

# СПИСОК ВОПРОСОВ К КОЛЛОКВИУМУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ВШЭ, первый модуль, осень 2022 года

## ГЛАВА I. ВВЕДЕНИЕ

1. Множества: упорядоченная пара, декартово произведение, операции над множествами. Правила де Моргана.

2. Отношения: область определения, область значений, обратное отношение, композиция отношений, свойства, примеры.

3. Аксиомы вещественных чисел. Математическая индукция. Существование наибольшего и наименьшего элемента в конечном множестве. Следствия.

4. Принцип Архимеда. Следствия. Наибольший элемент в множестве целых чисел. Существование целой части числа.

5. ! Супремум и инфимум. Определение и теорема существования. Характеристика супремума.

6. ! Теорема о вложенных отрезках. Существенность условий.

## ГЛАВА II. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

7. ! Монотонные и ограниченные последовательности. Два определения предела и их равносильность. Примеры.

8. ! Простейшие свойства пределов последовательностей (единственность предела, предельный переход в неравенстве, ограниченность).

9. ! Теорема о стабилизации знака и теорема о двух милиционерах. Следствия.

10. ! Предел монотонной последовательности.

11. Арифметические свойства пределов последовательности.

12. ! Бесконечные пределы. Бесконечно большие. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими. Аналоги теорем для бесконечных пределов.

13. Арифметические действия в  $\mathbb{R}$ . Примеры.

14. Неравенство Бернулли.

15. ! Определение экспоненты и числа  $e$ .

16. Свойства экспоненты.

17. Формула для экспоненты суммы (с леммой).

18. Сравнение скорости возрастания последовательностей  $n^k$ ,  $a^n$ ,  $n!$  и  $n^n$ .

19. Теорема Штольца (для неопределенности  $\frac{\infty}{\infty}$ ). Сумма  $m$ -ых степеней натуральных чисел.

20. Теорема Штольца (для неопределенности  $\frac{0}{0}$ ).

21. Подпоследовательности (определение и простейшие свойства). Теорема о стягивающихся отрезках.

22. ! Теорема Больцано–Вейерштрасса (в том числе и случай неограниченной последовательности).

23. ! Фундаментальные последовательности. Свойства. Критерий Коши.

24. Верхний и нижний пределы. Частичные пределы. Связь между ними.

25. Характеристика верхних и нижних пределов с помощью  $N$  и  $\varepsilon$ .

26. ! Сходимость рядов. Необходимое условие сходимости рядов. Примеры.

27. Простейшие свойства сходящихся рядов.

## ГЛАВА III. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

28. Окрестности и проколотые окрестности. Предельные точки множества.

29. ! Определения предела функций в точке. Простейшие свойства.

30. ! Равносильность определения предела по Коши и по Гейне.

31. Свойства функций, имеющих предел.

32. Арифметические действия с пределами.

33. ! Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах.

34. ! Критерий Коши для предела функций.

35. Левый и правый пределы. Предел монотонной функции.

36. ! Определения непрерывных функций и их равносильность. Примеры. Непрерывность экспоненты.

37. Арифметические действия с непрерывными функциями. Непрерывность многочленов и рациональных функций. Теорема о стабилизации знака.

38. Теорема о непрерывности композиции. Теорема о пределе композиции. Пример.

39. Неравенства между синусом и аргументом. Непрерывность тригонометрических функций.

40. ! Теорема Вейерштрасса. Существенность условий.

## ПРИМЕЧАНИЯ

На коллоквиум вынесены вопросы 1–35, которые были в обоих потоках. Помеченные синим вопросы 36–40 пока были только в первом потоке.

Особо важные вопросы помечены восклицательным знаком.

Незнание хотя бы одной из следующих определений и формулировок влечет оценку “неудовлетворительно”: супремум и инфимум; предел последовательности и функции (в разных ситуациях и на разных языках); определение числа  $e$  и экспоненты; определение фундаментальной последовательности; критерий Коши для последовательностей; определение подпоследовательности и теорема Больцано–Вейерштрасса; теорема о двух милиционерах для последовательностей и для функций.

Существенную часть вопросов примерно в таком же изложении можно найти в книге Виноградова и Громова “Курс математического анализа”, часть I.

Видеозаписи лекций, очень близких к курсу можно найти тут: <https://stepik.org/course/716/>