Ε.Μ.Π., Σχολή Η.Μ.& Μ.Υ.

Ημερ/νια: 05-04-2021

Συστήματα Αναμονής (Queuing Systems) - Ακαδ.Ετος 2020-2021

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. Κατανομή Poisson
2. Εκθετική Κατανομή
3. Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson

Παραδοτέα: 12-04-2021

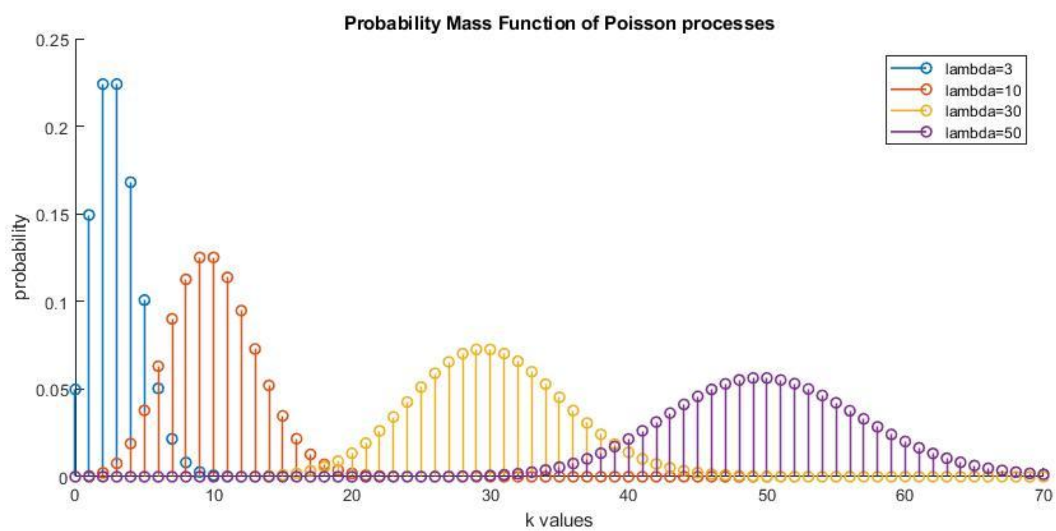
Του προπτυχιακού φοιτητή:

Νικήτας Τσίννας, ΑΜ : 03118187

Κατανομή Poisson

A) Συνάρτηση μάζας πιθανότητας (Probability Mass Function) της κατανομής Poisson:

Το διάγραμμα που προέκυψε από τον έτοιμο κώδικα:



Παρατηρούμε το σημαντικό χαρακτηριστικό της διακριτής κατανομής poisson πως η παράμετρος ‘λ’ καθορίζει την θέση του μεγίστου της συνάρτησης μάζας πιθανότητας (PMF). Για παράδειγμα, για λ=30, παρατηρούμε πως η κίτρινη κατανομή μάζας στο διάγραμμα παρουσιάζει μέγιστο στην θέση k=30.

Επίσης παρατηρούμε πως όσο μεγαλώνει η τιμή του ‘λ’ τόσο μεγαλώνει το πλάτος της PMF στον οριζόντιο άξονα, ενώ ταυτόχρονα μειώνεται η τιμή του μεγίστου της.

B) Μέση τιμή και διακύμανση κατανομής Poisson:

