Travaux Pratiques n° 5 – Mer 4 janvier 2017
Conditions aux limites de Robin. Problèmes d'évolution.

1 Problème EF avec conditions aux limites de Robin

Fichiers nécessaires : `DOM2.amdba`.

Dans cet exercice, on souhaite mettre en œuvre la méthode des éléments finis sur le problème de Poisson mais avec des conditions aux limites de Robin :

$$-\nabla \cdot (\kappa(.)\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$

$$\kappa(.)\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(u - u_a) = g \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, \tag{2}$$

avec $\alpha > 0$, $u_a \in H^{1/2}(\Gamma)$ et $g \in L^2(\Gamma)$. En multipliant (1) par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$, puis en appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega \kappa(.)\nabla u \cdot \nabla v + \int_\Gamma (\alpha(u - u_a) - g)\, v \, d\sigma = \int_\Omega fv \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3}$$

On obtient ainsi un système abstrait

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V = H^1(\Omega)$$

avec

$$a(u, v) = \int_\Omega \kappa(.)\nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma \alpha uv \, d\sigma$$

et

$$\ell(v) = \int_\Omega fv \, dx + \int_\Gamma (g + \alpha u_a)v \, d\sigma.$$

Mettre en œuvre la méthode des éléments finis P1 conformes sur cet exemple :

1) Reprendre la fonction `assemb_A(kappa,mesh)` pour l'étendre et prendre en compte le terme de bord dans $a(.,.)$ ci-dessus. Renommer la fonction en `assemb_A_Robin(kappa,alpha,mesh)`. De la même façon, reprendre la fonction `assemb_f(fun,mesh)`, la renommer ici `assemb_f_Robin(f,alpha,ua,g,mesh)` pour prendre en compte le terme de bord dans $\ell(v)$ ci-dessus.

2) Application. Considérer $\alpha = 1$, $f(x, y) = -1$, $g(x, y) = 0$, $u_a(S) = 0$ si zone(S)=1, $u_a(S) = 2$ si zone(S)=2 et $u_a(S) = -1$ si zone(S)=3.

3) Pénalisation. Que se passe-t-il à votre avis quand $\alpha \to +\infty$? Étudier la solution numérique pour $\alpha = 10^8$ (on gardera les valeurs de la question précédente pour les quantités autres que α).

2 Problèmes d'évolution. Problème de la chaleur

Fichiers nécessaires : `L2.amdba`.

On considère le problème de la chaleur suivant :

$$\partial_t u - \kappa \Delta u = f(.,t) \quad \text{dans } \Omega \times [0,T],$$
$$u(.,t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0,T],$$
$$u(.,t=0) = u^0(.) \quad \text{dans } \Omega.$$

Il s'agit d'un problème spatio-temporel. Pour avoir un schéma stable en temps, il convient d'impliciter le terme de Laplacien. On note $u^n(.) \simeq u(.,t^n)$ une approximation de la solution au temps discret $t^n = n\Delta t$, avec $\Delta t > 0$.

Dans le cas homogène $f = 0$, on a avec le schéma d'Euler implicite

$$(u^{n+1}, v) - (u^n, v) + \kappa \Delta t \, (\nabla u^{n+1}, \nabla v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En choisissant $v = u^{n+1}$, il vient

$$\|u^{n+1}\|_{L^2}^2 - (u^n, u^{n+1}) + \kappa \Delta t \|\nabla u^{n+1}\|_{L^2}^2 = 0$$

Enfin par l'identité

$$-ab \geqslant -\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

pour tous réels a, b, on en conclut

$$\frac{1}{2}\|u^{n+1}\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|u^n\|_{L^2}^2 + \kappa \Delta t \|\nabla u^{n+1}\|_{L^2}^2 \leqslant 0.$$

On a ainsi une décroissance en norme de Sobolev à poids

$$\frac{1}{2}\|u^{n+1}\|_{L^2}^2 + \kappa \Delta t \|\nabla u^{n+1}\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{1}{2}\|u^n\|_{L^2}^2 + \kappa \Delta t \|\nabla u^n\|_{L^2}^2$$

ou encore

$$\|u^{n+1}\|_{1,\kappa,\Delta t}^2 \leqslant \|u^n\|_{1,\kappa,\Delta t}^2$$

avec

$$\|u\|_{1,\kappa,\Delta}^2 = \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2 + \kappa \Delta t \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Cela montre la stabilité en temps de la méthode de discrétisation temporelle implicite.

Pour la méthode d'éléments finis, on avance de proche en proche à chaque pas de temps par le schéma d'approximation : étant donné $u^{n,h} \in V^h$ déjà calculé, trouver $u^{n+1,h}$ à trace nulle sur le bord telle que

$$(u^{n+1,h}, v^h) - (u^{n,h}, v^h) + \kappa \Delta t \, (\nabla u^{n+1,h}, \nabla v^h) = \Delta t \, (f(.,t^{n+1}), v^h) \quad \forall v^h \in V_0^h.$$

On a donc une forme abstraite

$$a(u^{n+1,h}, v^h) = \ell^{n,n+1}(v^h) \quad \forall v^h \in V_0^h,$$

avec

$$a(u,v) = (u,v)_{L^2} + \kappa \Delta t \, (\nabla u, \nabla v)$$

et

$$\ell^{n,n+1}(v) = \int_{\Omega^h} u^{n,h} v \, dx + \Delta t \int_{\Omega^h} f(., t^{n+1}) v \, dx.$$

Mettre en œuvre la méthode d'éléments finis. On assemblera la matrice du système ainsi que le second membre, sans tenir compte des conditions aux limites de Dirichlet. Puis on tiendra compte des conditions aux limites en réduisant le système aux sommets non Dirichlet. Le système linéaire à résoudre à chaque pas de temps.

NB : Notez bien que le second membre doit être remis à jour à chaque pas de temps $t^{n+1} = t^n + \Delta t$.

Application : considérer le domaine `L2.amdba`. Prendre $\kappa = 0.01$ et

$$f((x, y),\, t) = \sin\left(2\pi(x + y - \frac{t}{\tau})\right)$$

avec $\tau = 1$. On prendra comme intervalle d'évolution $t \in [0, T]$ avec $T = 5$. Prendre $\Delta t = 0.1$. Afficher le champ solution u^n à chaque pas de temps t^n.