Travaux Pratiques n° 2 – Mercredi 30 novembre 2016
Mise en œuvre de la méthode des éléments finis P1 conformes

Exercice 1) Suite et fin de la Feuille de TP 1

Traitement des conditions de bord de type Dirichlet

La matrice A et le second membre F assemblés dans la feuille 2 ne tiennent pas compte des conditions aux limites de Dirichlet. Les sommets sur Γ_D sont repérés par l'intermédiaire des numéros de zone que l'énoncé et le maillage précisent. Il faut
- trouver à l'aide de la fonction `find()` de Matlab et lister les numéros des sommets sur Γ_D correspondant aux zones ainsi fournies (cf `mesh.som_zon(:,1)`);
- définir à l'aide d'@ une fonction `g` dépendant de (z, x, y) déterminant la valeur au point (x, y) sur le bord de zone z où s'appliquent les conditions de Dirichlet ,
- initialiser le vecteur colonne u nul à `nbs` lignes et évaluer les valeurs au bord ;
- trouver à l'aide `setdiff()` de Matlab et lister les numéros des sommets qui n'appartiennent pas à Γ_D : ce sont les inconnues.

Résolution du système linéaire

Le problème linéaire restreint aux seules inconnues (en utilisant des sections de tableau) est résolu à l'aide de l'opérateur $\backslash$.

Exercice 2)

1) Modifier le script et l'appliquer aux maillages définis dans les fichiers `DOM2.amdba`, `DOM3.amdba`, `DOM4.amdba`.

2) Modifier le script et l'appliquer au maillage `DOM2` en prenant $\mathcal{K} = 1$, $f = 0$, Γ_N "associé" aux sommets de zone 3 et
- $g_1(S) = 0.0$ si zone$(S) = 1$
- $g_1(S) = 2.0$ si zone$(S) = 2$

Exercice 3) Assemblage de la matrice de masse M

1) Soit K un triangle donné du maillage, calculer sur feuille

$$B(i,j) = \int_K \varphi_{is(i)}\varphi_{is(j)}\,dxdy$$

où $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3$ et $is(i)$ (resp. $is(j)$) représente le $i$ème (resp. $j$ème) sommet de K. Pour cela, on pourra utiliser la formule de quadrature à 3 points exacte pour les polynômes de degré total au plus 2 et donnée par l'expression suivante (où M_{ij} est le milieu du coté $[S_i, S_j]$)

$$\int_K g(x,y)dxdy \sim \frac{|K|}{3}(g(M_{12}) + g(M_{23}) + g(M_{31}))$$

2) Ecrire sur le modèle de **function [A]=assemb_A(K,mesh)** une fonction matlab **function [M]= assemb_M(mesh)** qui assemble sans tenir compte des conditions aux limites la matrice creuse dite de masse M égale à

$$M(is, js) = \int_{\Omega} \varphi_{is}\varphi_{js}\, dxdy$$

Exercice 4) Etude de l'erreur de convergence

On se propose d'étudier la qualité de l'approximation éléments finis P1 de l'équation de Laplace sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

$$\begin{aligned} -\Delta u = f \qquad & \text{dans } \Omega = [0,1] \times [0,1] \\ u = g_1 \qquad & \text{sur } \Gamma_D \\ \nabla u \cdot n = 0 \qquad & \text{sur } \Gamma_N \end{aligned}$$

On prendra $f = -4$ et $g_1(S) = x_S^2 + y_S^2$. Le bord Γ_N correspond à $y = 0$ et aux sommets de zone 1. Le bord Γ_D correspond aux 3 autres cotés et aux sommets de zone 2. On utilisera le maillage défini dans le fichier `car0.amdba`.

1) Vérifier que $u(x, y) = x^2 + y^2$ est la solution exacte du problème.

