Матанализ

Канта контроль

1 ноября 2023 г.

1. **Множества: упорядоченная пара, декартово произведение, операции над множествами. Правила де Моргана.**
Множество - какой-то набор элементов. Для любого элемента можно сказать принадлежит множеству или нет.
$A \subset B$, то есть $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$ (А - подмножество В)
$A = B$, то есть $A \subset B \land B \subset A$ (А равно В)
$A \subsetneq B$, то есть $A \subset B \land A \neq \varnothing \land A \neq B$ (А - собственное подмножество В)
Способы задать множетсво:

- Полное задание: $\{a, b, c\}$.
- Неполное: $a_1, a_2, ..., a_k$. Но должно быть понятно как образована последовательно. Например $\{1, 5, ..., 22\}$ — непонятно.
- Можно так же и бесконечные: $\{a1, a2, ...\}$.
- Словесным описанием. Например, множество простых чисел.
- Формулой. Например, пусть задана функция $F(x)$ — функция для всех чисел, которая возращает истину или ложь. Тогда можно взять множество $\{x : F(x)\}$.

Операции с множествами:

Символ	Определение	Описание
$\cap$	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	Пересечение множеств
$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$	$A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$	Пересечение множества множеств
$\cup$	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	Объединение множеств
$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$	$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$	Объединение множества множеств
$\setminus$	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	Разность множеств
$\times$	$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$	Декартово произведение
$\triangle$	$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	Симметрическая разность
$\varnothing$	$\forall x :\ x \notin \varnothing$	пустое множество
$\mathbb{N}$		Натуральные числа
$\mathbb{Z}$		целые числа
$\mathbb{Q}$	$\frac{a}{b}$, где $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$	рациональные числа
$\mathbb{R}$		действительные числа
2^X		множество всех подмножеств X

Важный момент: $1 \in \{1\}$, но $1 \notin \{\{1\}\}$
Правила де Моргана:
Пусть есть $A_\alpha \subset X$

1. $X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$.
2. $X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$.

Доказательство: $X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in X \wedge x \notin A_\alpha\ \forall \alpha \in I\} = \{x : \forall \alpha \in I X \setminus A_\alpha\} = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$.
Упорядоченная пара $\langle x, y \rangle$. Важное свойство $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \iff x = x' \wedge y = y'$

2. **Отношения: область определения, область значений, обратное отношение, композиция отношений, свойства, примеры.**
Отношение $R \subset X \times Y$. x и y находятся в отношении R, если их $\langle x, y \rangle \in R$.

- Область определения $\delta_R = dom_R = \{x \in X : \exists y \in Y : \langle x, y \rangle \in R$.
- Область значений $\rho_R = ran_R = \{y \in Y : \exists x \in X : \langle x, y \rangle \in R$
- Обратное отношение $R^{-1} \subset Y \times X \ \ R^{-1} = \{\langle x, y \rangle\} \in R$.
- Композиция отношения. $R_1 \subset X \times Y, R_2 \subset Y \times Z : R_1 \circ R_2 \subset X \times Z$.
- $R_1 \circ R_2 = \{\langle x, z \rangle \in X \times Z \mid \exists y \in Y : \langle x, y \rangle \in R_1 \wedge \langle y, z \rangle \in R_2\}$

Свойства:

Функция из X в Y — отношение ($\delta_f = X$), для которого верно:

$$\left.\begin{array}{l}\langle x, y \rangle \in f \\ \langle x, z \rangle \in f\end{array}\right\} \Rightarrow y = z.$$

Используется запись $y = f(x)$.

Последовательность - функция у которой $\delta_f = \mathbb{N}$

Отношение R называется рефлективным, если $\forall x : \langle x, x \rangle \in R$.

Отношение R называется симметричным, если $\forall x, y \in X : \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$

Отношение R называется иррефлективным, если $\forall x \, \langle x, x \rangle \notin R$

Отношение R называется антисимметричным, если $\left.\begin{array}{l}\langle x, y \rangle \in R \\ \langle y, x \rangle \in R\end{array}\right\} \Rightarrow x = y$

Отношение R называется транзитивным, если $\left.\begin{array}{l}\langle x, y \rangle \in R \\ \langle y, z \rangle \in R\end{array}\right\} \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$

Отношение называется отношением эквивалентности, если отношение рефлективно, симметрично, транзитивно. Например: Равенство, сравнение по модулю $\mathbb{Z}$, $\|$, отношение подобия треугольников.