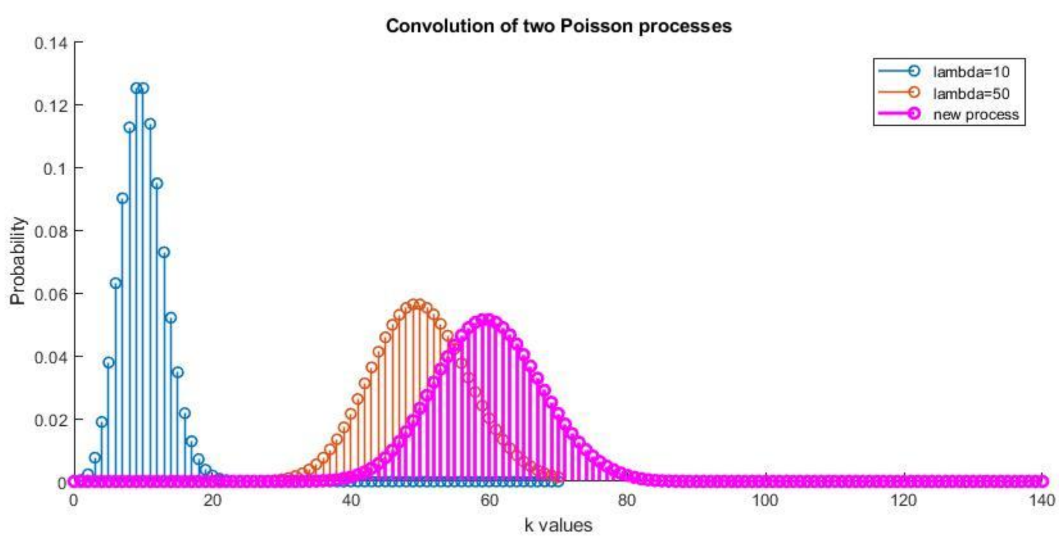
Μετά την εκτέλεση του έτοιμου κώδικα εκτυπώνεται:

```
    "mean value of Poisson with lambda 30 is"


mean_value =

   30.0000

    "Variance of Poisson with lambda 30 is"


variance =

   30.0000
```

Παρατηρούμε πως η μέση τιμή καθώς και η διακύμανση της κατανομής ισούται με την τιμή της παραμέτρου λ=30 που αποτελεί βασική ιδιότητα της κατανομής Poisson.

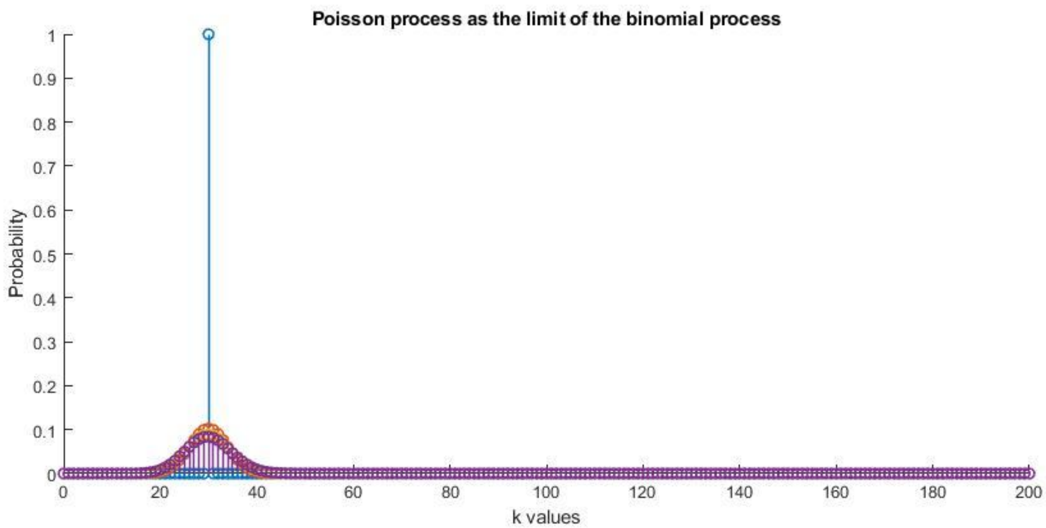
Γ) Υπέρθεση κατανομών Poisson:

Το διάγραμμα που προέκυψε από τον έτοιμο κώδικα:



Η νέα κατανομή που προέκυψε είναι και αυτή κατανομή Poisson με $\lambda_3=50+10=60$, δηλαδή με $\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2$. Η απαραίτητη προϋπόθεση για να ισχύει η ιδιότητα αυτή, δηλαδή ότι η συνέλιξη δύο κατανομών Poisson είναι και αυτή κατανομή Poisson με λ το άθροισμα των αντίστοιχων επιμέρους λ, είναι οι τυχαίες μεταβλητές των κατανομών να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Δ) Κατανομή Poisson ως το όριο μιας διωνυμικής κατανομής:



Αν διαιρέσουμε το χρονικό διάστημα t, που είναι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο εκτελείται η διαδικασία, σε n υποδιαστήματα τότε θα είναι $t=n\Delta t$. Εάν πραγματοποιήσουμε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli σε κάθε υποδιάστημα θα έχουμε είτε επιτυχία με πιθανότητα p είτε αποτυχία με πιθανότητα 1-p. Αν θεωρήσουμε πως η πιθανότητα $p = \lambda\Delta t$ και έπειτα εάν αντικαταστήσουμε το p τον τύπο της διωνυμικής κατανομής, τότε για να προκύψει κατανομή Poison θα πρέπει να πάρουμε το όριο για $\Delta t \to 0$ και $n \to \infty$.

