Travaux Pratiques n^o 4 – Merci 14 décembre 2016
Problèmes aux valeurs propres. Base modale réduite

1 Approximation Éléments finis des problèmes spectraux.

Fichiers nécessaires : `L0.amdba`.

On se propose d'étudier les modes propres de vibration d'une membrane élastique et homogène sur une géométrie en forme de "L". On suppose qu'en l'absence de chargement, cette membrane occupe le domaine Ω de $\mathbb{R}^2$, qu'elle est tendue de façon uniforme au repos ($\mathcal{K}$ sera supposé constant égal à 1) et qu'elle s'appuie sur le rebord de Ω. L'étude conduit à un problème spectral c'est-à-dire à déterminer les éléments (valeurs et vecteurs) propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \psi \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \quad / \\ -\mathcal{K}\Delta\psi = \lambda\,\psi \quad \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

On recherche les **plus petites valeurs propres**, car leur distribution apporte des informations utiles sur la qualité acoustique de la membrane (modes dits basse fréquence).

L'approximation par éléments finis de (1) se ramène à chercher $\psi_h = \displaystyle\sum_{S_i \notin \Gamma_D} \psi_i\,\varphi_i \in V_0^h$ et $\lambda_h \in \mathbb{R}$ tels que

$$A\psi_h = \lambda_h\, M\psi_h \tag{2}$$

où A et M sont respectivement la matrice de rigidité et la matrice masse réduites aux sommets n'appartenant pas à Γ_D.

1) Écrire un script Matlab lisant le maillage du domaine en L muni du maillage grossier stocké dans le fichier `L0.amdba` et calculant la matrice de rigidité et la matrice masse. Déterminer les sommets appartenant à Γ_D sachant qu'ils correspondent aux sommets de zone 1.

2) Déterminer les 6 plus petites valeurs propres du problème généralisé à l'aide de la commande Matlab `eigs()` sachant que l'instruction

```
[V,D] = eigs(A,B,k,sigma)
```

retourne la matrice diagonale des `k` valeurs propres autour de la valeur réelle `sigma` et la matrice `V` dont les colonnes sont les valeurs propres du problème aux valeurs propres généralisé

$$A\boldsymbol{v}^k = \lambda^k B\boldsymbol{v}^k.$$

On prendra `sigma = 9`.

3) Pour chaque valeur propre, tracer les vecteurs propres $\boldsymbol{v}^k$ correspondants vu comme des fonctions $\psi^k(x)$:

$$\psi_h^k(x) = \sum_{S_i} (\boldsymbol{v}^k)_i \, \varphi_i(x),$$

(surface 3d et iso-valeurs). On rappelle que les vecteurs propres vivent dans V_0^h. Afin de comparer les vecteurs propres, on calculera à l'aide de la fonction `max()` la norme infinie du vecteur propre et l'indice i où est atteint cette norme c'est-à-dire on calculera $\|\psi_h\|_\infty$ et i tels que

$$\|\psi_h\|_\infty \equiv |\psi_h(i)| = \max_j |\psi_h(j)|$$

et on adimensionera le vecteur propre par la formule (j parcourant tous les sommets)

$$\psi_{adim}(j) = \text{sign}(\psi_h(i)) \frac{\psi_h(j)}{\|\psi_h\|_\infty}$$

4) Reprendre les questions 2) et 3) en raffinant le maillage à l'aide du programme `raf_mesh`.

2 Base hilbertienne, méthode de Galerkin réduite sur une base propre orthogonale (base modale)

1) Approcher par éléments finis les 20 premières fonctions propres du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet homogène pour le domaine Ω défini dans le fichier `L0.amdba`. Vérifier si les $N = 20$ premières valeurs propres sont simples ou non et visualiser les modes (fonctions) propres associés.

2) On s'intéresse maintenant au problème de Poisson

$$-\Delta u = 1 \quad \text{dans } \Omega,$$
$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega.$$

Au lieu d'appliquer une méthode d'éléments finis sur ce problème, on se propose ici d'utiliser une méthode de Galerkin définie sur le sous-espace vectoriel de dimension N

$$W_h = vect(\psi_h^1, ..., \psi_h^N).$$

On cherche donc $\tilde{u}_h \in W_h$, c'est-à-dire de la forme

$$\tilde{u}_h(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \, \psi_h^k(x)$$

avec $\alpha_k \in \mathbb{R}$, tel que

$$(\nabla \tilde{u}_h, \nabla w_h) = (1, w_h) \quad \forall w_h \in W_h.$$

Comment s'écrit le système réduit de taille N ? Quelle est la solution de ce système ? Comparer $\tilde{u}_h$ à la solution éléments finis u_h (à calculer). Calculer $\|\tilde{u}_h - u_h\|_{L^2}$. Afficher les valeurs de la suite $\{\alpha_k\}$. Que remarquez-vous ?