Если выполняется рефлективность, антисимметричность и транзитивность, от данное отношение — отношение нестрогого частичного порядка. Например: $\geq$; $A \subset B$ на 2^X.

Если выполняется иррефлективность и транзитивность, то данное отношение — отношение строгого частичного порядка. Например: $>$; A собственное подмножество B на 2^X.

R - нестрогий ч.п. $\Rightarrow R = \{\langle x, y\rangle \in R : \ x \neq y\}$ — строгий ч.п.

Примеры отношений:

- Отношение равенства. $R = \{\langle x, x\rangle : \ x \in X\}$. Но это просто равенство.
- "$\geq$"$(X = \mathbb{R})$. $R = \{\langle x, y\rangle : \ x \geq y\}$
- "$>$"$(X = \mathbb{R})$. $R = \{\langle x, y\rangle : x > y\}$
  $\delta_> = 2, 3, 4\ldots$
  $\rho_> = \mathbb{N}$
  $>^{-1} = < = \{\langle x, y\rangle : \ x < t\}$
  $> \circ > = \{\langle x, z\rangle \ x - z \geq 2\}$
- X — прямые на плоскости. "$\perp$": $R = \{\langle x, y\rangle : \ x \perp y\}$.
  $\delta_\perp = \rho_\perp = X$
  $\perp^{-1} = \perp$
  $\perp \circ \perp = \|$
- $\langle x, y\rangle \subset R$, когда x — отец y.
  $\delta_R = \{$Все, у кого есть сыновья$\}$.
  ρ_R — религиозный вопрос. См. Библию
  $R^{-1} =$ сын
  $R \circ R = \{$дед по отцовской линии$\}$

3. **Аксиомы вещественных чисел. Математическая индукция. Существование наибольшего и наименьшего элемента в конечном множестве. Следствия.**

Есть две операции:

- $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  - Коммутативность. $x + y = y + x$.
  - Ассоциативность. $(x + y) + z = x + (y + z)$
  - Существует ноль. $\exists 0 \in \mathbb{R} \ \ x + 0 = x$
  - Существует противоположный элемент. $\exists (-x) \in \mathbb{R} \ \ x + (-x) = 0$
- $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

– Коммутативность. $x \cdot y = y \cdot x$.

– Ассоциативность. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

– Существует единица. $\exists 1 \in \mathbb{R} \;\; x \cdot 1 = x$

– Существует обратный элемент. $\exists x^{-1} \in \mathbb{R} \;\; x \cdot x^{-1} = 1$

Свойство дистрибутивности: $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$. Структура с данными операциями называется полем.

Введем отношение $\leq$: Оно рефлексивно, антисимметрично и транизитивно, то есть нестрогий частичного порядка:

1. $a \leq a$
2. $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$
3. $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$
4. $\forall a, b$ выполняется $a \leq b \vee b \leq a$
5. С операцией $+$: $\forall c$ выполняется $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
6. С операцией $\cdot$: $a > 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0$

Аксиома полноты: Если A и $B \subset \mathbb{R}$ и $\forall a \in A, b \in B : \;\; a \leq b$ и $A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing$, тогда $\exists c \in \mathbb{R} \; a \leq c \leq b$ ($+$ A левее B).
Множество рациональных не удовлетворяет аксиоме полноты.
Например: $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \wedge x^2 > 2\}$. Единственная точка, между этими множествами — $\sqrt{2}$

Пусть P_n - последовательность утверждений. Тогда, если P_1 — верное и из того, что P_n — верно следует, что P_{n+1} — верно. Тогда все P_n верны $\forall n \in \mathbb{N}$

Наибольшие/наименьшие элементы: В непустом конечном множестве A есть наибольший и наименьший элементы.
Доказательство. Докажем по индукции:

- База. $|A| = 1$. Очевидно.
- Переход. $n \to n + 1$.
- Доказательство. Рассмотрим множество из $n + 1$ элемента $\{x_1 \ldots x_n, x_{n+1}\}$. Выкинем из него последний элемент. Тогда по индукционному предположению у нас есть максимальный элемент x_k. Тогда рассмотрим два случая:

1. $x_k \geq x_{n+1}$. Тогда x_k — наибольший элемент множества $\{x_1 \dots x_n, x_{n+1}\}$.
2. $x_k < x_{n+1}$. Тогда по транзитивности x_{n+1} больше всех других элементов множества. Значит, x_{n+1} — наибольший элемент множества $\{x_1 \dots x_n, x_{n+1}\}$.