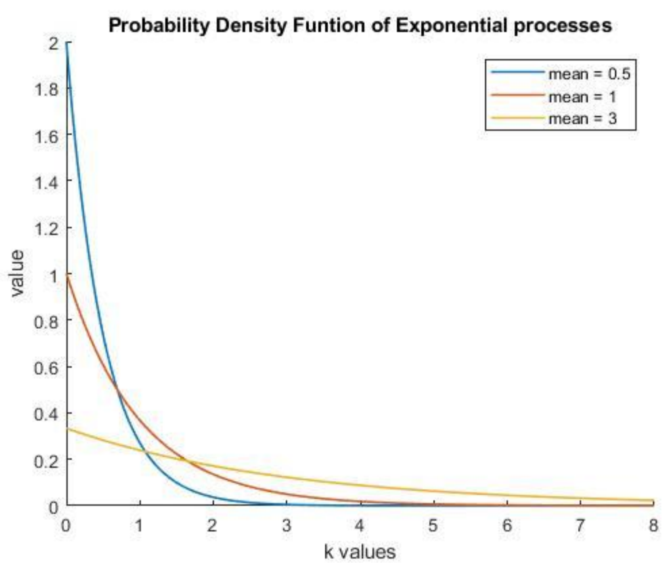
Εκθετική Κατανομή

A) Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF, Probability Density Function) της εκθετικής κατανομής:

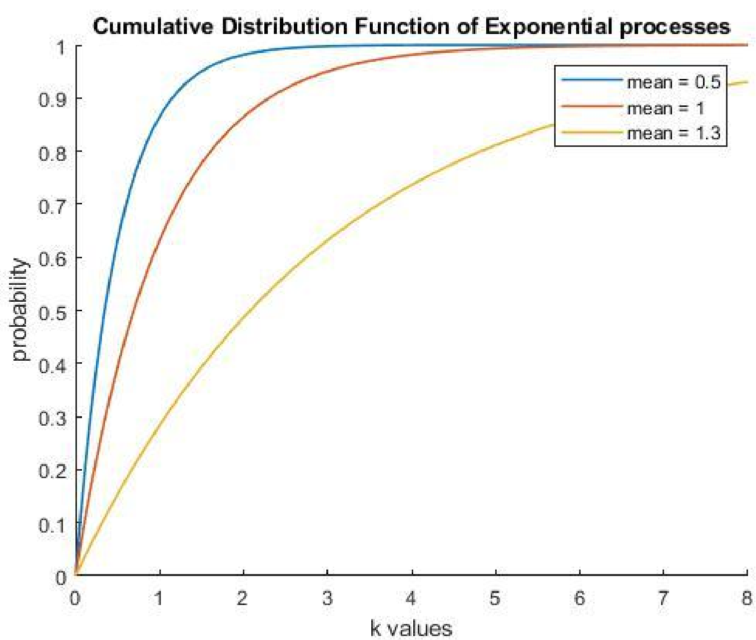
Παρουσιάζεται ο κώδικας με τα αντίστοιχο διάγραμμα:.

```
%TASK 1: PDF of exponential distribution of mean values [0.5, 1, 1.3]
k = 0:0.00001:8;
mean = [0.5 1 3];
for i=1:length(mean)
    exp_pdf(i,:) = exppdf(k, mean(i));
end

colors = "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i=1:length(mean)
    plot(k,exp_pdf(i,:),"linewidth",1.2)
end
hold off

title("Probability Density Funtion of Exponential processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("mean = 0.5","mean = 1","mean = 3");
```

B) Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής: Ακολουθεί ο κώδικας και το αντίστοιχο διάγραμμα.



```
%TASK 2: CDF of exponential distribution of mean values [0.5, 1, 1.3]

for i=1:length(mean)
    exp_cdf(i,:) = expcdf(k, mean(i));
end

colors = "rbkm";
figure(2);
hold on;
for i=1:length(mean)
    plot(k,exp_cdf(i,:),"linewidth",1.2)
end
hold off

title("Cumulative Distribution Function of Exponential processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("mean = 0.5","mean = 1","mean = 1.3");
```



