# Билеты, Дискретная математика

Купряков Дмитрий

28 октября 2023 г.

1. Правила суммы и произведения.

   Правило суммы можно сформулировать так: если некоторый объект из множества A можно выбрать k способами, и, вне зависимости от выбора этого объекта, можно n способами выбрать некоторый элемент множества B, то выбор объекта из множества A или из множества B можно осуществить k + n способами.

   Очевидна переформулировка этого правила на языке теории множеств: пусть пересечение двух множеств A и B пусто; тогда:

   $$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

   В частности, если A ⊂ X и A' — дополнение множества A, то

   $$|A| + |A'| = |X|.$$

   В более общем случае, рассматривая произвольное разбиение множества X на блоки, имеем равенство вида

   $$|X| = |X_1| + |X_2| + ... + |X_k|,$$

   которое также называется правилом суммы в комбинаторике.

   Под правилом произведения в комбинаторике понимается равенство

   $$|X_1 \times X_2 \times ... \times X_k| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot ... \cdot |X_k|.$$

2. Размещения с повторениями и без

   Определение.Упорядоченные выборки k элементов с повторениями, которые составлены из основного множества n элементов, называются размещения с повторениями из n элементов по k элементов и обозначаются так:

   $$\overline{A}_n^k = n^k$$

   Задача. На световой панели в ряд расположены 4 лампочки, каждая из которых может гореть красным, жёлтым или зелёным цветом. Сколько различных сигналов можно передать с помощью панели (все лампочки должны гореть, порядок цветов имеет значение)?

   Решение. Сигналы светового табло можно рассматривать как выборки из 3 по 4. Определим комбинаторную схему: поскольку «порядок цветов имеет значение» - это размещения.

Заметим, что каждая из лампочек в один и тот же момент времени может гореть одним цветом. Значит, выборка - размещения с повторениями.

$$\overline{A}_3^4 = 3^4$$

Определение.Упорядоченные выборки k элементов без повторений, которые составлены из основного множества n элементов, называются размещения без повторениями из n элементов по k элементов и обозначаются так:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Задача. Дана последовательность символов А, Б, С. Сколько вариантов кода, состоящего из двух разных символов, можно составить из заданной последовательности?

Решение.По условию код состоит «из двух разных символов», при этом коды АБ и БА – не одинаковые, поэтому, выборки – размещения без повторений. Выборка осуществляется из 3 элементов по 2. Значит, n = 3, k = 2.

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!}$$

3. Перестановки с повторениями и без

   Определение.Пусть в исходную совокупность входит $n_1$ элементов первого типа, $n_2$ - второго типа, . . . , $n_k$ – k-го типа, при этом $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Всевозможные упорядоченные выборки, составленные из всех данных n элементов, называются перестановками с повторениями.

   Формула для подсчёта количства перестановок с повторениями:

$$P_{n_1 n_2 \dots n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

   Задача. На световом табло в один ряд располагаются шесть лампочек. Сколько различных сигналов можно получить, имея две зеленые и четыре красные лампочки? Все лампочки должны гореть.

   Решение. Заметим, что все лампочки исходной совокупности должны располагаться на табло (4 + 2 = 6). Так как «все лампочки должны гореть», то сигналы будут отличаться только порядком цветов. Значит, комбинаторная схема – перестановки с повторениями.

$$P_{2,4} = \frac{6!}{2! \cdot 4!}$$

   Определение.Перестановками без повторений называются всевозможные упорядоченные выборки, составленные из всех данных n элементов.

   Формула для определения числа перестановок без повторений:

$$P_n = n!$$

   Задача. Сколько вариантов кода длиной 3 символа можно составить из трех букв А, Б, С, если каждая буква входит в последовательность не более одного раза?

Решение. Так как «каждая буква входит в последовательность не более одного раза», то выборки – перестановки без повторений.

$$P_3 = 3!$$

4. Сочетания с повторениями и без

Определение.Сочетаниями с повторениями называются неупорядоченные выборки, содержащие k элементов из данных n элементов, причем каждый элемент исходной совокупности может участвовать в сочетании несколько раз.

Формула для расчета количества сочетаний с повторениями

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Задача. Для составления некоторого кода используются цифры 1, 2, 3. Кодовые слова должны удовлетворять следующим свойствам:

1.Длина кодовых слов равна 3;
2.Кодовые слова могут содержать одинаковые цифры;
3.Кодовые слова, отличающиеся только порядком цифр, считаются одинаковыми.
4.Сколько вариантов кодовых слов можно составить?

Решение. Поскольку длина кодовых слов равна 3, то выборки из 3 по 3. Определим комбинаторную схему: из пункта 3 следует, что выборка неупорядоченная при этом «Кодовые слова могут содержать одинаковые цифры», значит, выборки – сочетания с повторениями.

$$\left(\!\!\binom{3}{3}\!\!\right) = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Определение.Сочетаниями без повторений называются неупорядоченные выборки, содержащие k различных элементов из данных n элементов.

Отметим, что

1.«выборки неупорядоченные», т.е. выборки AB и BA – это одно и тоже сочетание.
2.Любой элемент может оказаться на любом из k мест, но использоваться может в выборке только один раз.

Формула для определения числа сочетаний без повторений:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Задача. Из 4-х кандидатов происходят выборы участников конференции. Сколько существует вариантов выбора делегации?

Решение. Очевидно, один и тот же кандидат в данную выборку может быть избран только один раз. При этом набор А, Б и Б, А – это одни те же участники. Поэтому выборки есть сочетания без повторений.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$