4. **Принцип Архимеда. Следствия. Наибольший элемент в множестве целых чисел. Существование целой части числа.**

Принцип Архимеда:
Пусть $x \in \mathbb{R} \land y > 0$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N}: \ x < ny$
Доказательство:
Фиксируем g
$A = \{a \in \mathbb{R} \mid a < yn\}$
$B\mathbb{R} \setminus A \Rightarrow B = \{b \in \mathbb{R} \mid \forall n : b \geq yn\}$
Пусть B левее A : $\forall a, b; \exists n$: $\begin{cases} \text{b} \leq a \\ \text{a} < \text{yn} \end{cases} \Rightarrow b < yn??? \Rightarrow A$ левее $B \Rightarrow \exists c$:
$\begin{cases} \forall \leq c \\ \forall \geq c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{c - y = a'} \in A \\ \text{c + y = b'} \in B \end{cases} \Rightarrow c = a' + y < yn' + y = y(n'+1) = y\widetilde{n}$
$b' = c + y \leq y\widetilde{n} + y = y(\widetilde{n}+1) = yn \Rightarrow b' \leq yn??? \Rightarrow \begin{cases} \text{B} = \varnothing \Rightarrow A = \mathbb{R} \\ \text{A = R}\setminus B \end{cases}$

Следствие:
Если $\epsilon > 0$, то $\exists n \in \mathbb{N}\ \frac{1}{n} < \epsilon$
Доказательство:
$x = 1, y = \epsilon \Rightarrow ny = n\epsilon > x = 1 \iff \epsilon > \frac{1}{n}$

Теорема:
В непустом ограниченном сверху (снизу) множестве целых чисел есть наибольший (наименьший) элемент.
Доказательство:
Пусть $A \subset \mathbb{Z}$. c — его верхняя граница.
Возьмем $b \in A$ и рассмотрим $B := x \in A \mid x \geq b$. Заметим, что B содержит конечное число элементов, значит в нем есть наибольший элемент. Пусть это $m \in B$: $\forall x \in B: \ x \leq m$. Докажем, что m — наибольший элемент и в A.
Для этого заметим, что любой $x \in A$ либо лежит в B, либо $x < b$, а по транзитивности $x < b \leq m$.

Пусть $x \in \mathbb{R}$, тогда $[x] = \lfloor x \rfloor$ — наименьшее целое число, не превосходящее x.

1. $[x] \leq x < [x] + 1$

Левое неравенство очевидно. Правое неравенство можно доказать от противного: пусть $x \geq [x]+1$, тогда справа целое число большое $[x]$, но меньшее x. Противоречие.

2. $x-1 < [x] \leq x$

5. ! Супремум и инфимум. Определение и теорема существования. Характеристика супремума.

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Тогда A — ограничено сверху, если $\exists c \in \mathbb{R}: \ \forall a \in A \ a \leq c$. Такое c называется верхней границей.

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Тогда A — ограничено снизу, если $\exists b \in \mathbb{R}: \ \forall a \in A \ a \geq b$. Такое b называется нижней границей.

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Тогда A — ограничено, если оно ограничено сверху и снизу. Например: $\mathbb{N}$ не ограничено сверху, но ограничено снизу.

Доказательсво. Пусть $\exists c \in \mathbb{R}: \ c \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда это противоречит принципу Архимеда при $x = c, y = 1$.
Для ограниченности снизу достаточно взять $c = -1$.

$\sup A$ — наименьшая верхняя граница множества A
$A \subset \mathbb{R}$, $a \neq \varnothing$, A - ограничено сверху
Характеристика: если $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, A - ограничено сверху, тогда $\exists \sup A$

$\inf A$ — наибольшая нижняя граница множества A
$A \subset \mathbb{R}$, $a \neq \varnothing$, A - ограничено снизу

Доказательсво существования: $B = \{$все верхние границы множества $A\}$
$B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \varnothing$, A левее B, $a \leq b \ \forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: \begin{cases} \text{a} \leq c \text{ - верх } A \\ \text{c} \leq b \text{ - низ } A \end{cases}$
$\Rightarrow c = \sup A$
Аналогично с $\inf A$

6. ! Теорема о вложенных отрезках. Существенность условий.

