Proposition de stage de M2

Aspects mathématiques et numériques du groupe de renormalisation non-perturbatif

Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée - CNRS UMR 7600
Université Pierre et Marie Curie - Campus Jussieu
Encadrants : N. Dupuis (nicolas.dupuis@upmc.fr)
B. Delamotte (delamotte@lptmc.jussieu.fr)

Depuis les travaux de K. Wilson [1], le groupe de renormalisation s'est imposé comme un outil essentiel, d'un point de vue à la fois conceptuel et pratique, pour aborder les systèmes physiques caractérisés par l'interaction d'un grand nombre de degrés de liberté. Il a permis des avancées majeures dans la plupart des domaines de la physique, depuis la matière condensée (avec en particulier l'étude des transitions de phase et phénomènes critiques) jusqu'à la physique des hautes énergies.

L'idée fondamentale de Wilson est qu'il est possible d'étudier théoriquement un modèle de physique statistique non pas en considérant tous les degrés de liberté sur un pied d'égalité mais en "intégrant" d'abord ceux correspondant aux fluctuations ayant lieu sur de petites échelles de longueur. On obtient ainsi une description effective de la physique à des échelles de longueur de plus en plus grandes. En pratique, on se ramène à une équation différentielle pour l'Hamiltonien du système H_k (ou, de manière équivalente, l'énergie libre de Helmholz F_k) décrivant la physique aux échelles de longueur $L \sim k^{-1}$, les phénomènes ayant lieu aux échelles macroscopiques étant déterminés par $H_{k\to 0}$. Dans la plupart des cas l'équation différentielle dH_k/dk ne peut être résolue exactement et on a recours à des approximations perturbatives.

Le groupe de renormalisation a connu un renouveau important depuis le début des années 90 [2,3]. En considérant l'énergie libre de Gibbs $\Gamma_k[m]$ (une fonctionnelle du paramètre d'ordre m) plutôt que l'Hamiltonien H_k, il est possible de trouver des solutions approchées, mais non-perturbatives, de l'équation satisfaite par Γ_k. En pratique on est ramené à des équations intégro-différentielles pour un certain nombre de fonctions du paramètre d'ordre, qui doivent être résolues numériquement.

Ce groupe de renormalisation non-perturbatif (aussi appelé groupe de renormalisation fonctionnel ou groupe de renormalisation exact) a connu d'importants succès dans divers domaines de la physique [3]. Néanmoins la résolution numérique des équations de renormalisation se heurte souvent à des instabilités numériques en basse dimension. Le but du stage est de comprendre l'origine mathématique de ces instabilités et de contribuer à la résolution numérique des équations. On s'intéressera en particulier au modèle d'Ising bidimensionnel (dont la solution exacte permettra de vérifier la validité des résultats obtenus par le groupe de renormalisation) et à la transition de Kosterlitz-Thouless dans le cadre du modèle O(2) [4].

[1] K. G. Wilson, Phys. Rev. B **4**, 3174 (1971) ; Phys. Rev. B **4**, 3184 (1971) ; Rev. Mod. Phys. **47**, 773 (1975) ; Rev. Mod. Phys. **55**, 583 (1983) ; K. G. Wilson and J. B. Kogut, Phys. Rep. **12**, 75 (1974).
[2] C. Wetterich, Phys. Lett. B **301**, 90 (1993).
[3] Pour une revue, voir J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, Phys. Rep. **363**, 223 (2002) ; B. Delamotte in *Renormalization Group and Effective Field Theory Approaches to Many-Body Systems*, Lecture Notes in Physics, Vol. 852, edited by A. Schwenk and J. Polonyi (Springer Berlin Heidelberg) pp. 49-132.
[4] La transition de Kosterlitz-Thouless (une transition pilotée par les défauts topologiques du paramètre d'ordre) est au centre du prix Nobel de physique décerné en 2016 à D. Thouless, J. Kosterlitz et D. Haldane.