第 6 章 数学和逻辑

6.1 组合数学基础

1、排列组合的基础知识

（1）两个基础问题

问题一：从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 名去参加某天一项活动，有多少种不同的选法？写出这些选法？

解析：

甲、乙；甲、丙；乙、丙

3 种

问题二：从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 名去参加某天的一项活动，其中 1 名同学参加上午的活动，1 名同学参加下午的活动，有多少种不同的选法，写出这些选法？

解析：

选甲乙去：甲、乙；乙、甲；

选甲丙去：甲、丙；丙、甲；

选乙丙去：乙、丙；丙 、乙；

6 种

（2）排列组合的定义

组合的定义：<u>从 n 个不同元素中取出 m（m≤n）个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合</u>；

排列的定义：<u>从 n 个不同元素中取出 m （m≤n） 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列</u>；

注意掌握它们的区别：<u>排列与元素的顺序有关，而组合则与元素的顺序无关</u>。

（3）请判断如下问题是组合问题还是排列问题？

(a)设集合 A={*a*, *b*, *c*, *d*, *e*}，则集合 A 的含有 3 个元素的子集有多少个?<u>组合问题</u>

(b)某铁路线上有 5 个车站，则这条铁路线上共需准备多少种车票？<u>排列问题</u>

(c)10 名同学分成人数相同的数学和英语两个学习小组,共有多少种分法?<u>组合问题</u>

(d)10 人聚会，见面后每两人之间要握手相互问候,共需握手多少次?<u>组合问题</u>

(e)从 4 个风景点中选出 2 个游览,有多少种不同的方法?<u>组合问题</u>

(f)从 4 个风景点中选出 2 个,并确定这 2 个风景点的游览顺序,有多少种不同的方法?<u>排列</u>

（4）请尝试写出 a,b,c 这 3 个元素，选取 2 个元素的排列和组合的结果分别有哪些？

组合结果：<u>ab ， ac ， bc</u>

排列结果：<u>ab ， ac ， ad ， bc ， bd ， cd</u>

2、排列

从 n 个不同元素中取出 m（m≤n）个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号A_n^m表示（也可写为P_n^m）。

$A_n^m = n(n-1)(n-2)......(n-m+1)$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

问题 1：分别从 3 个不同的乒乓球中选择 2 个乒乓球依次放在 2 个不同的盒子里，每个盒子各 1 个，求有多少种不同的选择方法？

$A_3^2 = 6$

问题 2：分别从 6 个不同的乒乓球中选择 3 个乒乓球，依次放在 3 个不同的盒子里，每个盒子 1 个，请问有多少种放法？

$A_6^3 = 120$

3、组合

从 n 个不同元素中取出 m（m≤n）个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号C_n^m表示.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

例子：计算如下算式的运算结果

（a）C_7^4

（b）C_{10}^7

（c）已知$C_n^3 = A_n^2$，求 n 的值？

答案：（a）35　　（b）120　　（c）8

例子：甲、乙、丙、丁 4 支足球队举行单循环赛；

(1)各队要举办多少场比赛？列出所有各场比赛的双方；

答案：

$C_4^2 = 6$

甲乙、甲丙、甲丁、乙丙、乙丁、丙丁

(2)有多少种冠亚军的组合？列出所有冠亚军的可能情况；

答案：

$A_4^2 = 12$

甲乙、甲丙、甲丁、乙丙、乙丁、丙丁

乙甲、丙甲、丁甲、丙乙、丁乙、丁丙

例子：一位教练的足球队共有 17 名初级学员，他们中以前没有一人参加过比赛。按照足球比赛规则，比赛时一个足球队的上场队员是 11 人；

（1）这位教练从这 17 名学员中可以形成多少种学员上场方案？

答案：

C_{17}^{11} = 12376

（2）如果在选出 11 名上场队员时，还要确定其中的守门员，那么教练员有多少种方式做这件事情？

答案：

$C_{17}^{1} * C_{16}^{10}$ = 136136

$C_{17}^{10} * C_{7}^{1}$ = 136136

例子：(1)平面内有 10 个点，以其中每 2 个点为端点的线段共有多少条？

答案：

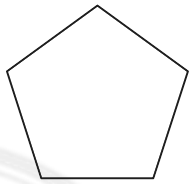
C_{10}^{2} = 45

(2)平面内有 10 个点，以其中每 2 个点为端点的有向线段共有多少条？

答案：

A_{10}^{2} = 90

例子：(1)凸五边形有多少条对角线？



答案：

C_{5}^{2} - 5= 10 - 5 = 5

(2)凸 n（n>3）边形有多少条对角线？

答案：

C_{n}^{2} - n = $(n^2-3n)/2$（n 点取 2 个点是所有的线 - n 条边，剩余的是对角线）

4、排列组合解题技巧

（1）知识点小结

A、分类计数原理：做一件事情，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 N=__$m_1+m_2+\cdots+m_n$_种不同的方法。

B、分步计数原理：做一件事情，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事有 N= __$m_1*m_2*\cdots m_n$___ 种不同的方法。

C、可重排列

在 m 个不同的元素中，每次取出 n 个元素，元素可以重复出现，按照一定的顺序那么第一、第二……第 n 位是的选取元素的方法都是 m 种；所以从 m 个不同的元素中，每次取出 n 个元素的可重复的排列数为__m^n__ 。