Теорема о вложенных отрезках:

$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset ... \supset [a_n; b_n] \supset ...$
Тогда $\bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n; b_n] \neq \varnothing$ $(\exists c \ : \ \forall n \ c \in [a_n; b_n])$
Доказательство:

$$\begin{cases} \mathrm{A} = \{\mathrm{a}_1, a_2, ..., a_n, ...\},\ A \neq \varnothing \\ \mathrm{B} = \{\mathrm{b}_1, b_2, ..., b_n, ...\},\ B \neq \varnothing \quad \Rightarrow \\ \text{A левее B, } \mathrm{a}_k \leq b_m \ \forall k, m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ по аксиоме полноты $\exists c$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B : a \leq c \leq b \Rightarrow \forall n \ a_n \leq c \leq b_n \Rightarrow c \in [a_n; b_n] \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n; b_n] \neq \varnothing$
A левее B, так как:

1. $k = m$
2. $m > k \ a_k \leq a_m \leq b_n$
3. $m < k \ a_k \leq b_k \leq b_m$

Существенность условий: для лучей и полуинтервалов неверно.

7. ! Монотонные и ограниченные последовательности. Два определения предела и их равносильность. Примеры.

$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ - возрастающая (неубывающая), если $\forall n \ x_{n+1} \geq x_n$
$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ - строго возрастрает, если $\forall n \ x_{n+1} > x_n$
$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ - убывающая, если $\forall n \ x_{n+1} \leq x_n$
$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ - строго убывающая, если $\forall n \ x_{n+1} < x_n$
$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ - ограниченна сверху, если $\exists m \in \mathbb{R} : \ \forall n \ x_n \leq m$
$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ - ограниченна снизу, если $\exists m \in \mathbb{R} : \ \forall n \ x_n \ gem$
$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ - ограниченная, если ограниченна сверху и снизу
Опеределения предела:
Не classic
$a = \lim_{n \to +\infty} x_n$, если все любого интервала, содержащего точку a, находиться лишь конечное число членов.
Classic
$a = \lim_{n \to +\infty} x_n \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq N \ a - \epsilon < x_n < a + e$
$|x_n - a| < \epsilon$
Равносильность состоит в том, что внутри отрезка $[a - \epsilon; a + \epsilon]$ у нас находится бесконечное число членов, а значит вне его находится конечное число членов.

8. ! Простейшие свойства пределов последовательностей (единственность предела, предельный переход в неравенстве, ограниченность).

Единственность предела:
Если существует два разных предала одной последовательности, то вне двух интервалах находится конечное число членов $\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ имеет конечное число членов???

Ограниченность:
Если последовательность имеет предел, то она ограничена
$\exists a: \ \lim_{n\to+\infty} = a \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$
Рассмотрим интервал $[a-1; a+1]$
$\max((a+1)$, наибольшее невошедшее$) =$ верхняя граница
$\min((a-1)$, наименьшее невошедшее$) =$ нижняя граница
Из ограниченности НЕ следует существование предела (Например: $x_n = (-1)^n$)

Если изменить конечное число членов последовательности, то предел не изменится или не появится. Если добавить/удалить/переставить конечное число элементов, то не изменится и не появится.

Предельный переход в неравенстве:
$$\begin{cases} \forall n \ x_n \leq y_n \\ \begin{cases} \lim x_n = a \\ \lim y_n = b \end{cases} \end{cases} \Rightarrow a \leq b$$
Доказательство:
Пусть $a > b$
$\lim x_n = a \Rightarrow \forall \epsilon_1 > 0 \ \exists N_1: \ \forall n_1 > N_1 \ |x_n - a| < \epsilon_1$
$\lim y_n = b \Rightarrow \forall \epsilon_2 > 0 \ \exists N_2: \ \forall n_2 > N_2 \ |y_n - b| < \epsilon_2$
$$\forall \epsilon \ N = \max(N_1, N_2): \ \forall n > N \begin{cases} |\mathrm{x}_n - a| < \epsilon \\ |\mathrm{y}_n - b| < \epsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{a - } \epsilon < x_n < a + \epsilon \\ \text{b - } \epsilon < y_n < b + \epsilon \\ \text{a} > \text{b} \Rightarrow \exists \epsilon: \ b + \epsilon < a - \epsilon \end{cases}$$
$\Rightarrow y_n < x_n??? \Rightarrow a \leq b$

9. **! Теорема о стабилизации знака и теорема о двух милиционерах. Следствия.**
Теорема о стабилизации знака и теорема:
$\forall n \ x_n < y_n \Rightarrow a \leq b$
Следствия:
$\lim x_n = a$
$\forall n: \ x_n \geq A \Rightarrow a \geq A$

