Etude mathématique et numérique du groupe de renormalisation non perturbatif

Gaétan Facchinetti
27 février - 28 juillet 2017

Laboratoire de Physique Théorique de la Matièe Condensée,
Université Paris-Saclay, Ecole Normale Supérieure de Cachan,
Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées

1 Le groupe de renormalisation

1.1 Introduction

On considère un système physique en dimension d et symétrique par le groupe de rotation $O(N)$. Il peut alors être décrit par un champ $\boldsymbol{\varphi}$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^N$. Toutes les informations que l'on peut souhaiter avoir sur ce système sont, dès lors, contenu dans sa fonction de partition dont l'expression purement formelle est

$$\mathcal{Z}[\mathbf{h}] = \int \mathscr{D}\boldsymbol{\varphi} e^{-H[\boldsymbol{\varphi}] + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{h}\boldsymbol{\varphi}} \tag{1}$$

Où l'intégrale est une intégrale fonctionnelle, sur l'ensemble des champs $\boldsymbol{\varphi}$ possibles. $\mathbf{h}$ représente une exitation extérieure, $H[\boldsymbol{\varphi}]$ est le hamiltonien du système (prenant en compte la dépendance en température).

Cependant, les intégrales fonctionnelles ne sont que des objets formels sur lesquels il est impossible de réaliser une résolution analytique ou numérique directelemnt. L'objectif du groupe de renormalisation est ainsi de parvenir à calculer, sous certaines approximations, des grandeurs ratachées à cette fonction de partition, contenant l'information souhaitée.

A Rappels de calculs

A.1 Derivation fonctionnelle

Définition

Soit U et V deux espaces de Banach. Soit F une fonctionnelle de U dans V. Soit $f \in U$. On appelle, si elle existe, dérivée (au sens de Fréchet) de la fonctionelle F prise en f, l'application linéaire de $\mathcal{L}(U,V)$, notée $D_f F$ telle que, pour $\varepsilon > 0$,

$$\forall h \in U \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|F[f+\varepsilon h] - F[f] - \varepsilon D_f F.h\|_V}{\varepsilon} = 0 \tag{2}$$

Dans notre étude nous recontrerons essentiellement $V = (\mathbb{R}, |.|)$. On utilisera alors aussi les crochets de dualités, qui permettent de réécrire l'action d'un élément T de U^* sur U (et de les identifier) :

$$\forall h \in U \quad T.h = \langle T, h \rangle_{U^*,U} \tag{3}$$

Ainsi, si la dérivée au sens de Fréchet de F existe (donc si F est Frechet différentlable en f) alors on note $\frac{\delta F}{\delta f}$ l'application de U^* définie par

$$\forall h \in U \quad D_f F.h = \left\langle \frac{\delta F}{\delta f}, h \right\rangle_{U^*,U} \tag{4}$$

A.2 Transformées de Fourier

On rappelle ici les notations utilisée pour définir les transformées de Fourier. Pour cela on considère f une application de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$. On définit alors la transformée de Fourier de f, notée $\hat{f}$ par,

$$\forall q \in \mathbb{R}^d \quad \hat{f}(q) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-iqx} \mathrm{d}x \tag{5}$$

Nous avons alors la relation inverse,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(q) e^{iqx} \mathrm{d}q \tag{6}$$

Remarque 1

Dans le cas ou l'on a des fonctions définies non pas sur $\mathbb{R}^d$ mais sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ fini alors nous aurons les mêmes propriétés avec la relation "d'équivalence" :

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d \mathbf{q} \quad \overset{\Omega \text{ fini}}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{q}} \tag{7}$$

Remarque 2

Dans le cadre où $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$ (espace des distributions tempérées) alors on étend la notion de transformée de Fourier $\hat{f}$ de f à l'aide du crochet de dualité,

$$\forall \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N) \quad \left\langle \hat{f}, \phi \right\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} = \left\langle f, \hat{\phi} \right\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} \tag{8}$$

A.3 TF et dérivées fonctionnelles

On expose ici la justification d'un résultat très souvent utilisé dans la dérivation des équations du groupe de renormalisation non perturbatif.

