ESTADÍSTICA
Fernando Sandoya, PhD.
Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

UNIDAD 2: PROBABILIDAD

Instructor: Fernando Sandoya, PhD.
Correo: f.sandoyas@.espol.edu.ec

Probabilidad

Introducción a la unidad:

- En esta unidad se aprende a analizar y hacer generalizaciones sobre una población a partir de muestras. Esto incluye la teoría de la probabilidad, la definición de variables aleatorias, la estimación de parámetros (como medias y proporciones) y se enfoca en técnicas como la distribución de muestreo, intervalos de confianza, y pruebas de significancia, proporcionando las herramientas necesarias para inferir propiedades de una población mayor basándose en datos observados en una muestra pequeña.

FCNM
Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Temáticas a cubrir

- **PARTE 1:** Probabilidad
- **PARTE 2:** Variables aleatorias y distribuciones. Principales distribuciones discretas. Principales distribuciones continuas
- **PARTE 3:** Distribuciones conjuntas

PARTE 1: Probabilidad

¿Qué es…?

¿Para qué sirve?

¿Dónde la aplico?

PROBABILIDAD

¿Qué es la probabilidad?

La probabilidad es una medida que cuantifica la posibilidad de que ocurra un evento cualquiera. Se utiliza para describir la incertidumbre asociada con ***fenómenos aleatorios*** y para inferir la probabilidad de eventos futuros basándose en datos experimentales u observacionales. Se expresa numéricamente entre 0 y 1, donde 0 indica la imposibilidad de que ocurra el evento y 1 representa la certeza absoluta de su ocurrencia.

¿Para qué sirve?

La probabilidad se utiliza para cuantificar la incertidumbre sobre la ocurrencia de eventos. Sirve para tomar decisiones informadas en situaciones de incertidumbre, predecir la frecuencia de eventos futuros basándose en datos históricos, y para evaluar riesgos y beneficios en diversos contextos como financieros, de salud, ingeniería, y más.

¿Dónde aplico la probabilidad?

la probabilidad es fundamental para modelar la incertidumbre y tomar decisiones en prácticamente todos los aspectos de la vida y la ciencia.

Qué es un experimento Determinístico:

Es un procedimiento en el que el resultado ***se conoce de antemano***.

Qué es un experimento aleatorio:

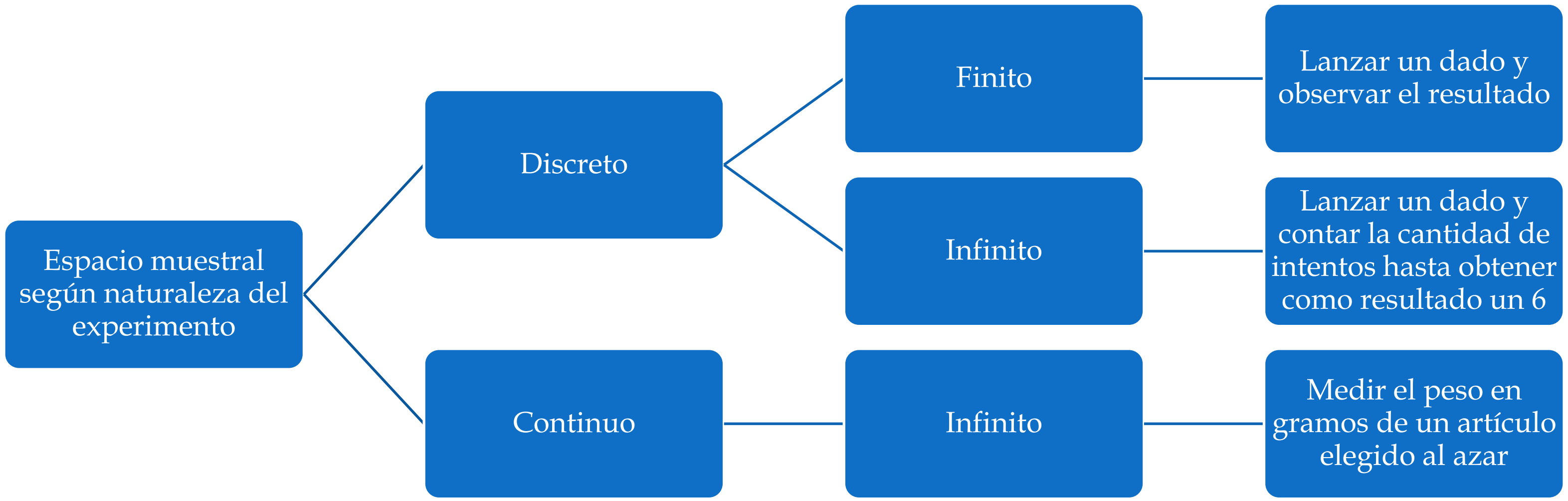
Es un procedimiento que se realiza con el propósito de obtener observaciones para algún estudio de interés, y en el que ***su resultado no se puede determinar de antemano*** (pero si el conjunto de posibles resultados)