D、解排列组合问题

① 要弄清一件事是“分类”还是“分步”完成；

② 对于元素之间的关系，还要考虑是“有序的”还是“无序的，也就是会正确使用分类计数原理和分步计数原理、排列定义和组合定义；

（2）解题技巧

技巧 1：相邻问题——整体捆绑法 。

例：7 名学生站成一排，甲、乙必须站在一起，有多少不同排法？

解：两个元素排在一起的问题可用“捆绑”法解决，先将甲乙二人看作一个元素与其他五人进行排列，并考虑甲乙二人的顺序，所以共有 A(6/6) * A(2/2) =1440 种。

例：5 个男生 3 个女生排成一排，3 个女生要排在一起，有多少种不同的排法？

解：因为女生要排在一起，所以可以将 3 个女生看成是一个人，与 5 个男生作全排列，因此有 A(6/6) 种排法，其中女生内部也有 A(3/3) 种排法；

根据乘法原理，共有 A(3/3) * A(6/6) = 4320 种不同的排法。

技巧 2：不相邻问题——选空插入法

例：7 名学生站成一排，甲乙互不相邻，有多少不同排法？

解：甲、乙二人不相邻的排法一般应用“插空”法，所以甲、乙二人不相邻的排法总数计算应为： A(5/5)*A(2/6) =3600 种。

例：学校组织老师学生一起看电影，同一排电影票 12 张，8 个学生，4 个老师，要求老师在学生中间，且老师互不相邻，共有多少种不同的坐法？（写出计算公式，不需要计算）

解：先排学生共有 A(8/8) 种排法，然后把老师插入学生之间的空档，共有 7 个空档可插，选其中的 4 个空档，共有 A(4/7) 种选法。根据乘法原理，共有的不同坐法为 A(8/8) * A(4/7) = 33868800 。

技巧 3：复杂问题——总体排除法或排异法

例：正六边形的中心和顶点共 7 个点，以其中 3 个点为顶点的三角形共有________个。

解：从 7 个点中取 3 个点的取法有 C(3/7) 种，但其中正六边形的对角线所含的中心和顶点三点共线不能组成三角形，有 3 条，所以满足条件的三角形共有 C(3/7)-3=32 个。

例：从 43 人中任抽 5 人，正、副班长、团支部书记至少有一人在内的抽法有多少种？

解：43 人中任抽 5 人的方法 C(5/43) 种，正副班长，团支部书记都不在内的抽法有 C(5/40)种，所以正副班长，团支部书记至少有 1 人在内的抽法有 C(5/43)-C(5/40) 种。

技巧 4：特殊元素——优先考虑法

例：乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员，派 5 名队员参加比赛，3 名主力队员要安排在第一、三、五位置，其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置，那么不同的出场安排共有________种。

解：由于第一、三、五位置特殊，只能安排主力队员，有 A3/3 种排法，而其余 7 名队员选出 2 名安排在第二、四位置，有 A2/7 种排法，所以不同的出场安排共有 A3/3*A2/7=252 种。

技巧 5：多元问题——分类讨论法

例：某班新年联欢会原定的 5 个节目已排成节目单，开演前又增加了两个新节目；如果将这两个节目插入原节目单中，那么不同插法的种数为________。

解：增加的两个新节目，可分为相邻与不相邻两种情况

(1) 不相邻：共有 A2/6 种；

(2) 相邻：共有 A2/2*A1/6 种。故不同插法的种数为： 30+12=42 ；

该题的另外一个解法为：

(1) 7 个节目的总排法为 A(7/7) ；

(2) 但其中 5 个节目是预先排好的，排法为 A(5/5) ；

(3) 那么剩余的 2 个节目的排法就要去掉这个重复的 5 个节目的排法，结果为 A(7/7) / A(5/5) = 7 * 6 = 42 ；

技巧 6：混合问题——先选后排法

例：从黄瓜、白菜、油菜、扁豆 4 种蔬菜品种中选出 3 种，分别种在不同土质的三块土地上，其中黄瓜必须种植，不同的种植方法共有________种。

解：先选后排，分步实施。由题意，不同的选法有 C(2/3) 种，不同的排法有 A(3/3) 故不同的种植方法共有 C(2/3)*A(3/3)=18 。

技巧 7：相同元素分配——档板分隔法

例：把 10 本相同的书发给编号为 1，2，3 的三个学生阅览室，每个阅览室分得的书的本数不小于其编号数，试求不同分法的种数有________种。

解：先分别给 1、2、3 号阅览室分配 0、1、2 本书，然后把剩下的 7 本书分配给这 3 个阅览室，要求每个阅览室至少再分到 1 本。那么在 7 本书中有 6 个空，任意选取 2 个空，就可以把这 7 本书分成左、中、右 3 个部分，分别分给 3 个图书室，所以不同的分法共有 C2/6＝15 。

技巧 8：转化法

例： 高二年级 8 个班，组织一个 12 个人的年级学生分会，每班要求至少 1 人，名额分配方案有________种？

转化法：对于某些较复杂的或较抽象的排列组合问题，可以利用转化思想，将其化归为简单的、具体的问题来求解。

解：此题若直接去考虑的话，就会比较复杂。但如果我们将其转化为等价的其他问题，就会显得比较清楚，方法简单，结果容易理解。此题可以转化为：插板问题，结果为 C7/11=330 。