Proposition

Soit F une fonctionelle de U dans $(\mathbb{R}, |.|)$ et $f \in U$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On suppose que $U = L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$. Alors,

$$\frac{\delta F}{\delta f(x)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\delta F}{\delta \hat{f}(-q)} e^{iqx} \mathrm{d}^d q \tag{9}$$

Demonstration

Par la règle de la chaine de la dérivation de Fréchet nous pouvons écrire,

$$\forall h \in U \quad D_f F.h = D_{\hat{f}} F.D_f \hat{f}.h \tag{10}$$

Cependant, $\hat{f}$ est une fonctionnelle de f (par définition de la TF) de U dans U qui est linéaire en f. Soit $\varepsilon > 0$,

$$\forall h \in U \quad \hat{f}[f + \varepsilon h] - \hat{f}[f] = \varepsilon \hat{h} \tag{11}$$

Il vient directement, par définition de la dérivation au sens de Frechet, $D_f \hat{f}.h = \hat{h}$. Ainsi, $D_f F.h = D_{\hat{f}} F.\hat{h}$. On peut alors écrire,

$$\forall h \in U \quad D_f F.h = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\delta F}{\delta f(q)} \int_{\mathbb{R}^d} h(x) e^{-iqx} \mathrm{d}^d x \mathrm{d}^d q \tag{12}$$

$$\forall h \in U \quad D_f F.h = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\delta F}{\delta f(q)} e^{-iqx} h(x) \mathrm{d}^d q \mathrm{d}^d x \tag{13}$$

$$\forall h \in U \quad D_f F.h = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\delta F}{\delta f(-q)} e^{iqx} \mathrm{d}^d q \; h(x) \mathrm{d}^d x \tag{14}$$

Ce qui permet de conclure la démonstration.

B Opérateur à noyaux

Nous détaillons dans cette sections quelques propriétés élémentaires mais très utiles dans notre études des opérateurs à noyaux. Après une définition rigoureuse de ces opérateurs et de leur trace nous utiliserons une description plus formelle de ce que peut être leur inverse.

B.1 Definition

Soit S un endomorphisme de . On appelle S un operateur a noyaux, une application de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$, telle que pour tout $(i,j) \in [\![1, N]\!]^2$, il existe une application $A_{i,j} \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$, et $x \in \mathbb{R}^d$

$$S[f]_i(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{N} A_{i,j}(x,y) f_j(y) \mathrm{d}^d y \tag{15}$$

La matrice $A : (x,y) \to ((A_{i,j}(x,y)))_{i,j}$ est appellée noyaux de S.
On identifiera alors dans les notations S et A indépendemment.

Proposition
Par Cauchy-Schwartz cette définition à un sens, S est bien définie.
De plus S et est un endomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$.

Démonstration
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$.

$$\int_{\mathbb{R}^d} |S[f]_i(\mathbf{x})|^2 \, \mathrm{d}^d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_j \tag{16}$$

B.2 TF d'un opérateur à noyaux

Nous avons vu que S définie comme précédemment était un endomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$. Ainsi il est possible d'en définir la transformée de Fourier.

Proposition
Pour S opérateur à noyaux défini comme ci-dessus, nous avons,

$$\hat{S}[f]_i(\mathbf{q}) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{N} \hat{A}_{i,j}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}') \hat{f}_j(\mathbf{q}') \tag{17}$$

Démonstration
Nous développons le calcul de la transformée de Fourier. Soit $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$,

$$\hat{S}[f]_i(\mathbf{q}) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{N} A_{i,j}(\mathbf{x},\mathbf{y}) f_j(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \mathrm{d}^d\mathbf{y}\mathrm{d}^d\mathbf{x} \tag{18}$$

$$\hat{S}[f]_i(\mathbf{q}) = \int_{\mathbb{R}^{3d}} \sum_{j=1}^{N} A_{i,j}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \hat{f}_j(\mathbf{q}') e^{i\mathbf{q}'\mathbf{y}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \mathrm{d}^d\mathbf{q}'\mathrm{d}^d\mathbf{y}\mathrm{d}^d\mathbf{x} \tag{19}$$

$$\hat{S}[f]_i(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}_j(\mathbf{q}') \left\{ \int_{\mathbb{R}^{2d}} A_{i,j}(\mathbf{x},\mathbf{y}) e^{i\mathbf{q}'\mathbf{y}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \mathrm{d}^d\mathbf{y}\mathrm{d}^d\mathbf{x} \right\} \mathrm{d}^d\mathbf{q}' \tag{20}$$

$$\hat{S}[f]_i(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}_j(\mathbf{q}') \hat{A}_{i,j}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}') \mathrm{d}^d\mathbf{q}' \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