Características de un experimento aleatorio

- Se conocen todos los resultados posibles antes de realizar el experimento, al conjunto de posibles resultados se le denomina ***espacio muestral***, y se representa con ***S*** o con Ω.
- No se puede predecir el resultado exacto de cada ensayo realizado (aleatoriedad)
- Debe poderse reproducir o repetir el experimento en condiciones similares.

Espacio muestral

Se denomina ***espacio muestral* S o Ω** al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Y de acuerdo a sus características puede clasificarse de la siguiente manera:



Evento

Se denomina ***evento o suceso***, representado con **A, B, etc.** A cualquier **subconjunto del espacio muestral**.

Ejemplo:
En un estudio de la presencia de un tipo específico de bacteria en muestras de agua. El objetivo sería identificar si el agua está contaminada por esta bacteria, lo cual es crucial para la salud pública y la seguridad del agua.

Espacio muestral ***S*=** {Presencia,Ausencia}
Eventos: ***A***={presencia}, ***B***={ausencia}

Ejemplo Espacio muestral discreto :
En un estudio de la presencia de varios tipos de bacterias (b1, b2, b3) en muestras de agua. El objetivo sería identificar si el agua está contaminada por alguna de estas bacterias, lo cual es crucial para la salud pública y la seguridad del agua.

Espacio muestral ***S*=** {ninguna, b1, b2, b3, b1b2, b1b3, b2b3, b1b2b3}
Eventos: ***A***={presencia de b1}={b1, b1b2, b1b3, b1b2b3}
Evento ***B***:{sólo la presencia de la bacteria b1}={b1}

Ejemplo Espacio muestral contínuo:
Consideremos un estudio del tiempo que toma el crecimiento de una colonia bacteriana hasta alcanzar un tamaño específico bajo condiciones controladas. Este tipo de experimento es crucial para entender la dinámica de crecimiento de las bacterias, lo cual tiene aplicaciones en biotecnología, medicina, y control de calidad en la industria alimentaria.

Espacio muestral ***S*=** $\{t/\ t>0\}$

Eventos: ***A: El tiempo de crecimiento de la colonia es menos de 12 horas.***

***A*=** $\{t/t<12\}$

B: El tiempo de crecimiento de la colonia es mas de 1 día.

***B*=** $\{t/t\geq 24\}$

Teoría de la probabilidad
Probabilidad de Eventos

La probabilidad es una función que se aplica sobre los ***eventos.***
Sea **A** un evento, entonces **P(A)** mide la probabilidad de que el evento **A** ocurra (o se realice)

- **P(A)=0** es la certeza de que no se realizará el evento
- **P(A)=1** es la certeza de que sí se realizará el evento
- **P(A)=0,50** indica igual probabilidad de que se realice o no se realice el evento

Asignación de valores de probabilidad a eventos

Empírica o frecuentista

- Es la proporción de veces que un evento tuvo el resultado esperado respecto al total de intentos realizados
- Ej: Si de 20 ensayos realizados, en 4 se obtuvieron los resultados esperados. Entonces la probabilidad de que en el siguiente ensayo se obtenga el resultado esperado es 4/20=0,20=20%

Mediante modelos matemáticos

- Para muchas situaciones de interés puede construirse modelos matemáticos con los cuales se puede determinar la probabilidad de eventos.