$\forall n: \ x_n \leq B \Rightarrow a \leq B$
$\forall n: \ x_n \in [\alpha;\beta] \Rightarrow a \in [\alpha;\beta]$
Теорема о двух миллиционерах:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \begin{cases} \lim x_n = a \\ \lim z_n = a \\ \mathrm{x}_n \leq y_n \leq z_n \end{cases} \Rightarrow \lim y_n = a$$

Доказательство:
Фиксируем $\epsilon > 0$
$\exists N_1: \ \forall n \geq N_1 \ |x_n - a| < \epsilon$
$\exists N_2: \ \forall n \geq N_2 \ |z_n - a| < \epsilon$
$N = \max(N_1, N_2)$

$$\forall n \geq N \begin{cases} \text{a - } \epsilon < x_n < a + \epsilon \\ \text{a - } \epsilon < y_n < a + \epsilon \end{cases} \Rightarrow a - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < y_n <$$

$a + \epsilon \Rightarrow |y_n - a| < \epsilon \Rightarrow \lim y_n = a$

10. **! Предел монотонной последовательности.**

Теорема о пределе монотонной последовательности:
$\{x\}_{x=1}^{+\infty}$ - возрастает и ограниченна сверху, тогда $\exists \lim x_n = S = \sup\{x_1, ...\}$
$\{y\}_{x=1}^{+\infty}$ - убывает и ограниченна снизу, тогда $\exists \lim y_n$
$\{z\}_{x=1}^{+\infty}$ - монотонная (+ ограниченная?), тогда $\exists \lim z_n \Leftrightarrow \{z_n\}$ - ограниченная
Доказательство:
$\{x\}_{n=1}^{+\infty}$ - ограниченная сверху $\Rightarrow \exists \sup\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = S = \sup x_n$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists x_{\widetilde{n}}: \begin{cases} \mathrm{x}_{\widetilde{n}} > S - \epsilon \\ \mathrm{x}_n \text{ - возрастает} \end{cases} \Rightarrow \forall n \geq \widetilde{n}$$

$S + \epsilon > S \geq x_n \geq x_{\widetilde{n}} > S - \epsilon \Rightarrow |x_n - S| < \epsilon \Rightarrow \lim x_n = S$

11. **Арифметические свойства пределов последовательности.**

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$
2. $\lim(x_n \cdot y_n = a \cdot b)$
3. $\lim(c \cdot x_n) = c \cdot a$
4. $\lim(\dfrac{x_n}{y_n}) = \dfrac{a}{b}$
5. $\lim(|x_n + \alpha_n|) = |a|$, где α_n - б/м (то есть $\lim \alpha_n = 0$)

Доказательства:
1. $\lim x_n \Leftrightarrow \lim(x_n + \alpha_n)$
$\lim y_n \Leftrightarrow \lim(y_n + \beta_n)$
$x_n+y_n = (x_n+\alpha_n)+(y_n+\beta_n) = (a+b)+(\alpha_n+\beta_n) = a+b+\gamma_n \Rightarrow \lim(x_n+y_n) = a+b$

2. $\begin{cases} \mathrm{x}_n = a + \alpha_n \\ \mathrm{y}_n = b + \beta_n \end{cases} \Rightarrow x_y \cdot y_n = (a+\alpha_n)\cdot(b+\beta_n) = ab + a\beta_n + \alpha_n b + \alpha_n\beta_n$
$(a\beta_n,\ \alpha_n b,\ \alpha_n\beta_n)$ - б/м $\Rightarrow \lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$

4. $\lim(\frac{x_n}{y_n}) = \lim(x_n \cdot \frac{1}{y_n})$
$\lim(\frac{1}{y_n})$, $y_n = b + \beta_n$
$\frac{1}{y_n} = \frac{1}{b+\beta_n} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b+\beta_n} = \frac{1}{b} - \frac{b+\beta_n-b}{b(b+\beta_n)} = \frac{1}{b} - \beta_n \cdot \frac{1}{b(b+\beta_n)}$
$\frac{1}{b(b+\beta_n)}$ - ограниченная, так как $\lim \frac{1}{b(b+\beta_n)} = \frac{1}{b^2} \Rightarrow \lim(\frac{1}{y_b}) = \frac{1}{b} \Rightarrow \lim(\frac{x_n}{y_n}) = \lim(x_n \cdot \frac{1}{y_n}) = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

12. ! Бесконечные пределы. Бесконечно большие. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими. Аналоги теорем для бесконечных пределов.