2) Modifier le script de la feuille 2 (on tracera en particulier le maillage et la solution approchée) de façon à appliquer la méthode éléments finis aux maillages obtenus en raffinant successivement 4 fois le maillage `car0`. On utilisera pour cela le programme `raf_mesh` qui permet de raffiner le maillage en coupant chaque triangle en 4.

3) En posant $I_h u = \sum_{j=1}^{nbs} u(S_j)\varphi_j$, la norme $\|u - u_h\|_{L^2}$ peut être approchée à $O(h^2)$ près par $\|I_h u - u_h\|_{L^2}$. A l'aide de la matrice masse M, calculer cette quantité pour chaque maillage, puis tracer (avec une échelle log-log) cette erreur ainsi que les graphe des fonctions $h \to h$ et $h \to h^2$ en fonction de h que l'on prendra égal à la longueur de la première arête de bord. Indication : on remarquera que

$$\begin{aligned} \|I_h u - u_h\|_{L^2}^2 &= (I_h u - u_h, I_h u - u_h)_{L^2} \\ &= \left(\sum_{S_i \in \mathcal{T}^h} (u(S_i) - u_i)\varphi_i, \sum_{S_j \in \mathcal{T}^h} (u(S_j) - u_j)\varphi_j \right)_{L^2} \\ &= \sum_{S_i, S_j \in \mathcal{T}^h} (u(S_i) - u_i)(u(S_j) - u_j)\, (\varphi_i, \varphi_j)_{L^2} \\ &= \sum_{S_i, S_j \in \mathcal{T}^h} (u(S_i) - u_i) M_{ij} (u(S_j) - u_j) \\ &= \|I_h U - U_h\|_M^2 \end{aligned}$$

où $(I_h U)_i = u(S_i)$ et $(U_h)i = u_i$. En déduire l'ordre de convergence de la méthode d'éléments finis P1.

Exercice 5) (en autonomie) Perte de coercivité

On étudie l'effet de la perte de coercivité d'une forme bilinéaire sur l'approximation éléments finis. Plus précisément, on considère le modèle coercif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a_\eta(u,v) = f(v), \ \forall v \in V, \end{array} \right. \tag{1}$$

où V est un espace de Hilbert et a_η une forme bilinéaire définie sur $V \times V$ et qui dépend d'un paramètre phénoménologique η qui peut tendre vers zero. On définit la constante de coercivité par :

$$\alpha_\eta = \inf_{u \in V} \frac{a_\eta(u,u)}{\|u\|_V^2}.$$

Définition : *On dit qu'il y a perte de coercivité pour le problème variationnel (1) si le paramètre phénoménologique η est tel que :*

$$\frac{\|a_\eta\|_{\mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})}}{\alpha_\eta} >> 1.$$

On considère un cas particulier du modèle (1). Soit $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ et un maillage affine $\mathcal{T}_h$ de Ω. On note u la solution du problème dit de **convection-diffusion-réaction** (caractérisé respectivement par $\beta \cdot \nabla u$, $-\nabla \cdot (\kappa \nabla u)$ et u) :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\nabla \cdot \mathcal{K} \nabla u + (\beta \cdot \nabla) u + u &=& f & \\ u &=& 0 & \text{sur } \Gamma_3 = \{(x,y)/x = 0, \ y \in [0,1]\}, \\ u &=& 1 & \text{sur } \Gamma_4 = \{(x,y)/x = 1, \ y \in [0,1]\}, \\ \partial_y u &=& 0 & \text{sur } \Gamma_1 = \{(x,y)/y = 0, \ x \in [0,1]\}, \\ \partial_y u &=& 0 & \text{sur } \Gamma_2 = \{(x,y)/y = 1, \ x \in [0,1]\}, \end{array} \right. \tag{2}$$

où β est vecteur de $\mathbb{R}^2$. Dans toute la suite, on prendra $\mathcal{K}(x,y) = \nu > 0$ et $f = 1$.