5、关于排列组合问题的小结

一、分清排列（先取再排）和组合（只取不排）

注：按指定的一种顺序排列的问题，实质是组合问题

二、基本的解题方法

⑴ 特优法：优先处理特殊元素（位置）法；

⑵ 捆绑法：某些元素要求必须相邻时，可以先将这些元素看作一个元素，与其他元素排列后，再考虑相邻元素的内部排列。

⑶ 插空法：某些元素不相邻排列时，可以先排其他元素，再将这些不相邻元素插入空挡。

⑷ 对于含“至多”、“至少”的问题，宜用排除法或分类解决；

涉及“多面手”的问题，一般分类解决。

(5) 不同元素的均匀分组：将 mn 个不同元素均匀分成 n 组，有 $\frac{C_{mn}^{m}C_{(n-1)m}^{m}\cdots\cdots C_{m}^{m}}{A_{m}^{m}}$ 种分法；

⑹ 挡板法：相同元素分配问题

将 n 个相同元素分给 m 个不同单位，每个单位至少一个元素，有 C_{n-1}^{m-1} 种分法；

6.2 常用的原理小结

1、容斥原理

容斥原理是在计数时，必须确保没有重复，没有遗漏，使重叠部分不被重复计算。

基本思想是：

1、先不考虑重叠的情况，把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来；

2、然后再把计数时重复计算的数目排斥出去，使得计算的结果既无遗漏又无重复。

如果被计数的事物有 A、B、C 三类，那么，A 类和 B 类和 C 类元素个数总和= A 类元素个数+ B 类元素个数+C 类元素个数—既是 A 类又是 B 类的元素个数—既是 A 类又是 C 类的元素个数—既是 B 类又是 C 类的元素个数+既是 A 类又是 B 类而且是 C 类的元素个数。

($A\cup B\cup C = A+B+C - A\cap B - B\cap C - C\cap A + A\cap B\cap C$)。

例如：一次期末考试，某班有 15 人数学得满分，有 12 人语文得满分，并且有 4 人语、数都是满分，那么这个班至少有一门得满分的同学有多少人？

答案：23。

解析：被计数的事物有语、数得满分两类，“数学得满分”称为“A 类元素”，“语文得满分”称为“B 类元素”，“语、数都是满分”称为“既是 A 类又是 B 类的元素”，“至少有一门得满分的同学”称为“A 类和 B 类元素个数”的总和。为 15+12-4=23。

【NOIP2018 普及组】13. 10000 以内，与 10000 互质的正整数有（ ）个。

A. 2000 B. 4000 C. 6000 D.8000

答案：B

互质的意思，与 10000 没有公约数，即不能被 10000 的质因子整除。

10000 分解质因子：10000 =2*2*2*2*5*5*5*5

10000 以内被 2 整除的数有 5000 个

10000 以内被 5 整除的数有 2000 个

两者存在重复计算的数，即被 10 整除的数，有 1000 个。

被 2 或 5 整除的数有：5000 +2000 － 1000 =6000

互质的数有：10000 － 6000 ＝ 4000 个

2、鸽巢原理/抽屉原理

桌上有十个苹果，要把这十个苹果放到九个抽屉里，无论怎样放，我们会发现至少会有一个抽屉里面放不少于两个苹果。这一现象就是我们所说的“抽屉原理”。

抽屉原理的一般含义为：“如果每个抽屉代表一个集合，每一个苹果就可以代表一个元素，假如有 n+1 个元素放到 n 个集合中去，其中必定有一个集合里至少有两个元素。” 抽屉原理有时也被称为鸽巢原理。它是组合数学中一个重要的原理。

抽屉原理的另一个表达：如果有 n 个集合和 kn+1 个元素，将元素放入集合中之后，至少有 1 个集合中有 k+1 个元素。

运用抽屉原理的核心是分析清楚问题中，哪个是物件，哪个是抽屉。

例子：属相是有 12 个，那么任意 37 个人中，一个属相至少不少于多少个人。

答案：4 人。

分析：这时将属相看成 12 个抽屉，则一个抽屉中有 37/12，即 3 余 1，余数不考虑，而向上考虑取整数，所以这里是 3+1=4 个人，但这里需要注意的是，前面的余数 1 和这里加上的 1 是不一样的。（思考 38 个人的情况）

【NOIP2019 普及组】12. 一副纸牌除掉大小王有 52 张牌，四种花色，每种花色 13 张。假设从这 52 张牌中随机抽取 13 张纸牌，则至少（　　　）张牌的花色一致。

A. 4　B. 2　C. 3　D. 5

答案：A

解析：抽屉原理，最坏情况，13 张牌对应四种花色的牌数为 3、3、3、4。抽屉存储：黑桃黑桃黑桃，抽屉 2：红桃红桃红桃，抽屉 3：梅花梅花梅花，抽屉 4：方片方片方片 这时再抽一张，不管放在哪，都能满足要求。

