

Etude mathématique et numérique du groupe de renormalisation non perturbatif

Gaétan Facchinetti

27 février - 28 juillet 2017

*Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée,
Université Paris-Saclay, Ecole Normale Supérieure de Cachan,
Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées*

1 Modèle physique

1.1 Introduction

Les transitions de phases sont des phénomènes très étudiés en physique de par l'existence de grandeurs universelles dans leur déroulement [1]. En effet, pour fixer les idées considérons un système de spins en dimension $d \in \mathbb{N}^*$. Regardons alors une transition d'une phase ferromagnétique (tous les spins alignés dans la même direction) que l'on retrouve à de basses températures à une phase paramagnétique (tous les spins sont désordonnés) qui s'observe à haute température. Dans la classification de Landau cette transition est dite du second ordre. On retrouve donc une phase ordonnée dans laquelle la symétrie du système est brisée, et une phase désordonnée symétrique ; pour passer de l'une à l'autre des deux phases on joue sur la température...

1.2 Description par des champs

Pour rentrer dans des considérations plus théoriques on considère un système physique en dimension d et symétrique par le groupe de rotation $O(N)$. Il peut alors être décrit par un champ φ de $W^{2,4}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$. Toutes les informations que l'on peut souhaiter avoir sur ce système sont, dès lors, contenu dans sa fonction de partition dont l'expression purement formelle est

$$\mathcal{Z}[\mathbf{h}] = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{h}\varphi} \quad (1)$$

Où l'intégrale est une intégrale fonctionnelle, sur l'ensemble des champs φ possibles, \mathbf{h} représente une excitation extérieure et $S[\varphi]$ est le hamiltonien du système. Dans le modèle φ^4 qui ne prend en compte que les termes de plus bas ordre jouant effectivement un rôle important et compatible avec la symétrie $O(N)$ du système physique, ce hamiltonien s'écrit :

$$S[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{r_0}{2} \varphi^2 + \frac{u_0}{4!} (\varphi^2)^2 \right\} d^d \mathbf{x} \quad (2)$$

Avec $r_0 = \bar{r}_0(T - T_0)$ un paramètre dépendant linéairement de la température et u_0 qui en est indépendant. Cependant, les intégrales fonctionnelles ne sont que des objets formels sur lesquels il est impossible de réaliser une résolution analytique ou numérique directement. L'objectif du groupe de renormalisation est ainsi de parvenir à

calculer, sous certaines approximations, des grandeurs rattachées à cette fonction de partition, contenant l'information souhaitée.

1.3 Grandeurs thermodynamiques

A partir de la fonction de partition il est possible de regarder un certain nombre de grandeurs thermodynamiques. Tout d'abord on définit l'énergie libre comme étant :

$$W[\mathbf{h}] = \ln Z[\mathbf{h}] \quad (3)$$

Par une transformation de Legendre on exprime alors le potentiel de Gibbs

$$\Gamma[\phi] = -W[\mathbf{h}] + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{h}\phi d^d \mathbf{x} \quad (4)$$

Avec la définition

$$\phi[\mathbf{x}, \mathbf{h}] = \langle \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \frac{\delta W[\mathbf{h}]}{\delta \mathbf{h}(\mathbf{x})} \quad (5)$$

On peut alors exprimer simplement la fonction de corrélation à n points (grandeur très intéressante puisqu'observable expérimentalement) comme étant

$$G_{\{i_j\}}^{(n)}[\{\mathbf{x}_j\}; \mathbf{h}] = \frac{\delta^n W[\mathbf{h}]}{\delta h_{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots \delta h_{i_n}(\mathbf{x}_n)} \quad (6)$$

De même on définit

$$\Gamma_{\{i_j\}}^{(n)}[\{\mathbf{x}_j\}; \phi] = \frac{\delta^n \Gamma[\phi]}{\delta \phi_{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots \delta \phi_{i_n}(\mathbf{x}_n)} \quad (7)$$

On peut alors montrer, au sens de l'inverse d'opérateur comme défini en annexe,

$$G^{(2)}[\mathbf{h}] = \left(\Gamma^{(2)}[\phi] \right)^{-1} \quad (8)$$

1.4 Théorie de champ moyen, dimension anormale et longueur de Ginzburg

Une première approche pour résoudre ce type de problème est d'abord une théorie de champ moyen. Pour ce faire on considère φ_0 tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad \left. \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_i} \right|_{\varphi_0} - h_i = 0 \quad (9)$$

L'approximation de champ moyen (MF) consiste à écrire une expression approchée de la fonction de partition, comme une approximation de point-col,

$$\mathcal{Z}_{\text{MF}}[\mathbf{h}] \simeq \exp \left(-S[\varphi_0] + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{h} \varphi_0 d^d \mathbf{x} \right). \quad (10)$$

On considère alors que le champ se trouve dans l'état φ_0 . Cette approximation ne tient donc, par définition, compte des fluctuations du champs. Or lorsque l'on étudie leur comportement le théorème de Marmin-Wagner nous montre que pour $d \leq 2$ et $N \geq 2$ le système décrit par l'hamiltonien précédent ne pourra pas présenter de transition de phase (le système sera toujours dans une phase désordonnée - symétrique) alors que la théorie de champ moyen en prédit une. Ainsi nous pouvons dire que $d_c^- = 2$ est la dimension critique inférieure en dessous de laquelle le modèle champ moyen ne peut être vrai. Dans le cas $N = 1$ on montre $d_c^- = 1$, (i.e. le modèle d'Ising).

On montre qu'il existe aussi une dimension critique supérieur à partir de laquelle on sait que la théorie de champ moyen sera vraie, on la note d_c^+ . En revanche les choses sont plus compliquées pour ce qu'il se passe entre ces deux dimensions. En effet on va bien se retrouver avec une phase ordonnée mais la théorie de champ moyen ne sera pas en mesure de décrire le comportement critique du système. Des que la longueur de corrélation ξ sera supérieure aproximativement à une longueur dite de Ginzburg ξ_G , les fluctuations du champs joueront un rôle non négligeable. On met en évidence expérimentalement que des lors la longueur de corrélation évolue en $\xi \sim |T - T_c|^{d-2-\eta}$ avec $\eta \neq 0$ appelée la dimension anormale. La théorie de champ moyen donne, par simple analyse dimensionnelle, obligatoirement $\eta = 0$.

1.5 Approximation Gaussienne, développement en nombre de boucles

1.5.1 Cas de la phase ordonnée à $\mathbf{h} = 0$

Dans la phase désordonnée ($r_0 < 0$), le champ est constant, on trouve alors que $\varphi_0^2 = -6r_0/u_0$. Il est possible de développer à l'ordre supérieur la théorie de champ moyen en utilisant l'approximation Gaussienne. C'est d'ailleurs cette approximation qui nous renseigne quant à l'importance des fluctuations du champ dans le cas $d_c^- < d < d_c^+$. Pour ce faire nous allons utiliser le développement de Taylor fonctionnel de S dans à l'ordre 2, avant de montrer dans un second temps que l'on peut aussi simplement écrire son expression exacte autour de φ_0 . On écrit alors $\psi = \varphi - \varphi_0$. Ainsi, en $\mathcal{O}(\psi^3)$,

$$\mathcal{Z}_G \propto \int \mathcal{D}\psi e^{-\frac{1}{2} \iint \psi(\mathbf{x}) S^{(2)}[\varphi_0, \mathbf{x}, \mathbf{y}] \psi(\mathbf{y}) d^d \mathbf{x} d^d \mathbf{y}} \quad (11)$$

Où l'on a posé

$$S^{(2)}[\varphi_0, \mathbf{x}, \mathbf{y}] = \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(\mathbf{x}) \delta \varphi(\mathbf{y})} \right|_{\varphi=\varphi_0} \quad (12)$$

Posons la nouvelle action

$$\tilde{S}[\psi] = \frac{1}{2} \iint \psi(\mathbf{x}) S^{(2)}[\varphi_0, \mathbf{x}, \mathbf{y}] \psi(\mathbf{y}) d^d \mathbf{x} d^d \mathbf{y} \quad (13)$$

Alors, tout calcul fait,

$$\tilde{S}[\psi] = \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \frac{1}{2} r_0 \psi^2 + \frac{u_0}{4} \varphi_0^2 \psi^2 \right\} d^d \mathbf{x} \quad (14)$$

Il vient, avec l'expression de φ_0^2

$$\tilde{S}[\psi] = \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 - r_0 \psi^2 \right\} d^d \mathbf{x} \quad (15)$$

Ainsi la fonction de partition en $\mathcal{O}(\psi^3)$ est

$$\mathcal{Z}_G \propto \int \mathcal{D}\psi \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 - r_0 \psi^2 \right\} d^d \mathbf{x} \right) \quad (16)$$

Cependant comme l'expression de S est polynomiale on n'est pas du tout obligé de passer par l'expression de la dérivée fonctionnelle seconde et on peut directement développer S autour de φ_0 . On obtient alors un résultat exact au delà de l'approximation Gaussienne.

$$S[\varphi_0 + \psi] = \text{Cte} + \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 - r_0 \psi^2 \right\} + \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \sqrt{-\frac{r_0 u_0}{6}} \hat{\mathbf{e}}_{\varphi_0} \psi^3 + \frac{u_0}{4!} \psi^4 \right\} d^d \mathbf{x} \quad (17)$$

Où $\hat{\mathbf{e}}_{\varphi_0}$ est le vecteur unitaire direction de φ_0 . On remarque alors l'apparition d'un terme cubique qui n'est pas problématique puisque dans la phase ordonnée la symétrie est de toute manière brisée. Pour aller plus loin dans le calcul il est alors possible, par la suite, de faire un développement perturbatif en puissances de u_0 .

