Ciclos, Probabilidade e Entropia[1]

J. C. A Rocha

Abril 2016

1 Ciclos

1.1 Rankine

O ciclo ideal de Rankine foi primeiramente descrito em 1859 por William John Macquorn Rankine, muito depois do motor a vapor se tornar algo de uso comum. O ciclo é composto pelos seguintes passos:

- $1 \rightarrow 2$: compressão isentrópica,
- $2 \rightarrow 3$: aquecimento isobárico
- $3 \rightarrow 4$: expansão isentrópica, e
- $4 \rightarrow 1$: resfriamento isobárico.

Duas variantes de do diagrama $T - s$ são dadas a seguir. O primeiro é mais

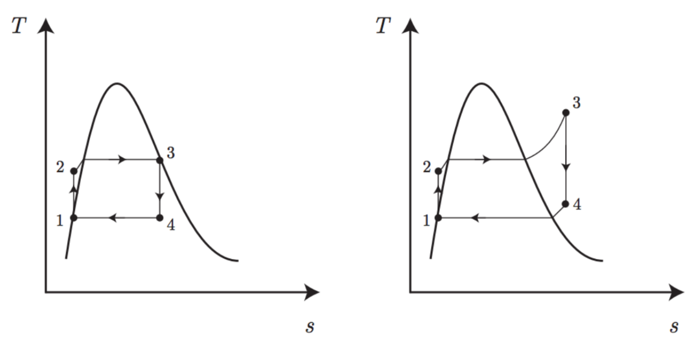

Figura 1: Diagrama ciclo de Rankine

eficiente por se aproximar do ciclo de Carnot, porém, é impraticável, já que induz a água líquida em uma turbina, que pode danificar suas pás. O segundo é mais comum.

A eficiência térmica é

$$\eta = \frac{\dot{W}_{tot}}{\dot{Q}_H} = \frac{\dot{W}_{turbina} + \dot{W}_{bomba}}{\dot{Q}_{boiler}} \tag{1}$$

Isto se reduz a

$$\eta = \frac{\dot{m}((h_3 - h_4) + (h_1 - h_2))}{\dot{m}(h_3 - h_2)} = 1 - \frac{q_{out}}{q_{in}} \tag{2}$$

Perceba que pelo ciclo de Rankine *não ser* o ciclo de Carnot, temos $q_{out}/q_{in} \neq T_1/T_2$

1.2 Brayton

O ciclo de Brayton consiste nos passos

- $1 \to 2$: compressão isentrópica (W adicionado),
- $2 \to 3$: adição isobárica de calor (Q adicionado),
- $3 \to 4$: expansão isentrópica (W retirado), e
- $4 \to 1$: rejeição isobárica de calor.

Perceba que o trabalho extraído é maior que o trabalho adicionado, isto é

$$|h_3 - h_4| > |h_2 - h_1|. \tag{3}$$

Este ciclo está representado no seguinte diagrama:

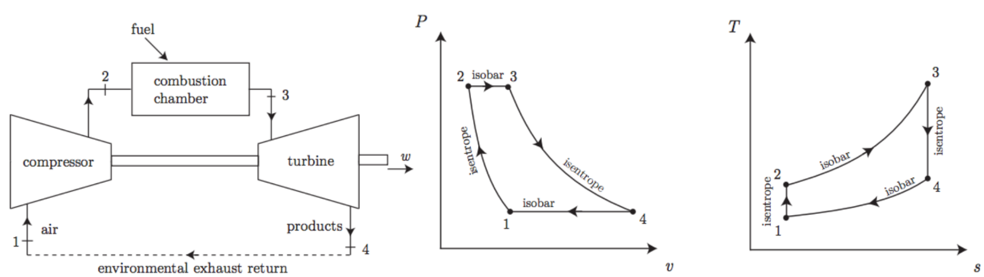

Figura 2: Esquema do ciclo de Brayton ao lado dos diagramas $P - v$ e $T - s$

1.3 Refrigeração

Uma maneira simples de se pensar num refrigerador é imaginar um ciclo como os que vimos, só que de modo reverso. Em vez de extrair trabalho da transferência de calor da fonte a alta temperatura e rejeitar calor a uma fonte fria, o refrigerador utiliza o trabalho para mover o calor de uma fonte fria para uma fonte quente.

Um refrigerador comum é baseado no ciclo de compressão-vapor. Este é um ciclo de Rankine em modo reverso. Enquanto é possível colocar alguma turbina para extrair algum trabalho, é frequentemente impraticável.