B.3 Produit de Volterra

Considérons deux opérateurs à noyaux, S et T de noyaux respectifs A et B.
La composition de ces deux opérateur s'écrit comme suit,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad S \circ T[f]_i(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=k}^{N} A_{i,k}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) B_{k,j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \mathrm{d}^d \mathbf{y} \right\} f_j(\mathbf{y}) \mathrm{d}^d \mathbf{y} \tag{23}$$

On notera alors aussi

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^d)^2 \quad (A \circ B)_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=k}^{N} A_{i,k}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) B_{k,j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \mathrm{d}^d \mathbf{y} \tag{24}$$

Proposition
Par transformée de Fourier, par un calcul anaolgue à celui fait pour un simple noyaux, il vient,

$$\forall (\mathbf{q}, \mathbf{q}') \in (\mathbb{R}^d)^2 \quad (\widehat{A \circ B})_{i,j}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=k}^{N} \hat{A}_{i,k}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'') \hat{B}_{k,j}(-\mathbf{q}'', \mathbf{q}') \mathrm{d}^d \mathbf{q}'' \tag{25}$$

B.4 Trace d'un opérateur à noyaux

Definition
On définit la trace d'un opérateur S de noyaux A par

$$\mathrm{Tr} A = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^d} A_{i,i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathrm{d}^d \mathbf{x} \tag{26}$$

Proposition
Nous pouvons de manière similaire à ce qui a été fait pour démontrer l'expression de la transformée de Fourier d'un opérateur à noyaux en (...) dériver la relation sur la trace de la transformée de Fourier

$$\mathrm{Tr} \hat{A} = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{A}_{i,i}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) \mathrm{d}^d \mathbf{q} \tag{27}$$

B.5 Dérivation de l'inverse d'une matrice

Afin de s'approprier les propriétés des opérateurs à noyaux, de par leur similarités avec les matrices nous commenceront par développer de petites propriétés matricielles que nous pourrons transposer par la suite.

Proposition
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $((A_{i,j}))_{i,j}$ une matrice de $\mathbb{R}^{n \times n}$ telles que pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]$, $A_{i,j}$ soit une application de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{dA^{-1}(x)}{dx} = -A^{-1}(x) \frac{dA(x)}{dx} A^{-1}(x) \tag{28}$$

Demonstration
Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de A^{-1}, $AA^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n \times n}}$.
En dérivant cette relation nous obtenons,

$$\frac{dA(x)}{dx} A^{-1}(x) + A \frac{dA^{-1}(x)}{dx} = 0 \tag{29}$$

Il vient directement le résultat.

C Formules en vrac

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^d} F(\mathbf{x},\mathbf{z})F^{-1}(\mathbf{z},\mathbf{y})\mathrm{d}^d\mathbf{z} \tag{30}$$

$$\delta_{i,j}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^{N} F_{i,k}(\mathbf{x},\mathbf{z})F^{-1}_{k,j}(\mathbf{z},\mathbf{y})\mathrm{d}^d\mathbf{z} \tag{31}$$

$$\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_3) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{F}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_2)\hat{F}^{-1}(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\mathrm{d}^d\mathbf{q}_3 \tag{32}$$

$$\delta_{i,j}\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_3) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^{N} \hat{F}_{i,k}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_2)\hat{F}^{-1}_{k,j}(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\mathrm{d}^d\mathbf{q}_3 \tag{33}$$

$$\frac{\delta\hat{F}}{\delta\hat{\phi}(-\mathbf{p})}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_4) = -\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{F}^{-1}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_2)\frac{\delta\hat{F}}{\delta\hat{\phi}(-\mathbf{p})}(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\hat{F}^{-1}(-\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4)\mathrm{d}^d\mathbf{q}_2\mathrm{d}^d\mathbf{q}_3 \tag{34}$$