1 Prova das propriedades do delta de Dirac

1.1 Avaliar o $\delta(\alpha(x-x_0))$

Vamos considerar a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\alpha(x-x_0))dx. \tag{1}$$

Substituindo $u = \alpha(x-x_0)$, teremos que $du = \alpha dx$. No caso em que $\alpha > 0$, teremos que a integral irá naturalmente de um valor negativo para um positivo, mas caso α seja menor que zero, a integral irá de um valor positivo para um negativo, invertendo o sentido, onde teremos que alterar o sinal da integral para o resultado ser correto. Logo, separaremos em dois casos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{\alpha}+x_0\right)\delta(u)\frac{du}{\alpha},\ \alpha > 0, \tag{2}$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{\alpha}+x_0\right)\delta(u)\frac{du}{\alpha},\ \alpha < 0. \tag{3}$$

Estas expressões podem ser unidas em uma caso consideremos o módulo de α e reconheçamos que $\alpha = |\alpha|$ no primeiro caso e $\alpha = -|\alpha|$ no segundo. Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{\alpha}+x_0\right)\delta(u)\frac{du}{|\alpha|}. \tag{4}$$

Pela definição de $\delta(u)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{\alpha}+x_0\right)\delta(u)\frac{du}{|\alpha|} = \frac{f(x_0)}{|\alpha|}. \tag{5}$$

Finalmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\alpha(x-x_0))dx = \frac{f(x_0)}{|\alpha|}. \tag{6}$$

1.2 Avaliar o $\delta'(x)$

Vamos considerar a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d\delta(x)}{dx}dx. \tag{7}$$

Integrando por partes, teremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d\delta(x)}{dx}dx = f(x)\delta(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{df(x)}{dx}\delta(x)dx. \tag{8}$$

Mas $f(x)\delta(x) = 0,\ \forall x \neq 0$, pela própria definição do delta. Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d\delta(x)}{dx}dx = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df(x)}{dx}\delta(x)dx. \tag{9}$$

Concluímos então que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d\delta(x)}{dx}dx = -\frac{df(0)}{dx}. \tag{10}$$

1.3 Avaliar o $\delta((x-x_1)(x-x_2))$

Vamos considerar a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta((x-x_1)(x-x_2))dx. \tag{11}$$

Pelas propriedades da função delta, a integral $\int f(x)\delta(x)dx$ é nula se integrada em um intervalo que não contém o 0, e igual a $f(0)$ caso contrário. Isto pode ser generalizado "trocando" x por uma função real contínua em suas raízes. Assim, a integral (ex $\int f(x)\delta(g(x))dx$) será nula caso integrada em um intervalo que não contém nenhuma raiz do argumento (ex $g(x)$) da delta (ex $\delta(g(x))$), pois $\delta(\xi) = 0,\ \forall\ \xi \in \mathbb{R},\ \xi \neq 0$.

Desta forma, teremos que a integral (11) poderá ser decomposta em

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta((x-x_1)(x-x_2))dx = \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta((x-x_1)(x-x_2))dx + \\ + \int_{x_2-\epsilon_2}^{x_2+\epsilon_2} f(x)\delta((x-x_1)(x-x_2))dx, \tag{12}$$

onde ϵ_1 é escolhido de maneira a garantir tanto a continuidade de f em x_1 quanto a existência de apenas esta raiz no intervalo de integração. A mesma coisa pode ser dita para ϵ_2, f, x_2.

Vamos agora considerar χ como sendo o conjunto $(x_1-\epsilon_1, x_1+\epsilon_1)$, e $y \in \chi$. Relembrando a propriedade (6), fica evidente que

$$\int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta((x-x_1)(x-x_2))dx \leq \limsup_{y\in\chi} \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta((x-x_1)y)dx \tag{13}$$

$$= \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta((x-x_1)(x_1-\epsilon_1-x_2))dx \tag{14}$$

$$= \frac{1}{|x_1-\epsilon_1-x_2|} \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta(x-x_1)dx. \tag{15}$$

De maneira análoga para o *infimum*,

$$\int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta((x-x_1)(x-x_2))dx \geq \liminf_{y\in\chi} \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta((x-x_1)y)dx \tag{16}$$

$$= \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta((x-x_1)(x_1+\epsilon_1-x_2))dx \tag{17}$$

$$= \frac{1}{|x_1+\epsilon_1-x_2|} \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta(x-x_1)dx. \tag{18}$$

Logo, chegamos à conclusão de que

$$\liminf_{y\in\chi} \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta((x-x_1)y)dx \leq \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta((x-x_1)(x-x_2)) \leq \limsup_{y\in\chi} \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta((x-x_1)y)dx, \tag{19}$$

$$\frac{1}{|x_1+\epsilon_1-x_2|} \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta(x-x_1)dx \leq \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta((x-x_1)(x-x_2)) \leq \frac{1}{|x_1-\epsilon_1-x_2|} \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta(x-x_1)dx. \tag{20}$$

