Méthode multipole rapide pour un nuage de points

Gaétan Facchinetti
5 décembre 2016

Université Paris-Saclay, Ecole Normale Supérieure de Cachan,
Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées

Question 1

Nous avons créer une fonction permettant de renvoyer, pour une densité de point par longueur d'ondre n_λ et une fréquence f donnée, un tableau de coordonnées de l'ensemble des points du nuages ainsi que le nombre de N points. Dans notre code ce nombre de points se calcule en fonction des paramètres par la formule,

$$N = 4s_a(s_b - 1) + 2(s_b - 2)^2 \tag{1}$$

Avec $s_a = \mathbb{E}(fn_\lambda L/c) + 1$ et $s_b = \mathbb{E}(fn_\lambda l/c) + 1$, où $L = 1$ (m) et $l = 0.5$ (m) sont les dimensions de la boite et c la célérité de l'onde dans le milieu considéré Nous avons alors pu représenter en Fig. 1 les points de discrétisation.

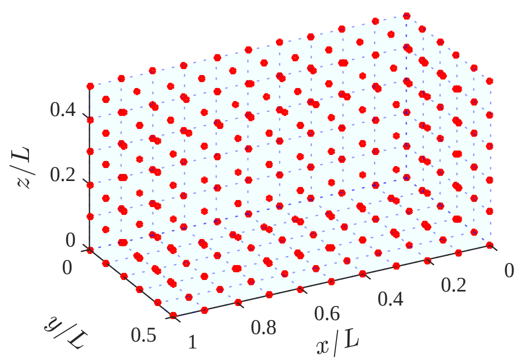

Figure 1 – Points de discrétisation suivant les trois coordonnées spatiales (rouge). $N = 252$, $n_\lambda = 10$, $f = c/L$. Pour faciliter la lecture les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ ont été représentés en cyan.

Question 2

Notons, pour $i \in [\![1, N]\!]$, $\mathbf{x}_i$ le vecteur position du point du nuage indicé i. Introduisons alors la matrice de la fonction de Green G que nous definissons par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2 \quad G_{i,j} = \begin{cases} \frac{e^{ik|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \tag{2}$$

Nous notons τ_a le temps d'assemblage de cette matrice. Soit maintenant un vecteur $\boldsymbol{\rho}$ quelconque de $\mathbb{R}^N$. Nous notons τ_c le temps de calcul du produit matrice vecteur $\mathbf{V} = G\boldsymbol{\rho}$.

Nous pouvons remarquer qu'à partir de $N \sim 10000$ l'assemblade de la matrice est trop gourmand en mémoire et cela rend l'execution sous Matlab impossible. Nous avons donc fait varier n_λ à f fixé pour avoir, d'après Eq. (1), une valeur de N maximale de .... Puis nous avons représenté en Fig. 2 et Fig. 3 l'évolution de τ_a et τ_c en fonction de N.

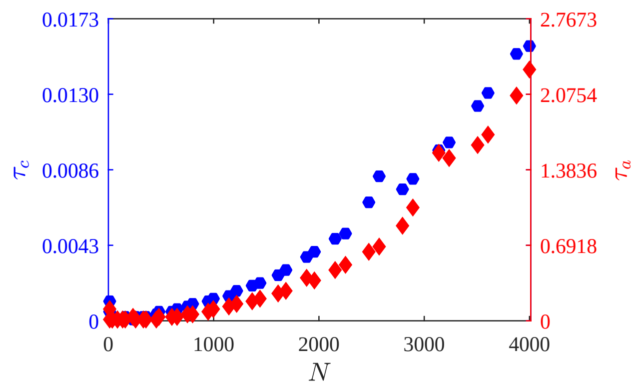

Figure 2 – Temps d'assemblage de G, τ_a (rouge) et temps de calcul du produit matrice vecteurs τ_c (bleu) en fonction de N. Les deux courbes ont une allure parabolique mais nous pouvons remarquer que, les echelles étant différentes, le temps d'assemblage est plus long

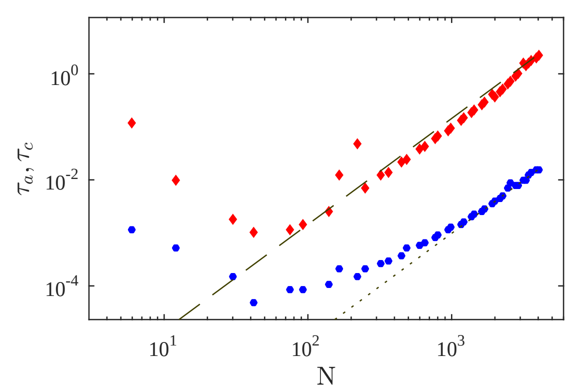

Figure 3 – Temps d'assemblage de G, τ_a (rouge) et temps de calcul du produit matrice vecteurs τ_c (bleu) en fonction de N. Nous pouvons remarquer ici qu'asymptotiquement $\log(\tau_{a/c}) \simeq 2\log(N) + K_{a/c}$ représentées en pointillé vert avec $K_{a/c}$ constante.

Comme il l'est montré en Fig. 3, l'évolution du logarithme de τ_a avec N tend asymptotiquement vers une droite de pente 2. Il est en cd même pour le logarithme de τ_c avec N. Ceci confirme l'évolution en $O(N^2)$ du temps d'assemblage et de produit matrice vecteur.

Question 3

Nous avons calculé la quadrature de Gauss-Legendre à L points en diagonsalisant la matrice tridiagonale définie dans l'énoncé.