



école —
normale —
supérieure —
paris — saclay —

UNIVERSITÉ DE
VERSAILLES
ST-QUENTIN-EN-YVELINES



MASTER 2 DE MATHÉMATIQUES : ANALYSE, MODÉLISATION, SIMULATION
PARCOURS : MODÉLISATION SIMULATION

Etude numérique des équations « BMW » du groupe de renormalisation non perturbatif

Gaétan Facchinetti

Encadré par : Bertrand Delamotte et Nicolas Dupuis

*Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée,
Université Paris-Saclay, Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées,
Ecole Normale Supérieure de Cachan, Université Versailles Saint Quentin*

27 février - 28 juillet 2017

Table des matières

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Introduction | 3 |
| 1.1 | Transitions de phases | 3 |
| 1.2 | Intérêt du groupe de renormalisation et des équations BMW | 3 |
| 2 | Origine du modèle | 4 |
| 2.1 | Un peu de thermodynamique et de physique statistique | 4 |
| 2.2 | Le groupe de renormalisation (RG) | 4 |
| 2.3 | Le groupe de renormalisation non perturbatif (NPRG) | 5 |
| 3 | Le modèle continu $O(N)$ | 6 |
| 3.1 | Equations de flots générales | 6 |
| 3.2 | Approximation BMW | 6 |
| 3.3 | Méthode de simulation | 6 |
| 3.4 | Résultats | 6 |
| 4 | Le modèle d'Ising en dimension 2 | 7 |
| 4.1 | Modélisation du problème avec des champs | 7 |
| 4.2 | Etapes de la résolution numérique | 7 |
| 4.3 | Méthodes et outils numériques | 7 |
| 4.4 | Résultats | 7 |

1 Introduction

1.1 Transitions de phases

La physique statistique [2] offre un cadre permettant de calculer les grandeurs macroscopiques, dites aussi thermodynamiques, des problèmes mettant en jeu des systèmes avec un très grand nombre de corps (particules, molécules, etc.) interagissant tous ensemble. Nous allons nous intéresser ici plus particulièrement au problème que soulèvent les phénomènes de transitions de phase en commençant par décrire ce dont il s'agit, puis en explicitant ce qui va exactement nous intéresser dans ces transitions.

En thermodynamique on appelle phase un milieu possédant des propriétés physiques et chimiques macroscopiques homogènes. Or, avec la modification de certains paramètres (comme la température, la pression, etc.), un système peut changer de phase lors de, ce que l'on appelle, une transition de phase. Le passage de l'eau de l'état liquide à l'état gazeux ou solide par modification de la température à pression constante en est un très bon exemple []. On s'intéresse alors ici aux phénomènes physiques particuliers qui se produisent lors de ces transitions.

Pour comprendre quels sont ces phénomènes considérons un système que l'on peut faire changer de phase en imposant sa température T seulement. On appelle T_c , température critique, la température à laquelle se produit la transition. Il est alors possible de définir sur ce système une fonction de corrélation $G^{(2)}(r)$ qui décrit quantitativement l'influence que deux corps du système séparés d'une distance r ont l'un sur l'autre. Notons bien que plus la distance entre deux corps sera grande moins cette influence sera forte et donc plus la fonction de corrélation sera faible. A cette fonction, qu'il est possible de déterminer expérimentalement [1], on y associe donc une longueur ξ qui définit approximativement la distance à partir de laquelle deux corps du système n'ont plus d'influence l'un sur l'autre.

On observe qu'au moment de la transition, pour $|T - T_c| \rightarrow 0$, à la fois ξ et $G^{(2)}$ divergent selon les lois

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \quad \text{et} \quad G^{(2)}(r) \sim |r|^{2-d-\eta}, \quad (1)$$

où d est la dimension physique du système et ν et η sont deux réels positifs appelés les exposants critiques du système. Il existe comme cela plusieurs grandeurs desquelles on peut extraire différents autres exposants critiques. Le point important est que tous les systèmes ayant les mêmes propriétés de symétries possèdent les mêmes exposants critiques, on dit qu'ils appartiennent à la même classe d'universalité. Notons bien que la température critique n'est elle pas une grandeur universelle et dépend de la constitution exacte de chaque système.