Вспомним сначала бесконечно малые:
$\{\alpha\}_{n+1}^{+\infty}$ - бесконечно малая $\Leftrightarrow \lim \alpha_n = 0$
Наблюдение: $\lim x_n = a \Leftrightarrow \{x_n - a\}_{n=1}^{+\infty}$ - бесконечно малая $\Leftrightarrow x_n - a = \alpha_n \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$
Доказательство: $\lim x_n = a \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geq N:\ |x_n - a| < \epsilon \Rightarrow |(x_n-a)-0| < \epsilon \Rightarrow \lim \alpha_n = 0$
Свойства:

- α_n, β_n - б/м $\Rightarrow \alpha_n + \beta_n$ - б/м
  Доказательство:
  $\forall\epsilon > 0\ \exists N_1:\ \forall n \geq N_1\ |\alpha_n| < \epsilon$
  $\forall\epsilon > 0\ \exists N_2:\ \forall n \geq N_2\ |\beta_n| < \epsilon$
  $N = \max(N_1, N_2)\ \forall n \geq N$
  $|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \Rightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geq N\ |\alpha_n + \beta_n| < \epsilon \Leftrightarrow \lim(\alpha_n + \beta_n) = 0 \Rightarrow \alpha_n + \beta_n$ - б/м

- α_n - б/м; a_n - ограниченная $\Rightarrow a_n \cdot \alpha_n$ - б/м
  Доказательство:
  $\{a_n\}$ - ограниченная $\Leftrightarrow \exists M > 0 :\ |\alpha_n| < M\ \forall n \in N$
  Фиксируем $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N :\ \forall n \geq N\ |\alpha_n| < \dfrac{\epsilon}{M}$
  $|a_n \cdot \alpha_n| = |a_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \dfrac{\epsilon}{M} = \epsilon \Rightarrow \alpha_n \cdot a_n$ - б/м
- $\begin{cases} \alpha_n, \beta_n \text{ - б/м} \\ \text{p, q} \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow p \cdot \alpha_n + q \cdot \beta_n$ - б/м
- $\begin{cases} \alpha_n, \beta_n \text{ - б/м} \\ \beta_n \text{ - огр.} \end{cases} \Rightarrow \alpha_n \cdot \beta_n$ - б/м

Бесконечно большие последовательности:
Говорят, что $\lim x_n = +\infty$, если $\forall M\ \exists N :\ \forall n \geq N\ x_n > M$
Другими словами $\lim x_n = +\infty$, если вне любого луча вида $[M, +\infty)$ лежит лишь конечное число элементов последовательности

Говорят, что $\lim x_n = -\infty$, если $\forall M\ \exists N :\ \forall n \geq N\ x_n < M$
Другими словами $\lim x_n = -\infty$, если вне любого луча вида $(-\infty, M]$ лежит лишь конечное число элементов последовательности

Говорят, что $\lim x_n = \infty$, если $\forall M\ \exists N :\ \forall n \geq N\ |x_n| > M$
Другими словами $\lim x_n = \infty$, если вне любого луча вида $[-M, M]$ лежит лишь конечное число элементов последовательности

$\lim x_n = +\infty \Rightarrow \lim x_n = \infty$
$\lim x_n = -\infty \Rightarrow \lim x_n = \infty$

$\{x_n\}$ - б/б, если $\lim x_n = \infty$
Связь б/м и б/б:
$\forall n\ x_n \neq 0$, тогда x_n - б/б $\Leftrightarrow \dfrac{1}{x_n}$ - б/м
Доказательство:
x_n - б/б $\Leftrightarrow \forall M > 0 :\ \exists N :\ \forall n \geq N\ |x_n| < M (> 0) \Leftrightarrow \dfrac{1}{|x_n|} < \dfrac{1}{M}$
$\dfrac{1}{M} \in [0; +\infty] = \epsilon$

$\forall \epsilon\ \exists N\ \forall n \geq N:\ \dfrac{1}{x_n} < \epsilon \Rightarrow \dfrac{1}{x_n}$ - б/м

Аналоги теорем для бесконечных пределов:

- Предел единственный
- Стабилизация знака
- Предельный переход
- Теорема о двух гаишниках

13. **Арифметические действия в $\overline{\mathbb{R}}$. Примеры.**
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

14. **Неравенство Бернулли. Предел** $\lim a^n$:
Неравенство Бернулли:
$x > -1,\ n \in \mathbb{N}$
$(1+x)^n \geq 1 + nx$, причём true при $n = 1$ или $x = 0$
Доказательство (по ММИ):
База: при $n = 1$ очев true
Переход: пусть при n true, тогда $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2$
Очев $nx^2 > 0 \Rightarrow 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$