Γ) Απώλεια μνήμης της εκθετικής κατανομής:

Είναι:

- $P(X > 30000) = 1 - P(X <= 30000) = 1 - Fx(30000)$

- $P(X > 50000 \mid X > 30000) = \frac{P(X>50000 \cap X>30000)}{P(X>30000)} = \frac{P(X>50000)}{P(X>30000)} = \frac{1-Fx(50000)}{1-Fx(30000)}$

Όπου Fx είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (CDF) της εκθετικής κατανομής.

Ακολουθεί ο αντίστοιχος κώδικας υπολογισμού και τα αποτελέσματα:

```
Fx = expcdf(k, 2.5); %calculating Exponential CDF of 1/lamda = 2.5

%The cumulative distribution function (CDF) of random variable X is defined as
%FX(x)=P(X<=x)
%so, P(X>30000) = 1 - P(X<=30000) = 1 - FX(30000)
propability_1 = 1 - Fx(30000);

%Pr(X>a + b)|X>a) = P(X>b) : exponential distribution feauture
propability_2 = (1-Fx(50000))/(1-Fx(20000));
```

propability_1	0.8869
propability_2	0.8869

Παρατηρούμε πως οι 2 τιμές πιθανοτήτων είναι ίσες. Αυτό συμβαίνει λόγω της ιδιότητας έλλειψης μνήμης της εκθετικής κατανομής, γνωστή ως *Markov Property*. Πιο συγκεκριμένα ισχύει πως

$$P(X > a + b \mid X > a) = P(X > b), \quad \{a, b\} \geq 0$$

Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson

A) Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson N(t):

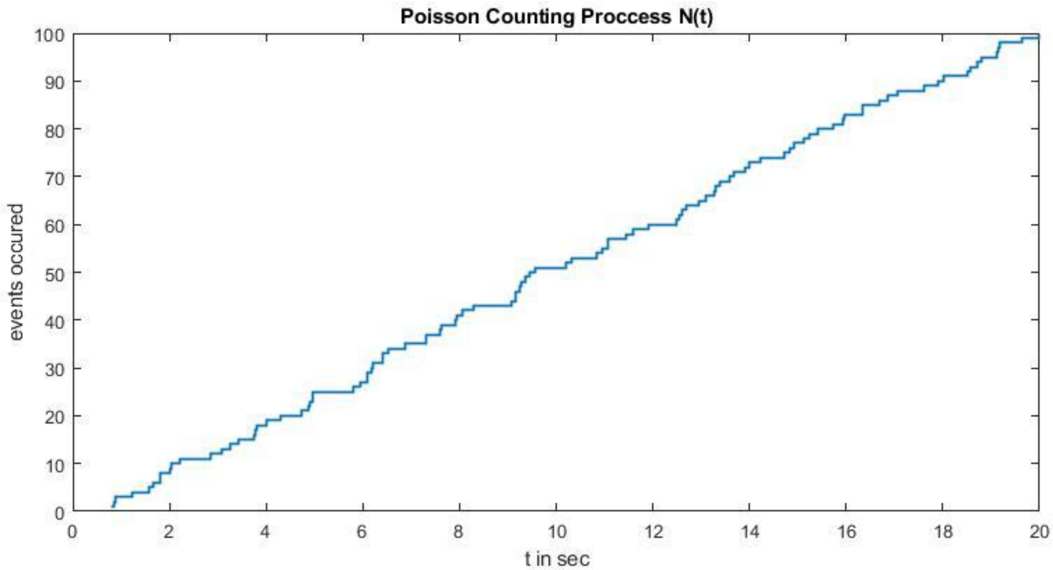
Γνωρίζουμε πως τα χρονικά διαστήματα ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Με την εντολή exprrnd(λ, 1:n) κατασκευάζουμε έναν πίνακα n θέσεων όπου στο κάθε κελί του πίνακα δίνεται μία τυχαία τιμή της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ. Με αυτόν τον τρόπο ορίζουμε τα τυχαία χρονικά διαστήματα ανάμεσα στα 100 γεγονότα.