1.5.2 Cas de la phase désordonnée à $\mathbf{h} = 0$

Dans le cas de la phase désordonnée ($r_0 > 0$) on a $\varphi_0 = 0$ dans l'approximation de champ moyen. Il est alors possible de refaire le même raisonnement que précédemment dans ce cas là. L'approximation gaussienne nous donne alors, en $\mathcal{O}(\psi^3)$

$$\mathcal{Z}_G \propto \int \mathcal{D}\psi \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \frac{1}{2} r_0 \psi^2 \right\} d^d \mathbf{x} \right) \quad (18)$$

Comme on pouvait s'y attendre on a simplement ici supprimé la contribution du terme quartique, et l'approximation gaussienne nous ramène au modèle gaussien du modèle. En revanche pour pouvoir aller plus loin, si l'on considère la fonction de partition exacte alors il n'y a encore pas d'autre choix ici que de faire un développement perturbatif en puissance de u_0 .

1.5.3 Cas à $h \neq 0$

2 Le groupe de renormalisation

2.1 L'idée générale

Comme mentionné dans l'introduction, ce qui nous interesse ici c'est d'étudier le comportement du système lorsque l'on est proche du point critique et donc que les échelles de longueurs qui entrent en jeu deviennent infinies.

2.2 Les équations de flot

$$\partial_t \hat{\Gamma}_{k,ij}[\mathbf{p}; \phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \hat{\mathcal{R}}(\mathbf{q}) \left(\hat{\Gamma}_{k,ij}^{(2)}[\mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi] + \hat{\mathcal{R}}(\mathbf{q}) \right)^{-1} \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \quad (19)$$

3 L'approximation BMW

Il est facile de constater que l'équation de flot obtenue n'est toujours pas soluble numériquement. En effet, $\Gamma_{k,ij}^{(2)}(\mathbf{p}, \phi)$ dépend de $\Gamma_{k,\dots}^{(3)}(\dots, \phi)$ et $\Gamma_{k,\dots}^{(4)}(\dots, \phi)$ et de façon générale on montre facilement que $\Gamma_k^{(n)}$ dépend de $\Gamma_k^{(n+1)}$ et $\Gamma_k^{(n+2)}$. Nous nous trouvons donc avec un ensemble d'équations couplées ouvert, qui ne peut avoir de solution. Ceci est un résultat général des problèmes à \mathcal{N} corps. L'idée est alors d'utiliser des approximations pour rendre le système d'équation fermé et soluble [3, 6, 2, 9, 11, 10, 7, 4, 5, 8].

Une première grande classe d'approximation est appelé l'expansion dérivative (DE). On part d'un ansatz pour Γ_k choisi comme un développement selon les dérivées de ϕ autour des impulsions faible. L'objectif derrière ceci est de retrouver malgré une troncation de Γ_k la physique du point critique (au faibles impulsions) que l'on veut décrire. Ceci est réalisable en pratique grace à \mathcal{R}_k des équations de flots qui vient supprimer dans les intégrales les grandes impulsions et qui permet d'avoir un dépendance régulière de Γ_k avec l'impulsion.

La seconde approximation possible est celle développée par Blaizot-M-W (BMW) et qui permet de ne pas forcément se placer à faible impulsions (et récupérer ainsi plus d'informations physique).

4 Modèle d'Ising 2D par BMW

4.1 Theorie des champs dans un réseau

On considère le modèle d'Ising classique sur un réseau hypercubique de dimension d . La pas a du réseau est exprimé en unité de longueur, on prend $a = 1$. On note $\{\hat{\mathbf{e}}_\nu\}_{\nu \in \llbracket 1, d \rrbracket}$ la base cartésienne de ce réseau. Le hamiltonien du système est alors donné par

$$H = -J\beta \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} \quad (20)$$

Où $S_{\mathbf{r}}$ est la valeur du spin à la position \mathbf{r} , comprise dans $\{-1, 1\}$. La notation $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle$ signifie que le terme $S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'}$ contribue à la somme si et seulement si ce sont deux spins plus proches voisins du réseau (i.e s'il existe $\nu \in \llbracket 1, d \rrbracket$ tel que $\mathbf{r}' = \mathbf{r} \pm \hat{\mathbf{e}}_\nu$).

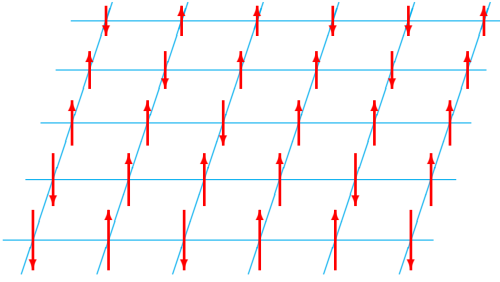


FIGURE 1 – Exemple de réseau d'Ising en dimension $d = 2$. Le système est dans la phase haute température ($T > T_c$).

Pour des raisons pratiques on définit maintenant un hamiltonien légèrement modifié

$$H_\mu = -J\beta \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} - \mu\beta N_S \quad (21)$$

$$H_\mu = -J\beta \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} - \mu\beta \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 \quad (22)$$

Où N_S est le nombre total de spins. Physiquement cela ne change rien car cela ne fait que décaler l'origine des énergies. En revanche cela a un avantage mathématique. En effet, on pose $A_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}^{(\mu)}$ la matrice définie implicitement dans $\mathcal{M}_{N_S}(\mathbb{R})$ par

$$H_\mu = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} A_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}^{(\mu)} S_{\mathbf{r}'} \quad (23)$$

Il est alors possible de choisir μ suffisamment grand pour que $A_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}^{(\mu)}$ soit à diagonale strictement dominante et donc inversible. Par construction il suffit de prendre $\mu > dJ$. On peut alors réaliser une transformée de Hubbard-Stratanovitch.

Pour cela commençons par écrire la fonction de partition du modèle

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{S_{\mathbf{r}}\}} e^{-H_\mu} = \sum_{\{S_{\mathbf{r}}\}} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} A_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}^{(\mu)} S_{\mathbf{r}'} \right) \quad (24)$$

Par integration gaussienne *inverse* il vient,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &\propto \sum_{\{S_{\mathbf{r}}\}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{\mathbf{r}} d\varphi_{\mathbf{r}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \varphi_{\mathbf{r}} (A_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}^{(\mu)})^{-1} \varphi_{\mathbf{r}'} + \sum_{\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}} \\ \mathcal{Z} &\propto \int_{\mathbb{R}} \prod_{\mathbf{r}} d\varphi_{\mathbf{r}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \varphi_{\mathbf{r}} (A_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}^{(\mu)})^{-1} \varphi_{\mathbf{r}'} + \sum_{\mathbf{r}} \ln(\cosh(\varphi_{\mathbf{r}}))} \end{aligned} \quad (25)$$

Cependant nous ne pouvons pas exprimer facilement $(A_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}^{(\mu)})^{-1}$ et pour cela il est pratique de réaliser une transformée de fourier semi-discrète en posant

$$\hat{\varphi}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \quad \text{et} \quad \varphi_{\mathbf{r}} = \int_{\mathbf{q}} \hat{\varphi}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \quad (26)$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} H_\mu &= -J\beta \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} \iint_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \hat{\varphi}(\mathbf{q}) \hat{\varphi}(\mathbf{q}') e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} + \mathbf{q}'\mathbf{r}')} \\ &\quad - \mu\beta \sum_{\mathbf{r}} \iint_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \hat{\varphi}(\mathbf{q}) \hat{\varphi}(\mathbf{q}') e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{q}')\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (27)$$

Notons donc simplement

$$h_\mu(\mathbf{q}) = -\beta \left\{ J \sum_{\nu} e^{\pm i\mathbf{q} \hat{\mathbf{e}}_\nu} + \mu \right\} \quad (28)$$