1.2 Intérêt du groupe de renormalisation et des équations BMW

Le groupe de renormalisation (RG) permet à la fois de montrer l'effet d'universalité sur les exposants critiques et de les calculer. L'approche par le RG a permis d'obtenir déjà d'excellents résultats [] pour différents systèmes étudiés comparé aux expériences et autres méthodes comme les simulations Monte-Carlo. Cependant elle reste limitée dans ces applications car elle se fonde sur des approximations de "théorie des perturbations" pour pouvoir mener les calculs qui ne permettent de ne calculer par exemple que les exposants universels critiques mais pas les grandeurs non universelles comme la température critique.

Le groupe de renormalisation non perturbatif (NPRG) permet de répondre à ce problème en reprenant le principe du RG sous une approche différente permettant d'accéder à des équations exactes. Cependant, en pratique, ces équations ne sont pas solubles et il faut faire d'autres approximations, comme l'approximation BMW, pouvant être d'autre nature que celle de la théorie des perturbations pour pouvoir récupérer à la fois les exposants critiques et les grandeurs non universelles. Mais bien que cela soit possible le NPRG n'avait jamais été utilisé auparavant pour calculer une température critique.

L'objectif premier de cette étude est donc de reprendre une simulation d'équations intégrées-différentielles non linéaires obtenues par l'approximation BMW des équations du NPRG déjà réalisée [7] afin de déterminer des exposants critiques. Mais aussi, et pour la première fois, de l'adapter à un système d'Ising en dimension deux pour en calculer dans le cadre du NPRG, la température critique.

Dans une première partie nous rappellerons donc les origines du modèle du RG et du NPRG puis nous l'utiliserons pour développer les équations BMW dans le cas de systèmes possédant une symétrie $O(N)$ et étudier numériquement leur résolution. Ensuite nous appliquerons le modèle BMW au système d'Ising en deux dimensions afin de tester s'il permet de retrouver la température et les exposants critiques que l'on connaît par la résolution analytique faite par Onsager [10].

[4, 8, 3, 11, 13, 12, 9, 6, 7, 10]

2 Origine du modèle

2.1 Un peu de thermodynamique et de physique statistique

Nous résumons dans cette sections quelques concepts fondamentaux de la thermodynamique et de la physique statistique [5] nécessaires à l'introduction du groupe de renormalisation.

Considérons un système à P corps dans un ouvert à d dimensions Ω de volume V . On considère que l'ensemble des N degrés de liberté de chacun de ces P corps peuvent être décrit suivant leur position \mathbf{r} grâce à une fonction $\varphi : \mathbf{r} \in \Omega \rightarrow \varphi(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^d$, telle que $\varphi \in (C^\infty(\Omega))^d$

La dynamique du système est alors régie par une fonctionnelle de φ : l'hamiltonien $H[\varphi]$. Avec le formalisme canonique de la physique statistique [2] nous savons que nous pouvons connaître toutes l'information sur les propriétés macroscopiques du système en étudiant sa fonction de partition \mathcal{Z} définie par l'expression

$$\mathcal{Z} \equiv \int \mathcal{D}\varphi \exp \{-H[\varphi]\}, \quad (2)$$

Cette intégrale est une intégrale fonctionnelle \int sur l'ensemble des champs φ permis par le système (i.e. une somme continue sur l'ensemble des configurations possibles des $P \times N$ degrés de liberté du système). Cependant elle ne peut pas être, de manière générale, calculée pour un H quelconque.

Considérons l'hypothèse physique selon laquelle H peut se décomposer en deux parties distinctes,

$$H[\varphi] = S[\varphi] - \int_{\Omega} \mathbf{h}\varphi, \quad (3)$$

où S est appelée l'action du système (il s'agit en fait de l'hamiltonien du système isolé) et le deuxième terme correspond à l'excitation du système par un champ \mathbf{h} extérieur. Ainsi \mathcal{Z} devient une fonctionnelle de \mathbf{h} et nous définissons l'énergie libre du système comme étant

$$W[\mathbf{h}] = \ln(\mathcal{Z}[\mathbf{h}]) \quad (4)$$

En utilisant la notion de dérivée fonctionnelle nous pouvons alors introduire le tenseur des fonctions de corrélations à $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ corps. Ces fonctions sont très importantes car, comme mentionné dans l'introduction, c'est celle à deux corps qui nous permet de déterminer les exposants critiques ν et η . Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $\{i_j\} \subset \llbracket 1, N \rrbracket$ avec $\text{card}(\{i_j\}) = j$.