6.3 逻辑

1. 今天是星期日，那么 100 天以后是星期几？

解析：

本题是周期性问题求解，每周有 7 天；

那么 100 天除去完整的 7 天周期以外，剩余填数 = 100 % 7 = 2（14 个完整周期剩余 2 天）；

因此 100 天以后是星期几，相当于 2 天之后是星期几，答案是星期二。

2、今天是星期日，那么 10^{100} 天以后是星期几？

解析：

我们并不急于求出 10^{100}，而是像 1,10,100,100,10000…这样，依次增加 0 的个数， 观察其规律。

0 的个数			
0	1 天以后的星期数	1÷7=0 余 1	-> 一
1	10 天以后的星期数	10÷7=1 余 3	-> 三
2	100 天以后的星期数	100÷7=14 余 2	-> 二
3	1000 天以后的星期数	1000÷7=142 余 6	-> 六
4	10000 天以后的星期数	10000÷7=1428 余 4	-> 四
5	100000 天以后的星期数	100000÷7=14285 余 5	-> 五
6	1000000 天以后的星期数	1000000÷7=142857 余 1	-> 一
7	10000000 天以后的星期数	10000000÷7=1428571 余 3	-> 三
8	100000000 天以后的星期数	100000000÷7=14285714 余 2	-> 二
9	1000000000 天以后的星期数	1000000000÷7=142857142 余 6	-> 六
10	10000000000 天以后的星期数	10000000000÷7=1428571428 余 4	-> 四
11	100000000000 天以后的星期数	100000000000÷7=14285714285 余 5	-> 五
12	1000000000000 天以后的星期数	1000000000000÷7=142857142857 余 1	->一

因此 10^{100} 以后的星期数，可以将天数中的 0 的个数（10^{100} 有 100 个 0）除以 6，通过所得余数来判断。

100 ÷ 6 = 16 余 4

因此，10^{100} 天以后是星期四。

3. 2017 年 10 月 1 日是星期日，1999 年 10 月 1 日是（ ）。

A. 星期三　　B. 星期日　　C. 星期五　　D. 星期二

解析：

闰年：一年 366 天，非闰年：一年 365 天。

判断标准：四年一闰，百年不闰，四百年再闰（n%4==0&&n%100!=0 ||n % 400 == 0）

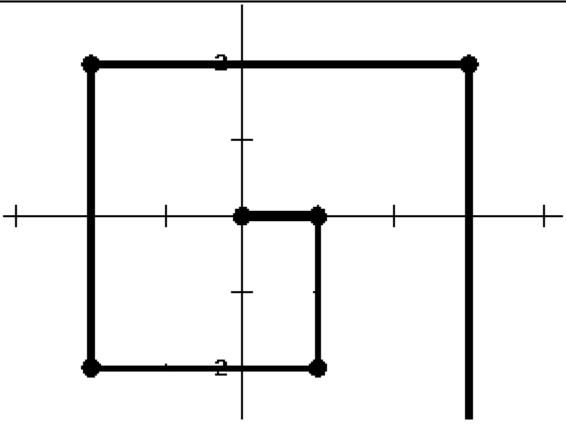
意思是：不是整百的年份只要被 4 整除的就是闰年，整百的年份必须得被 400 整除才是闰年

1999 年~2016 年中的闰年有：2000、2004、2008、2012、2016，5 个闰年。

也就是说 1999 年 10 月 1 日~2017 年 10 月 1 日总天数 = 18 年，总天数 = 18 * 365 + 5 = 6575 天。6575/7 结果为 939 周余 2 天。

说明：1999 年 10 月 1 日为周五。

4.一个人站在坐标（0, 0）处，面朝 x 轴正方向。第一轮，他向前走 1 单位距离，然后右转；第二轮，他向前走 2 单位距离，然后右转；第三轮，他向前走 3 单位距离，然后右转……他一直这么走下去。请问第 2017 轮后，他的坐标是：（__________，__________）。（请在答题纸上用逗号隔开两空答案）



答：1009,1008

解析：找规律，每一个循环有 4 个动作，上、下、左、右！

初始值为 0,0，不看坐标的值，看坐标的变化；

第 1 循环

	x	y
	+1	0
	0	-2
	-3	0
	0	+4
变化	-2	+2

第 2 循环

	x	Y
	+5	0
	0	-6
	-7	0
	0	+8
变化	-2	+2

可以看出，每一循环的 x 和 y 的变化幅度一定是相同的，由此可以直接计算出

第 1 循环结束，坐标为-2,2

第 2 循环结束，坐标为-4,4

2017 次走完时，经过了 2017/4=504 次循环，余数为 1，说明是 504 次循环+1 次。

504 次循环结束，坐标应当为：504*-2，504*2，也就是-1008,1008

第 504 次循环结束值到了 504*4=2016，下一个数是 2017，也就是下一步为+2017,0

坐标变化为 1009,1008。

10.周末小明和爸爸妈妈三个人一起想动手做三道菜。小明负责洗菜、爸爸负责 切菜、妈妈负责炒菜。假设做每道菜的顺序都是：先洗菜 10 分钟，然后切 菜 10 分钟，最后炒菜 10 分钟。那么做一道菜需要 30 分钟。注意：两道不同的菜的相同步骤不可以同时进行。例如第一道菜和第二道的菜不能同时洗，也不能同时切。那么做完三道菜的最短时间需要（ ）分钟。