Asignación clásica o de Laplace

- El valor de la probabilidad de un evento es la relación entre la cantidad de resultados que se consideren favorables para el evento de interés, respecto al total de resultados posibles, es decir dividiendo la cardinalidad del evento para la cardinalidad del espacio muestral (cuando los eventos elementales son equiprobables)

PROBABILIDAD – CLÁSICA O DE LAPLACE

Definición

- Se denomina evento elemental al evento que contiene un solo elemento.

  Por ejemplo si le lanza el dado: S={1, 2, 3, 4, 5, 6}

  Eventos elementales son:
  - Sale el uno: {1}
  - Sale el cinco: {5}
- Se dice que los **eventos elementales** son **equiprobables** si tienen igual probabilidad de ocurrir
  - En el lanzamiento del dado (si el dado legal) los **eventos elementales son equiprobables**.
  - En el estado del tiempo del día de mañana S={llueve, no llueve} los **eventos elementales No son equiprobables**.

FCNM
Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

PROBABILIDAD – CLÁSICA O DE LAPLACE

Definición

- Se denomina evento elemental al evento que contiene un solo elemento

Sea E un experimento aleatorio con espacio muestral S (discreto y finito), de cardinalidad finita y cuyos **eventos elementales** son equiprobables (todos los **eventos unitarios** de S tienen las mismas posibilidades de ocurrir) y sea un evento $A \subseteq S$

La probabilidad del evento A se denota como **P(A)** y se define así:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ para\ A}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

PROBABILIDAD – CLÁSICA

Asignación clásica de probabilidades de eventos

<u>Ejemplo:</u>

1. Calcule la probabilidad que al lanzar una vez un dado se obtenga un número primo.
2. Calcular la probabilidad que al lanzar dos dados la suma sea 5
3. SI en un juego del lanzamiento de dos dados se debe apostar a un resultado de la suma, aqupe número apostaría.
4. Calcule la probabilidad que al lanzar una vez un dado y una moneda se obtenga un número impar y sello.

PROBABILIDAD – CLÁSICA

Asignación clásica de probabilidades de eventos

Ejemplo:

S={(1,c), (2,c), (3,c), (4,c), (5,c), (6,c), (1,s), (2,s), (3,s), (4,s), (5,s), (6,s)} (espacio muestral)

A={(1,s), (3,s), (5,s)} (Evento)

$P(A)=N(A)/N(S)=3/12=1/4=0{,}25=25\%$

PROBABILIDAD – CLÁSICA

Se lanzan dos dados y se observa la suma de los dos resultados.

1. Cual es la probabilidad de que la suma sea 6?
2. A que número le apostaria?

Ω={{1,1},{1,2},{1,3},{1,4},{1,5},{1,6}
{2,1},{2,2},{2,3},{2,4},{2,5,{2,6}
…… {6,1},{6,2},{6,3},{6,4},{6,5},{6,6}}

A={{1,5},{2,4},{3,3},{4,2},{5,1}}   P(A)=5/36= 13.89%

PROBABILIDAD – CONTEO

Métodos de conteo

La aplicación de la regla de Laplace requiere del cálculo de la cardinalidad del espacio muestral y de los eventos, pero estoa podrían ser conjuntos muy grandes, por tanto, necesitamos de herramientas que nos permitan calcular fácilmente el número de lemento de un conjunto muy grande, estas reglas son:

1. Regla o principio de multiplicación
2. Permutaciones
3. Combinaciones

PROBABILIDAD – CONTEO

Regla de multiplicación

La cantidad de elementos de un espacio muestral que se define por la ocurrencia de varios eventos será el resultado de multiplicar la cantidad de elementos de cada uno de los eventos de manera secuencial (es decir uno tras otro)

$$E_1=n_1$$
$$E_2=n_2$$
$$E_3=n_3$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$E_x=n_x$$
$$S=n_1*n_2*n_3\ldots*n_x$$