Ainsi, il vient,

$$H_\mu = \iint_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \hat{\varphi}(\mathbf{q}) \hat{\varphi}(\mathbf{q}') h_\mu(\mathbf{q}') \sum_{\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{q}')\mathbf{r}} \quad (29)$$

$$H_\mu = \iint_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \hat{\varphi}(\mathbf{q}) \hat{\varphi}(\mathbf{q}') h_\mu(\mathbf{q}') D_{N_S}(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \quad (30)$$

En définissant le noyaux de Dirichlet D_{N_S} par

$$\forall \mathbf{p} \in [-\pi, \pi]^2 \quad D_{N_S}(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \quad (31)$$

On note $\mathcal{D} = \mathcal{D}([-\pi, \pi]^2)$, soit $f \in \mathcal{D}$, D_{N_S} étant une fonction de $L^2([-\pi, \pi]^2)$, il appartient à \mathcal{D}' . On montre alors que \parallel

$$\lim_{N_S \rightarrow +\infty} \langle D_{N_S}, f \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle \delta, f \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \quad (32)$$

Or comme

Ainsi, en prenant la limite $N_S \rightarrow +\infty$ et en raisonnant au sens des distributions,

$$\lim_{N_S \rightarrow +\infty} H_\mu = -\beta \int_{\mathbf{q}} \hat{\varphi}(\mathbf{q}) \left\{ \sum_{\nu=1}^d J e^{\pm i\mathbf{q} \hat{\mathbf{e}}_\nu} + \mu \right\} \hat{\varphi}(-\mathbf{q}) \quad (33)$$

Dans la suite nous ferons l'hypothese, comme souvent en physique, que N_S est suffisamment grand pour que l'on

écrive, par abus de notation, $H_\mu = \lim_{N_S \rightarrow +\infty} H_\mu$.

Nous obtenons alors

$$H_\mu = -\beta \int_{\mathbf{q}} \hat{\varphi}(\mathbf{q}) \left\{ J \sum_{\nu=1}^d \cos(q_\nu) + \mu \right\} \hat{\varphi}(-\mathbf{q}) \quad (34)$$

Et on en déduit que la transformée de Fourier de $A_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}^{(\mu)}$ qui est un opérateur de ... vérifie,

$$\hat{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \begin{cases} 2J\beta \sum_{\nu=1}^d \cos(q_\nu) + 2\beta\mu & \text{si } \mathbf{q}' = -\mathbf{q} \\ 0 & \text{si } \mathbf{q}' \neq -\mathbf{q} \end{cases} \quad (35)$$

Autrement dit, \hat{A} est un opérateur diagonal et bien inversible si $\mu > Jd$. Notons,

$$\gamma(\mathbf{q}) = \frac{1}{d} \sum_{\nu=1}^d \cos(q_\nu) \quad (36)$$

$$\lambda_\mu(\mathbf{q}) = 2\beta(Jd\gamma(\mathbf{q}) + \mu) \quad (37)$$

En écrivant alors la conservation du produit scalaire de $L^2(\mathbb{R})$ opérée par la transformation de Fourier semi-discrète nous pouvons écrire : ...

$$\mathcal{Z} \propto \int_{\mathbb{R}} \prod_{\mathbf{r}} d\varphi_{\mathbf{r}} e^{-S_\mu[\varphi]} \quad (38)$$

Avec l'action S s'écrivant :

$$S_\mu[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} \varphi(\mathbf{q}) \frac{1}{\lambda_\mu(\mathbf{q})} \varphi(-\mathbf{q}) - \sum_{\mathbf{r}} \ln(\cosh(\varphi_{\mathbf{r}})) \quad (39)$$

Par isométrie de la transformation de Fourier, et donc par le théorème de Parseval, nous réécrivons S sous la forme

$$S_\mu[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} \varphi(\mathbf{q}) \left[\frac{1}{\lambda_\mu(\mathbf{q})} - \frac{1}{\lambda_\mu(0)} \right] \varphi(-\mathbf{q}) + \sum_{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{2\lambda_\mu(0)} \varphi_{\mathbf{r}}^2 - \ln(\cosh(\varphi_{\mathbf{r}})) \right] \quad (40)$$

Enfin, soit $\delta \in \mathbb{R}_*^+$, on pose le changement de variable,

$$\varphi \rightarrow \delta \sqrt{2\beta Jd} \varphi \quad (41)$$

On obtient alors

$$S_\mu[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} \hat{\varphi}(\mathbf{q}) \varepsilon_0(\mathbf{q}) \hat{\varphi}(-\mathbf{q}) + \sum_{\mathbf{r}} V_0(\varphi(\mathbf{r})) \quad (42)$$

Avec, en posant $\tilde{\mu} = \mu/(Jd)$ et $\tilde{\beta} = \beta Jd$,

$$\varepsilon_0(\mathbf{q}) = \delta^2 \frac{1 - \gamma(\mathbf{q})}{(\gamma(\mathbf{q}) + \tilde{\mu})(1 + \tilde{\mu})} \quad (43)$$

$$V_0(\rho) = \delta^2 \frac{1}{1 + \tilde{\mu}} \rho - \ln \left(\cosh \left(2\delta \sqrt{\tilde{\beta} \rho} \right) \right) \quad (44)$$

On se retrouve donc ici avec la formulation d'un problème de théorie des champs que l'on peut résoudre avec le groupe de renormalisation non perturbatif et notamment avec l'approximation BMW.

De plus, on note $\tilde{\beta}_c^{\text{MF}}$ la valeur de $\tilde{\beta}$ en champ moyen à la température critique. On peut récupérer cette valeur en résolvant $V_0 = 0$ pour $\rho \neq 0$ tendant vers 0. En faisant un développement limité à l'ordre 1 en ρ nous avons

$$V_0(\rho) = \delta^2 \left(\frac{1}{1 + \tilde{\mu}} - 2\tilde{\beta} \right) \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \quad (45)$$

Ainsi, nous obtenons

$$\tilde{\beta}_c^{\text{MF}} \simeq \frac{1}{2(1 + \tilde{\mu})} \quad (46)$$

Enfin, nous avons besoin, dans les équations, de la dérivée du potentiel et non pas vraiment du potentiel. Or la fonction V_0 est dérivable sur $]0, +\infty[$. Ainsi, pour $\rho \neq 0$

$$W_0(\rho) = \partial_\rho V_0(\rho) = \frac{\delta^2}{1 + \tilde{\mu}} - \delta \sqrt{\frac{\tilde{\beta}}{\rho}} \tanh \left(2\delta \sqrt{\tilde{\beta} \rho} \right) \quad (47)$$

Et par un développement limité en 0, en prolongeant W_0 par continuité

$$W_0(0) \equiv \delta^2 \left(\frac{1}{1 + \tilde{\mu}} - 2\tilde{\beta} \right) \quad (48)$$

4.2 Les équations BMW en ρ

Les équations à résoudre numériquement sont

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta_k(p_x, p_y, \rho) &= -2\rho I_3(\rho) u_k^2(\rho) \\ &+ 2\rho J_3(p_x, p_y, \rho) [u_k(\rho) + \partial_\rho \Delta_k(p_x, p_y, \rho)]^2 \\ &- \frac{1}{2} I_2(\rho) [\partial_\rho \Delta_k(p_x, p_y, \rho) + 2\rho \partial_\rho^2 \Delta_k(p_x, p_y, \rho)] \end{aligned} \quad (49)$$

$$\partial_t W_k(\rho) = \frac{1}{2} \partial_\rho I_1(\rho) \quad (50)$$

Avec les notations

$$J_n(p_x, p_y, \rho) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_t \mathcal{R}_k(q_x, q_y) G_k^{n-1}(q_x, q_y, \rho) G_k(p_x + q_x, p_y + q_y, \rho) dq_x dq_y \quad (51)$$

$$I_n(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_t \mathcal{R}_k(q_x, q_y) G_k^n(q_x, q_y, \rho) dq_x dq_y \quad (52)$$

$$G_k(q_x, q_y, \rho) = \frac{1}{\varepsilon_0(q_x, q_y) + \Delta_k(q_x, q_y, \rho) + m_k^2(\rho) + \mathcal{R}_k(q_x, q_y)} \quad (53)$$

$$\partial_\rho I_n(\rho) = -n \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_t \mathcal{R}_k(q_x, q_y) G_k^{n+1}(q_x, q_y, \rho) (\partial_\rho \Delta_k(p_x, p_y, \rho) + u_k(\rho)) dq_x dq_y \quad (54)$$

Mais aussi en reprenant

$$m_k^2(\rho) = \partial_\phi^2 V(\phi) = W(\rho) + 2\rho \partial_\rho W(\rho) \quad (55)$$

$$u_k(\rho) = \partial_\rho m_k^2(\rho) = 3\partial_\rho W(\rho) + 2\rho \partial_\rho^2 W(\rho) \quad (56)$$

Pour le regulateur nous avons opté pour une expression exponentielle dont on a déjà mis en évidence qu'elle était stable pour les équations BMW. On pose,

$$\tau(q_x, q_y) = \frac{\varepsilon_0(q_x, q_y)}{2k^2 \|\varepsilon_0\|_\infty} \quad (57)$$

