Feuille de TP 7 – Mercredi 18 janvier 2017

Introduction aux Volumes Finis – Problème de transport/convection scalaire

1 La méthode des volumes finis

Fichier : `disq0.amdba`.

On considère l'équation de transport suivante où $u = u(x, y, t)$ est à valeur dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + c_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

soit

$$\partial_t u + \boldsymbol{c} \cdot \nabla u = 0$$

et la donnée initiale

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \equiv e^{-50\,\left((x-0.4)^2+(y-0.0)^2\right)}$$

dans le domaine circulaire de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 dont un maillage composé de triangles est fourni dans le fichier `disq0.amdba`. Si le champ de vecteur $\boldsymbol{c}(x, y)$ est à divergence nulle :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{c} = 0,$$

on remarque que l'équation de transport s'écrit comme une **loi de conservation**

$$\partial_t u + \nabla \cdot (\boldsymbol{c}u) = 0.$$

En particulier, pour tout élément de volume $V \subset \Omega$, on a le bilan

$$\frac{d}{dt}\int_V u(.,t)\,dx + \int_{\partial V} (\boldsymbol{c}\cdot\nu)\,u\,d\sigma = 0.$$

Les **méthodes des volumes finis** consistent à déterminer une approximation de la moyenne de la solution sur chaque volume K :

$$u_K(t) \sim \frac{1}{|K|}\int_K u(x, y, t)\,dxdy\,.$$

L'équation (1) et la formule de Green conduisent au système différentiel suivant où l'on note $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ l'ensemble des volumes voisins de K et $\nu_{K,L}$ la normale unitaire à $K \cap L$ orientée de K vers L

$$\frac{du_K(t)}{dt} = \frac{1}{|K|}\sum_{L\in\mathcal{N}(\mathcal{K})} |K \cap L|\Phi(u_K, u_L; \nu_{K,L}) \tag{2}$$

où $\Phi(u_K, v_K, \nu_{N,L})$ est le flux numérique tenant compte de la direction d'où vient l'information. Dans le cas présent, si on pose $C = (c_1(x_{KL}, y_{KL}), c_2(x_{KL}, y_{KL}))$, $M_{KL} = (x_{KL}, y_{KL})$ étant le milieu de l'arête $K \cap L$, on prendra

$$\Phi(u_K, u_L; \nu_{K,L}) = \begin{cases} C\cdot\nu_{K,L}\ u_K & \text{si} \quad C\cdot\nu_{K,L} \geqslant 0 \\ C\cdot\nu_{K,L}\ u_L & \text{si} \quad C\cdot\nu_{K,L} < 0\,. \end{cases}$$

On résout le système (3) par la méthode d'Euler explicite, qui s'écrit, u_K^n étant une approximation de $u_K(n\,dt)$ et dt le pas de temps :

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{dt}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(\mathcal{K})} |K \cap L| \Phi(u_K^n, u_L^n; \nu_{K,L}) \tag{3}$$

1) Sur feuille : vérifier que $\Phi(u_K, u_L; \nu_{K,L}) = -\Phi(u_L, u_K; \nu_{L,K})$

2) Sur feuille : Dans le cas numérique étudié, les contributions des arêtes de bord sont nulles car C est orthogonal aux normales des arêtes de bord. Vérifier que pour calculer u_K^{n+1}, il suffit de parcourir l'ensemble des arêtes internes et d'accumuler dans les 2 volumes adjacents à l'arête la contribution qu'il convient et que l'on déterminera.

2 Volumes finis : mise en œuvre

1) Ecrire un script qui lit le fichier `disq0.amdba`, trace le maillage correspondant et appelle la fonction `face_number()`.

2) Ecrire une fonction de la forme

```
function [sol] = init(u0, mesh)
```

qui calcule pour chaque triangle K du maillage la valeur $u0(G_K)$ où G_K est le centre de gravité de K et qui retourne le vecteur colonne `sol` composé des valeurs $u0(G_K)$. On supposera que la fonction $u0$ est une fonction de 2 variables.

3) Calculer dans la variable `sold` la solution initiale à l'aide de la fonction `init()`, puis tracer la surface 3D de cette solution initiale et ses lignes de niveau (`hautr = 0 : 0.05 : 1`) en utilisant la function `tri_to_som()`.

4) Écrire une fonction de la forme

```
function [snew] = conv_sca(mesh, sold, deltat)
...
```

qui à partir de l'approximation sur chaque volume K de la solution à l'instant $t^n = n\Delta t$ stockée dans la variable $sold$ calcule l'approximation à l'instant $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$ de la solution stockée dans la variable $snew$ à l'aide du schéma volumes finis :

$$snew(K) = sold(K) - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(\mathcal{K})} \left(\sum_{C.N_{KL}>0} C.N_{KL}\, sold(K) + \sum_{C.N_{KL}<0} C.N_{KL}\, sold(L) \right) \tag{4}$$

où $N_{KL} = |K \cap L| \nu_{KL}$.

Pour cela, on parcourra les arêtes et on accumulera dans les 2 éléments voisins les contributions correspondantes. On prendra ici pour $c_1(x,y) = -y$ et $c_2(x,y) = x$ et on remarquera que les **arêtes de bord**, c'est-à-dire celles dont `mesh.fac_elm(nf,2)=0`, n'ont aucune contribution car $C.N = 0$ dans le cas présent.

5) Modifier le script de la question 1 exercice 2 de façon à résoudre le problème entre 0 et T avec le pas Δt. A chaque pas de temps, on affichera la ligne suivante (à l'aide de la commande `fprintf`)

$$it \quad temps \quad \sum_K |K| snew(K) \quad max(snew) \quad min(snew)$$

où it est le numéro de l'itération en temps. Ce programme tracera aussi dans une figure la surface 3d de la solution finale (à T) et dans une autre figure les lignes de niveau (mêmes niveaux que la condition initiale) de cette même solution.

3) Mettre en œuvre ce schéma avec $\Delta t = 0.03$ et $T = \pi$. Reprendre cette question avec le maillage raffiné une fois et $dt = 0.015$. Comparer les résultats.

4) Vérifier que pour $c_1(x, y) = -y$ et $c_2(x, y) = x$

$$u(x, y, t) = e^{-50\,\left((x-0.4\cos(t))^2+(y-0.4\sin(t))^2\right)} \tag{5}$$

est solution du problème. Comparer graphiquement et numériquement la solution exacte et la solution approchée.

3 Cas d'une donnée initiale discontinue

Ré-appliquer le schéma de volumes finis fabriqué ci-dessus à la donne initiale discontinue

$$u^0(x, y) = 1_{((x-0.4)^2+(y-0.0)^2\leqslant 0.04)}(x, t)$$

Que constatez-vous ? Est-ce raisonnable comme précision ?

Raffinez le maillage, diviser le pas par deux, et observer à nouveau l'évolution de la solution numérique. Raffinez une dernière fois.