On introduit l'espace de Sobolev suivant :

$$H = \{u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u_{|\Gamma_3} = 0 \text{ et } u_{|\Gamma_4} = 0 \text{ au sens des traces}\}.$$

que l'on munit de la norme $\|u\|_H = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$. Dans ce cas le paramètre η est défini par l'importance relative de la diffusion par rapport à la convection : $\eta = \nu / \|\beta\|_\infty$. On vérifie que

$$\frac{\|a_\eta\|_{\mathcal{L}(H \times H, \mathbb{R})}}{\alpha_\eta} = O(\frac{1}{\eta})$$

et qu'il y a perte de coercivité au sens donné plus haut si ν tend vers 0.

Le problème (2), dont on admettra qu'il admet une solution, est équivalent à la formulation variationnelle suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega) \quad u_{|\Gamma_3} = 0 \quad u_{|\Gamma_4} = 1 \\ \displaystyle\int_\Omega (\mathcal{K} \nabla u \cdot \nabla v + (\beta \cdot \nabla u)\, v + uv) \ dx = \int_\Omega f v \, dx \,, \quad \forall v \in H \,. \end{array} \right. \tag{3}$$

Pour $\beta = (1,0)^T$, on vérifie que la solution analytique du problème (2) est donnée par :

$$u(x,y) = 1 + \frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_1+\lambda_2} - 1} - \frac{e^{-\lambda_2 x}}{1 - e^{-\lambda_1-\lambda_2}} \text{ avec } \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{1+4\nu}}{2\nu},\ \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{1+4\nu}}{2\nu}.$$

1) On se propose de mettre en œuvre l'approximation éléments finis $P1$ du problème. On cherche une approximation de la solution dans l'espace défini par

$$V_h = \{v \in C^0(\Omega),\ v_{|K} \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

et engendré par $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant nbs}$ tel que $\varphi_i \in V_h$ et que $\varphi_i(S_j)$=δ_{ij} pour S_j sommet du maillage, c'est-à-dire $u_h \in V_h$ sous la forme

$$u_h = \sum_{S_j \notin \Gamma_D} u_j \varphi_j + \sum_{S_j \in \Gamma_D} g_1(S_j)\varphi_j$$

telle que

$$\int_\Omega \mathcal{K}\nabla u_h \nabla\varphi_i + (\beta\cdot\nabla u_h)\varphi_i + u_h\varphi_i\, dxdy = \int_\Omega f\varphi_i\, dxdy \quad \forall i \quad \backslash \quad S_i \notin \Gamma_D\,. \tag{4}$$

On notera que l'on est conduit à la résolution d'un système linéaire où les inconnues sont les coordonnées u_i (valeur de u_h en S_i) pour $S_i \notin \Gamma_D$. En utilisant la formule à un point exacte pour les polynômes de degré 1 où G_K est le centre de gravité de K

$$\int_K g(x,y)dxdy \sim |K|\, g(G_K)\,.$$

développer sur feuille l'assemblage de la partie convective C de la matrice c'est-à-dire

$$C(is,js) = \int_\Omega (\beta\cdot\nabla\varphi_{js})\varphi_{is}\, dxdy\,.$$

2) Ecrire une fonction matlab **function [C]=assemb_C(Beta,mesh)** qui assemble la partie convective C sans tenir compte des conditions aux limites de type Dirichlet.

3) Ecrire un script Matlab, utilisant le maillage `CDR.amdba`, prenant $\nu = 1$, qui assemble la matrice de rigidité, la matrice de masse et la matrice de convection, puis calcule la solution approchée en tenant compte des conditions aux limites et trace la solution approchée que l'on comparera avec la solution exacte. Les sommets S de Γ_1 (respectivement Γ_2, Γ_3, Γ_4) ont pour numéro de zone 1 (respectivement 2, 3, 4).

Appliquer le programme aux valeurs $\nu = 0.02$ et $\nu = 0.002$ avec le maillage `CDR.amdba` et 3 raffinements uniformes successifs de ce maillage. Commenter les résultats numériques.