Master M2 AMS
Analyse — Modélisation — Simulation
Florian De Vuyst, ENS Cachan U. Paris-Saclay

C03 – Simulation et méthodes numériques
2016-2017

Travaux Pratiques n° 9 – Mercredi 1er février 2017

Méthode des caractéristiques pour les équations de transport

Méthode des caractéristiques

Fichier de maillage : `carre11.amdba`

On souhaite résoudre le problème de transport linéaire suivant :

$$\partial_t y + \boldsymbol{u} \cdot \nabla y = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T], \tag{1}$$

$$y(.,t=0) = y^0(x), \tag{2}$$

$$y = g \quad \text{sur } \Gamma^-, \tag{3}$$

où $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ est un champ de vitesse régulier, $y^0 \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$, la frontière $\Gamma^- \subset \partial\Omega$ représente le bord du domaine avec des conditions de flux entrant, c'est-à-dire

$$\Gamma^- = \{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega \;/\; \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \nu(\boldsymbol{x}) < 0\}$$

et $g \in L^\infty(\Gamma^-) \cap BV(\Gamma^-)$.

On souhaite résoudre numériquement ce problème sur maillage non structuré de type **éléments finis** (EF). La méthode des EF qui est une méthode centrée n'est pas stable pour ce type de problème hyperbolique.
On se propose d'utiliser plutôt la **méthode des caractéristiques** qui est spécialisée pour résoudre les problèmes d'advection. L'équation d'advection ci-dessus peut encore s'écrire

$$\frac{Dy}{dt} = 0,$$

(dérivée lagrangienne ou dérivée particulaire), c'est-à-dire

$$\frac{dy}{dt}(X(t),t) = 0, \quad \frac{dX}{dt}(t) = \boldsymbol{u}(X(t)), \quad X(0) = \boldsymbol{x}^0.$$

Un "bon" schéma pour discrétiser ces problèmes différentiels est la méthode des caractéristiques

$$\frac{y^{n+1}(\boldsymbol{x}) - y^n(X^n(\boldsymbol{x}))}{\Delta t} = 0$$

où $X^n(x)$ est une approximation de la solution à $t = n\Delta t$ du problème différentiel ordinaire **rétrograde**

$$\frac{dX}{dt}(t) = \boldsymbol{u}(X(t)), \quad X((n+1)\Delta t) = \boldsymbol{x}.$$

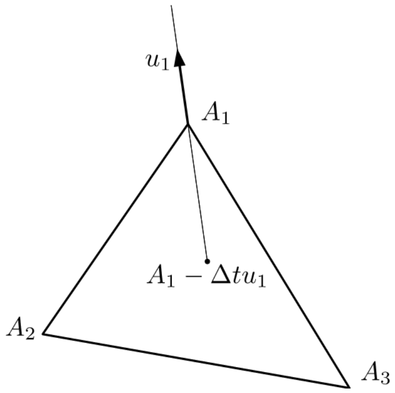

FIGURE 1 – Méthode des caractéristiques sur un triangle K.

Pour simplifier la résolution, on peut approcher localement le champ de vitesse par une constante (vectorielle). Par exemple, pour un sommet S_i de la triangulation $\mathscr{T}^h$, on approche localement la vitesse $\boldsymbol{u}$ par $\boldsymbol{u}_i := \boldsymbol{u}(S_i)$ (Δt assez petit). Dans ce cas, la solution du problème différentiel est clairement

$$X^n(S_i) = S_i - \Delta t\, \boldsymbol{u}_i.$$

Ainsi, la solution recherchée au sommet $\boldsymbol{S}_i$ est

$$y^{n+1}(\boldsymbol{S}_i) \quad = \quad y^n(\boldsymbol{S}_i - \Delta t\, \boldsymbol{u}_i)$$

On peut par exemple utiliser une interpolation EF P^1 par triangle pour rendre explicite la valeur :

$$\boxed{y^{n+1}(\boldsymbol{S}_i) = \mathscr{I}^1 y^n(\boldsymbol{S}_i - \Delta t\, \boldsymbol{u}_i)}$$

où $\mathscr{I}^1$ représente l'opérateur d'interpolation P^1. Pour que la caractéristique générée depuis un sommet S_i ne "dépasse pas" la taille d'un triangle, on impose une condition de type CFL du type

$$\Delta t \quad \max_{S_i \in \mathscr{T}^h} \frac{|\boldsymbol{u}_i|}{\min_{A \subset \partial K,\ K \ni S_i} |A|} \leqslant 1$$

qui interdit que la caractéristique n'aille au delà du triangle possédant S_i comme sommet.

1°) Mettre en oeuvre une fonction

```
ynew = convect(mesh, u, y, Gammam, g, dt)
```

qui met en œuvre la méthode des caractéristiques sur un maillage éléments finis `mesh` pour le champ courant $y^n = y$ à l'instant t^n, avec le champs de vitesse $\boldsymbol{u}$, `gammam` la liste des sommets de Γ^-, et avec les conditions $y = g$ sur Γ^- pour un pas de temps `dt`. La fonction `convect` devra mettre en œuvre l'algorithme suivant :

1. Initialisation : `ynew = zeros(mesh.nbs,1)` ;
2. Pour les sommets $\boldsymbol{S}$ de Γ^- : faire

$$y^{ynew}(\boldsymbol{S}) \leftarrow g(\boldsymbol{S});$$

3. Boucle sur les éléments triangle K. Pour $\boldsymbol{S}_i$, $i = 1, 2, 3$ sommets de K,
   – Calculer $\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{S}_i - \Delta t\, \boldsymbol{u}_i$.
   – Coordonnées barycentriques de P_i : calculer $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ solutions du système linéaire

$$\begin{aligned} \lambda_1 \boldsymbol{S}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{S}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{S}_3 &= \boldsymbol{P}_i, \\ \lambda_1 \quad + \lambda_2 \quad + \lambda_3 \quad &= 1. \end{aligned}$$

   Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqslant 0$ (point non extérieur à K), faire

$$y^{new}(is(i)) \leftarrow \lambda_1\, y(\boldsymbol{S}_1) + \lambda_2\, y(\boldsymbol{S}_2) + \lambda_3\, y(\boldsymbol{S}_3).$$

2°) Appliquer ensuite la méthode des caractéristiques sur le maillage `carre11.amdba` qui représente le domaine carré $\Omega = (-1, 1)^2$ avec le champs de vitesse tournant

$$\boldsymbol{u}(x, u) = \left(-\sin(\pi y)\cos(\pi x/2),\ \sin(\pi x)\cos(\pi y/2)\right)^T.$$

(NB : on choisira le pas Δt suffisamment petit pour que le schéma soit stable, et assez grand pour que le calcul avance assez rapidement). Dans ce cas particulier, on a $\Gamma^- = \emptyset$. On prendra comme donnée initiale

$$y^0(x, y) = 4\left(\frac{1}{4} - \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + y^2}\right)_+,$$

où x_+ désigne la partie positive de x. Afficher la solution numérique au cours des itérations (à chaque instant). On terminera le calcul à l'instant $T = \pi$ (une rotation complète de la solution dans le carré).

3°) Étudier numériquement la conservation de la masse : on affichera à chaque temps discret la valeur de

$$t \mapsto \int_\Omega y(x, t)\, dx$$

et

$$t \mapsto \int_\Omega \left| y(x, t) - y^0(x) \right|\, dx.$$

Conclure.