Consequentemente, existe um ϵ_1 tal que

$$\frac{1}{|x_1-x_2|} \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta(x-x_1)dx \leq \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta((x-x_1)(x-x_2)) \leq \frac{1}{|x_1-x_2|} \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta(x-x_1)dx. \tag{21}$$

Pelo teorema do confronto,

$$\int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta((x-x_1)(x-x_2)) = \frac{1}{|x_1-x_2|} \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta(x-x_1)dx. \tag{22}$$

Procedendo de maneira análoga para x_2, teremos que

$$\int_{x_2-\epsilon_2}^{x_2+\epsilon_2} f(x)\delta((x-x_1)(x-x_2)) = \frac{1}{|x_2-x_1|} \int_{x_2-\epsilon_2}^{x_2+\epsilon_2} f(x)\delta(x-x_2)dx. \tag{23}$$

Retormando (12), concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta((x-x_1)(x-x_2))dx = \frac{1}{|x_1-x_2|} \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta(x-x_1)dx + \frac{1}{|x_2-x_1|} \int_{x_2-\epsilon_2}^{x_2+\epsilon_2} f(x)\delta(x-x_2)dx \tag{24}$$

$$= \frac{1}{|x_1-x_2|} \int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta(x-x_1)dx - \frac{1}{|x_1-x_2|} \int_{x_2-\epsilon_2}^{x_2+\epsilon_2} f(x)\delta(x-x_2)dx \tag{25}$$

$$= \frac{1}{|x_1-x_2|} \left(\int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta(x-x_1)dx - \int_{x_2-\epsilon_2}^{x_2+\epsilon_2} f(x)\delta(x-x_2)dx \right). \tag{26}$$

Resgatando os limites originais de integração, devido às propriedades do delta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta((x-x_1)(x-x_2))dx = \frac{1}{|x_1-x_2|}\left(\int_{x_1-\epsilon_1}^{x_1+\epsilon_1} f(x)\delta(x-x_1)dx - \int_{x_2-\epsilon_2}^{x_2+\epsilon_2} f(x)\delta(x-x_2)dx\right) \tag{27}$$

$$= \frac{1}{|x_1-x_2|}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_1)dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_2)dx\right) \tag{28}$$

$$= \frac{1}{|x_1-x_2|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\delta(x-x_1)-\delta(x-x_2)\right)dx. \tag{29}$$

$$\tag{30}$$

Finalmente,

$$\delta((x-x_1)(x-x_2)) = \frac{\delta(x-x_1)-\delta(x-x_2)}{|x_1-x_2|}. \tag{31}$$

1.4 Avaliar o $\delta(f)$

Como $f(x_0)=0$, vamos expandir $f(x)$ em torno deste ponto:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \ldots. \tag{32}$$

Porém, $f(x_0)=0$. Logo,

$$f(x) = (x-x_0)f'(x_0) + \ldots. \tag{33}$$

Então, o $\delta(f(x))$ será

$$\delta(f(x)) = \delta((x-x_0)f'(x_0) + \ldots). \tag{34}$$

Integrando em todo o espaço, teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(f(x))dx = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} g(x)\delta(f(x))dx, \tag{35}$$

pois $f(x)$ só é nula em $x=x_0$. Todos os outros valores são irrelevantes para a delta.

Substituindo a expansão (34):

$$\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} g(x)\delta(f(x))dx = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} g(x)\delta((x-x_0)f'(x_0) + \ldots)dx. \tag{36}$$

Tomando um limite de ϵ tão pequeno quanto desejado, os termos de ordem $n=2$ ou superiores em x^n podem ser desprezados. Logo,

$$\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} g(x)\delta((x-x_0)f'(x_0) + \ldots)dx = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} g(x)\delta((x-x_0)f'(x_0))dx. \tag{37}$$

Utilizando as propriedades dos quesitos anteriores para a função Delta:
($\int \delta(kx)g(x)dx = |k|^{-1}g(0) = |k|^{-1}\int \delta(x)g(x)dx$ e $\int \delta(x-x_0)g(x)dx = g(x_0)$)

$$\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} g(x)\delta((x-x_0)f'(x_0))dx = \frac{1}{|f'(x_0)|}\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} g(x)\delta((x-x_0))dx. \tag{38}$$

Temos então que

$$\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} g(x)\delta(f(x))dx = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} g(x)\delta((x-x_0)f'(x_0))dx, \tag{39}$$

$$= \frac{1}{|f'(x_0)|}\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} g(x)\delta(x-x_0)dx, \tag{40}$$

$$= \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \frac{1}{|f'(x_0)|} g(x)\delta(x-x_0)dx. \tag{41}$$

Como a igualdade

$$\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} g(x)\delta(f(x))dx = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \frac{1}{|f'(x_0)|} g(x)\delta(x-x_0)dx \tag{42}$$

vale para qualquer $g(x)$ contínua em $x = x_0$, os integrantes devem ser iguais:

$$g(x)\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} g(x)\delta(x - x_0). \tag{43}$$

Consequentemente,

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0), \tag{44}$$

independente do valor de $g(x)$.