On choisit alors

$$\mathcal{R}_k(q_x, q_y) = \frac{\alpha \varepsilon_0(q_x, q_y)}{\exp(2\tau(q_x, q_y)) - 1} \quad (58)$$

$$\partial_t \mathcal{R}_k(q_x, q_y) = \alpha \varepsilon_0(q_x, q_y) \frac{\tau(q_x, q_y)}{\sinh^2(\tau(q_x, q_y))} \quad (59)$$

Et nous pouvons calculer

$$\|\varepsilon_0\|_\infty = \sup_{(p_x, p_y) \in [-\pi, \pi]^2} \varepsilon_0(p_x, p_y) = \frac{2\delta^2}{\mu^2 - 1} \quad (60)$$

$$J_n(p_x, p_y, \phi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_t \mathcal{R}_k(q_x, q_y) G_k^{n-1}(q_x, q_y, \phi) G_k(p_x + q_x, p_y + q_y, \phi) dq_x dq_y \quad (63)$$

$$I_n(\phi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_t \mathcal{R}_k(q_x, q_y) G_k^n(q_x, q_y, \phi) dq_x dq_y \quad (64)$$

$$G_k(q_x, q_y, \phi) = \frac{1}{\varepsilon_0(q_x, q_y) + \Delta_k(q_x, q_y, \phi) + X(\phi) + \mathcal{R}_k(q_x, q_y)} \quad (65)$$

$$\partial_\phi I_n(\phi) = -n \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_t \mathcal{R}_k(q_x, q_y) G_k^{n+1}(q_x, q_y, \phi) (\partial_\phi \Delta_k(p_x, p_y, \phi) + \partial_\phi X(\phi)) dq_x dq_y \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \partial_\phi^2 I_n(\phi) = & -n \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_t \mathcal{R}_k(q_x, q_y) G_k^{n+1}(q_x, q_y, \phi) (\partial_\phi^2 \Delta_k(p_x, p_y, \phi) + \partial_\phi^2 X(\phi)) dq_x dq_y \\ & + n(n+1) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_t \mathcal{R}_k(q_x, q_y) G_k^{n+2}(q_x, q_y, \phi) (\partial_\phi \Delta_k(p_x, p_y, \phi) + \partial_\phi X(\phi))^2 dq_x dq_y \end{aligned} \quad (67)$$

4.4 Adimensionnement en impulsions

On note $\tilde{p}_x = k^{-1}p_x$ et $\tilde{p}_y = k^{-1}p_y$. Ainsi que

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_k(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \phi) &= \Delta_k(p_x, p_y, \phi) \\ \tilde{J}_n(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \phi) &= J_n(p_x, p_y, \phi) \\ \tilde{\mathcal{R}}_k(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y) &= \mathcal{R}_k(p_x, p_y) \\ (\tilde{p}_x, \tilde{p}_y) &= \varepsilon_0(p_x, p_y) \end{aligned}$$

4.3 Les équations BMW en ϕ

On peut reprendre les équations précédentes mais les écrire cette fois-ci directement selon la variable ϕ . On doit alors résoudre

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta_k(p_x, p_y, \phi) &= -I_3(\phi) (\partial_\phi X(\phi))^2 \\ &+ J_3(p_x, p_y, \phi) (\partial_\phi \{\Delta_k(p_x, p_y, \phi) + X(\phi)\})^2 \\ &- \frac{1}{2} I_2(\phi) \partial_\phi^2 \Delta_k(p_x, p_y, \phi) \end{aligned} \quad (61)$$

$$\partial_t X(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\phi^2 I_1(\phi) \quad (62)$$

On garde ici les meme expressions que précédemment en changeant ρ en ϕ .

Les équations se réécrivent

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\Delta}_k(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \phi) &= -I_3(\phi) (\partial_\phi X(\phi))^2 \\ &+ \tilde{J}_3(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \phi) \left(\partial_\phi \left\{ \tilde{\Delta}_k(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \phi) + X(\phi) \right\} \right)^2 \\ &- \frac{1}{2} I_2(\phi) \partial_\phi^2 \tilde{\Delta}_k(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \phi) + \tilde{p}_x \partial_{\tilde{p}_x} \tilde{\Delta}_k + \tilde{p}_y \partial_{\tilde{p}_y} \tilde{\Delta}_k \end{aligned} \quad (68)$$

$$\partial_t X(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\phi^2 I_1(\phi) \quad (69)$$

En effet, par transformée de legendre on a :

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta_k|_{p_x, p_y, \phi} &= \partial_t \tilde{\Delta}_k|_{\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \phi} \\ &+ \partial_t \tilde{p}_x|_{p_x} \partial_{\tilde{p}_x} \tilde{\Delta}_k + \partial_t \tilde{p}_y|_{p_y} \partial_{\tilde{p}_y} \tilde{\Delta}_k \end{aligned} \quad (70)$$

Ce qui donne alors

De même on a

$$\partial_t \mathcal{R}_k|_{q_x, q_y} = \partial_t \tilde{\mathcal{R}}_k|_{\tilde{q}_x, \tilde{q}_y} - \tilde{q}_x \partial_{\tilde{q}_x} \tilde{\mathcal{R}}_k - \tilde{q}_y \partial_{\tilde{q}_y} \tilde{\mathcal{R}}_k \quad (72)$$

$$\partial_t \Delta_k|_{p_x, p_y, \phi} = \partial_t \tilde{\Delta}_k|_{\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \phi} - \tilde{p}_x \partial_{\tilde{p}_x} \tilde{\Delta}_k - \tilde{p}_y \partial_{\tilde{p}_y} \tilde{\Delta}_k \quad (71) \quad \text{En outre,}$$

$$\partial_{\tilde{q}_x} \tilde{\mathcal{R}}_k = \alpha \frac{\partial_{\tilde{q}_x}}{2} \left(\frac{1}{\sinh() \exp()} - \frac{1}{\sinh^2()} \right) \quad (73)$$

$$\partial_t \tilde{\mathcal{R}}_k = \alpha \frac{\partial_t}{2} \left(\frac{1}{\sinh() \exp()} - \frac{1}{\sinh^2()} \right) + \alpha \frac{1}{\sinh^2()} \quad (74)$$

Ainsi en rassemblant les différentes équations précédentes :

$$\partial_t \mathcal{R}_k = \alpha \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sinh() \exp()} - \frac{1}{\sinh^2()} \right) (\partial_t - \partial_{\tilde{q}_x} - \partial_{\tilde{q}_y}) + \alpha \frac{1}{\sinh^2()} \quad (75)$$

Avec les relations

$$\partial_{\tilde{q}_x}(\tilde{q}_x, \tilde{q}_y) = k \partial_{q_x} \varepsilon_0(q_x, q_y) = \frac{2\delta^2 k \sin(k\tilde{q}_x)}{(\cos(k\tilde{q}_x) + \cos(k\tilde{q}_y) + 2\mu)^2} \quad (76)$$

$$\partial_t(\tilde{q}_x, \tilde{q}_y) = \frac{2\delta^2 k (\tilde{q}_x \sin(k\tilde{q}_x) + \tilde{q}_y \sin(k\tilde{q}_y))}{(\cos(k\tilde{q}_x) + \cos(k\tilde{q}_y) + 2\mu)^2} \quad (77)$$

Ce qui donne pour expression de la parenthese,

$$\partial_t - \partial_{\tilde{q}_x} - \partial_{\tilde{q}_y} = 2\delta^2 k \frac{(\tilde{q}_x - 1) \sin(k\tilde{q}_x) + (\tilde{q}_y - 1) \sin(k\tilde{q}_y)}{(\cos(k\tilde{q}_x) + \cos(k\tilde{q}_y) + 2\mu)^2} \quad (78)$$

Avec les intégrales qui se calculent selon

$$I_n(\phi) = \frac{k^2}{(2\pi)^2} \int_{-\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{k}} \int_{-\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{k}} \left(\partial_t \tilde{\mathcal{R}}_k(\tilde{q}_x, \tilde{q}_y) - \tilde{q}_x \partial_{\tilde{q}_x} \tilde{\mathcal{R}}_k(\tilde{q}_x, \tilde{q}_y) - \tilde{q}_y \partial_{\tilde{q}_y} \tilde{\mathcal{R}}_k(\tilde{q}_x, \tilde{q}_y) \right) \tilde{G}_k^n(\tilde{q}_x, \tilde{q}_y, \phi) d\tilde{q}_x d\tilde{q}_y \quad (79)$$

$$\tilde{G}_k(\tilde{q}_x, \tilde{q}_y, \phi) = \frac{1}{(\tilde{q}_x, \tilde{q}_y) + \tilde{\Delta}_k(\tilde{q}_x, \tilde{q}_y, \phi) + X(\phi) + \tilde{\mathcal{R}}_k(\tilde{q}_x, \tilde{q}_y)} \quad (80)$$

5 Schéma numérique

Nous savons que ce qui est important ici est d'avoir un schéma avec des calculs de dérivées suffisamment précis pour ne pas avoir d'instabilité numériques qui peuvent se propager très vite, d'autant plus que l'on utilise un simple schéma d'Euler. L'idée est alors d'utiliser la même technique de simulation ici en 2D qui ce qui a été fait en 1D pour les équations BMW du modèle ϕ^4 .