PROBABILIDAD – CONTEO

Permutación

- Es un arreglo de todo o una parte de un conjunto de objetos (el orden importa)
- Un conjunto de objetos se puede permutar de n! formas
- El número de permutaciones distintas de n objetos tomando r a la vez está dado por: $\mathbf{n P_r} = \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{r})!}$
- Si se quiere permutar n elementos de manera circular la cantidad de permutaciones posibles viene dada por (n-1)!
- El número de permutaciones distintas de n cosas de las que n_1 son de una clase , n_2 son de una segunda clase, … , n_k son de una k-ésima clase es

$$\frac{\mathbf{n}!}{\boldsymbol{n_1}!\,\boldsymbol{n_2}!\,\boldsymbol{n_3}!\dots\boldsymbol{n_k}!}$$

PROBABILIDAD – CONTEO

Ejemplo Permutación

- En UN PARALELO de 40 estudiantes se quiere elegir una directiva que tenga presidente, vicepresidente y tesorero(a)
- Cuantas directivas son posibles

- 40P3=40!/37!=40x39x38x37!/37!= 59280 directivas posibles.

A={a,a,a,b,b,b,b,c,c}
Permutaciones distintas= 9!/(3!x4!x2!)= 1260

PROBABILIDAD – CONTEO

Combinación

- Se seleccionan r objetos de n, sin importar el orden

- El número de combinaciones de n objetos distintos tomando r a la vez esta dado por

$$\mathbf{n}\boldsymbol{C}_{\mathbf{r}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{r})!\,\mathbf{r}!}$$

OBS: El número de combinaciones de ***n*** objetos tomados de una población de tamaño ***N*** es igual al número de **muestras** de tamaño ***n*** que se pueden obtener de esa población: $\binom{N}{n}$

PROBABILIDAD – CONTEO

Ejemplo Combinación

- En UN PARALELO de 40 estudiantes

En el paralelo de 40 estudiantes 25 son hombres y 15 son mujeres.
Cuantas comitivas son posibles en las que haya una mujer
Cuantas comitivas son posibles en las que haya al menos una mujer
Cuantas comitivas son posibles en las cuales no haya ninguna mujer

Cuantas directivas son posibles en las que haya una mujer
Cuantas directivas son posibles en las que haya al menos una mujer
Cuantas directivas son posibles en las cuales no haya ninguna mujer

Probabilidad de eventos simples

Definición:

Sean S: Espacio muestral, con $\boldsymbol{n}$ puntos muestrales

A: Evento cualquiera de $\boldsymbol{S}$ con $\boldsymbol{k}$ puntos muestrales

$E_1, E_2, \ldots E_\mathrm{k}$ eventos simples incluidos en A

Entonces:

$$P(A) = P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots E_\mathrm{k}) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots P(E_\mathrm{k})$$

Teoría de la probabilidad
Axiomas de Probabilidad de Eventos

Sea
S: espacio muestral
A: evento de S
P(A): probabilidad del evento E
$\Re$: Conjunto de los reales
P: una función que asocia a cada evento E de S un número real

$$
\begin{aligned}
P:\ & \text{Potencia}(S) \rightarrow \Re \\
& A \rightarrow P(A)
\end{aligned}
$$

Dominio de la función P=potencia(S), Rango de la función P=[0, 1]

Teoría de la probabilidad
Axiomas de Probabilidad de Eventos

Axiomas

- $P(A) \geq 0, \forall A$
- $P(S)=1$
- $A_1, A_2 \in S$, además $A_1 \cap A_2 = \varnothing \rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

EJERCICIOS:

1. Demostrar esta propiedad a partir de los axiomas: **$P(A^c)=1-P(A)$**
2. Demostrar esta propiedad a partir de los axiomas: **$P(\varnothing)=0$**
3. Demostrar esta propiedad a partir de los axiomas: **$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$**

Teoría de la probabilidad
Probabilidad condicional

Sean A, B eventos de S

La probabilidad condicional del evento A dado el evento B se escribe $\mathrm{P}(A|B)$ y es:

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

Teoría de la probabilidad
Probabilidad condicional

Ejemplo

Las enfermedades A y B son comunes entre las personas de una región. Suponga conocido que 10% de la población contraerá la enfermedad A, 6% la enfermedad B, y 2% ambas enfermedades. Además, se conoce que el 4% contraen la enfermedad B pero no la enfermedad A. Encontrar la probabilidad que cualquier persona.