$$G_{\{i_j\}}^{(n)}[\{\mathbf{r}_j\}; \mathbf{h}] = \frac{\delta^n W[\mathbf{h}]}{\delta h_{i_1}(\mathbf{r}_1) \dots \delta h_{i_n}(\mathbf{r}_n)} \quad (5)$$

Or ces grandeurs ne peuvent pas se calculer directement, ce pourquoi on utilise le potentiel de Gibbs. Comme l'énergie libre est une fonction convexe [5] on peut définir le potentiel est Gibbs est une fonctionnelle du champ \mathbf{h} définie

par transformation de Legendre selon la formule

$$\Gamma[\phi] = -W[\mathbf{h}] + \int_{\Omega} \mathbf{h}\phi, \quad (6)$$

Avec, en notant $\langle \dots \rangle$ la moyenne statistique,

$$\phi[\mathbf{r}, \mathbf{h}] = \langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\delta W[\mathbf{h}]}{\delta \mathbf{h}(\mathbf{r})} \quad (7)$$

$$\langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(\mathbf{r}) \exp \{-H[\varphi]\}, \quad (8)$$

On introduit aussi une notation pour les dérivées fonctionnelles de Γ avec

$$\Gamma_{\{i_j\}}^{(n)}[\{\mathbf{x}_j\}; \phi] = \frac{\delta^n \Gamma[\phi]}{\delta \phi_{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots \delta \phi_{i_n}(\mathbf{x}_n)} \quad (9)$$

On montre alors [4], qu'au sens d'inverse d'opérateur, comme définie en annexe,

$$G^{(2)}[\mathbf{h}] = \left(\Gamma^{(2)}[\phi] \right)^{-1} \quad (10)$$

Il faut donc retenir que la connaissance du potentiel de Gibbs équivaut à la connaissance de la fonction de corrélation à deux points et elle nous permet alors aussi de retrouver les exposants critiques qui nous intéressent. Développons à présent les théories du RG et du NPRG qui partent des quelques formules rappelées ici.

2.2 Le groupe de renormalisation (RG)

Commençons par définir la transformée de Fourier du champ $\mathbf{r} \rightarrow \varphi(\mathbf{r})$ par

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \int_{\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}, \\ \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (11)$$

Avec la notation

$$\int_{\mathbf{r}} \dots \equiv \int_{\Omega} \dots d\mathbf{r} \quad (12)$$

Notons que c'est la variable utilisée qui nous permet de savoir si l'on travaille avec la transformée de Fourier ou la fonction. On suppose que pour \mathbf{p} supérieur à une certaine valeur notée Λ , la valeur $\varphi(\mathbf{p})$ est suffisamment faible pour être pris comme nul, on considère donc $\mathbf{p} \in [0, \Lambda]$.

L'idée du RG est alors de ne pas considérer tous les degrés de liberté sur le même pied d'égalité. En effet, on commence d'abord, pour calculer \mathcal{Z} , par intégrer les degrés de libertés de haute impulsion \mathbf{p} entre k et Λ où $k \in [0, \Lambda]$. En pratique on sépare φ en deux fonctions $\varphi_{>}$ et $\varphi_{<}$ telles que $\varphi(\mathbf{p}) = \varphi_{>}(\mathbf{p}) + \varphi_{<}(\mathbf{p})$ et

$$\varphi_{>}(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) \quad \text{si} \quad \mathbf{p} \in [k, \Lambda] \quad (13)$$

$$0 \quad \text{sinon} \quad (14)$$

Ainsi ceci permet de définir un Hamiltonien effectif H_k ,

$$H_k[\varphi_<] = \int \mathcal{D}\varphi_> \exp\{H[\varphi_> + \varphi_<]\}, \quad (15)$$

Et alors la fonction de partition s'écrit,

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\varphi_< \exp\{-H_k[\varphi_<]\}, \quad (16)$$

