Méthode multipole rapide pour un nuage de points

Gaétan Facchinetti
5 décembre 2016

Université Paris-Saclay, Ecole Normale Supérieure de Cachan,
Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées

Question 1

Nous avons créer une fonction permettant de renvoyer, pour une densité de point par longueur d'ondre n_λ et une fréquence f donnée, un tableau de coordonnées de l'ensemble des points du nuages ainsi que le nombre de N points. Dans notre code ce nombre de points se calcule en fonction des paramètres par la formule,

$$N = 4s_a(s_b - 1) + 2(s_b - 2)^2 \quad (1)$$

Avec $s_a = \mathbb{E}(fn_\lambda L/c) + 1$ et $s_b = \mathbb{E}(fn_\lambda l/c) + 1$, où $L = 1$ (m) et $l = 0.5$ (m) sont les dimensions de la boite et c la célérité de l'onde dans le milieu considéré Nous avons alors pu représenter en Fig. 1 les points de discrétisation.

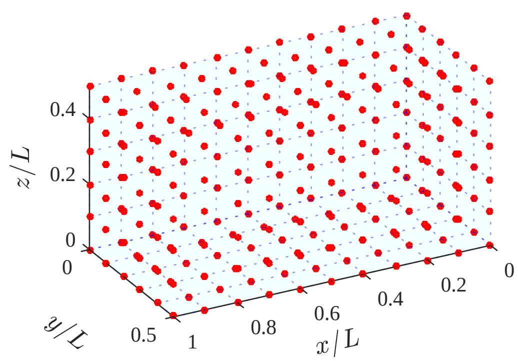

Figure 1 – Points de discrétisation suivant les trois coordonnées spatiales (rouge). $N = 252$, $n_\lambda = 10$, $f = c/L$. Pour faciliter la lecture les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ ont été représentés en cyan.

Question 2

Notons, pour $i \in [\![1, N]\!]$, $\mathbf{x}_i$ le vecteur position du point du nuage indicé i. Introduisons alors la matrice de la fonction de Green G que nous definissons par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2 \quad G_{i,j} = \begin{cases} \frac{e^{ik|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2)$$

Nous notons τ_a le temps d'assemblage de cette matrice. Soit maintenant un vecteur $\boldsymbol{\rho}$ quelconque de $\mathbb{R}^N$. Nous notons τ_c le temps de calcul du produit matrice vecteur $\mathbf{V} = G\boldsymbol{\rho}$.

Nous pouvons remarquer qu'à partir de $N \sim 10000$ l'assemblade de la matrice est trop gourmand en mémoire et cela rend l'execution sous Matlab impossible. Nous avons donc fait varier n_λ à f fixé pour avoir, d'après Eq. (1), une valeur de N maximale de 9002. Puis nous avons représenté en Fig. 2 et Fig. 3 l'évolution de τ_a et τ_c en fonction de N.

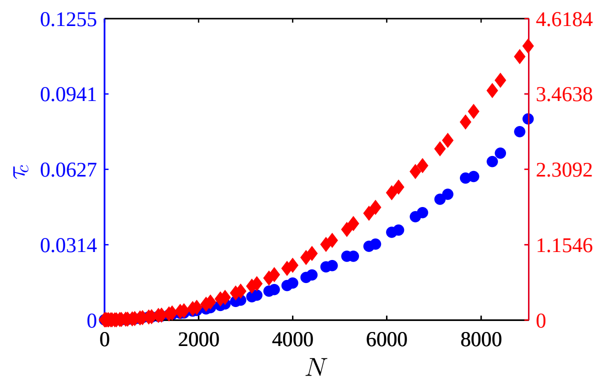

Figure 2 – Temps d'assemblage de G, τ_a (losanges rouge) et temps de calcul du produit matrice vecteurs τ_c (ronds bleu) en fonction de N. Les deux courbes ont une allure parabolique mais nous pouvons remarquer que, les echelles étant différentes, le temps d'assemblage est plus long