5.1 Intégration

Pour calculer numériquement les différentes intégrales nous nous servons des propriétés de symétries des différentes fonctions. En effet pour tout $\rho \in \mathbb{R}^+$ les fonctions $\varepsilon_0(\cdot, \cdot)$, $\mathcal{R}_k(\cdot, \cdot)$, $\Delta_k(\cdot, \cdot, \rho)$, ...

5.1.1 Intégration d'une fonction symétrique

Soit f une fonction de $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que f est symétrique par rapport à l'axe des $x = 0$, à l'axe des $y = 0$ et à l'axe $x = y$. Nous cherchons alors une quadrature pour intégrer f sur son domaine de définition. Pour commencer, en utilisant les deux premières symétries,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dx dy = 4 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) dx dy \quad (81)$$

On peut alors faire le changement de variable affine $(\tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (2x/\pi - 1, 2y/\pi - 1)$ donnant,

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) dx dy = \frac{\pi^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f\left(\frac{\pi}{2}(\tilde{x} + 1), \frac{\pi}{2}(\tilde{y} + 1)\right) d\tilde{x} d\tilde{y} \quad (82)$$

Les intégrales sur le carré unité $[-1, 1] \times [-1, 1]$ sont alors calculées avec une quadrature de Gauss-Legendre *tenso-*

rielle obtenue à partir de la quadrature de Gauss-Legendre 1D. Il vient des considérations précédentes,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dx dy \simeq \pi^2 \sum_{i=0}^{N_{GL}} \sum_{j=0}^{N_{GL}} w_i w_j f\left(\frac{\pi}{2}(\xi_i + 1), \frac{\pi}{2}(\xi_j + 1)\right) \quad (83)$$

Où $\{w_i\}_{i \in \llbracket 1, N_{GL} \rrbracket}$ sont les poids d'intégration de Gauss Legendre en 1D et $\{\xi_i\}_{i \in \llbracket 1, N_{GL} \rrbracket}$ les points d'intégration correspondants. Par construction, $((w_i w_j))_{i,j}$ est une matrice symétrique et par symétrie de f par rapport à la première bissectrice nous pouvons alors réduire la double somme par,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dx dy \simeq & \pi^2 \sum_{i=0}^{N_{GL}} \sum_{j=0}^{i-1} w_i w_j 2f\left(\frac{\pi}{2}(\xi_i + 1), \frac{\pi}{2}(\xi_j + 1)\right) + \\ & \pi^2 \sum_{i=0}^{N_{GL}} w_i^2 f\left(\frac{\pi}{2}(\xi_i + 1), \frac{\pi}{2}(\xi_i + 1)\right) \end{aligned} \quad (84)$$

Ce qui permet de réduire le temps de calcul en réduisant légèrement la complexité algorithmique.

5.1.2 Intégration d'une fonction presque symétrique et 2π périodique

Soit $(a, b) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$. Soit maintenant f et h deux fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et g définie sur $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ par $g : (x, y) \rightarrow f(x + a, y + b)$. On suppose, comme précédemment, que f et h sont symétriques par rapport à l'axe $x = 0$, à l'axe $y = 0$ et à l'axe $x = y$. On fait aussi l'hypothèse qu'elles sont 2π périodiques. Nous cherchons alors une quadrature pour intégrer $g \times h$ sur $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Pour cela remarquons que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x, y) h(x, y) dx dy = & \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} [f(x + a, y + b) + f(x + a, y - b)] h(x, y) dx dy + \\ & \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} [f(x - a, y + b) + f(x - a, y - b)] h(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (85)$$

On peut alors adopter la même quadrature que précédemment, cependant ici

5.2 Interpolation

Afin de pouvoir calculer nos intégrales comme précédemment avec une bonne précision et notamment pour obtenir J_3 , il est nécessaire d'interpoler correctement les fonctions dans le plan \mathcal{P} .

5.2.1 Quelques théorèmes et définitions

Nous rappelons ici quelques théorèmes utiles pour justifier l'emploi des expressions développées dans les paragraphes précédents. L'ensemble de ces théorèmes et de leurs démonstrations se trouve dans l'ouvrage ...

Théorème 5.1

Soit $f : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue aux variations bornées ... On suppose que l'une des dérivées partielles de f existe et est bornée dans $[-1, 1]$. Alors f admet un développement de Chebychev de la forme

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} T_i(x) T_j(y) \quad (86)$$

De plus, la série ... converge uniformément vers f .

Définition 5.1

Un opérateur tensoriel \mathcal{L} est un opérateur linéaire agissant sur des fonctions de deux variables tel que si $f(x, y) = g(x)h(y)$ alors $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}_x(g)\mathcal{L}_y(h)$. Avec \mathcal{L}_x et \mathcal{L}_y des opérateurs quelconques.

Proposition 5.1

Algorithme de Clenshaw. Soit, de manière générale, une suite de polynômes $\{\mathcal{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ liés par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathcal{P}_{n+1}(x) = u_n(x)\mathcal{P}_n(x) + v_n(x)\mathcal{P}_{n-1}(x) \quad (87)$$

On souhaite calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ donné,

$$S = \sum_{l=0}^N a_l \mathcal{P}_l(x) \quad (88)$$

On considère l'algorithme suivant :

```

1:  $b_{N+2} = 0; b_{N+1} = 0$ 
2: for  $m = N..1$  do
3:    $b_m = a_m + u_m(x)b_{m+1} + v_{m+1}(x)b_{m+2}$ 
4: end for
5:  $S_1 = a_0\mathcal{P}_0(x) + b_1\mathcal{P}_1(x) + b_2v_1(x)\mathcal{P}_0(x)$ 

```

Alors nous avons $S = S_1$.

Démonstration : Ce résultat se démontre par récurrence sur $m \in \llbracket 1, N \rrbracket$ en remarquant que,

$$S_1 = S_m + b_{m+1}\mathcal{P}_{m+1}(x) + b_{m+2}v_{m+1}(x)\mathcal{P}_{m+2}(x) \quad (89)$$

Avec la notation $S_m = \sum_{l=0}^m a_l \mathcal{P}_l(x)$. ■

L'algorithme qui vient de la démonstration précédente a l'avantage qu'il ne faut, pour l'utiliser, connaître que les deux premiers termes de la suite de polynômes. Appliqué aux polynômes de Tchebychev il est possible de remarquer que l'implémentation de cette algorithme peut se faire avec $3(N + 1)$ opérations, alors qu'il faut $4N - 2$ opérations pour un algorithme calculant la somme étape par étape en se servant de la relation de récurrence des polynômes de Tchebychev (appelé algorithme de Forsythe). Aisni pour $N \geq 5$ (ce qui est toujours le cas dans les simulations que nous avons réalisées) l'algorithme de Clenshaw est moins coûteux. De plus il a été montré ... que l'erreur produite par ce calcul est équivalente à celle produite par l'algorithme de Forsythe.

5.2.2 Methode 1 : decomposition directe

L'hypothèse fondamentale pour que notre simulation se comporte correctement et que toutes les fonctions avec lesquelles on travaille soient régulières. Ce qui est en fait assuré par le régulateur que l'on introduit. Aisni si l'on considère une fonction générique f régulière (i.e. satisfaisant les hypothèses du théorème ...), alors on sait qu'elle se décompose en série de Chebychev. On cherche une décomposition tronquée de la forme :

$$f(x, y) \simeq \sum_{i=0}^{N_C-1} \sum_{j=0}^{N_C-1} c_{ij} T_i(x) T_j(y) \quad (90)$$

Pour trouver la valeur des coefficients de la matrice $((c_{i,j}))_{i,j}$ on prend les ensembles des racines du polynôme de Chebychev de degré N_C , $\{x_m\}_{0 \leq m \leq N_C-1}$ et $\{y_n\}_{0 \leq n \leq N_C-1}$ et on impose,

$$f(x_m, y_n) = \sum_{i=0}^{N_C-1} \sum_{j=0}^{N_C-1} c_{ij} T_i(x_m) T_j(y_n) \quad (91)$$

En utilisant les relations des polynômes de Chebychev on peut alors déterminer les coefficients de la matrice $((c_{ij}))_{i,j}$ avec les formules

$$c_{ij} = \frac{A}{N_C^2} \sum_{m=0}^{N_C-1} \sum_{n=0}^{N_C-1} f(x_m, y_n) T_i(x_m) T_j(y_n) \quad (92)$$

$$A = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = 0 \\ 2 & \text{si } i = 0 \text{ et } j \neq 0 \\ 2 & \text{si } i \neq 0 \text{ et } j = 0 \\ 4 & \text{si } i \neq 0 \text{ et } j \neq 0 \end{cases} \quad (93)$$

Cette méthode est extrêmement couteuse puisque pour calculer l'ensemble des coefficients de $((c_{ij}))_{i,j}$ cela demande un algorithme de complexité évoluant en $\mathcal{O}(N_C^2)$ et déjà long pour de faibles valeurs de N_C . Ce pourquoi, afin d'obtenir de meilleures précisions sur les intégrales calculées tout en conservant un temps de calcul raisonnable nous avons implémenté la deuxième méthode suivante.

