Projekt Zaliczeniowy - Numeryczne Modelowanie Układów Dynamicznych

Aleksander Mackiewicz-Kubiak, Kamila Wilczyńska

October 20, 2025

1 Zad. 1

Dane: $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1500 \\ 500 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.29 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$

Szukamy rozkładu populacji po 10 latach, czyli $X^{(10)}$
Wiemy, że $X^{(n)} = L \cdot X^{(n-1)} = L^2 \cdot X^{(n-2)} = ... = L^n \cdot X^{(0)}$, gdzie jako n przyjjmujemy ilosc iteracji popluacji (w naszym przypadku sa to lata)

Zatem: $X^{(10)} = L^{10} \cdot X^{(0)}$

Obliczamy $L^{10} : L^{10} \approx \begin{bmatrix} 0.16031514 & 0.69316265 & 0.56046762 & 0.49951015 \\ 0.03330068 & 0.16031514 & 0.13355345 & 0.12191494 \\ 0.01178511 & 0.04828598 & 0.0384002 & 0.03375168 \\ 0.00112506 & 0.00589256 & 0.00501183 & 0.00464851 \end{bmatrix}$

I wstawiajac do wzoru otrzymujemy ze $X^{(10)} \approx \begin{bmatrix} 2637.0969444 \\ 615.2185872 \\ 182.8332144 \\ 22.75216344 \end{bmatrix}$

By opisać zachowanie tej populacji w "długim" okresie musimy znaleźć wartość własna dominujaca dla naszej macierzy L. By być dominujaca musi ona spełniać 4 warunki:

-musi być jednoznacznie wyznaczona
-musi być pierwiastkiem jednokrotnym
-odpowiadajacy jej wektor własny zawiera tylko dodatnie współrzedne
-$|\lambda_i| < \lambda_1$, gdzie λ_i to inne wartości własne

Wartości własne dla tej macierzy L to: $\lambda_1 = 0.9023326, \lambda_2 = -0.59809547, \lambda_3 = -0.15211857 + 0.09540025i, \lambda_4 = -0.15211857 - 0.09540025i$

Wszystkie wartości własne sa jednoznacznie wyznaczona i jednokrotne. Trzeci i czwarty warunek spełnia jedynie λ_1 gdyż jej wektor własny wynosi:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0.97392431 \\ 0.93706113 \\ 0.17104615 - 0.35362545 \cdot i \\ 0.17104615 + 0.35362545 \cdot i \end{bmatrix}$$

Zatem $\lambda_1 = 0.9023326$ jest wartościa własna dominujaca. Gdy nasze $n- > \infty$ wtedy $\lambda_1^n - > 0$. A ponieważ ten układ dynamiczny można zapisać w postaci
$X^{(n)} = d_1\lambda_1^n V_1 + d_2\lambda_2^n V_2 + d_3\lambda_3^n V_3 + d_4\lambda_4^n V_4 =$
$= \lambda_1^k (d_1 V_1 + d_2 V_2 (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^n + d_3 V_3 (\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^n + d_4 V_4 (\frac{\lambda_4}{\lambda_1})^n)$
to nasza populacja bedzie malała w "długim" okresie.

2 Zad. 2

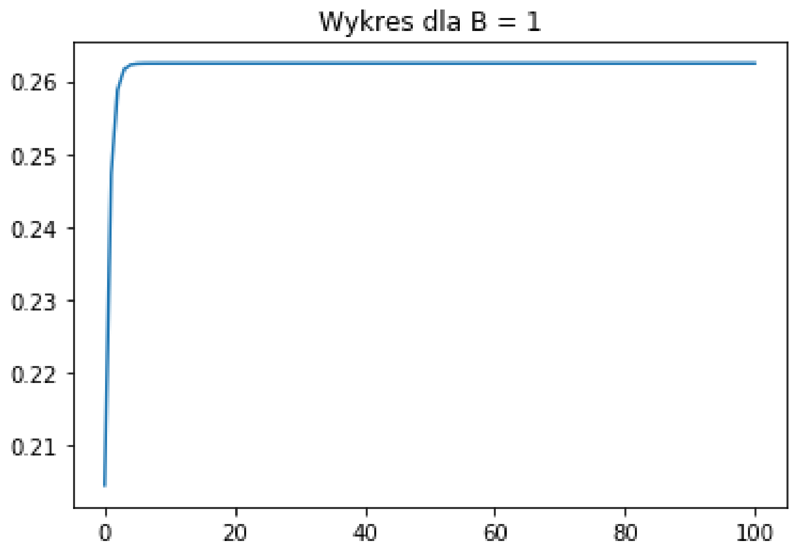
W tym zadaniu bedziemy używać modelu wzrostu Produktu Narodowego Brutto, który badany był w 1982 roku przez Daya. Jest on dany wzorem:

$$k_{t+1} = \sigma \frac{B k_t^{\beta} (m - k_t)^{\gamma}}{1 + \lambda} \tag{1}$$