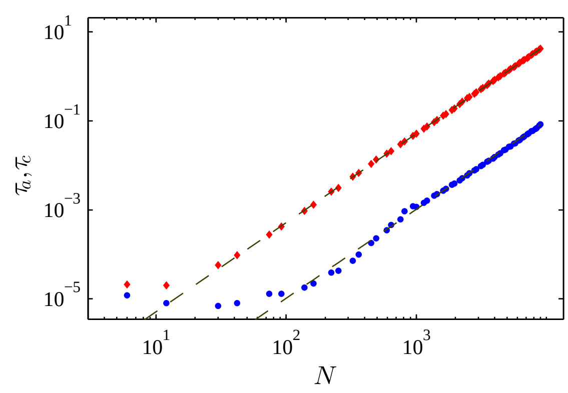

Figure 3 – Temps d'assemblage de G, τ_a (losanges rouge) et temps de calcul du produit matrice vecteurs τ_c (ronds bleu) en fonction de N. Nous pouvons remarquer ici qu'asymptotiquement $\log(\tau_{a/c}) \simeq 2\log(N) + K_{a/c}$ représentées en pointillé vert avec $K_{a/c}$ constante.

Comme il l'est montré en Fig. 3, l'évolution du logarithme de τ_a avec N tend asymptotiquement vers une droite de pente 2. Il est en cd même pour le logarithme de τ_c avec N. Ceci confirme l'évolution en $O(N^2)$ du temps d'assemblage et de produit matrice vecteur.

Question 3

Nous avons calculé la quadrature de Gauss-Legendre à L points en diagonsalisant la matrice tridiagonale définie dans l'énoncé. La methode utiliséé pour obtenir les points de quadrature est la méthode de Golub-Welsh [1]. Avec les notations du TP nous calculons, pour P polynôme tel que $\deg P \leq 2L-1$,

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \sum_{i=1}^{L} \omega_i P(\lambda_i) \tag{3}$$

Ceci est équivalent, par un changement de variable, à

$$\int_{0}^{\pi} P(\cos(t))\sin(t)dt = \sum_{i=1}^{L} \omega_i P(\theta_i) \tag{4}$$

Nous avons testé cette quadrature avec L = 3 en comparaison de celle à 3 points dévleoppée lors du premier TP. Nous écrivons I_{GL} le résultat par la quadrature de Gauss Legendre, I_1 le résultat pour la quadrature à trois points du premier TP, I_M le résultat de la qudrature effectuée par Matlab et I_v la valeur vraie pour l'integration de la fonction f.

f	I_{GL}	I_1	I_M	I_v
$x \mapsto x$	0.00	0.00	0.00	0
$x \mapsto x^2$	0.667	0.667	0.667	2/3
$x \mapsto x^4$	0.400	0.667	0.400	2/5

Table 1 – Résultat des quadratures numériques

Comme attendu nous observons que pour la quadrature de Gauss-Legendre donne les même resultats pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 que la quadrature du premier TP. En revanche, comme nous pouvions nous y attendre ici nous avons une solution correcte pour des polynomes de degré 4 et même 5.

Question 4

Notons

$$C_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \tag{5}$$

Nous avons, par définition,

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = C_{l,m} P_l^m(\cos(\theta))\, e^{im\phi} \tag{6}$$

En notant I l'intégrale de Y_{lm} sur la sphère unité,

$$I = C_{l,m} \int_0^{\pi} P_l^m(\cos(\theta))\sin(\theta)d\theta \int_0^{2\pi} e^{im\phi}d\phi \tag{7}$$

Ainsi si $m \neq 0$ l'integrale sur ϕ donne directement $I = 0$. De plus, d'après d'autres propriétés des polynomes de Legendre, la quadrature totale doit alors satisfaire les égalités suivantes :

$$\sum_{i,j} \omega_i \omega_j Y_{lm}(\theta_j,\phi_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \text{ et } l \neq 0 \\ \sqrt{4\pi} & \text{si } m = 0 \text{ ou } l = 0 \end{cases} \tag{8}$$

En particulier, la quadrature de l'integrale sur ϕ doit vérifier :

$$\sum_i \omega_i e^{im\phi_i} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } m = 0 \end{cases} \tag{9}$$

1. *Calculation of Gauss Quadrature Rules*, G.H. Golub and J.H. Welsh , Math. Comp. 23 (1969), 221-230 , (Apr., 1969)