

# Méthode multipole rapide pour un nuage de points

Gaétan Facchinetti

5 décembre 2016

*Université Paris-Saclay, Ecole Normale Supérieure de Cachan,  
Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées*

## Question 1

Nous avons créé une fonction permettant de renvoyer, pour une densité de point par longueur d'onde  $n_\lambda$  et une fréquence  $f$  donnée, un tableau de coordonnées de l'ensemble des points du nuage ainsi que le nombre de  $N$  points. Dans notre code ce nombre de points se calcule en fonction des paramètres par la formule,

$$N = 4s_a(s_b - 1) + 2(s_b - 2)^2 \quad (1)$$

Avec  $s_a = \mathbb{E}(fn_\lambda L/c) + 1$  et  $s_b = \mathbb{E}(fn_\lambda l/c) + 1$ , où  $L = 1$  (m) et  $l = 0.5$  (m) sont les dimensions de la boîte et  $c$  la célérité de l'onde dans le milieu considéré. Nous avons alors pu représenter en Fig. 1 les points de discrétisation.

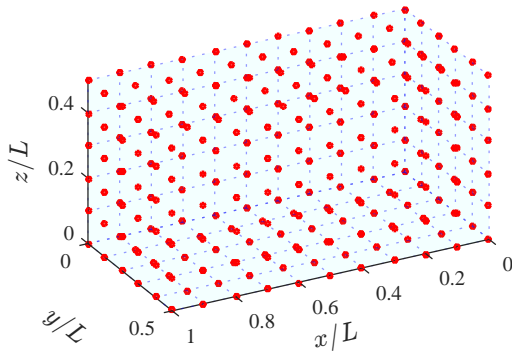


FIGURE 1 – Points de discrétisation suivant les trois coordonnées spatiales (rouge).  $N = 252$ ,  $n_\lambda = 10$ ,  $f = c/L$ . Pour faciliter la lecture les plans  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $z = 0$  ont été représentés en cyan.

## Question 2

Notons, pour  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $\mathbf{x}_i$  le vecteur position du point du nuage indicé  $i$ . Introduisons alors la matrice de la fonction de Green  $G$  que nous définissons par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \quad G_{i,j} = \begin{cases} \frac{e^{ik|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2)$$

Nous notons  $\tau_a$  le temps d'assemblage de cette matrice. Soit maintenant un vecteur  $\boldsymbol{\rho}$  quelconque de  $\mathbb{R}^N$ . Nous notons  $\tau_c$  le temps de calcul du produit matrice vecteur  $\mathbf{V} = G\boldsymbol{\rho}$ .

Nous pouvons remarquer qu'à partir de  $N \sim 10000$  l'assemblage de la matrice est trop gourmand en mémoire et cela rend l'exécution sous Matlab impossible. Nous avons donc fait varier  $n_\lambda$  à  $f$  fixé pour avoir, d'après Eq. (1), une valeur de  $N$  maximale de 9002. Puis nous avons représenté en Fig. 2 et Fig. 3 l'évolution de  $\tau_a$  et  $\tau_c$  en fonction de  $N$ .

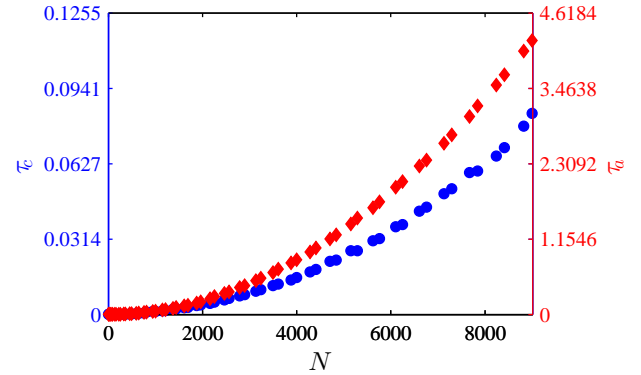


FIGURE 2 – Temps d'assemblage de  $G$ ,  $\tau_a$  (losanges rouge) et temps de calcul du produit matrice vecteurs  $\tau_c$  (ronds bleu) en fonction de  $N$ . Les deux courbes ont une allure parabolique mais nous pouvons remarquer que, les échelles étant différentes, le temps d'assemblage est plus long

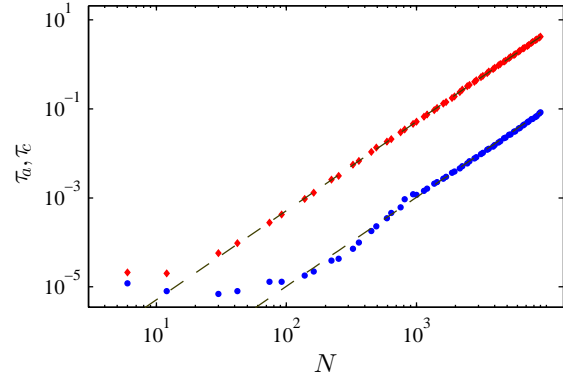


FIGURE 3 – Temps d'assemblage de  $G$ ,  $\tau_a$  (losanges rouge) et temps de calcul du produit matrice vecteurs  $\tau_c$  (ronds bleu) en fonction de  $N$ . Nous pouvons remarquer ici qu'asymptotiquement  $\log(\tau_a/c) \simeq 2 \log(N) + K_{a/c}$  représentées en pointillé vert avec  $K_{a/c}$  constante.

