1 Prova da regra de L'Hôspital para o caso nulo ($\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$)

Vamos supor que ambas, $f(x)$ e $g(x)$ podem ser escritas como séries de potência, e $g'(c) \neq 0$. Expandindo-as em torno do ponto $x = c$:

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2} f''(c) + \ldots, \tag{1}$$

$$g(x) = g(c) + (x-c)g'(c) + \frac{(x-c)^2}{2} g''(c) + \ldots. \tag{2}$$

Porém, como $f(c) = g(c) = 0$, pois, caso contrário, saberíamos exatamente quanto vale o limite, temos que

$$f(x) = (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2} f''(c) + \ldots, \tag{3}$$

$$g(x) = (x-c)g'(c) + \frac{(x-c)^2}{2} g''(c) + \ldots. \tag{4}$$

Assim,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{(x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2} f''(c) + \ldots}{(x-c)g'(c) + \frac{(x-c)^2}{2} g''(c) + \ldots}. \tag{5}$$

Colocando $(x-c)$ em evidência:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{(x-c)(f'(c) + \frac{(x-c)}{2} f''(c) + \ldots)}{(x-c)(g'(c) + \frac{(x-c)}{2} g''(c) + \ldots)}. \tag{6}$$

Levando-nos a

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(c) + \frac{(x-c)}{2} f''(c) + \ldots}{g'(c) + \frac{(x-c)}{2} g''(c) + \ldots}. \tag{7}$$

Como $f^{(n)}(c)$ são constantes, e $(x-c)$ é exatamente 0 em c,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{8}$$

2 Prova da regra de L'Hôspital para o caso divergente ($\lim_{x\to c} |f(x)| = \lim_{x\to c} |g(x)| = \infty$)

Para cada x no intervalo, vamos considerar

$$m(x) = \inf \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{9}$$

e

$$M(x) = \sup \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{10}$$

onde ξ "varre" todos os valores entre x e c. Ao encontrar um valor mínimo no intervalo $]x, c[$, temos m para aquele x considerado. O mesmo vale para quando encontrarmos o maior valor no intervalo, tendo então M. Note que a variável x está explícita nas funções porque, de acordo com a nossa escolha de intervalo aberto $]x, c[$, o valor de m e M pode mudar.

O Teorema do Valor Médio de Cauchy nos diz que, para quaisquer dois valores x e y no intervalo considerado, existe um ξ entre x e y (dentro do intervalo), tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \tag{11}$$

$$g'(\xi) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y}. \tag{12}$$

Consequentemente, teremos

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{13}$$

Ora, $f'(\xi)/g'(\xi)$, para um ξ qualquer, será sempre maior ou igual que o valor mínimo da razão f'/g' no intervalo $]x, c[$, ou seja, $f'(\xi)/g'(\xi) \geq m(x)$, e também sempre menor ou igual que seu valor máximo no mesmo intervalo, ou seja, $f'(\xi)/g'(\xi) \leq M(x)$.

Temos então as desigualdades

$$m(x) \leq \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \leq M(x). \tag{14}$$

Colocando $g(y)$ em evidência:

$$m(x) \leq \frac{\frac{f(x)}{g(y)} - \frac{f(y)}{g(y)}}{\frac{g(x)}{g(y)} - 1} \leq M(x). \tag{15}$$

No limite em que y se aproxima de c, tanto $f(y)$ quanto $g(y)$ tendem a divergir, por hipótese. Logo,

$$\lim_{y \to c} \frac{f(x)}{f(y)} = \lim_{y \to c} \frac{g(x)}{g(y)} = 0. \tag{16}$$

Teremos então

$$\lim_{y \to c} m(x) \leq \lim_{y \to c} \frac{\frac{f(x)}{g(y)} - \frac{f(y)}{g(y)}}{\frac{g(x)}{g(y)} - 1} \leq \lim_{y \to c} M(x), \tag{17}$$

$$m(x) \leq \lim_{y \to c} \frac{0 - \frac{f(y)}{g(y)}}{0 - 1} \leq M(x), \tag{18}$$

$$m(x) \leq \lim_{y \to c} \frac{f(y)}{g(y)} \leq M(x). \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

Mas, como não sabemos se o limite

$$\lim_{y \to c} \frac{f(y)}{g(y)} \tag{21}$$

existe, é mais adequado reescrever a expressão de outra maneira:

$$m(x) \leq \lim_{\substack{y \in]x,c[\\ y \to c}} \inf \frac{f(y)}{g(y)} \leq \lim_{\substack{y \in]x,c[\\ y \to c}} \sup \frac{f(y)}{g(y)} \leq M(x) \tag{22}$$

No limite em que $x \to c$, teremos

$$\lim_{x \to c} \left(\lim_{\substack{y \in]x,c[\\ y \to c}} \inf \frac{f(y)}{g(y)} \right) = \lim_{x \to c} \inf \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{23}$$

$$\lim_{x \to c} \left(\lim_{\substack{y \in]x,c[\\ y \to c}} \sup \frac{f(y)}{g(y)} \right) = \lim_{x \to c} \sup \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

Logo, o limite existe.

Teremos também, no mesmo limite, que

$$\lim_{x \to c} m(x) = \lim_{x \to c} \inf \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = L, \tag{26}$$

$$\lim_{x \to c} M(x) = \lim_{x \to c} \sup \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = L, \tag{27}$$

pois, quando se "espreme" o intervalo, aproximando x de c em $]x, c[$, o valor máximo e o valor mínimo irão tender para o mesmo valor. Logo,

$$\lim_{x \to c} m(x) \leq \lim_{x \to c} \lim_{y \to c} \frac{f(y)}{g(y)} \leq \lim_{x \to c} M(x), \tag{28}$$

$$L \leq \lim_{x \to c} \lim_{y \to c} \frac{f(y)}{g(y)} \leq L. \tag{29}$$

Então, pelo Teorema do Sanduíche,

$$\liminf_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \limsup_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{30}$$

Como

$$\lim_{x\to c} m(x) = \lim_{x\to c} M(x) = L, \tag{31}$$

teremos que, consequentemente,

$$\liminf_{x\to c} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \limsup_{x\to c} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \tag{32}$$

Assim,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{33}$$