Στην συνέχεια υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αυτού του πίνακα που θα αποτελεί το διάνυσμα του χρόνου της διαδικασίας καταμέτρησης poisson. Έπειτα με την εντολή stairs() απεικονίζουμε τα γεγονότα (1:100) συναρτήσει του συνολικού χρόνου της διαδικασίας καταμέτρησης. Έτσι προκύπτει το N(t) όπως φαίνεται παρακάτω μετά το printout του αντίστοιχου κώδικα:

```
%TASK 1: Poisson Counting Proccess N(t)

N = poisson_pr(100, 5); %function to calculate Nt of 100 events and lamda = 5

%plotting N(t) with stairs function
figure(1)
stairs(N, 1:length(N), "linewidth", 1.3);
title("Poisson Counting Proccess N(t)")
xlabel("t in sec")
ylabel("events occured")
```

```
%---------------------FUNCTIONS------------------------------------------%
function N = poisson_pr(n_events, lamda)
    events_timespam = exprnd(1/lamda,[1,n_events]);
for i=1:length(events_timespam)
    N(i)=sum(events_timespam(1:i));
end
end
```



Αξίζει να παρατηρήσουμε πως ο συνολικός χρόνος της διαδικασίας καταμέτρησης των 100 γεγονότων είναι περίπου 20 sec. Αυτό είναι λογικό εφόσον χρησιμοποιήθηκε η τιμή λ=5 γεγονότα/sec στην εκθετική κατανομή των χρονικών διαστημάτων.

B) Μέσος αριθμός γεγονότων:

Γνωρίζουμε πως η κατανομή που ακολουθεί ο αριθμός γεγονότων σε ένα χρονικό παράθυρο ΔT είναι η poisson.

Για να βρούμε τον μέσο αριθμό γεγονότων στην μονάδα του χρόνου διαιρούμε τον αριθμό γεγονότων με τον συνολικό χρόνο της διαδικασίας καταμέτρησης. Ακολουθεί ο κώδικας:

```
%TASK 2: Mean of events in time unit

events_number = [100 200 300 500 1000 10000];
average_events=[];

for i=1:length(events_number)
    N = poisson_pr(events_number(i),5); %calculation of N(t)
    average_events(i) = length(N)/N(end)
end
```

*χρησιμοποιείται η συνάρτηση poisson_pr όπως παραπάνω.

Και προκύπτουν τα αποτελέσματα:

```
average_events =

    4.6478    4.2223    4.8238    4.8334    5.0215    4.9789
```

Όπου ο πίνακας average_events είναι ο μέσος αριθμός γεγονότων στην μονάδα του χρόνου για 100, 200, 300, 500, 1000, 10000 γεγονότα αντίστοιχα.

Παρατηρούμε πως όσο περισσότερα γεγονότα υπάρχουν, τόσο περισσότερο συγκλίνει η μέση τιμή στην τιμή 5. Αυτό ερμηνεύεται μέσω της κατανομής Poisson από το πρώτο διάγραμμα της πρώτης άσκησης. Εφόσον έχει χρησιμοποιηθεί η τιμή λ=5 στην εκθετική κατανομή με την οποία δημιουργήσαμε τα διαδοχικά χρονικά διαστήματα, τότε η κατανομή που ακολουθεί η εμφάνιση των γεγονότων στην μονάδα του χρόνου θα είναι Poisson με παράμετρο πάλι λ=5.

Ο μέσος όρος εμφανίσεων γεγονότων στο διάστημα τ είναι Ετ[v]=λτ όπου φαίνεται ο αριθμός των γεγονότων να μην παίζει ρόλο ειδικά στην περίπτωση που αναφερόμαστε για πολλά δείγματα.

Αυτό μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε και υπολογίζοντας την μέση τιμή τυχαίων δειγμάτων από μία κατανομή poisson με παράμετρο λ=5 όπως φαίνεται παρακάτω:

```
events_number = [100 200 300 500 1000 10000];

for i=1:length(events_number)
    poisson_mean(i) = mean(poissrnd(5,[1,events_number(i)]))
end
```

```
poisson_mean =

    5.1400    4.7000    4.9033    5.1080    5.0680    5.0063
```

Όπου και πάλι βλέπουμε να συγκλίνει η μέση τιμή στην τιμή λ=5.