Comme il l'est montré en Fig. 3, l'évolution du logarithme de  $\tau_a$  avec  $N$  tend asymptotiquement vers une droite de pente 2. Il est en cd même pour le logarithme de  $\tau_c$  avec  $N$ . Ceci confirme l'évolution en  $O(N^2)$  du temps d'assemblage et de produit matrice vecteur.

### Question 3

Nous avons calculé la quadrature de Gauss-Legendre à  $L$  points en diagonalisant la matrice tridiagonale définie dans l'énoncé. La méthode utilisée pour obtenir les points de quadrature est la méthode de Golub-Welsh<sup>1</sup>. Avec les notations du TP nous calculons, pour  $P$  polynôme tel que  $\deg P \leq 2L - 1$ ,

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{i=1}^L \omega_i P(\lambda_i) \quad (3)$$

Ceci est équivalent, par un changement de variable, à

$$\int_0^\pi P(\cos(t)) \sin(t) dt = \sum_{i=1}^L \omega_i P(\cos(\theta_i)) \quad (4)$$

Nous avons testé cette quadrature avec  $L = 3$  en comparaison de celle à 3 points développée lors du premier TP. Nous écrivons  $I_{GL}$  le résultat par la quadrature de Gauss Legendre,  $I_1$  le résultat pour la quadrature à trois points du premier TP,  $I_M$  le résultat de la quadrature effectuée par Matlab et  $I_v$  la valeur vraie pour l'intégration de la fonction polynomiale  $P$ .

$P$	$I_{GL}$	$I_1$	$I_M$	$I_v$
$x \mapsto x$	0.00	0.00	0.00	0
$x \mapsto x^2$	0.667	0.667	0.667	2/3
$x \mapsto x^4$	0.400	0.667	0.400	2/5

TABLE 1 – Résultat des quadratures numériques

Comme attendu nous observons que pour la quadrature de Gauss-Legendre donne les mêmes résultats pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 que la quadrature du premier TP. En revanche, comme nous pouvions nous y attendre cette nouvelle quadrature nous permet d'avoir une solution correcte pour des polynômes de degré 4 et 5, puisque la formule est bien exacte jusqu'au degré  $2L - 1$ .

### Question 4

Notons

$$C_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \quad (5)$$

Nous avons, par définition,

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = C_{l,m} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi} \quad (6)$$

En notant  $I$  l'intégrale de  $Y_{lm}$  sur la sphère unité,

$$I = C_{l,m} \int_0^\pi P_l^m(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} e^{im\phi} d\phi \quad (7)$$

Ainsi si  $m \neq 0$  l'intégrale sur  $\phi$  donne directement  $I = 0$ . De plus, d'après d'autres propriétés des polynômes de Legendre, la quadrature totale doit alors satisfaire les égalités suivantes :

$$\sum_{i,j} \omega_i \omega_j Y_{lm}(\theta_j, \phi_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \text{ et } l \neq 0 \\ \sqrt{4\pi} & \text{si } m = 0 \text{ ou } l = 0 \end{cases} \quad (8)$$

En particulier, la quadrature de l'intégrale sur  $\phi$  doit vérifier :

$$\sum_i \omega_i e^{im\phi_i} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } m = 0 \end{cases} \quad (9)$$

### Question 5

Nous souhaitons calculer la décomposition en onde plane de la fonction de Green  $G$ . Posons  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) - (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) = \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ . Nous utilisons les formules

$$\frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \simeq \int_{S^2} e^{ik\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)} \mathcal{G}_L e^{-ik\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} d\hat{\mathbf{s}} \quad (10)$$

Avec,

$$\mathcal{G}_L = \frac{ik}{4\pi} \sum_{p=0}^L (2p+1) i^p h_p^{(1)}(k|\mathbf{r}_0|) P_p(\cos(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{r}_0)) \quad (11)$$

$$\cos(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{|\mathbf{r}_0|} < \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \mathbf{r}_0 > \quad (12)$$

L'intégrale sur la sphère unité est alors calculée par la quadrature déterminée dans la question précédente.

1. *Calculation of Gauss Quadrature Rules*, G.H. Golub and J.H. Welsh, *Math. Comp.* **23** (1969), 221-230, (Apr., 1969)