A. 90　B. 60　C. 50　D. 40

答案：C

解析：

	10	20	30	40	50	60	70	80	90

洗	1	2	3						
切		1	2	3					
炒			1	2	3				

6.4 前缀、中缀、后缀表达式

前缀表达式、中缀表达式、后缀表达式都是四则运算的表达方式,用以四则运算表达式求值，即数学表达式的求值。**中缀表达式**就是常见的运算表达式，如(3+4)×5-6。

前缀表达式又称波兰式，前缀表达式的运算符位于操作数之前，比如：- × + 3 4 5 6。

前缀表达式和后缀表达式都符合计算机的逻辑，方便计算机计算数据。

1、前缀表达式

A、前缀表达式求值

从右至左扫描表达式，遇到数字时，将数字压入堆栈，遇到运算符时，弹出栈顶的两个数，用运算符对它们做相应的计算（栈顶元素 top 和 次顶元素），并将结果入栈；重复上述过程直到表达式最左端，最后运算得出的值即为表达式的结果。

例如前缀表达式：- × + 3 4 5 6 求值过程如下：

（1）从右至左扫描，将 6、5、4、3 压入堆栈

（2）遇到+运算符，因此弹出 3 和 4（3 为栈顶元素，4 为次顶元素，注意与后缀表达式做比较），计算出 3+4 的值，得 7，再将 7 入栈

（3）接下来是×运算符，因此弹出 7 和 5，计算出 7×5=35，将 35 入栈

（4）最后是-运算符，计算出 35-6 的值，即 29，由此得出最终结果

【NOIP2010 提高组】前缀表达式“+3*2+5 12”的值是（　　）

A.23　B.25　C.37　D.65

答案：C

B、将中缀表达式转换为前缀表达式

转换过程需要用到栈，具体过程为：从右向左读取表达式

1）如果遇到操作数，我们就直接将其输出。

2）如果遇到操作符，则我们将其放入到栈中，遇到右括号时我们也将其放入栈中。

3）如果遇到一个左括号，则将栈元素弹出，将弹出的操作符输出直到遇到右括号为止。注意，右括号只弹出并不输出。

4）如果遇到任何其他的操作符，如（“+”， “*”，“（”）等，从栈中弹出元素直到遇到发现**相同或更低**优先级的元素(或者栈为空)为止。弹出完这些元素后，才将遇到的操作符压入到栈中。有一点需要注意，只有在遇到"("的情况下我们才弹出")"，其他情况我们都不会弹出" ）"。

5）如果我们读到了输入的末尾，则将栈中所有元素依次弹出。

6）最后，将弹出的结果，再次逆序，得到最终的结果。

例如：1+((2+3)×4)-5 转换为前缀表达式，结果是：__- + 1 × + 2 3 4 5__

1+2*3+(4*5+6)*7 转换为前缀表达式，结果是：＋＋1＊2 3＊＋＊4 5 6 7

2、后缀表达式

后缀表达式又称逆波兰表达式,与前缀表达式相似,只是运算符位于操作数之后;比如：3 4 + 5 × 6 -

A、后缀表达式计算机求值

与前缀表达式类似，只是顺序是从左至右：

从左至右扫描表达式，遇到数字时，将数字压入堆栈，遇到运算符时，弹出栈顶的两个数，用运算符对它们做相应的计算（次顶元素 和 top 栈顶元素），并将结果入栈；重复上述过程直到表达式最右端，最后运算得出的值即为表达式的结果

例如后缀表达式“3 4 + 5 × 6 -”。

从左至右扫描，将 3 和 4 压入堆栈；

遇到+运算符，因此弹出 4 和 3（4 为栈顶元素，3 为次顶元素，注意与前缀表达式做比较），计算出 3+4 的值，得 7，再将 7 入栈；

将 5 入栈；

接下来是×运算符，因此弹出 5 和 7，计算出 7×5=35，将 35 入栈；

将 6 入栈；

最后是-运算符，计算出 35-6 的值，即 29，由此得出最终结果。

B、将中缀表达式转换为后缀表达式

转换过程需要用到栈，具体过程如下，从左向右扫描表达式：

1）如果遇到操作数，我们就直接将其输出。

2）如果遇到操作符，则我们将其放入到栈中，遇到左括号时我们也将其放入栈中。

3）如果遇到一个右括号，则将栈元素弹出，将弹出的操作符输出直到遇到左括号为止。注意，左括号只弹出并不输出。

4）如果遇到任何其他的操作符，如（“+”， “*”，“（”）等，从栈中弹出元素直到遇到发现更低优先级的元素(或者栈为空)为止。弹出完这些元素后，才将遇到的操作符压入到栈中。有一点需要注意，只有在遇到"）"的情况下我们才弹出"（"，其他情况我们都不会弹出"（"。

5）如果我们读到了输入的末尾，则将栈中所有元素依次弹出。

例如，中缀表达式 1+((2+3)×4)-5 转换为后缀表达式的结果为：123+4×+5-

中缀表达式 a+b*c+(d*e+f)*g，其转换成后缀表达式则为 abc*+de*f+g*+

6.5 数学和逻辑课堂练习

【NOIP2019 普及组】7.把 8 个同样的球放在 5 个同样的袋子里,允许有的袋子空着不放,问共有多少种不同的分法?（　　）提示:如果个球都放在一个袋子里,无论是哪个袋子,都只算同一种分法。