De manière générale on part d'un hamiltonien qui se développe avec une suite de

2.3 Le groupe de renormalisation non perturbatif (NPRG)

Contrairement au RG le NPRG permet d'aller plus loin puisqu'il permet un calcul sans approximations a priori. En effet, toute l'astuce consiste à introduire une fonction $\mathcal{R}_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ appelée régulateur pour $k \in [0, +\infty[$ puis une nouvelle fonction de partition modifiée

$$\mathcal{Z}_k = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + \int_{\mathbf{r}} \mathbf{h}\varphi\right\} \quad (17)$$

Avec la définition

$$\begin{aligned} \Delta S_k[\varphi] &\equiv \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \varphi_i(\mathbf{r}) \mathcal{R}_{k,ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi_j(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} \varphi_i(-\mathbf{q}) \mathcal{R}_{k,ij}(\mathbf{q}) \varphi_j(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (18)$$

On reprend alors les différentes définitions données dans la section ... que l'on adapte ici pour prendre en compte la présence du régulateur. Tout d'abord, pour k fixé on définit une énergie libre

$$W_k[\mathbf{h}] = \ln(\mathcal{Z}_k[\mathbf{h}]) \quad (19)$$

Et de même pour le tenseur des fonctions de corrélation, avec les mêmes notations qu'en ...

$$G_{k,\{i_j\}}^{(n)}[\{\mathbf{r}_j\}; \mathbf{h}] = \frac{\delta^n W_k[\mathbf{h}]}{\delta h_{i_1}(\mathbf{r}_1) \dots \delta h_{i_n}(\mathbf{r}_n)} \quad (20)$$

En revanche, on ne définit plus exactement la fonctionnelle Γ de la même façon, on ne réalise plus vraiment exactement une transformée de Legendre, mais

$$\Gamma_k[\phi] = -W_k[\mathbf{h}] + \int_{\Omega} \mathbf{h}\phi - \Delta S_k[\phi], \quad (21)$$

Maintenant on doit choisir la fonction \mathcal{R}_k le plus astucieusement possible. On prend,

- Pour $k = \Lambda$, $\mathcal{R}_{k,ij}(\mathbf{q}) \rightarrow +\infty$.
- Pour $k \rightarrow +\infty$, $\mathcal{R}_{k,ij}(\mathbf{q}) \rightarrow 0$.

3 Le modèle continu $O(N)$

3.1 Equations de flots générales

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

3.2 Approximation BMW

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

3.3 Méthode de simulation

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend,

sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

3.4 Résultats

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

4 Le modèle d'Ising en dimension 2

4.1 Modélisation du problème avec des champs

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

4.2 Etapes de la résolution numérique

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

4.3 Méthodes et outils numériques

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend,

sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

4.4 Résultats

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Références

- [1] M.L. Bellac. *Des phénomènes critiques aux champs de jauge - Une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs*. Savoirs Actuels. EDP Sciences, 2012.
- [2] Danielle Lederer Bernard Roulet Bernard Diu, Claudine Guthmann. *Éléments de physique statistique*. Hermann, Juillet 1996.
- [3] Jean-Paul Blaizot, Ramón Méndez-Galain, and Nicolás Wschebor. A new method to solve the non-perturbative renormalization group equations. *Physics Letters B*, 632(4) :571 – 578, 2006.
- [4] Bertrand Delamotte. *An Introduction to the Non-perturbative Renormalization Group*, pages 49–132. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [5] B. Diu, C. Guthmann, and D. Lederer. *Thermodynamique*. Collection Enseignement des sciences. Hermann, 2007.
- [6] N. Dupuis and K. Sengupta. Non-perturbative renormalization-group approach to lattice models. *The European Physical Journal B*, 66(2) :271–278, 2008.
- [7] Frédéric Léonard. *Criticalité et phase de brisée de modèles avec symétrie discrète*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2016.
- [8] T. Machado and N. Dupuis. From local to critical fluctuations in lattice models : A nonperturbative renormalization-group approach. *Phys. Rev. E*, 82 :041128, Oct 2010.
- [9] J. C. Mason and D. C. Handscomb. *Chebyshev Polynomials*. CRC Press, Florida, 2003.

- [10] Lars Onsager. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.*, 65 :117–149, Feb 1944.
- [11] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes in C (2Nd Ed.) : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1992.
- [12] Alex Townsend. *Computing with functions in two dimensions*. PhD thesis, University of Oxford, 2014.
- [13] Christof Wetterich. Exact evolution equation for the effective potential. *Physics Letters B*, 301(1) :94, 1993.