5.2.3 Methode 2 : approximation de rang faible

La méthode suivante est inspirée de ce qui est mis en place dans le paquet *chebfun* développé par ... qui permet justement de traiter les interpolations de Chebychev sous Matlab. Au lieu de faire directement une décomposition sur une base tensorielle de polynômes de Chebychev on commence par réaliser une approximation de rang faible de la fonction que l'on souhaite approximer. Plus précisément, on considère les ensembles des racines de Chebychev $\{x_m\}_{0 \leq m \leq N_C-1}$ et $\{y_n\}_{0 \leq n \leq N_C-1}$. Alors on peut

former la matrice suivante $\mathcal{F} = ((f(x_m, y_n))_{0 \leq m, n \leq N_C-1})$. On peut faire de cette matrice une approximation de rang faible par élimination Gaussienne.

```

1: Initialisation :  $\mathcal{E}^0 = 0$ ;  $\mathcal{F}_0 = 0$ ;  $k = 1$ ;
2: while  $\|\mathcal{E}^k\|_\infty < \varepsilon$  do
3:    $(i_k, j_k) = \operatorname{argmax}_{(i,j)} \{|\mathcal{E}_{i,j}^{k-1}|\}$ 
4:    $\mathcal{C}_j^k = \mathcal{E}_{i_k,j}^k$ ;  $\mathcal{R}_i^k = \mathcal{E}_{i,j_k}^k$ ;  $d_k = \mathcal{E}_{i_k,j_k}^k$ 
5:    $\mathcal{E}_{i,j}^k = \mathcal{E}_{i,j}^{k-1} - d_k^{-1} \mathcal{C}_j^k \mathcal{R}_i^k$ 
6:    $\mathcal{F}_{i,j}^k = \mathcal{F}_{i,j}^{k-1} + d_k^{-1} \mathcal{C}_j^k \mathcal{R}_i^k$ 
7: end while

```

Notons Q le rang de l'approximation obtenue. On obtient alors une écriture de f sous la forme On obtient alors une expression de la forme

$$\mathcal{F} \simeq \tilde{\mathcal{F}} = \sum_{j=1}^Q d_j \mathcal{C}^j \mathcal{R}^j \quad (94)$$

Comme nous ne connaissons exactement la fonctions f qu'aux points d'interpolation de Chebychev cela revient au même que d'écrire que nous avons décomposé f comme une somme de produits de fonctions à une variable,

$$f(x, y) \simeq \sum_{j=1}^Q d_j c^j(y) r^j(x) \quad (95)$$

On peut alors décomposer les fonctions c_j et r_j sur une base de polynômes de Chebychev comme on peut le faire pour toute fonction d'une seule variable. La décomposition est ainsi une opération de produit tensoriel. En outre, remarquons que si jamais

5.3 La dérivation

Dans les expressions que l'on obtient il est nécessaire de dériver des fonctions par rapport à une variable qui est discrétisée sur une grille régulière. Pour cela nous utilisons des schémas de différences finies. Comme cela avait été fait pour les codes écrits jusqu'à présent, nous avons repris des schémas à 5 points pour le calcul des dérivées (ou des schémas à 3 points). En outre, comme nous ne disposons d'aucune condition aux limites nous sommes contraints pour pouvoir avoir une solution de calculer les dérivées des points en bords de grille en utilisant des schémas décalés n'utilisant que des points compris dans la grille. Les schémas utilisés sont les suivants. On considère une fonction u d'une variable en espace définie sur $[0, +\infty[$, discrétisée sur une grille régulière de pas h . On note $u_j = u(jh)$ pour $j \in \llbracket 0, j_{\max} \rrbracket$.

Schéma centré :

$$\begin{aligned}\partial_x u(jh) &= \frac{1}{12h} (u_{j-2} - 8u_{j-1} + 8u_{j+1} - u_{j+2}) \\ \partial_x^2 u(jh) &= \frac{1}{12h^2} (-u_{j-2} + 16u_{j-1} - 30u_{j+1} - u_{j+2})\end{aligned}$$

Schémas décentrés gauches :

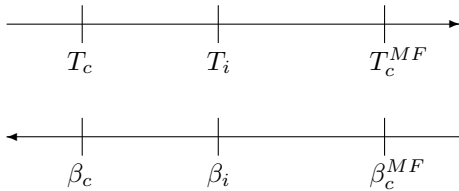
$$\begin{aligned}\partial_x u(jh) &= \frac{1}{12h} (-25u_j + 48u_{j+1} - 36u_{j+2} + 16u_{j+3} - 3u_{j+4}) \\ \partial_x^2 u(jh) &= \frac{1}{12h^2} (35u_j - 104u_{j+1} + 114u_{j+2} - 56u_{j+3} + 11u_{j+4}) \\ \partial_x u(jh) &= \frac{1}{12h} (-3u_{j-1} - 10u_j + 18u_{j+1} - 6u_{j+2} + u_{j+3}) \\ \partial_x^2 u(jh) &= \frac{1}{12h^2} (11u_{j-1} - 20u_j + 6u_{j+1} + 4u_{j+2} - u_{j+3})\end{aligned}$$

Schémas décentrés droits :

$$\begin{aligned}\partial_x u(jh) &= \frac{1}{12h} (25u_j - 48u_{j-1} + 36u_{j-2} - 16u_{j-3} + 3u_{j-4}) \\ \partial_x^2 u(jh) &= \frac{1}{12h^2} (35u_j - 104u_{j-1} + 114u_{j-2} - 56u_{j-3} + 11u_{j-4}) \\ \partial_x u(jh) &= \frac{1}{12h} (3u_{j+1} + 10u_j - 18u_{j-1} + 6u_{j-2} - u_{j-3}) \\ \partial_x^2 u(jh) &= \frac{1}{12h^2} (11u_{j-1} - 20u_j + 6u_{j+1} + 4u_{j+2} - u_{j+3})\end{aligned}$$

5.4 Dichotomie

Le programme tourne pour une valeur de $\tilde{\beta}$ initiale donnée. A la fin (i.e. au bout d'un temps de RG suffisamment long) on regarde la valeur de $W(0)$ si jamais elle est positive alors on a fini dans la phase symétrique et la température initiale supérieure à la température critique (resp. $\tilde{\beta}$ inférieur à $\tilde{\beta}_c$). Si jamais la valeur de $W(0)$ est négative nous sommes dans la phase brisée basse température et la température initiale était inférieure à la température critique. On choisit donc de tester par dichotomie de façon à se rapprocher le plus possible de la température critique les valeurs initiale de $\tilde{\beta}$ telles que



Références

- [1] M.L. Bellac. *Des phénomènes critiques aux champs de jauge - Une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs*. [Savoirs Actuels](#). EDP Sciences, 2012.
- [2] Jean-Paul Blaizot, Ramón Méndez-Galain, and Nicolás Wschebor. A new method to solve the non-perturbative renormalization group equations. *Physics Letters B*, 632(4) :571 – 578, 2006.
- [3] Bertrand Delamotte. *An Introduction to the Non-perturbative Renormalization Group*, pages 49–132. [Springer Berlin Heidelberg](#), Berlin, Heidelberg, 2012.
- [4] N. Dupuis and K. Sengupta. Non-perturbative renormalization-group approach to lattice models. *The European Physical Journal B*, 66(2) :271–278, 2008.
- [5] Frédéric Léonard. *Criticalité et phase de brisée de modèles avec symétrie discrète*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2016.
- [6] T. Machado and N. Dupuis. From local to critical fluctuations in lattice models : A nonperturbative renormalization-group approach. *Phys. Rev. E*, 82 :041128, Oct2010.
- [7] J. C. Mason and D. C. Handscomb. *Chebyshev Polynomials*. [CRC Press](#), Florida, 2003.
- [8] Lars Onsager. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.*, 65 :117–149, Feb1944.
- [9] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes in C (2Nd Ed.) : The Art of Scientific Computing*. [Cambridge University Press](#), New York, NY, USA, 1992.