A.22　B.24　C.18　D.20

答案：C

解析：数学计数问题，枚举法求解，8 个同样的球分 1 个袋子共 1 种方案，分 2 个袋子共 4 种方案，分 3 个袋子共 5 种方案，分 4 个袋子共 5 种方案，分 5 个袋子共 3 种方案，合计 18 种。

【NOIP2019 提高组】10.一次期末考试，某班有 15 人数学得满分，有 12 人语文得满分，并且有 4 人语、数都是满分，那么这个班至少有一门得满分的同学有多少人？（　）

A.23 B.21 C.20 D.22

答案：A

解析：容斥原理，总满分人数=数学满分+语文满分-语文数学满分=15+12-4=23。

【NOIP2018 普及组】6. 如果开始时计算机处于小写输入状态，现在有一只小老鼠反复按照 CapsLock、字母键 A、字母键 S、字母键 D、字母键 F 的顺序循环按键，即 CapsLock、A、S、D、F、CapsLock、a、s、d、f、……，屏幕上输出的第 81 个字符是字母（　）。

A.A　B. S　C. D　D. a

答案：A

解析：考察字符串相关知识。按键顺序为 ASDFasdfASDFasdf...，周期为 8，所以 81 % 8 = 1，答案是 A。

【NOIP2018 普及组】12.设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S，其中由 7 个元素组成的子集数为 T，则 T / S 的值为（　）。

A.5 / 32　B.15 / 128　C.1 / 8　D.21 / 128

答案：B

解析：

解法一：

T = C_{10}^{7} = C_{10}^{3} = 120

S = $C_{10}^{0} + C_{10}^{1} + C_{10}^{2} + \cdots + C_{10}^{10}$ = 1024

T / S = 120 / 1024 = 15 / 128

解法二：

考察排列与组合基础知识。10 个元素的集合的子集数有 2^10=1024 个，由 7 个元素组成的子集数有 C(10，7)= C(10，3)= 120 种，故答案是 120 / 1024 = 15 / 128。

注意：

n 个元素的子集数：集合的子集可以含集合中的任意元素，甚至可以是空集，所以集合中的每个元素都可以有选或不选的可能.每个元素都有两个选择.含有 n 种元素的集合中，子集是

2*2*……*2 即 2 的 n 次方个。

【NOIP2017 提高组】9.将 7 个名额分给 4 个不同的班级，允许有的班级没有名额，有(　　)种不同的分配方案。

A.60　　B.84　　C.96　　D.120

答案：D

解析：相当于 11 个名额给每个班，每个班不少于 1 个，有隔板法有C_{10}^{3}=120 种

【NOIP2017 普及组】9.甲、乙、丙三位同学选修课程，从 4 门课程中，甲选修 2 门，乙、丙各选修 3 门，则不同的选修方案共有（ ）种。

A. 36　　　B. 48　　　C. 96　　　D. 192

答案：C

解析：考察排列和组合基础知识。4 门课选修两门有 C（2/4）= 6 种，选修一门有 C（3/4）= 4 种，3 个同学的选课满足乘法原理，共有 6 * 4 * 4 = 96 种。

【NOIP2017 普及组】12. 表达式 a * (b + c) * d 的后缀形式是（ ）。

A. a b c d * + *　　　B. a b c + * d *

C. a * b c + * d　　　D. b + c * a * d

答案：B

解析：考察数据结构基础知识。后缀表达式的计算规则是每次遇到操作数，将操作数加入栈里，每次遇到运算符 op，就将栈顶的前两个操作数弹出来进行 num1 op num2 的运算，可知选项 a b c + * d * 运算后符合条件。

6.6 数学和逻辑练习题

1. 要从 8 名男医生和 7 名女医生中选 5 人组成一个医疗队，如果其中至少有 2 名男医生和至少有 2 名女医生，则不同的选法种数为（　　）

$A.(C_8^3+C_7^2)(C_7^3+C_8^2)$　　$B.(C_8^3+C_7^2)+(C_7^3+C_8^2)$

$C.C_8^3C_7^2+C_7^3C_8^2$　　$D.C_8^3C_7^2C_{11}^1$

2. 从 7 人中选出 3 人分别担任学习委员、宣传委员、体育委员，则甲、乙两人不都入选的不同选法种数共有（　　）

$A.C_5^2A_3^3$　　$B.2C_5^3A_3^3$　　$C.A_5^3$　　$D.2C_5^2A_3^3+A_5^3$

3. 三名教师教六个班的课，每人教两个班，分配方案共有（　　）

A. 18 种　　　B. 24 种　　　C. 45 种　　　D. 90 种

4. 甲、乙、丙三位同学选修课程，从 4 门课程中，甲选修 2 门，乙、丙各选修 3 门，则不同的选修方案共有（ ）种。

A. 36　　B. 48　　C. 96　　D. 192

5. 对于给定的序列{ak}，我们把 (i, j) 称为逆序对当且仅当 i < j 且 ai > aj。那么序列 1, 7, 2, 3, 5, 4 的逆序对数为（ ）个。