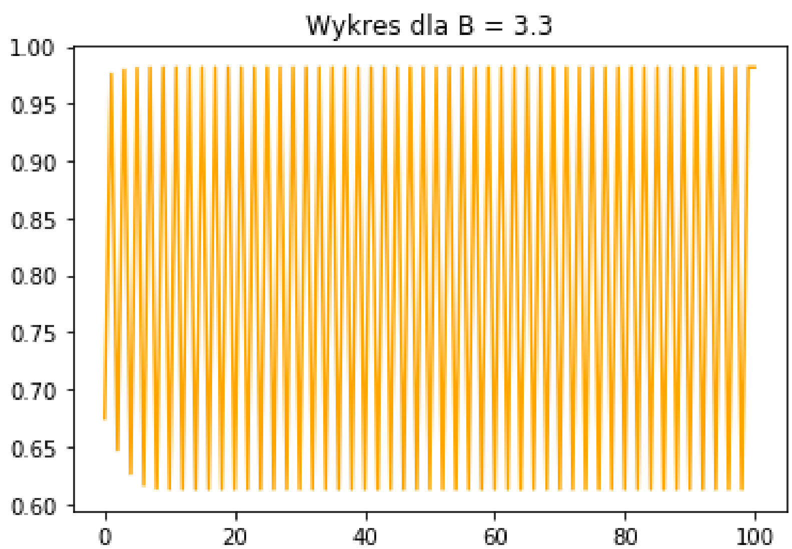
W naszym przykładzie przyjmujemy nastepujace wartości parametrów:

$$\sigma = 0.5 \quad \beta = 0.3 \quad \gamma = 0.2 \quad \lambda = 0.2 \quad m = 1 \tag{2}$$

Parametr k_t to stosunek ilości zaangażowanego kapitału do pracy, wobec czego jego wartości należa do przedziału $(0, 1)$. Przyjmijmy $k_0 = 0.1$.
Dla $B = 1$ wykres przyjmuje postać:



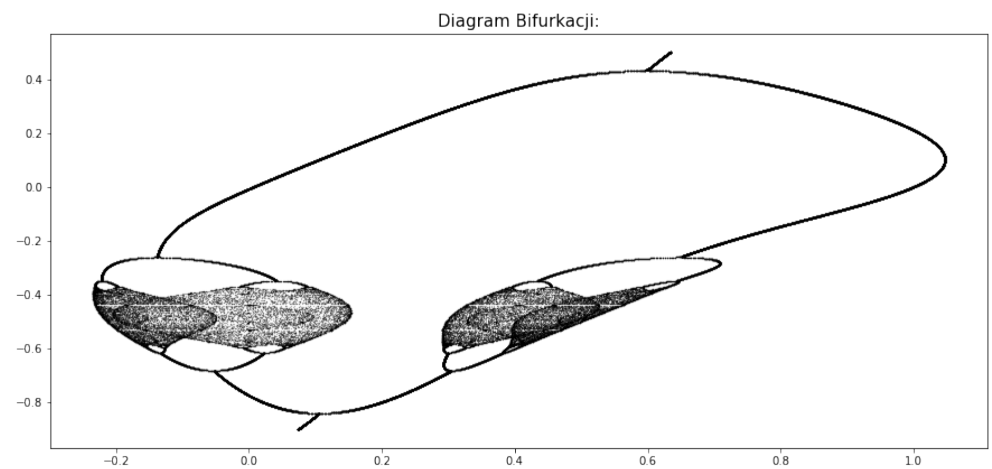
Natomiast dla $B = 3.3$ wykres wyglada tak:

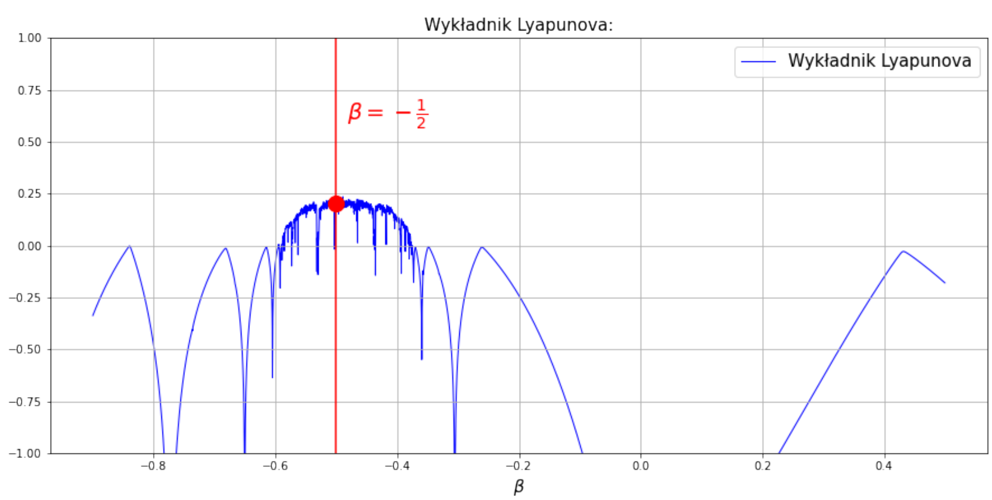


Patrzac na wykres możemy stwierdzić, że dla $B = 1$ istnieje stabilny punkt stały - wykres od pewnego miejsca zbiega do jednej wartości; natomiast dla $B = 3.3$ wykres nie zbiega nigdzie - można powiedzieć, że pojawia sie tu działanie chaotyczne.

3 Zad. 3

Najpierw pokażmy diagram bifurkacji oraz wizualizacje wykładnika Lapunova dla funkcji: $G_{x,\beta} = e^{-5x^2} + \beta$:





Wiemy, że układ jest chaotyczny jeżeli jego wykładnik Lapunova jest wiekszy od 0. Wiec z wykresu możemy sobie odczytać przykładowa wartość β, na przykład -$\frac{1}{2}$. Teraz podstawiajac ta wartośc do wzoru możemy obliczyć i wyświetlić fragment orbity od G_{200} do G_{220}:

n	Gn
200	0.405591
201	-0.060677
202	0.481760
203	-0.186659
204	0.340122
205	0.060786
206	0.481695
207	-0.186561
208	0.340277
209	0.060492
210	0.481870
211	-0.186825
212	0.339861
213	0.061283
214	0.481397
215	-0.186111
216	0.340981
217	0.059148
218	0.482660
219	-0.188016
220	0.337990

4 Zad. 4

Chcemy wygenerować trójkat Sierpińskiego przy pomocy gry w chaos. Jest to algorytm, który generuje kolejne punkty na podstawie wartości poprzednich, podstawiajac je do jednego ze wzorów, gdzie każdy z nich ma dane prawdopodobieństwo pojawienia sie. Najpierw ustalimy sobie punkty poczatkowe x_0, y_0 o wartościach $[0, 0]$.
Aby generować kolejne punkty trójkata, wykorzystamy wzory na kontrakcje:

$$[x_{n+1}; y_{n+1}] = \begin{cases} [\frac{x_n}{2}; \frac{y_n}{2}] \quad \text{albo} \\ [\frac{x_n+1}{2}; \frac{y_n}{2}] \quad \text{albo} \\ [\frac{2x_n+1}{4}; \frac{2y_n+\sqrt{3}}{4}] \end{cases} \tag{3}$$

gdzie za każdym razem bedzie losowany jeden z wzorów, a każdy może pojawić sie z tym samym prawdopodobieństwem. W przykładzie bedziemy generować nowe punkty 100000 razy, co zaskutkuje poniższym obrazem:

Obliczmy też wymiar fraktalny otrzymanego zbioru. Wiemy, że jest dany wzorem:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}} \tag{4}$$

gdzie N to liczba samopodobnych kopii (u nas wynosi 3, po "podzieleniu" trójkata powstaja 3 takie same) a s to ich wielkość (czyli stała Lipschitza, która u nas wynosi 1/2). Wobec tego, po podstawieniu:

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.5849625007211563 \tag{5}$$