Предел $\lim a^n$: $q \in \mathbb{R}$

- $|q| > 1 \Rightarrow \lim q^n = \infty$
- $|q| < 1 \Rightarrow \lim q^n = 0$

Доказательство: $|q| > 1 \Rightarrow |q| = 1 + x,\ x > 0$
$|q^n| = (1+x)^n \geq 1 + nx > nx$
$\lim q^n = \infty$
$|q| < 1 \Leftrightarrow |\dfrac{1}{q}| > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{q^n}$ - б/б $\Leftrightarrow q^n$ - б/м
$a = 0$ - очев

15. **! Определение экспоненты и числа e.**
Вывод экспоненты довольно душный, почитайте полную версию у вас в конспекте

или попросите у однокрурсников. Вот краткая версия:
$x_n = (1 + \dfrac{a}{n})^n$ возрастает при $n > -a$, причём строго при $a \neq 0$ ($a \in \mathbb{R}$)
Доказательство:
$\dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \dfrac{(1+\dfrac{a}{n})^n}{(1+\dfrac{a}{n-1})^n - 1} = ... \geq \dfrac{n-1}{n-1+a} \cdot \dfrac{n-1+a}{n-1} \geq 1 \Rightarrow n > -a$ и
x_n возрастает

$x_n = (1 + \dfrac{a}{n})^n$ - орг. сверху
Доказательство: $y_n = (1 + \dfrac{-a}{n})^n$
$x_n \cdot y_n = (1 + \dfrac{a}{n})^n \cdot (1 + \dfrac{-a}{n})^n = (1 - \dfrac{a^2}{n^2})^n \leq 1$
$x_n \leq \dfrac{1}{y_n} \leq \dfrac{1}{y_{n-1}} \leq \dfrac{1}{y_{n-2}} \leq ... \leq \dfrac{1}{y_1}$ $(n > 0)$
$x_n \leq \dfrac{1}{y_n} \leq ... \leq \dfrac{1}{y_{[a]+1}}$ $(a > 0)$

Следствие:

1. $\{x_n\}$ - имеет предел
2. $z_n = (1 + \dfrac{1}{b})^n$ - убывает

Доказательство: x_n НСНМ возрастает, x_n - огр. сверху $\Rightarrow$ теорема о пределе последовательности $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$

Итак, имеем:
$x_n = \lim(1 + \dfrac{a}{n})^n = \exp(a)$
$\lim(1 + \dfrac{1}{n})^n = e = \exp(1)$

16. **Свойства экспоненты.**

1. $\exp(1) = e$
   $\exp(0) = 1$
2. $a \leq b \Rightarrow \exp(a) \leq \exp(b)$
   $(1 + \dfrac{a}{n})^n \leq (1 + \dfrac{b}{n})^n$

Устремляем в $+\infty$
$\exp(a) \le \exp(b)$

3. $\exp(a) \ge 1 + a$
   $(1 + \frac{a}{n})^n \ge 1 + n \cdot \frac{a}{n} = 1 + a$
   Устремляем в $+\infty$
   $\exp(a) \ge 1 + a$

4. $(\exp(a))(\exp(-a)) \le 1$

5. $\exp(a) \le \frac{1}{1-a}$
   $a < 1$
   $\exp(a) \cdot \exp(-a) \le 1$
   $\exp(a) \le \frac{1}{\exp(-a)}$

6. $\forall n \ (1 + \frac{1}{n})^n < \epsilon$
   $\forall n \ (1 + \frac{1}{n})^{n+1} > \epsilon$
   const n, $k > n + 1$
   $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} < ... < (1 + \frac{1}{k})^k$
   Устремляем в $+\infty$
   $e < e < ... < e$