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

6. 一家四口人，至少两个人生日属于同一月份的概率是（ ）（假定每个人生日属于每个月份的概率相同且不同人之间相互独立）。

A. 1/12　　B. 1/144　　C. 41/96　　D. 3/4

7. 如果 256 种颜色用二进制编码来表示，至少需要（　）位。

A. 6　B. 7　C. 8　D. 9

8. 有 7 个一模一样的苹果，放到 3 个一样的盘子中，一共有（　）种放法。

A. 7　B. 8　C. 21　D. 37

9、按下列条件，从 12 人中选出 5 人，有多少种不同选法？

（1）甲、乙、丙三人必须当选；

（2）甲、乙、丙三人不能当选；

（3）甲必须当选，乙、丙不能当选；

（4）甲、乙、丙三人只有一人当选；

（5）甲、乙、丙三人至多 2 人当选；

（6）甲、乙、丙三人至少 1 人当选；

10、在 100 件产品中有 98 件合格品，2 件次品。产品检验时,从 100 件产品中任意抽出 3 件。

(1)一共有多少种不同的抽法?

(2)抽出的 3 件中恰好有 1 件是次品的抽法有多少种?

(3)抽出的 3 件中至少有 1 件是次品的抽法有多少种?

(4)抽出的 3 件中至多有 1 件是次品的抽法有多少种？

(5)抽出的 3 件都是合格品的抽法有多少种？

(6)抽出的 3 件中有 2 件不合格的抽法有多少种？

11、例、某医院有内科医生 12 名，外科医生 8 名，现要派 5 人参加支边医疗队:

（1）某内科医生甲与某外科医生乙必须参加，共有多少种不同选法？

（2）甲、乙均不能参加，有多少种选法？

（3）甲、乙两人至少有一人参加，有多少种选法？

（4）队中至少有一名内科医生和一名外科医生，有几种选法？

12、例：某兴趣小组有 4 名男生，5 名女生：

（1）从中选派 5 名学生参加一次活动，要求必须有 2 名男生，3 名女生，且女生甲必须在内，有______种选派方法；

（2）从中选派 5 名学生参加一次活动， 要求有女生但人数必须少于男生，有______种选派方法；

（3）分成三组，每组 3 人，有______种不同分法.

13、某城新建的一条道路上有 12 只路灯，为了节省用电而不影响正常的照明，可以熄灭其中三盏灯，但两端的灯不能熄灭，也不能熄灭相邻的两盏灯，可以熄灭的方法共有____种。

14、3 名医生和 6 名护士被分配到 3 所学校为学生体检,每校分配 1 名医生和 2 名护士,不同的分配方法共有多少种?

15、从 6 个学校中选出 30 名学生参加数学竞赛,每校至少有 1 人,这样有几种选法?

16、将 8 个学生干部的培训指标分配给 5 个不同的班级，每班至少分到 1 个名额，共有多少种不同的分配方法？

17、把 6 个学生分到一个工厂的三个车间实习，每个车间 2 人，若甲必须分到一车间，乙和丙不能分到二车间，则不同的分法有____________种 。

18、从 6 位同学中选出 4 位参加一个座谈会，要求张、王两人中至多有一个人参加，则有不同的选法种数为________________。

19、有 9 本不同的课外书，分给甲、乙、丙三名同学，求在下列条件下，各有多少种不同的分法？

(1)甲得 4 本，乙得 3 本，丙得 2 本；

(2)一人得 4 本，一人得 3 本，一人得 2 本；

(3)甲、乙、丙各得 3 本.

20、1 名老师和 4 名获奖学生排成一排照相留念，若老师不排在两端，则共有不同的排法多少种。

21. 从一个 4×4 的棋盘（不可旋转）中选取不在同一行也不在同一列上的两个方格，共有________种方法。

22.重新排列 1234 使得每一个数字都不在原来的位置上，一共有______种排法。

23.把 M 个同样的球放到 N 个同样的袋子里，允许有的袋子空着不放，问共有多少种不同的放置方法?(用 K 表示)。

例如，M=7，N=3 时，K=8；在这里认为和是同一种放置方法。

问：M=8，N=5 时，K=___________。

24.7 个同学围坐一圈，要选 2 个不相邻的作为代表，有_________种不同的选法。

参考答案：

1、答案：C

2、答案：D

3、答案：D

解析：因为三名教师教六个班的课，每人教两个班，将老师平均分为 3 组，然后排列即可。

因此为 $C_6^2C_4^2C_2^2=90$。

4、解答：C(2/4) * C(3/4) * C(3/4) = 96，选 C。

5、解答：B，找出每个数后面比它大的数的个数。

6、解答：C

四个人都不在同一个月的概率为：$\frac{A_{12}^4}{12^4}$，或者计算方法为：$\frac{C_{12}^1*C_{12}^2*C_{12}^3*C_{12}^4}{12*12*12*12}$