- [10] Alex Townsend. *Computing with functions in two dimensions*. PhD thesis, University of Oxford, [2014](#).
- [11] Christof Wetterich. Exact evolution equation for the effective potential. *Physics Letters B*, 301(1) :94, [1993](#).

A Rappels de calculs

A.1 Derivation fonctionnelle

Définition

Soit U et V deux espaces de Banach. Soit F une fonctionnelle de U dans V . Soit $f \in U$. On appelle, si elle existe, dérivée (au sens de Fréchet) de la fonctionnelle F prise en f , l'application linéaire de $\mathcal{L}(U, V)$, notée $D_f F$ telle que, pour $\varepsilon > 0$,

$$\forall h \in U \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|F[f + \varepsilon h] - F[f] - \varepsilon D_f F.h\|_V}{\varepsilon} = 0 \quad (96)$$

Dans notre étude nous rencontrerons essentiellement $V = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. On utilisera alors aussi les crochets de dualités, qui permettent de réécrire l'action d'un élément T de U^* sur U (et de les identifier) :

$$\forall h \in U \quad T.h = \langle T, h \rangle_{U^*, U} \quad (97)$$

Ainsi, si la dérivée au sens de Fréchet de F existe (donc si F est Frechet différentiable en f) alors on note $\frac{\delta F}{\delta f}$ l'application de U^* définie par

$$\forall h \in U \quad D_f F.h = \left\langle \frac{\delta F}{\delta f}, h \right\rangle_{U^*, U} \quad (98)$$

A.2 Derivation fonctionnelle

Définition

Soit U et V deux espaces de Banach. Soit F une fonctionnelle de U dans V . Soit $f \in U$. On appelle, si elle existe, dérivée (au sens de Fréchet) de la fonctionnelle F prise en f , l'application linéaire de $\mathcal{L}(U, V)$, notée $D_f F$ telle que, pour $\varepsilon > 0$,

$$\forall h \in U \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|F[f + \varepsilon h] - F[f] - \varepsilon D_f F.h\|_V}{\varepsilon} = 0 \quad (99)$$

Dans notre étude nous rencontrerons essentiellement $V = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. On utilisera alors aussi les crochets de dualités, qui permettent de réécrire l'action d'un élément T de U^* sur U (et de les identifier) :

$$\forall h \in U \quad T.h = \langle T, h \rangle_{U^*, U} \quad (100)$$

Ainsi, si la dérivée au sens de Fréchet de F existe (donc si F est Frechet différentiable en f) alors on note $\frac{\delta F}{\delta f}$ l'application de U^* définie par

$$\forall h \in U \quad D_f F.h = \left\langle \frac{\delta F}{\delta f}, h \right\rangle_{U^*, U} \quad (101)$$

A.3 Derivation fonctionnelle

Définition

Soit U et V deux espaces de Banach. Soit F une fonctionnelle de U dans V . Soit $f \in U$. On appelle, si elle existe, dérivée (au sens de Fréchet) de la fonctionnelle F prise en f , l'application linéaire de $\mathcal{L}(U, V)$, notée $D_f F$ telle que, pour $\varepsilon > 0$,

$$\forall h \in U \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|F[f + \varepsilon h] - F[f] - \varepsilon D_f F.h\|_V}{\varepsilon} = 0 \quad (102)$$

Dans notre étude nous rencontrerons essentiellement $V = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. On utilisera alors aussi les crochets de dualités, qui permettent de réécrire l'action d'un élément T de U^* sur U (et de les identifier) :

$$\forall h \in U \quad T.h = \langle T, h \rangle_{U^*, U} \quad (103)$$

Ainsi, si la dérivée au sens de Fréchet de F existe (donc si F est Frechet différentiable en f) alors on note $\frac{\delta F}{\delta f}$ l'application de U^* définie par

$$\forall h \in U \quad D_f F.h = \left\langle \frac{\delta F}{\delta f}, h \right\rangle_{U^*, U} \quad (104)$$

A.4 Derivation fonctionnelle

Définition

Soit U et V deux espaces de Banach. Soit F une fonctionnelle de U dans V . Soit $f \in U$. On appelle, si elle existe, dérivée (au sens de Fréchet) de la fonctionnelle F prise en f , l'application linéaire de $\mathcal{L}(U, V)$, notée $D_f F$ telle que, pour $\varepsilon > 0$,

$$\forall h \in U \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|F[f + \varepsilon h] - F[f] - \varepsilon D_f F.h\|_V}{\varepsilon} = 0 \quad (105)$$

Dans notre étude nous rencontrerons essentiellement $V = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. On utilisera alors aussi les crochets de dualités, qui permettent de réécrire l'action d'un élément T de U^* sur U (et de les identifier) :

$$\forall h \in U \quad T.h = \langle T, h \rangle_{U^*, U} \quad (106)$$

Ainsi, si la dérivée au sens de Fréchet de F existe (donc si F est Frechet différentiable en f) alors on note $\frac{\delta F}{\delta f}$ l'application de U^* définie par

$$\forall h \in U \quad D_f F.h = \left\langle \frac{\delta F}{\delta f}, h \right\rangle_{U^*, U} \quad (107)$$

A.5 Derivation fonctionnelle

Définition

Soit U et V deux espaces de Banach. Soit F une fonctionnelle de U dans V . Soit $f \in U$. On appelle, si elle existe, dérivée (au sens de Fréchet) de la fonctionnelle F prise en f , l'application linéaire de $\mathcal{L}(U, V)$, notée $D_f F$ telle que, pour $\varepsilon > 0$,

$$\forall h \in U \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|F[f + \varepsilon h] - F[f] - \varepsilon D_f F.h\|_V}{\varepsilon} = 0 \quad (108)$$

Dans notre étude nous rencontrerons essentiellement $V = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. On utilisera alors aussi les crochets de dualités, qui permettent de réécrire l'action d'un élément T de U^* sur U (et de les identifier) :

$$\forall h \in U \quad T.h = \langle T, h \rangle_{U^*, U} \quad (109)$$

Ainsi, si la dérivée au sens de Fréchet de F existe (donc si F est Frechet différentiable en f) alors on note $\frac{\delta F}{\delta f}$ l'application de U^* définie par

$$\forall h \in U \quad D_f F.h = \left\langle \frac{\delta F}{\delta f}, h \right\rangle_{U^*, U}$$

A.6 Transformées de Fourier

On rappelle ici les notations utilisée pour définir les transformées de Fourier. Pour cela on considère f une application de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$. On définit alors la transformée de Fourier de f , notée \hat{f} par,

$$\forall q \in \mathbb{R}^d \quad \hat{f}(q) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-iqx} dx \quad (111)$$

Nous avons alors la relation inverse,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(q) e^{iqx} dq \quad (112)$$

Remarque 1

Dans le cas où l'on a des fonctions définies non pas sur \mathbb{R}^d mais sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ fini alors nous aurons les mêmes propriétés avec la relation "d'équivalence" :

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{q} \xrightarrow{\Omega \text{ fini}} \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{q}} \quad (113)$$

Remarque 2

Dans le cadre où $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$ (espace des distributions tempérées) alors on étend la notion de transformée de Fourier \hat{f} de f à l'aide du crochet de dualité,

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N) \quad \langle \hat{f}, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle f, \hat{\phi} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \quad (114)$$

A.7 TF et dérivées fonctionnelles

On expose ici la justification d'un résultat très souvent utilisé dans la dérivation des équations du groupe de renormalisation non perturbatif.

Proposition

Soit F une fonctionnelle de U dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $f \in U$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On suppose que $U = L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$. Alors,

$$\frac{\delta F}{\delta f(x)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\delta F}{\delta \hat{f}(-q)} e^{iqx} d^d q \quad (115)$$

Démonstration

Par la règle de la chaîne de la dérivation de Fréchet nous pouvons écrire,

$$\forall h \in U \quad D_f F.h = D_{\hat{f}} F.D_f \hat{f}.h \quad (116)$$

Cependant, \hat{f} est une fonctionnelle de f (par définition de la TF) de U dans U qui est linéaire en f . Soit $\varepsilon > 0$,

$$\forall h \in U \quad \hat{f}[f + \varepsilon h] - \hat{f}[f] = \varepsilon \hat{h} \quad (117)$$

Il vient directement, par définition de la dérivation au sens de Frechet, $D_f \hat{f}.h = \hat{h}$. Ainsi, $D_f F.h = D_{\hat{f}} F.\hat{h}$. On peut alors écrire,

$$\forall h \in U \quad D_f F.h = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\delta F}{\delta f(q)} \int_{\mathbb{R}^d} h(x) e^{-iqx} d^d x d^d q \quad (118)$$

$$\forall h \in U \quad D_f F.h = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\delta F}{\delta f(q)} e^{-iqx} h(x) d^d q d^d x \quad (119)$$

$$\forall h \in U \quad D_f F.h = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\delta F}{\delta f(-q)} e^{iqx} d^d q h(x) d^d x \quad (120)$$

Ce qui permet de conclure la démonstration.