7. $2 < e < 3$

17. **Формула для экспоненты суммы (с леммой).**
$\{a_n\}: \ \lim a_n = a$, тогда $\lim(1 + \frac{a_n}{n})^n = \exp(a)$
Док-во: $x_n = (1 + \frac{a_n}{n})^n; \ y_n = (1 + \frac{a}{n})^n$
$|x_n - y_n| = |(1 + \frac{a_n}{n})^n - (1 + \frac{a}{n})^n| = |A^n - B^n| \begin{cases} \text{A} = (1 + \ \frac{a_n}{n})^n > 0, \ \exists N_1 \ \forall n > N_1 \\ \text{B} = (1 + \ \frac{a}{n})^n > 0, \ \exists N_2 \ \forall n > N_2 \end{cases}$
$\bigcap \begin{cases} \text{A} < 1 + \ \frac{M}{n} \\ \text{B} < 1 + \ \frac{M}{n} \end{cases} \ \exists M > 0 \ |A^n - B^n| = |A - B| \cdot (\sum_{i=0}^n A^{n-i} \cdot B^{i-1}) < |A - B| \cdot$
$(\sum_{i=0}^n (1 + \frac{M}{n})^{n-i} \cdot (1 + \frac{M}{n})^{i-1} = |A - B| \cdot (\sum_{i=0}^n (1 + \frac{M}{n})^{n-1}) = |A - B| \cdot (1 + \frac{M}{n})^{n-1} \cdot n =$
$\frac{|a_n - a|}{n} \cdot (1 + \frac{M}{N})^{n-1} \cdot n = |a_n - a|(1 + \frac{M}{n})^n (1 + \frac{M}{n})^{-1}$

Устремим в бесконечность и получим: $0 \cdot \exp(M) \cdot 1 \Rightarrow |a_n - a|(1+\dfrac{M}{n})^n(1+\dfrac{M}{n})^{-1} \longrightarrow 0 \Rightarrow \{|A^n - B^n|\} \longrightarrow 0 \Rightarrow x_n - y_n$ - б/м $\Rightarrow \lim x_n = \lim y_n = a$

$(1+\dfrac{a}{n})^n \cdot (1+\dfrac{b}{n})^n = (1+\dfrac{b}{n}+\dfrac{a}{n}+\dfrac{ab}{n^2}) = (1+\dfrac{a+b+\frac{ab}{n}}{n})$
Устремляем в бесконечность
$\exp(a) \cdot \exp(b) = \exp(a+b)$

18. **Сравнение скорости возрастания последовательностей n^k, a^n, $n!$ и n^n.**
$n^k < a^n < n! < n^n$

1. $x_n = \dfrac{n^k}{a^n}$, $\forall n: \ x_n > 0$ (так как $n > 0, a > 1$)
   $\lim(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}) = \lim(\dfrac{(n+1)^k a^n}{a^{n+1} n^k}) = \lim(\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{(n+1)^k}{n^k}) = \begin{cases} \text{x}_n > 0 \\ \dfrac{1}{a} < 1 \end{cases} \Rightarrow \lim(\dfrac{n^k}{a^n}) = 0 \Rightarrow n^k < a^n$
2. $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $\forall n: \ x_n > 0$ (так как $n > 0, a > 1$)
   $\lim(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}) = \lim(\dfrac{a^{n+1} n!}{a^n (n+1)!}) = \lim(a \cdot \dfrac{1}{n+1}) = \begin{cases} \text{x}_n > 0 \\ 0 < 1 \end{cases} \Rightarrow \lim(\dfrac{a^n}{n!}) = 0 \Rightarrow a^n < n!$
3. $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $\forall n: \ x_n > 0$ $(n > 0)$
   $\lim(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}) = \lim(\dfrac{(n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} n!}) = \lim(\dfrac{n!}{(n+1)^n}) = \lim(\dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{n})^n}) = \begin{cases} \text{x}_n > 0 \\ \dfrac{1}{e} < 1 \end{cases}$
   $\Rightarrow \lim(\dfrac{n!}{n^n}) = 0 \Rightarrow n! < n^n$

19. **Теорема Штольца (для неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$). Сумма m-ых степеней натуральных чисел.**

20. **Теорема Штольца (для неопределенности $\frac{0}{0}$).**

21. **Подпоследовательности (определение и простейшие свойства). Теорема о стягивающихся отрезках.**

22. **! Теорема Больцано–Вейерштрасса (в том числе и случай неограниченной последовательности).**

23. **! Фундаментальные последовательности. Свойства. Критерий Коши.**

24. **Верхний и нижний пределы. Частичные пределы. Связь между ними.**

25. **Характеристика верхних и нижних пределов с помощью N и ϵ. Сохранение неравенств для верхних и нижних пределов.**

26. **! Сходимость рядов. Необходимое условие сходимости рядов. Примеры.**

27. **Простейшие свойства сходящихся рядов.**

28. **Окрестности и проколотые окрестности. Предельные точки множества.**

29. **! Определения предела функций в точке. Простейшие свойства.**

30. **! Равносильность определения предела по Коши и по Гейне.**

31. **Свойства функций, имеющих предел.**

32. **Арифметические действия с пределами.**

33. **! Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах.**

34. **! Критерий Коши для предела функций.**

35. **Левый и правый пределы. Предел монотонной функции.**