a) Contraiga la enfermedad A dado que ya contrajo B
b) Contraiga la enfermedad B dado que contrajo A
c) Contraiga la enfermedad B dado que no contrajo A
d) Que no contraiga la enfermedad A dado que contrajo la enfermedad B
e) Que contraiga por lo menos alguna de las dos enfermedades

Teoría de la probabilidad
Eventos independientes

Sean **A** y **B** eventos cualesquiera de un espacio muestral **S**. Se dice que **A** y **B** son independientes si $\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})$ y $\mathbf{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{B})$, es decir que el evento **A** no depende del evento **B** y el evento **B** no depende del evento **A.**

Teoría de la probabilidad
Eventos independientes

Definición

A y B son eventos independientes si

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

PROBABILIDAD TOTAL

Definición

Sean el espacio muestral Ω donde se han definido los eventos exhaustivos y mutuamente excluyentes (formando una ***partición***) $B_1, B_2, B_3, \ldots\ B_k$, de tal manera que:

$$\boldsymbol{B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_k = \Omega}$$
$$\boldsymbol{B_i \cap B_j = \varnothing \text{ para todo } i, j}$$

Y se define el evento A de tal manera que:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)$$

Entonces

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)]$$

Por tanto

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)\, P(A|B_i)$$

PROBABILIDAD TOTAL

Ejemplo

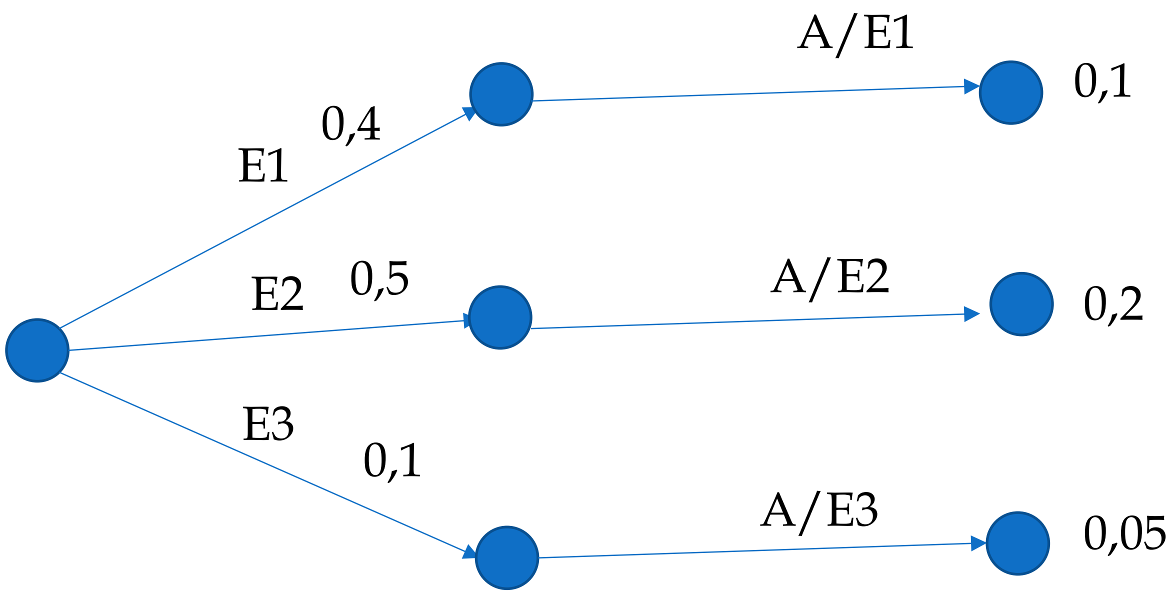
En una universidad el 40% de los estudiantes son hombres y el 60% de mujeres. De los hombres el 40% son hinchas del BSC; mientras que el 35% son de CSE y 25% de LDU. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante escogido aleatoriamente sea hincha de BSC? En cambio, de las mujeres el 32% son hinchas de BSC, 48% son hinchas de CSE y 20% de LDU.