Podemos então determinar os seguintes passos deste ciclo:

- $1 \to 2$: compressão isentrópica,
- $2 \to 3$: transferência isobárica para um reservatório a uma alta temperatura,
- $3 \to 4$: expansão adiabátic, e
- $4 \to 1$: transferência isobárica de calor de um reservatório a uma baixa temperatura para um evaporador.

Um esquema e o diagrama associado $T - s$ estão representados a seguir:

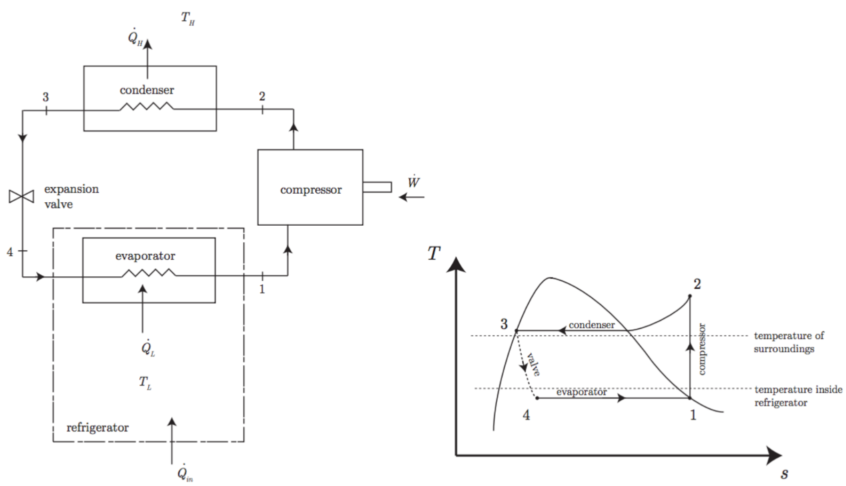

Figura 3: Diagrama ciclo de refrigeração

2 Análise probabilística da entropia

Um dos conceitos mais difíceis no que se refere a entropia é como ela se relaciona com a aleatoriedade de um sistema. Considere o diagrama seguinte:

Aqui, toma-se o tom de cinza como proporcional a temperatura local. Os blocos da esquerda são mantidos a uma variedade de temperaturas, quente, frio e intermediário. Os blocos da direita são mantidos à mesma temperatura intermediária. Quando perguntado “Qual dos dois casos tem uma entropia maior?” é

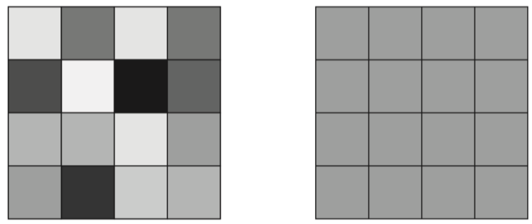

Figura 4: Dois cenários para o campo da temperatura.

tentador responder que se trata do primeiro, por "parecer mais aleatório", mas de fato, a resposta certa é a da direita. Na configuração da esquerda temos vários blocos a diferentes temperaturas, esta propriedade é considerada, num sentido termodinâmico, como uma estrutura.

Pode ser possível termos um melhor entendimento da relação entre entropia e aleatoriedade fazendo as seguintes considerações: Definamos um conjunto de N estados possíveis, cada um com probabilidade p_n. Pela natureza da probabilidade, devemos ter

$$\sum_{n=1}^{N} p_n = 1. \tag{4}$$

Devido a natureza da probabilidade, temos que p_n está entre 0 e 1. Definamos a entropia do sistema como

$$S = -k_B \sum_{n=1}^{N} p_n \ln\, p_n. \tag{5}$$

onde tomamos k_B como a constante de Boltzmann. Segue da equação anterior que

$$-\frac{S}{k_B} = \sum_{n=1}^{N} p_n \ln\, p_n \tag{6}$$

$$-\frac{S}{k_B} = \sum_{n=1}^{N} \ln\, p_n^{p_n} \tag{7}$$

$$-\frac{S}{k_B} = \ln\, \prod_{n=1}^{N} p_n^{p_n} \tag{8}$$

$$\exp\left(-\frac{S}{k_B}\right) = \prod_{n=1}^{N} p_n^{p_n} \tag{9}$$

Referências

[1] Joseph M. Powers. *LECTURE NOTES ON THERMODYNAMICS*. Department of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame, 2014.