vec{p}, V(r)\} = a_z\left[\frac{3z(x^2+y^2+z^2)}{r^5} - \frac{z}{r^3}\right].$$

$$x^2+y^2+z^2 = r^2$$

$$\{\vec{r}\cdot\vec{p}, V(r)\} = a_z\left[\frac{3zr^2}{r^5} - \frac{z}{r^3}\right] = \frac{2a_z z}{r^3}$$

$$\{\vec{r}\cdot\vec{p}, H\} = \frac{\vec{p}^2}{m} + \frac{2a_z z}{r^3}$$

3.b) Cantidad Conservada

La forma del resultado muestra $\vec{r}\cdot\vec{p}$ no es conservada porque $\{r \cdot p, H\} \neq 0$. Sin embargo el potencial depende de z. Los momentos p_x y p_y son cantidades conservadas

Las transformaciones infinitesimales asociadas son

$$\delta x = \varepsilon_x \ , \quad \delta y = \varepsilon_y , \quad \delta z = 0 .$$