四个人中至少有 2 个人在同一个月的概率为：1 - 55/96 = 41/96

7、答：C

解析：2^8 = 256

8、答：B

解析：一样的苹果，一样的盘子，也就是放法不能重复，罗列结果如下：007　016　025　034　115 124 133　233，共 8 种

9、解析：

（1）$C_3^3C_9^2=36$　（2）$C_3^0C_9^5=126$　（3）$C_1^1C_9^4=126$

（4）$C_3^1C_9^4=378$

(5)方法一：$C_3^2C_9^3+C_3^1C_9^4+C_3^0C_9^5=756$

方法二：$C_{12}^5-C_3^3C_9^2=756$

(6)方法一：$C_3^3C_9^2+C_3^2C_9^3+C_3^1C_9^4=666$

方法二：$C_{12}^5-C_3^0C_9^5=666$

10、解析：

(1)100 取 3 =　C3/100=161700

(2)恰好有 1 个次品 $C_2^1*C_{98}^2$ =9506

(3)至少有 1 件次品 $C_{100}^3-C_{98}^3$=9604

(4)至多有 1 件次品：0 个次品 + 1 个次品 = C_{98}^{3} + $C_{2}^{1}*C_{98}^{2}$ = 161602

(5)都合格 C_{98}^{3}=152096

(6)2 件不合格 C_{2}^{2} $*C_{98}^{1}$ = 98

11、解析：(1）只需从其他 18 人中选 3 人即可，共有 C^{3}_{18}=816（种).

（2）只需从其他 18 人中选 5 人即可，共有 C^{5}_{18}=8568（种).

（3）分两类：甲、乙中有一人参加，甲、乙都参加，共有 $C^{1}_{2}*C^{4}_{18}+C^{3}_{18}$=6936（种).

（4）由总数中减去五名都是内科医生和五名都是外科医生的选法种数，得 $C^{5}_{20}-(C^{5}_{8}+C^{5}_{12})$=14656（种）。

罗列法：$C^{1}_{12}*C^{4}_{8}+C^{2}_{12}*C^{3}_{8}+C^{3}_{12}*C^{2}_{8}+C^{4}_{12}*C^{1}_{8}$=14656

12、解析

（1）解析：C2/4 * C2/4 = 36

（2）解析：1 女、4 男，2 女、3 男，C1/5*C4/4 + C2/5*C3/4 = 45

（3）解析：C（3/9）*C（3/6）*C（3/3）/A(3,3)=280

13、解析：根据题意，先将亮的 9 盏灯排成一排，分析可得有 8 个符合条件的空位，用插空法，再将插入熄灭的 3 盏灯插入 8 个空位，用组合公式分析可得答案解：本题使用插空法，先将亮的 9 盏灯排成一排，由题意，两端的灯不能熄灭，则有 8 个符合条件的空位，进而在 8 个空位中，任取 3 个插入熄灭的 3 盏灯，有 C(3/8)种方法

14、$C_{6}^{2}C_{4}^{2}\cdot A_{3}^{3}=540$

解析：C2/6 * C2/4 是确定的护士的排列结果，此时只是分组没有排列，因此再乘医生的排列 A(3/3)

15、分析:问题相当于把 30 个相同的球放入 6 个不同的盒子（盒子不能为空）有几种放法？这类问可用“隔板法”处理，C5/29 = 4095。

16、隔板法：C4/7 = 35

17、解析：二车间先选 C2/3（不能有乙和丙），然后一车间选 C1/3（已经有甲），剩余三车间不用选，结果为 C2/3 * C1/3 = 9

18、解析：C4/6 - C2/4 = 9

19、答案：

解析：

解析：(1)甲得 4 本，乙得 3 本，丙得 2 本这件事分三步完成：

第一步：从 9 本不同的书中，任取 4 本分给甲，有 C_9^4 种方法：

第二步：从余下的 5 本书中，任取 3 本分给乙，有 C_5^3 种方法：

第三步：把剩下的 2 本书给丙，有 C_2^2 种方法.

根据分步乘法计数原理，共有不同的分法

$C_9^4 \bullet C_5^3 \bullet C_2^2 = C_9^4 \bullet C_5^2$ ＝1 260(种).

所以甲得 4 本，乙得 3 本，丙得 2 本的分法共有 1 260 种.

(2)一人得 4 本，一人得 3 本，一人得 2 本这件事，分两步完成：

第一步：按 4 本、3 本、2 本分成三组，有 $C_9^4C_5^3C_2^2$ 种方法.

第二步：将分成的三组书分给甲、乙、丙三个人，有 C_3^3 种方法.

根据分步乘法计数原理，共有不同的分法

$C_9^4C_5^3C_2^2CA_3^3$ ＝7560(种).

所以一人得 4 本，一人得 3 本，一人得 2 本的分法共有 7 560 种.

(3)用与(1)相同的方法求解，得 $C_9^3 \bullet C_6^3 \bullet C_3^3$ ＝1 680(种).

所以甲、乙、丙各得 3 本的分法共有 1 680 种.

20、解：先考虑特殊元素(老师)的排法，因老师不排在两端，故可在中间三个位置上任选一个位置，有 C1/3 种，而其余学生的排法有 A4/4 种，所以共有 C1/3 * A4/4=72 种不同的排法。

21、答：72

解析：$c_{16}^1 * c_9^1 / 2$

22、答：9 种

23、答：18

0000x->1 种

000xx->4 种

00xxx->7 种

0xxxx->4 种（1115 1124 1133 1223）

xxxxx->2 种（11114　11123）

24、解析：C2/7 － C1/7 = 14