PROBABILIDAD TOTAL

Ejemplo

Dados los eventos E1, E2, E3. Además, se sabe que P(A/E1), P(A/E2) y P(A/E3) son respectivamente 0.1, 0.2 y 0.05. Calcule P(A) si P(E1), P(E2) y P(E3) son 0.4, 0.5 y 0.1.

P(A) = P(A/E1) P(E1) + P(A/E2) P(E2) + P(A/E3) P(E3)= ……



P(A) = P(A/E1) P(E1) + P(A/E2) P(E2) + P(A/E3) P(E3)= 0.145

PROBABILIDAD TOTAL

Ejemplo

Una empresa que fabrica uniformes para Colegio posee tres máquinas: A, B y C, que producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3%, 4% y 5% respectivamente.

a. Seleccionamos un uniforme al azar; calcular la probabilidad de que salga defectuoso.

b. Tomamos, al azar, un uniforme y resulta ser defectuoso; calcula la probabilidad de haber sido producido por la máquina B

.c. ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido un uniforme defectuoso?

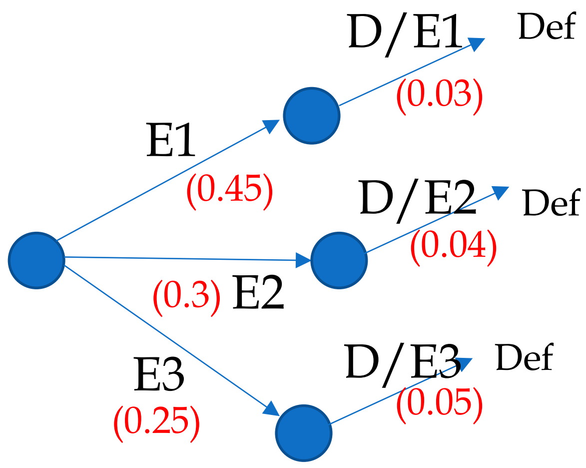
PARTICION: Ω = {PRODUCIDA POR LA MAQ A, PRODUCIDA POR LA MAQ B, PRODUCIDA POR LA MAQ C}
= {E1, E2, E3}

EVENTO: D = {la pieza es defectuosa}

P(E1) = 0.45, P(E2) = 0.30, P(E3) =0.25

P(D/E1) = 0.03, P(D/E2) = 0.04, P(D/E3) = 0.05

$$P(D) = P(D/E_1)\,P(E_1) + P(D/E_2)\,P(E_2) + P(D/E_3)\,P(E_3)$$
$$= 0.03(0.45)+0.04(0.3)+0.05(0.25)$$
$$= 0.038$$



PROBABILIDAD CONDICIONAL DE BAYES

Teorema de Bayes

Sean el espacio muestral S donde se han definido los eventos mutuamente excluyentes B1, B2, B3, . . . Bk, de tal manera que:

$$\mathbf{B1 \cup B2 \cup B3 \cup \ldots \cup Bk = \Omega}$$

Y se define el evento A de tal manera que:

$$A = (A \cap B1) \cup (A \cap B2) \cup (A \cap B3) \cup \ldots \cup (A \cap Bk)$$

Entonces

$$\boldsymbol{P(B_r|A) = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}}$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL DE BAYES

Teorema de Bayes

Demostración:

$$p(A_i|B) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B|A_i)p(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(B|A_j)p(A_j)}$$

La fórmula de Bayes se debe aplicar cuando se quiere calcular la probabilidad condicional de un elemento de la partición dado un evento cualquiera.

PROBABILIDAD CONDICIONAL DE BAYES

En un laboratorio en el que se manipulan muchas sustancias químicas la prevalencia de cierta enfermedad pulmonar es del 1% (es decir el 1% de los trabajadores desarrollan esa enfermedad). En la empresa se ha impuesto una prueba médica obligatoria para todos sus empleados. Si la persona tiene la enfermedad la prueba detecta que la tiene el 95% de las veces. Mientras que si la persona no tiene la enfermedad la prueba dice que no la tiene con una probabilidad del 90%.
Supongamos que un empleado se hace la prueba y esta sale positiva, cuál es la probabilidad de que realmente tenga la enfermedad. ¿Debe preocuparse mucho la persona?