B Opérateur à noyaux

Nous détaillons dans cette sections quelques propriétés élémentaires mais très utiles dans notre études des opérateurs à noyaux. Après une définition rigoureuse de ces opérateurs et de leur trace nous utiliserons une description plus formelle de ce que peut être leur inverse.

B.1 Definition

Soit S un endomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$. On appelle S un opérateur à noyaux, une application de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$, telle que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, il existe une application $A_{i,j} \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$, et $x \in \mathbb{R}^d$

$$S[f]_i(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^N A_{i,j}(x, y) f_j(y) d^d y \quad (121)$$

La matrice $A : (x, y) \rightarrow ((A_{i,j}(x, y)))_{i,j}$ est appelée noyaux de S . On identifiera alors dans les notations S et A indépendamment.

Proposition

Par Cauchy-Schwartz cette définition à un sens, S est bien définie. De plus S est un endomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$.

Démonstration

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$.

$$\int_{\mathbb{R}^d} |S[f]_i(\mathbf{x})|^2 d^d \mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_j \quad (122)$$

B.2 TF d'un opérateur à noyaux

Nous avons vu que S définie comme précédemment était un endomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$. Ainsi il est possible d'en définir la transformée de Fourier.

Proposition

Pour S opérateur à noyaux défini comme ci-dessus, nous avons,

$$\hat{S}[f]_i(\mathbf{q}) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^N \hat{A}_{i,j}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}') \hat{f}_j(\mathbf{q}') \quad (123)$$

Démonstration

Nous développons le calcul de la transformée de Fourier. Soit $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$,

$$\hat{S}[f]_i(\mathbf{q}) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^N A_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_j(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} d^d \mathbf{y} d^d \mathbf{x} \quad (124)$$

$$\hat{S}[f]_i(\mathbf{q}) = \int_{\mathbb{R}^{3d}} \sum_{j=1}^N A_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \hat{f}_j(\mathbf{q}') e^{i\mathbf{q}'\mathbf{y}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} d^d \mathbf{q}' d^d \mathbf{y} d^d \mathbf{x} \quad (125)$$

$$\hat{S}[f]_i(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}_j(\mathbf{q}') \left\{ \int_{\mathbb{R}^{2d}} A_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{i\mathbf{q}'\mathbf{y}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} d^d \mathbf{y} d^d \mathbf{x} \right\} d^d \mathbf{q}' \quad (126)$$

$$\hat{S}[f]_i(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}_j(\mathbf{q}') \hat{A}_{i,j}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}') d^d \mathbf{q}' \quad (127)$$

$$(128)$$

B.3 Produit de Volterra

Considérons deux opérateurs à noyaux, S et T de noyaux respectifs A et B . La composition de ces deux opérateurs s'écrit comme suit,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad S \circ T[f]_i(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^N A_{i,k}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) B_{k,j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) d^d \mathbf{y} \right\} f_j(\mathbf{y}) d^d \mathbf{y} \quad (129)$$

On notera alors aussi

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^d)^2 \quad (A \circ B)_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^N A_{i,k}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) B_{k,j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) d^d \mathbf{y} \quad (130)$$

Proposition

Par transformée de Fourier, par un calcul analogue à celui fait pour un simple noyaux, il vient,

$$\forall (\mathbf{q}, \mathbf{q}') \in (\mathbb{R}^d)^2 \quad (\widehat{A \circ B})_{i,j}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^N \hat{A}_{i,k}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'') \hat{B}_{k,j}(-\mathbf{q}'', \mathbf{q}') d^d \mathbf{q}'' \quad (131)$$

B.4 Trace d'un opérateur à noyaux

Définition

On définit la trace d'un opérateur S de noyaux A par

$$\text{Tr} A = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^d} A_{i,i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) d^d \mathbf{x} \quad (132)$$

Proposition

Nous pouvons de manière similaire à ce qui a été fait pour démontrer l'expression de la transformée de Fourier d'un opérateur à noyaux en (...) dériver la relation sur la trace de la transformée de Fourier

$$\text{Tr} \hat{A} = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^d} \hat{A}_{i,i}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) d^d \mathbf{q} \quad (133)$$

B.5 Dérivation de l'inverse d'une matrice

Afin de s'approprier les propriétés des opérateurs à noyaux, de par leur similarités avec les matrices nous commencerons par développer de petites propriétés matricielles que nous pourrions transposer par la suite.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $((A_{i,j}))_{i,j}$ une matrice de $\mathbb{R}^{n \times n}$ telles que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_{i,j}$ soit une application de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) \in \mathbb{G}L_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{dA^{-1}(x)}{dx} = -A^{-1}(x) \frac{dA(x)}{dx} A^{-1}(x) \quad (134)$$

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de A^{-1} , $AA^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}^{n \times n}}$.

En dérivant cette relation nous obtenons,

$$\frac{dA(x)}{dx} A^{-1}(x) + A \frac{dA^{-1}(x)}{dx} = 0 \quad (135)$$

Il vient directement le résultat.

C Formules en vrac

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^d} F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) F^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) d^d \mathbf{z} \quad (136)$$

$$\delta_{i,j} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^N F_{i,k}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) F_{k,j}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) d^d \mathbf{z} \quad (137)$$

$$\delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{F}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_2) \hat{F}^{-1}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) d^d \mathbf{q}_3 \quad (138)$$

$$\delta_{i,j} \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^N \hat{F}_{i,k}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_2) \hat{F}_{k,j}^{-1}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) d^d \mathbf{q}_3 \quad (139)$$

$$\frac{\delta \hat{F}}{\delta \hat{\phi}(-\mathbf{p})}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_4) = - \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{F}^{-1}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_2) \frac{\delta \hat{F}}{\delta \hat{\phi}(-\mathbf{p})}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \hat{F}^{-1}(-\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) d^d \mathbf{q}_2 d^d \mathbf{q}_3 \quad (140)$$

D Methode formelle de recherche des exposants critiques

Soit $U \in D = H_1([-\infty, 0], H_2(\mathbb{R}))$, avec H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Soit f un opérateur agissant de D dans \mathbb{R} . On suppose que $\text{Ker} f$ est réduit à un singleton (hypothèse fondamentale du RG). On suppose de plus que f dépend continument de la fonction en laquelle elle est évaluée (autre hypothèse du RG). On note l'équation de flot de U :

$$\forall (t, x) \in]-\infty, 0] \times \mathbb{R} \quad \partial_t U(t, x) = f[U(t, x)] \quad (141)$$

On note point fixe de U la grandeur $U^* = \text{Ker} f$. De l'équation précédente, il vient directement que $\partial_t U^*(t, x) = 0$ et ainsi U^* ne dépend pas de t . De plus par l'hypothèse de continuité nous pouvons linéariser l'équation précédente autour du point fixe à l'ordre 1. Soit $(t, x) \in]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$, on note $\delta U(t, x) = U(t, x) - U^*(x)$:

$$\partial_t \delta U(t, x) \simeq \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta f[U]}{\delta U(t, x)} \Big|_{U(t, x)=U^*(x)} \delta U(t, x) dx \quad (142)$$

On pose un nouvel opérateur A défini de D dans \mathbb{R} :

$$A = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta f[U]}{\delta U(t, x)} \Big|_{U(t, x)=U^*(x)} \cdot dx \quad (143)$$

Ainsi nous supposons maintenant que A est diagonalisable dans H_2 et possède un spectre discret de valeurs propres réelles. De plus on suppose que les vecteurs propres forment une base hilbertienne de l'espace considéré. Ainsi nous posons $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des valeurs

propres rangées dans l'ordre décroissant et $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des vecteurs propres associées. Alors,

$$\delta U(t, x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (\delta U(t, \cdot), w_i(\cdot))_{H_2} w_i(x). \quad (144)$$

On note $h_i : t \rightarrow (\delta U(t, \cdot), w_i(\cdot))_{H_2}$. Ainsi,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \partial_t h_i(t) w_i(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i h_i(t) w_i(x) \quad (145)$$

Il vient alors

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad h_i(t) = h_i(0) e^{-\lambda_i t}. \quad (146)$$

D'où l'expression de la solution,

$$U(t, x) = U^*(x) + \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i(0) e^{-\lambda_i t} w_i(x). \quad (147)$$

En pratique la fonction U aura été échantillonnée pour pouvoir adopter une résolution numérique. Les opérateurs deviennent alors des matrices. De plus dans les faits, nous ne pouvons pas appliquer un tel formalisme et la méthode sera utilisée puis justifiée a posteriori par les résultats trouvés. En effet, par exemple, rien ne nous assure la diagonalisabilité du spectre de A ainsi que les propriétés supposées de son spectre de manière générale.

Ce sont les valeurs propres trouvées et notamment celles qui sont positives qui nous permettent de déterminer un certain nombre des exposants critiques. Nous